T.C.

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DUAL UZAYIN TEMEL YAPILARI VE DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ

OLGUN DURMAZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. HALİT GÜNDOĞAN

KIRIKKALE-2022

OLGUN DURMAZ tarafından hazırlanan "DUAL UZAYIN TEMEL YAPILARI VE DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ" adlı tez çalışması, aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN

Matematik Anabilim Dalı,
Kırıkkale Üniversitesi

İmza……………..

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

Başkan: Prof. Dr. Kazım İLARSLAN

Matematik Anabilim Dalı,
Kırıkkale Üniversitesi

İmza……………..

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Prof. Dr. Hasan Hüseyin UĞURLU

Matematik Eğitimi Anabilim
Dalı, Gazi Üniversitesi

İmza……………..

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Prof. Dr. Nejmi CENGİZ

Matematik Anabilim Dalı,
Atatürk Üniversitesi

İmza……………..

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Doç. Dr. Osman KEÇİLİOĞLU

Matematik Anabilim Dalı,
Kırıkkale Üniversitesi

İmza……………..

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

Tez Savunma Tarihi: 06.01.2022

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. Recep ÇALIN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYANI

Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Olgun DURMAZ

06.01.2022

ÖZET

DUAL UZAYIN TEMEL YAPILARI VE DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ

DURMAZ, Olgun
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Doktora Tezi
Danışman: Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN
Ocak 2022, 137 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. Bu bölümde, çalışmanın konusu ile ilgili literatürde yer alan bilgilere yer verilmiştir. Ayrıca, bu kısımda çalışmanın amacı ve önemi belirtilmiştir.

İkinci bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümün ilk kısmında, $\mathbb{R}^2$ üzerinde tanımlı olan sözlük sıralama bağıntısının yardımıyla tanımlanan dual sıralama bağıntısının özellikleri detaylı bir şekilde incelenmiştir. Bu bölümün ikinci kısmında, dual analitik fonksiyonların tanımına yer verilmiş ve bu tanım ışığında dual analitik fonksiyonların özellikleri bir akış içerisinde birkaç örnekle de desteklenerek ele alınmıştır.

Dördüncü bölümün ilk kısmında, diferensiyel geometride önemli bir yere sahip olan yöne göre türev, vektör alanı, türev dönüşümü ve lie çarpımı tanımları dual uzayda ele alınmıştır. Daha sonra, dual parametreye sahip **D**-modül eğrisinin tanımına yer verilmiş ve bu eğrinin özellikleri verilen teoremlerle ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Bu bölümün son kısmında, dual kovaryant türevin tanımı yapılmış ve özellikleri araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Dual Uzay, Dual Analitik Fonksiyon, **D**−modül Eğrisi, Dual Yöne Göre Türev, Dual Kovaryant Türev

ABSTRACT

BASIC STRUCTURES AND DIFFERENTIAL GEOMETRY OF DUAL SPACE

DURMAZ, Olgun
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematic, PhD. Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN
January 2022, 137 pages

This thesis consists of four chapters.

The first chapter is devoted to the introduction. In this section, the information in the literature regarding the subject of the study is given. In addition, the purpose and importance of the study are specified in this chapter.

In the second chapter, basic definitions and theorems that will be used in the following chapters are given.

In the first part of the third chapter, the properties of the dual order relation defined with the help of the dictionary order relation defined on $\mathbb{R}^2$ are examined in detail. In the second part of this chapter, the definition of the dual analytic functions is included and in the light of this definition, the properties of dual analytic functions are investigated in a flow supported with a few examples.

In the first part of fourth chapter, the definitions of directional derivative, vector field, tangent map and lie product which have an important place in differential geometry are studied in dual space. Then, the definition of **D**-module curves with dual parameter is examined and the properties of these curves are studied with the given theorems in detail. At the end of this chapter, the definition of dual covariant derivative is presented and the properties of this definition are investigated.

Key Words: Dual Space, Dual Analytic Function, $\mathbf{D}-$module curve, Dual Directional Derivative, Dual Covariant Derivative.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca ilminden faydalandığım, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim, bilgi, birikim ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, yanında çalışmaktan onur duyduğum ve ayrıca tez çalışmam sırasında tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu sabır ve hoşgörüden dolayı değerli hocam Sayın Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN'a, tez çalışmalarımda değerli bilgilerini benimle paylaşan, kıymetli zamanlarını bana ayırıp her daim yardımcı olan saygıdeğer tez izleme kurulu üyesi hocalarım Sayın Prof. Dr. Hasan Hüseyin UĞURLU (Gazi Üniversitesi Matematik Eğitimi Anabilim Dalı) ve Sayın Doç. Dr. Osman KEÇİLİOĞLU (Kırıkkale Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'na, bilgi, birikim ve deneyimiyle desteğini her zaman hissettiren değerli hocam Sayın Prof. Dr. Nejmi CENGİZ (Atatürk Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'e, lisans hayatımdan bugüne, bana her zaman destek olan ve kendime örnek aldığım değerli hocam Sayın Doç. Dr. Tuncer ACAR (Selçuk Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a, tez çalışmalarım boyunca desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli arkadaşım Arş. Gör. Dr. Buşra AKTAŞ'a, büyük fedekarlıklarla bana her daim destek olan sevgili eşim Sevgi ACARSOY DURMAZ'a ve bugünlere gelmemde en büyük emeğe sahip olan, maddi ve manevi olarak hayatım boyunca beni motive eden sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, çalışmalarım sırasında bana her zaman destek olan Atatürk Ünivesitesi Matematik bölümünün kıymetli hocalarına ve Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'na doktora öğrenimim boyunca 2211-A Genel Yurt içi Doktora Burs Programı kapsamındaki desteklerinden dolayı sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

x_i	i-inci koordinat fonksiyonu
$\overline{x}_i$	i-inci dual koordinat fonksiyonu
$\mathbf{D}$	Dual sayılar cümlesi
$\mathbf{D}^n$	n-boyutlu dual uzay
$\langle , \rangle$	Öklid uzayında iç çarpım
$\langle , \rangle_{\mathbf{D}}$	Dual uzayda iç çarpım
$\lVert \cdot \rVert$	Öklid uzayında norm
$\lVert \cdot \rVert_{\mathbf{D}}$	Dual uzayda norm
$T_{\overline{p}}\mathbf{D}^n$	$\mathbf{D}^n$ uzayının $\overline{p}$ dual noktasındaki dual tanjant uzayı
σ, β	Eğri
$\overline{\sigma}, \overline{\beta}$	**D**-modül eğrisi
$C\left(\overline{U} \subseteq \mathbf{D}^n, \mathbf{D}^m\right)$	Dual analitik fonksiyonların cümlesi
$\chi\left(\mathbf{D}^n\right)$	Dual analitik vektör alanlarının cümlesi
D	Kovaryant türev
$\overline{D}$	Dual Kovaryant türev
$\overrightarrow{\overline{x}}_{\overline{p}}$	$\overline{p}$ dual noktasındaki dual tanjant vektörü
$\overline{X}$	Dual vektör alanı
$<_{\mathbf{D}}$	Dual sıralama bağıntısı
$[,]$	Lie çarpımı
$[,]_{\mathbf{D}}$	Dual Lie çarpımı

1 . GİRİŞ

Nokta, doğru ve düzlem Öklidyen geometrinin temel elemanları olduğundan dolayı antik Yunan döneminden modern çağa kadar egemen teori olan fonksiyon ve türev kavramları o zamandan beri matematiğin gelişiminde merkezi hale gelen matematiksel analizin temelini oluşturur. Fonksiyon kavramı, matematiğin bütün alanlarında kullanılan en önemli kavramlardan biri olarak kabul edilir. Fonksiyon kavramının ortaya çıkmasına tarihi süreç içerisindeki gelişimine bakıldığında değişkenler arasındaki ilişkilerin incelenmesiyle ilgili çalışmaların öncülük ettiği görülmektedir. Antik çağlarda fonksiyonların belirli örnekleri bulunabilir. Örneğin: kare, kare kök, kübik ve kübik köklerin Babil tabloları... Tarihsel olarak, bazı matematikçilerin fonksiyon kavramının modern formülasyonunu öngördüğü ve buna yaklaştığı kabul edilebilir. Bunların arasında farklı yoğunluk ve genleşme derecelerini ortaya koyan enlem formlarının geometrik teorisini geliştiren Oresme (1323-1382) vardır. Onların teorisinde bağımsız ve bağımlı değişken miktarları hakkında bazı genel düşünceler sunulduğu görülür. 16. yüzyılda G. Galileo (1564-1642)'nun başında bulunduğu ve devinim ve hareketin incelenmesiyle ilgili çalışmalar esnasında fonksiyon düşüncesinin ilk olarak farkına varılmıştır. Fakat, açık bir şekilde bireyselleştirilmiş bir kavram ve kendi başına bir araştırma nesnesi olarak matematik araştırmalarında fonksiyonların ortaya çıkışı oldukça yenidir ve 17. yüzyılın sonlarına kadar uzanır. Bireyselleştirilmiş matematiksel bir varlık olarak fonksiyon kavramının ortaya çıkışı sonsuz küçükler hesabının başlangıcına kadar uzanabilir. R. Descartes (1596-1650) geometrik olarak bir eğri ile temsil edilen iki değişkenli bir denklemin değişken nicelikler arasındaki bir bağımlılığı gösterdiğini açıkça ifade etmiştir. Daha sonraki yıllarda J. Bernoulli, G. W. Leibniz, L. Euler ve J. B. J. Fourier gibi pek çok bilim insanının yaptığı çalışmalar fonksiyon kavramının gelişmesine önemli ölçüde katkıda bulunmuştur. I. Newton (1642-1727) fonksiyonların sonsuz kuvvet serilerinde nasıl geliştirilebileceğini gösteren ve böylece sonsuz işlemlerin yapılmasına olanak sağlayan ilk matematikçilerden birisidir. G. W. Leibniz (1646-1716), 1673 yılında matematiksel bir kavram olarak fonksiyon ifadesini ilk kez kullanmıştır. Çok genel terimlerle, bir eğrinin şekli üzerindeki alt tanjantlar ve alt normaller gibi geometrik niceliklerin bağımlılığını dizayn etmek için fonksiyon kavramını ele almıştır . Yine Leibniz; sabit terim, parametre ve değişken terimlerini de literatüre kazandırmıştır. Eğrilerin cebirsel metodlarla incelenmesinin gelişmesiyle birlikte bir değişkene bağlı nicelikleri analitik bir ifadeyle temsil edecek bir terim giderek daha da gerekli hale gelmiştir. Fonksiyon kavramı 1694 ve 1698 yılları arasında Leibniz ve Bernoulli (1667-1748) arasındaki yazışmalarda bu amaç için benimsenmiştir. 1718 yılında, Bernoulli bir nicelik olarak bir değişkenli fonksiyonun tanımını içeren çok geniş bir alana yayılan bir makale yayımlamıştır. Bernoulli'nin eski bir öğrencisi olan L. Euler (1707-1793) nicelik yerine analitik ifadeden bahseden bu tanıma bir dokunuş yapmıştır. Bu dönemde fonksiyon kavramı hem gelişmiş hem de matematiksel anlamı itibariyle nitelik kazanmaya başlamıştır. Böylece fonksiyon kavramı pratikte analitik kavram ile tanımlanmıştır. Bu formülasyonun kısa zamanda birkaç tutarsızlığa yol açtığı fark edilmiştir. Aslında, aynı fonksiyon birkaç farklı analitik ifade ile temsil edilebilir. Günümüz terminolojisinde Euler'in tanımı sadece sürekli fonksiyonların küçük sınıflarının kısıtlanmış alt cümlesi olan analitik fonksiyonları içerir. Bu eksiklerin farkında olan Euler o zamanda çok ilgi çekmeyen alternatif bir tanım geliştirmiştir. 19. yüzyılda ise fonksiyon kavramına doğasını ve anlamını derinden değiştiren gelişmeler ve açıklamalar yapılmıştır. 1837 yılında, günümüz matematik kitaplarında değişkenler arasındaki ilişki mantığı üzerine inşa edilmiş olan fonksiyon tanımı P. G. L. Drichlet (1805-1859) tarafından ortaya konulmuştur. G. Cantor (1805-1918)'un kümeler teorisini ortaya atmasının ardından fonksiyon teriminin gelişme süreci yeni bir boyut kazanmıştır. Bu teori ile birlikte fonksiyon, iki cümlenin elemanları arasında yapılan eşlemeler olarak anılmaya başlanmıştır. Fonksiyonlar üzerinde değişkenler arasındaki bağlantıların incelenmesinin ancak fonksiyonların tanımlı olduğu cümleler için mümkün olduğu düşüncesi kabul görmüştür. Fonksiyon terimi iki cümlenin elemanları arasında eşlemeler yapan özel bir bağıntı olarak Bourbaki tarafından 1939 yılında tanımlanmıştır. Bu tanım bugünkü modern matematik kitaplarında bulunan fonksiyon düşüncesini içermektedir ([1] ve [2]).

Türev teriminin tarihsel gelişimi için "Türev ilk önce kullanıldı, sonra keşfedildi, daha sonra incelenip geliştirildi ve en sonunda tanımlandı." ifadesi kullanılmıştır. Bu ifadenin kullanılmasının nedeni türevin 1630'larda P. de Fermat (1607-1665) ile başlayıp I. Newton, J. L. Lagrange, G. W. Leibniz, A. L. Cauchy ile devam eden ve 1870'lerde K. Weierstrass (1815-1897) ile olgunluğa ulaşan gelişim sürecidir. Polinom fonksiyonlarının maximum değerini bulmasından dolayı türev kavramına yönelik fikirlerin ilk ortaya atılması Şerafeddin el Tusi (1135-1213)'ye atfedilmektedir. Daha sonra, 17. yüzyılın başlarında Fermat, polinom fonksiyonlarının grafiğinin maximumunu, minimumunu ve teğetlerin eğimini bulma yöntemlerini kullanarak türev kavramına hazırlık yapmıştır. Türev kavramının nasıl meydana geldiği incelendiğinde, 1500 ve 1600'lü yıllarda fizik, matematik ve astronomi alanlarında çalışan bilim insanlarının (Galileo, Descartes vb.) evren ile ilgili bilgiler sunmak için yaptıkları çalışmaların önemli rolü olduğu görülmektedir. Bu süreçte, evrenin anlaşılması geometri ve cebirle ilgili çalışmalar yardımıyla daha kolay duruma gelmiştir. Dönemin fizikle ilgilenen bilim insanları, hızı her an değişim gösteren hareketli cisimlerin belirli bir andaki hızının ne olduğu ve belirli bir zaman diliminde ne kadar yol aldığı sorularına yanıt bulmaya çalışmışlardır. Matematik branşı ile ilgilenen bilim insanları, geometrik şekillerin analizinin nasıl daha sistematik yapılabileceği sorularına yanıt bulmaya çalışmışlardır. Matematiğin bir alt dalı olan Analiz'i (Calculus) geliştiren ilk bilim insanları Newton ve Leibniz bu sorulara yanıt bulunmasına yardımcı olacak sistematik yaklaşımların temelini atmışlardır. Eğri üzerinde bir değişkene bağlı değişim durumları Newton ve Leibniz'in türev yaklaşımlarında incelenir. Her iki yaklaşımda da türev, eğrinin eğiminin bir değişkene bağlı hesaplanması, bir oran olarak algılanmaktadır. Leibniz ve Newton'un ortaya attığı türevle ilgili bu yaklaşımlar, eğrinin teğeti ve cisimlerin hızı ile ilgili sorulara yanıt bulmak için yeterli olmuştur. Esasen, 19. yüzyılda A. L. Cauchy (1789-1855)'nin limit teriminden faydalanarak oluşturduğu türev tanımıyla bu kavram tutarlı ve sağlam bir temele ulaşmıştır. Cauchy'nin tanımı dikkate alındığında ξ bir fonksiyon olmak üzere, $\lim\limits_{k \longrightarrow 0} \dfrac{\xi(x+k)-\xi(x)}{k}$ limiti mevcut olması şartıyla ξ fonksiyonunun türevi bu limite eşittir ve ξ' ile sembolize edilir. Cauchy bu limitin x değişkenine bağlı olduğunu ve her x değeri için kesin bir değeri olduğunu belirtmiştir. Türev, değişen niceliklerin hangi hızda ve nasıl değiştiğini ve belirli bir andaki değişim hızının belirlenmesinde kullanılan bir kavramdır. Matematiksel anlamda fonksiyonların davranışlarının analizi de türev kavramı aracılığıyla yapılabilir [3].

Dual sayılar, 19. yüzyılda W. K. Clifford (1845-1879) [4] tarafından tanımlanmıştır. Clifford, bu sayıları geometrik araştırmaları için bir araç olarak kullanmıştır. 1895'te A. P. Kotelnikov (1865-1944) [5] bu kavramı mekaniğe uygulamıştır. Bu sayılar; düzlemsel joint (eklem) modellemesi, vida sistemleri, uzaysal mekanizmaların yer değiştirme analizi için tekrarlı yöntemler ve uzaysal mekanizmaların kuvvet analizi gibi bir çok uygulama alanına sahiptir. E. Study (1862-1930), doğruların geometrisi ve kinematikle ilgili yaptığı çalışmalarda dual sayıları ve dual vektörleri etkin bir şekilde kullanmıştır. Doğrular geometrisi, $\mathbb{R}^3$ 3-boyutlu Öklid uzayında doğruları ve bu doğruların hareketlerini inceler. Bu doğrular bir doğrular uzayı oluşturur. Dual, projektif ve vektörel gösterimler bu uzaydaki elemanları incelemek için kullanılır. J. Plücker (1801-1868), doğruyu sıralı altılı bir koordinat olarak göstermiştir. Bu kordinatın ilk üç bileşeni doğrunun doğrultman vektörünün koordinatlarını, son üç bileşeni ise bu doğrultman vektörüne ait moment vektörünün $\mathbb{R}^3$ 3-boyutlu Öklid uzayındaki koordinatlarını göstermektedir. Doğrunun bu ifadesi dual sayılardan faydalanılarak dual vektör uzayına J. Plücker'in öğrencisi olan E. Study tarafından taşınmıştır. $\mathbf{D}^3$ uzayında birim dual küre üzerindeki her bir nokta ile $\mathbb{R}^3$ uzayındaki yönlendirilmiş doğrular arasında birebir bir eşleme olduğu Study tarafından gösterilmiştir [6]. Bu eşleme, Study dönüşümü olarak adlandırılmaktadır. Bir çemberin Study dönüşümü 1977 yılında H. H. Hacısalihoğlu tarafından tanımlanmıştır [7]. C^H programlama dili dual sayılar kullanılarak 1993 yılında H. H. Cheng tarafından tanıtılmıştır ([8] ve [9]). Bu sayılar, Alan teorisinde de önemli bir role sahiptir. Alan teorisinde dual sayıların en ilginç kullanımına R. M. Wald'un birkaç makalesinde rastlanmaktadır [10]. Dual sayılar; dinamik, insan vücudunun modellemesi, kinematik, mekanik dizayn gibi modern uygulama alanlarına sahiptir ([11] ve [12]).

Reel sayılar üzerinde tanımlanmış olan eşitsizlik sistemi matematik ve fiziğin birçok alt dalında yoğun bir şekilde kullanılmaktadır. Bu eşitsizliklerin varlığı birçok branşın oluşmasına büyük ölçüde katkıda bulunmuştur. Bir araştırma alanı olarak eşitsizlikler uzun bir tarihe sahip değildir. Fakat, bir matematiksel konu olarak eski matematikçiler tarafından kullanılmıştır. Örneğin, Öklid bir bölgenin diğerinden daha geniş veya uzun olduğunu ifade etmek için "aşmak" veya "kısa gelmek" sözcüklerini kullanmıştır ([13] ve [14]). Eşitsizlikler ve eşitsizlik tarihi üzerine birçok çalışma yapılmıştır ([15],[16] ve [17]). Eşitsizlikler; cebir, geometri, trigonometri ve modern kalkülüsü içeren matematiğin birçok branşında kullanılan temel araçlardır. Özellikle, bir uzayın en temel yapılarından biri olan metrik kavramını inşa etmek için eşitsizliklerin varlığına ihtiyaç vardır [18]. Günümüzde, eşitsizlik sistemi çeşitli teorik ve pratik alanlarda uygulamalara sahiptir [19].

1.1. Tezin Amacı

Bu çalışmada, dual sayılar sistemi üzerinde tanımlanan dual sıralama bağıntısının özellikleri detaylı bir şekilde incelenmiş ve ayrıca, Cauchy-Schwartz, Minkowski, Chebyshev ve aritmetik-geometrik eşitsizlikleri dual sıralama bağıntısı kullanılarak dual sayılar sisteminde ele alınmıştır. Bu sıralama bağıntısı kullanılarak baz ve topolojiler oluşturulabileceği de gösterilmiştir. Daha sonra, dual analitik fonksiyonların özellikleri var olan bilgiler ışığında sistematik bir şekilde verilmiştir. Yöne göre türev, vektör alanı, türev dönüşümü ve lie çarpımı tanımlarının dual uzaydaki karşılıkları incelenmiştir. Tezin son kısmında, **D**-modül eğrilerinin özellikleri ayrıntılı bir şekilde çalışılmış ve dual kovaryant türev kavramı incelenmiştir.

Bu tezin temel amacı, öncelikle matematiğin birçok branşında kullanılan reel sayılar üzerindeki eşitsizlik kavramınından esinlenilerek dual sayılar sistemi üzerinde tanımlanan eşitsizlik sisteminin özelliklerini ayrıntılı bir şekilde incelemektir. Ayrıca, diferensiyel geometrinin temel yapı taşları olan diferensiyellenebilir fonksiyonlar, yöne göre türev, vektör alanı, türev dönüşümü, lie çarpımı, eğri gibi kavramları dual uzayda ele almaktır.

2 . TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Genel Matematik ve Diferensiyel Geometri ile İlgili Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. $H \neq \varnothing$ bir cümle ve bu cümledeki iki iç işlem $\top$ ve $\perp$ olmak üzere, $(H, \top, \perp)$ üçlüsünü ele alalım. Eğer $(H, \top)$ bir abel grubu iken ikinci iç işlem olan $\perp$, H cümlesinde birleşmeli ve birinci işlem üzerine dağılımlı ise $(H, \top, \perp)$ üçlüsüne halka adı verilir [20].

Tanım 2.1.2. Bir $(H, \top, \perp)$ halkasında ikinci işleme göre H cümlesinin birim elemanı var ve ikinci işlemin değişme özelliği mevcut ise bu halkaya birimli ve değişmeli halka denir [20].

Tanım 2.1.3. $(H, \top, \perp)$ birimli ve değişmeli bir halka ve $M \neq \phi$ bir cümle olsun. $\oplus : M \times M \to M$ bir iç işlem ve $\odot : H \times M \to M$ bir dış işlem olmak üzere, $(M, \oplus)$ bir abel grubu ve $\odot$ dış işlemi aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise M cümlesine bir modül adı verilir: $a, b \in H$, $\perp$ iç işlemine göre birim eleman $\ell \in H$ ve $x, y \in M$ olmak üzere,
$i)$ $a \odot (x \oplus y) = (a \odot x) \oplus (a \odot y)$,
$ii)$ $(a \top b) \odot x = (a \odot x) \oplus (b \odot x)$,
$iii)$ $(a \perp b) \odot x = a \odot (b \odot x)$,
$iv)$ $\ell \odot x = x$.
H üzerindeki bir modül H-modül olarak adlandırılır ([20], [21] ve [22]).

Tanım 2.1.4. $1 \leq i \leq n$ ve $p = (p_1, p_2, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x_i(p) = p_i$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona $\mathbb{R}^n$ üzerinde i-inci koordinat fonksiyonu denir ([23], [24] ve [25]).

Tanım 2.1.5. ξ, $\mathbb{R}^n$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı bir fonksiyon ve $p \in \mathbb{R}^n$ olsun.

$$\lim_{t\to 0}\frac{\xi\left(p_1,...,p_{j-1},p_j+t,p_{j+1},...,p_n\right)-\xi\left(p_1,...,p_{j-1},p_j,p_{j+1},...,p_n\right)}{t}$$

limiti varsa bu limite ξ fonksiyonunun j-inci değişkene göre kısmi türevi denir ve $\frac{\partial\xi}{\partial x_j}|_p$ veya $\xi_{x_j}(p)$ şeklinde gösterilir [23].

Tanım 2.1.6. U, $\mathbb{R}^n$ nin bir açık alt cümlesi, $p \in U$ ve ξ, U dan $\mathbb{R}$ ye tanımlı bir fonksiyon olsun. ξ fonksiyonu p noktasında k-ıncı basamağa kadar sürekli kısmi türevlere sahip ise ξ fonksiyonuna p noktasında C^k-sınıfındandır denir. Eğer ξ fonksiyonu U cümlesinin her noktasında k-ıncı basamağa kadar sürekli kısmi türevlere sahip ise ξ fonksiyonuna U üzerinde C^k-sınıfındandır denir. U üzerindeki C^k-sınıfından olan bütün fonksiyonların cümlesi $C^k(U,\mathbb{R})$ ile gösterilir. Ayrıca, ξ fonksiyonu her basamaktan sürekli kısmi türevlere sahip ise ξ fonksiyonuna C^∞-sınıfındandır denir ([23], [24] ve [25]).

Tanım 2.1.7. $1 \le j \le m$ için $\xi_j : U_1 \subseteq_{\text{açık}} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonları C^k-sınıfından ise $\xi : U_1 \subseteq_{\text{açık}} \mathbb{R}^n \to U_2 \subseteq_{\text{açık}} \mathbb{R}^m,\ \xi(x) = (\xi_1(x), \xi_2(x), ..., \xi_m(x))$ fonksiyonu C^k- sınıfındandır denir. Eğer bütün ξ_j fonksiyonları C^∞-sınıfından ise ξ fonksiyonuna C^∞-sınıfındandır denir ([23], [24] ve [25]).

Tanım 2.1.8. ξ, $\mathbb{R}^n$ üzerinde reel değerli C^∞-sınıfından bir fonksiyon olsun. ξ fonksiyonunun gradiyenti

$$\nabla\xi = \left(\frac{\partial\xi}{\partial x_1}, \frac{\partial\xi}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial\xi}{\partial x_n}\right)$$

biçiminde tanımlanır [25].

Tanım 2.1.9. $\xi : U_1 \subseteq_{\text{açık}} \mathbb{R}^n \to U_2 \subseteq_{\text{açık}} \mathbb{R}^m,\ \xi(x) = (\xi_1(x), \xi_2(x), ..., \xi_m(x))$ fonksiyonu C^∞-sınıfından olmak üzere, bu fonksiyonun $p \in \mathbb{R}^n$ noktasındaki türevi

$$D\xi(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}|_p & \frac{\partial\xi_1}{\partial x_2}|_p & \cdots & \frac{\partial\xi_1}{\partial x_n}|_p \\ \frac{\partial\xi_2}{\partial x_1}|_p & \frac{\partial\xi_2}{\partial x_2}|_p & \cdots & \frac{\partial\xi_2}{\partial x_n}|_p \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial\xi_m}{\partial x_1}|_p & \frac{\partial\xi_m}{\partial x_2}|_p & \cdots & \frac{\partial\xi_m}{\partial x_n}|_p \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Teorem 2.1.10. $\xi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun ve birinci kısmi türevlerinin (x_0, y_0) noktasını içeren açık bir $U \subseteq \mathbb{R}^2$ bölgesinde tanımlı ve ξ_x ile ξ_y kısmi türevleri (x_0, y_0) noktasında sürekli olsun. Bu durumda, (x_0, y_0) dan başka bir $(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y)$ noktasına hareketinden dolayı ξ de oluşacak

$$\triangle\xi = \xi(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - \xi(x_0, y_0) \tag{2.1.1}$$

değişikliği, $\triangle x,\ \triangle y \to 0$ iken $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ olmak üzere,

$$\triangle\xi = \xi_x(x_0, y_0)\triangle x + \xi_y(x_0, y_0)\triangle y + \varepsilon_1\triangle x + \varepsilon_2\triangle y$$

şeklindeki bir denklemi sağlar ([26] ve [31]).

Teorem 2.1.11. Bir $\xi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\xi(x_1, x_2, ..., x_n)$ ve onun $\xi_{x_i}, \xi_{x_j}, \xi_{x_i x_j}$ ve $\xi_{x_j x_i}$ kısmi türevleri $a = (a_1, ..., a_n)$ noktasını içeren bir açık bölgenin her yerinde tanımlı ve bunların tümü a noktasında sürekli ise, bu durumda

$$\xi_{x_i x_j}(a) = \xi_{x_j x_i}(a)$$

dır [26].

Tanım 2.1.12. $p \in \mathbb{R}^n$ sabit bir nokta olmak üzere,

$$T_p\mathbb{R}^n = \{(p, \overrightarrow{v}) \mid \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n\}$$

cümlesini ele alalım. Bu cümle üzerinde bir iç işlem

$$(p, \overrightarrow{v}) + (p, \overrightarrow{w}) = (p, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) \in T_p\mathbb{R}^n$$

ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için bir dış işlem

$$\lambda \cdot (p, \overrightarrow{v}) = (p, \lambda\overrightarrow{v}) \in T_p\mathbb{R}^n$$

şeklinde olup bu işlemlerle birlikte $(T_p\mathbb{R}^n, +, (\mathbb{R}, +, \cdot), \cdot)$ altılısı bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayına $\mathbb{R}^n$ uzayının p noktasındaki tanjant uzayı denir. $(p, \overrightarrow{v}) \in T_p\mathbb{R}^n$ elemanına p noktasındaki tanjant vektörü denir ve $\overrightarrow{v}_p$ ile gösterilir ([23] ve [25]).

Tanım 2.1.13. $p \in U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\xi \in C^\infty(U,\mathbb{R})$ ve $\overrightarrow{v}_p \in T_p\mathbb{R}^n$ olmak üzere, ξ fonksiyonunun $\overrightarrow{v}_p$ tanjant vektörü yönündeki türevi

$$\overrightarrow{v}_p[\xi] = \frac{d}{dt}\left(\xi\left(p + t\overrightarrow{v}\right)\right)|_{t=0}$$

şeklinde tanımlanır [23].

Tanım 2.1.14. U, $\mathbb{R}^n$ uzayının bir açık alt cümlesi olmak üzere, U nun her noktasına bu noktada bir tanjant vektör karşılık getiren fonksiyona U üstünde bir vektör alanı denir [23].

Tanım 2.1.15. $\xi : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\xi(x) = (\xi_1(x), \xi_2(x), ..., \xi_m(x))$ fonksiyonu C^∞-sınıfından olsun. $\overrightarrow{v}_p \in T_p\mathbb{R}^n$ için

$$\xi_{*p}\left(\overrightarrow{v}_p\right) = \left(\overrightarrow{v}_p[\xi_1], \overrightarrow{v}_p[\xi_2], ..., \overrightarrow{v}_p[\xi_m]\right)$$

eşitliği ile tanımlanan $\xi_{*p} : T_p\mathbb{R}^n \to T_{\xi(p)}\mathbb{R}^m$ fonksiyonuna, ξ fonksiyonunun p noktasındaki türev dönüşümü denir ([23] ve [25]).

Tanım 2.1.16. I, $\mathbb{R}$ nin bir açık alt aralığı olmak üzere, $\sigma : I \to \mathbb{R}^n$,

$$\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t), ..., \sigma_n(t))$$

biçiminde tanımlanan C^∞-sınıfından bir fonksiyon ve $\forall t \in I$ için $\exists \sigma_i'(t) \neq 0$ ise σ fonksiyonuna bir eğri (regüler eğri) adı verilir [23].

2.2. Dual Sayılar ve Dual Uzay

Tanım 2.2.1.

$$\mathbf{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{\overline{a} = (a, a^*) \mid a, a^* \in \mathbb{R}\}$$

cümlesini ele alalım. Bu cümle üzerinde bir eşitlik ve iki iç işlem aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$i)$ $\overline{a}=\overline{b}$ olması için gerek ve yeter şart $a=b$ ve $a^*=b^*$ olmasıdır.

$ii)$ $+_{\mathbf{D}}:\mathbf{D}\times\mathbf{D}\to\mathbf{D}$, $\overline{a}=(a,a^*)$ ve $\overline{b}=(b,b^*)$ için

$$\overline{a}+_{\mathbf{D}}\overline{b}=(a+b,a^*+b^*),$$

$iii)$ $\cdot_{\mathbf{D}}:\mathbf{D}\times\mathbf{D}\to\mathbf{D}$, $\overline{a}=(a,a^*)$ ve $\overline{b}=(b,b^*)$ için

$$\overline{a}\cdot_{\mathbf{D}}\overline{b}=(ab,ab^*+ba^*).$$

$\mathbf{D}$ cümlesi üzerindeki eşitlik ve iki iç işlem göz önüne alındığında $\mathbf{D}$ cümlesi dual sayılar sistemi olarak adlandırılır ve $\overline{a}=(a,a^*)$ elemanına bir dual sayı denir. Burada, a reel sayısına $\overline{a}$ nin reel kısmı ve a^* reel sayısına da $\overline{a}$ nin dual kısmı denir ([27], [28] ve [29]).

Teorem 2.2.2.

$$\mathbf{D}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(a,a^*)\mid a,a^*\in\mathbb{R}\}$$

cümlesi üzerinde tanımlanan iki iç işlem $+_{\mathbf{D}}$ ve $\cdot_{\mathbf{D}}$ ile birlikte $(\mathbf{D},+_{\mathbf{D}},\cdot_{\mathbf{D}})$ üçlüsü birimli ve değişmeli bir halkadır. Burada, $\mathbf{D}$ cümlesinin $+_{\mathbf{D}}$ işlemine göre birim elemanı $(0,0)$ ve $\cdot_{\mathbf{D}}$ işlemine göre birim elemanı $(1,0)$ dır [27].

Sonuç 2.2.1. $(\mathbf{D},+_{\mathbf{D}},\cdot_{\mathbf{D}})$ üçlüsü birimli ve değişmeli bir halka olup bir cisim değildir. Gerçekten, $\overline{a}=(a,a^*)\in\mathbf{D}$ elemanının ikinci işleme göre tersi, $a\neq 0$ için $\overline{a}^{-1}=\left(\frac{1}{a},-\frac{a^*}{a^2}\right)$ şeklindedir. O halde, $a^*\neq 0$ için $(0,a^*)\in\mathbf{D}$ elemanının $\cdot_{\mathbf{D}}$ iç işlemine göre tersi yoktur [27].

Teorem 2.2.3. $\overline{A}=\{\overline{a}=(a,0)\mid a\in\mathbb{R}\}\subset\mathbf{D}$ olmak üzere, $\xi:\overline{A}\subset\mathbf{D}\to\mathbb{R}$, $\xi(a,0)=a$ şeklinde tanımlanan dönüşüm izomorfizmdir [27].

Açıklama 1. Teorem 2.2.3 ün bir sonucu olarak, $(a,0)$ şeklindeki dual sayılar a reel sayısı ile gösterilecektir. Yani, $(a,0)=a$ dır [27].

Tanım 2.2.4. $\mathbf{D}$ dual sayılar sisteminin elemanı olan $(0,1)$ şeklindeki dual sayı ε ile gösterilir ve bu eleman dual birim olarak adlandırılır. $(0,1)=\varepsilon$ elemanı aşağıdaki özelliği sağlar [27]:

$$\varepsilon^2=\varepsilon\cdot_{\mathbf{D}}\varepsilon=(0,0)=0.$$

Sonuç 2.2.2. Yukarıdaki tanım ve teoremler dikkate alındığında $\overline{a}=(a,a^*)$ dual sayısı aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned}\overline{a} &= (a,a^*)\\ &= (a,0)+_{\mathbf{D}}(0,a^*)\\ &= (a,0)+_{\mathbf{D}}(0,1)\cdot_{\mathbf{D}}(a^*,0)\\ &= a+_{\mathbf{D}}\varepsilon\cdot_{\mathbf{D}}a^*.\end{aligned}$$

Kolaylık için bu çalışma boyunca $+_{\mathbf{D}}$ ve $\cdot_{\mathbf{D}}$ işlemleri yerine $+$ ve $\cdot$ işlemlerini kullanacağız. Bu durumda, bütün dual sayıların cümlesi aşağıdaki şekilde verilir:

$$\mathbf{D}=\left\{\overline{a}=a+\varepsilon a^* \mid a,a^*\in\mathbb{R},\ \varepsilon^2=0\right\}.$$

Böylece iki dual sayının toplamı ve çarpımı

$$\begin{aligned}(a+\varepsilon a^*)+(b+\varepsilon b^*) &= (a+b)+\varepsilon(a^*+b^*),\\ (a+\varepsilon a^*)\cdot(b+\varepsilon b^*) &= ab+\varepsilon(ab^*+ba^*)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca, $\overline{a}=a+\varepsilon a^*$ ve $\overline{b}=b+\varepsilon b^*$ dual sayıları için eğer $b\neq 0$ ise, bu durumda $\dfrac{\overline{a}}{\overline{b}}$ dual sayısı

$$\frac{\overline{a}}{\overline{b}}=\frac{a}{b}+\varepsilon\left(\frac{ba^*-ab^*}{b^2}\right)$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.5. Bir

$$\mathbf{D}^n=\mathbf{D}\times\mathbf{D}\times\ldots\times\mathbf{D}=\left\{\overrightarrow{\overline{x}}=(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\ldots,\overline{x}_n)\mid\overline{x}_i\in\mathbf{D},\ i=1,2,\ldots,n\right\}$$

cümlesini ele alalım. Bu cümle üzerinde eşitlik, bir iç işlem ve bir dış işlem aşağıdaki şekilde tanımlanır [27]:

i) $\overrightarrow{\overline{x}}=\overrightarrow{\overline{y}}$ olması için gerek ve yeter şart $\overline{x}_i=\overline{y}_i$ olmasıdır $(1\leq i\leq n)$.

ii) $+_{\mathbf{D}^n} : \mathbf{D}^n \times \mathbf{D}^n \to \mathbf{D}^n$, $\overrightarrow{\tilde{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$ ve $\overrightarrow{\tilde{y}} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_n)$ için

$$\overrightarrow{\tilde{x}} +_{\mathbf{D}^n} \overrightarrow{\tilde{y}} = (\bar{x}_1 + \bar{y}_1, ..., \bar{x}_n + \bar{y}_n),$$

iii) $\cdot_{\mathbf{D}^n} : \mathbf{D} \times \mathbf{D}^n \to \mathbf{D}^n$, $\overline{\lambda} = \lambda + \varepsilon\lambda^*$ ve $\overrightarrow{\tilde{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$ için

$$\overline{\lambda} \cdot_{\mathbf{D}^n} \overrightarrow{\tilde{x}} = \left(\overline{\lambda} \cdot \bar{x}_1, ..., \overline{\lambda} \cdot \bar{x}_n\right).$$

Teorem 2.2.6. $\mathbf{D}^n = \left\{ \overrightarrow{\tilde{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n) \mid \bar{x}_i \in \mathbf{D},\ i = 1, 2, ..., n \right\}$ cümlesi üzerinde tanımlanan $+_{\mathbf{D}^n}$ ve $\cdot_{\mathbf{D}^n}$ işlemleri göz önüne alındığında, $(\mathbf{D}^n, +_{\mathbf{D}^n}, \cdot_{\mathbf{D}^n})$ üçlüsü $(\mathbf{D}, +, \cdot)$ birimli ve değişmeli halkası üzerinde bir modül oluşturur [27].

Tanım 2.2.7. $(\mathbf{D}^n, +_{\mathbf{D}^n}, \cdot_{\mathbf{D}^n})$ üçlüsünün $(\mathbf{D}, +, \cdot)$ birimli ve değişmeli halkası üzerinde oluşturduğu modüle **D**-Modül ve **D**-Modül'ün elemanlarına da dual vektör adı verilir [27].

Sonuç 2.2.3. $\mathbf{D}^n$ üzerinde tanımlanan iç işlem ve dış işlem dikkate alındığında bir dual vektör aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\tilde{x}} &= (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n) \\
&= (x_1 + \varepsilon \cdot x_1^*, x_2 + \varepsilon \cdot x_2^*, ..., x_n + \varepsilon \cdot x_n^*) \\
&= (x_1, x_2, ..., x_n) +_{\mathbf{D}^n} \varepsilon \cdot_{\mathbf{D}^n} (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \\
&= \overrightarrow{x} +_{\mathbf{D}^n} \varepsilon \cdot_{\mathbf{D}^n} \overrightarrow{x^*}.
\end{aligned}$$

Burada, $\overrightarrow{x}$ ve $\overrightarrow{x^*}$ vektörleri $\mathbb{R}^n$ nin vektörleridir.

Tanım 2.2.8. $\overrightarrow{\tilde{0}} = \left(\bar{0}, \bar{0}, ..., \bar{0}\right) = \overrightarrow{0} +_{\mathbf{D}^n} \varepsilon \cdot_{\mathbf{D}^n} \overrightarrow{0}$ dual vektörüne sıfır dual vektörü denir [27].

Sonuç 2.2.4. Kolaylık için $+_{\mathbf{D}^n}$ ve $\cdot_{\mathbf{D}^n}$ işlemlerinin yerine sırasıyla $+$ ve $\cdot$ işlemlerini kullanacağız. Bu durumda, bütün dual vektörlerin cümlesi

$$\mathbf{D}^n = \left\{ \overrightarrow{\tilde{x}} = \overrightarrow{x} + \varepsilon\overrightarrow{x^*} \mid \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x^*} \in \mathbb{R}^n,\ \varepsilon^2 = 0 \right\}$$

şeklindedir. İki dual vektörün toplamı ve bir dual skaler ile çarpımı aşağıdaki şekilde verilir:

$$\tilde{\vec{x}} + \tilde{\vec{y}} = (\vec{x} + \vec{y}) + \varepsilon \left(\vec{x^*} + \vec{y^*} \right)$$

ve

$$\overline{\lambda} \cdot \tilde{\vec{x}} = \lambda \vec{x} + \varepsilon \left(\lambda \vec{x^*} + \lambda^* \vec{x} \right).$$

Tanım 2.2.9. $\tilde{\vec{e}}_i = \left(\overline{\delta}_{i1}, \overline{\delta}_{i2}, ..., \overline{\delta}_{in} \right)$ şeklindeki vektörleri ele alalım. Burada,

$$\overline{\delta}_{ij} = \begin{cases} 1 + \varepsilon 0 & , i = j \\ 0 + \varepsilon 0 & , i \neq j \end{cases} \quad 1 \leq i, j \leq n$$

biçiminde ifade edilir. Her $\tilde{\vec{x}} \in \mathbf{D}^n$ dual vektörü

$$\begin{aligned} \tilde{\vec{x}} &= \overline{x}_1 \cdot_{\mathbf{D}^n} \tilde{\vec{e}}_1 +_{\mathbf{D}^n} \overline{x}_2 \cdot_{\mathbf{D}^n} \tilde{\vec{e}}_2 +_{\mathbf{D}^n} ... +_{\mathbf{D}^n} \overline{x}_n \cdot_{\mathbf{D}^n} \tilde{\vec{e}}_n \\ &= \overline{x}_1 \tilde{\vec{e}}_1 + \overline{x}_2 \tilde{\vec{e}}_2 + ... + \overline{x}_n \tilde{\vec{e}}_n \end{aligned}$$

şeklinde yazılır [27].

Tanım 2.2.10. $\tilde{\vec{x}} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x^*}$ ve $\tilde{\vec{y}} = \vec{y} + \varepsilon \vec{y^*}$ dual vektörlerini ele alalım. Bu dual vektörler arasındaki dual iç çarpım

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{\vec{x}}, \tilde{\vec{y}} \right\rangle_{\mathbf{D}} &= \overline{x}_1 \overline{y}_1 + \overline{x}_2 \overline{y}_2 + ... + \overline{x}_n \overline{y}_n \\ &= \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \varepsilon \left(\left\langle \vec{x}, \vec{y^*} \right\rangle + \left\langle \vec{x^*}, \vec{y} \right\rangle \right) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır. Burada, $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ reel vektörleri için $\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$ şeklinde tanımlı Öklid-iç çarpımıdır [27].

Tanım 2.2.11. $\tilde{\vec{x}} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x^*} \in \mathbf{D}^n$ dual vektörünü ele alalım. Bu dual vektörün dual normu

$$\left\| \tilde{\vec{x}} \right\|_{\mathbf{D}} = \sqrt{\left\langle \tilde{\vec{x}}, \tilde{\vec{x}} \right\rangle_{\mathbf{D}}} = \begin{cases} \overline{0} & , \vec{x} = \vec{0} \\ \|\vec{x}\| + \varepsilon \dfrac{\left\langle \vec{x}, \vec{x^*} \right\rangle}{\|\vec{x}\|} & , \vec{x} \neq \vec{0} \end{cases}$$

şeklinde tanmlanır. Burada, $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ biçimindedir [27].

Tanım 2.2.12. $\overrightarrow{\tilde{x}} = \overrightarrow{x} + \varepsilon \overrightarrow{x^*}$ ve $\overrightarrow{\tilde{y}} = \overrightarrow{y} + \varepsilon \overrightarrow{y^*} \in \mathbf{D}^3$ olmak üzere, bu iki dual vektör arasındaki dual vektörel çarpım

$$\overrightarrow{\tilde{x}} \times_{\mathbf{D}} \overrightarrow{\tilde{y}} = \overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y} + \varepsilon \left(\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y^*} + \overrightarrow{x^*} \times \overrightarrow{y} \right)$$

biçiminde tanımlanır. Burada, $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ve $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, y_3)$ için

$$\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y} = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$$

şeklindedir [27].

Teorem 2.2.13. $\overrightarrow{\tilde{x}} \in \mathbf{D}^3$ olmak üzere, $\mathbf{D}^3$ uzayında denklemi

$$\left\| \overrightarrow{\tilde{x}} \right\|_{\mathbf{D}} = 1 + \varepsilon 0$$

olan birim dual kürenin dual noktaları $\mathbb{R}^3$ deki yönlü doğrulara birebir karşılık gelir [6].

Teorem 2.2.14. $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$ ve $\overrightarrow{y} \neq \overrightarrow{0}$ olacak şekilde $\overrightarrow{\tilde{x}}, \overrightarrow{\tilde{y}} \in \mathbf{D}^3$ iki dual vektör ve bu iki vektörün birim dual vektörleri sırasıyla $\overrightarrow{\tilde{x}}_0$ ve $\overrightarrow{\tilde{y}}_0$ olsun. $\overrightarrow{\tilde{x}}_0$ ile $\overrightarrow{\tilde{y}}_0$ birim dual vektörler arasındaki dual açı $\overline{\theta}_0$ olmak üzere,

$$\left\langle \overrightarrow{\tilde{x}}, \overrightarrow{\tilde{y}} \right\rangle_{\mathbf{D}} = \left\| \overrightarrow{\tilde{x}} \right\|_{\mathbf{D}} \left\| \overrightarrow{\tilde{y}} \right\|_{\mathbf{D}} \cos \overline{\theta}_0$$

ve

$$\overrightarrow{\tilde{x}} \times_{\mathbf{D}} \overrightarrow{\tilde{y}} = \left\| \overrightarrow{\tilde{x}} \right\|_{\mathbf{D}} \left\| \overrightarrow{\tilde{y}} \right\|_{\mathbf{D}} \overline{n}_0 \sin \overline{\theta}_0$$

biçimindedir. Burada, $\overline{\theta}_0 = \theta + \varepsilon d$ şeklinde olup θ, $\overrightarrow{\tilde{x}}_0$ ile $\overrightarrow{\tilde{y}}_0$ birim dual vektörlere karşılık gelen $\mathbb{R}^3$ deki yönlü doğrular arasındaki açı ve d ise bu doğrular arasındaki en kısa uzaklıktır ([27] ve [30]).

3 . DUAL EŞİTSİZLİKLER VE DUAL ANALİTİK FONKSİYONLAR

3.1. Dual Mutlak Değer Fonksiyonu ve Dual Eşitsizlikler

Bu bölümde, G. R. Veldkamp tarafından tanımlanan dual mutlak değer fonksiyonunun tanımı verilecek ve daha sonra dual sayılar üzerindeki sıralama bağıntısının bütün özellikleri incelenecektir. Bu bölümün son kısmında öncelikle, Cauchy-Schwarz, Minkowski, Chebyshev ve aritmetik-geometrik eşitsizlikleri dual sayılar sisteminde araştırılacaktır. Daha sonra, tanımlanan $<_{\mathbf{D}}$ bağıntısı yardımıyla baz ve topolojiler oluşturulabileceği gösterilecektir.

Tanım 3.1.1. $\overline{a} = a + \varepsilon a^*$ bir dual sayı olsun. Bu dual sayının (dual) mutlak değeri

$$|\overline{a}|_{\mathbf{D}} = \sqrt{\overline{a}^2} = \begin{cases} \overline{0} & ,a = 0 \\ |a| + \varepsilon a^* \dfrac{a}{|a|} & ,a \neq 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [30].

Teorem 3.1.2. $\overline{a} = a + \varepsilon a^*$ ve $\overline{b} = b + \varepsilon b^*$ iki dual sayı olsun. Bu durumda, aşağıdaki özellikler sağlanır:

1) $|-\overline{a}|_{\mathbf{D}} = |\overline{a}|_{\mathbf{D}}$.

2) $\left|\overline{a} \cdot \overline{b}\right|_{\mathbf{D}} = |\overline{a}|_{\mathbf{D}} \left|\overline{b}\right|_{\mathbf{D}}$.

3) $\left|\dfrac{\overline{a}}{\overline{b}}\right|_{\mathbf{D}} = \dfrac{|\overline{a}|_{\mathbf{D}}}{\left|\overline{b}\right|_{\mathbf{D}}}$, $(b \neq 0)$.

4) $a \neq 0$ ve $b \neq 0$ için eğer $|\overline{a}|_{\mathbf{D}} = \left|\overline{b}\right|_{\mathbf{D}}$ ise bu durumda ya $\overline{a} = \overline{b}$ ya da $\overline{a} = -\overline{b}$ dir.

İspat. 1) Kabul edelim ki $a \neq 0$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki eşitliği elde etmek mümkündür:

$$|-\overline{a}|_{\mathbf{D}} = |-a| + \varepsilon\,(-a^*)\,\frac{(-a)}{|-a|} = |a| + \varepsilon a^* \frac{a}{|a|} = |\overline{a}|_{\mathbf{D}}\,.$$

Eğer $a=0$ ise aşağıdaki eşitlik vardır:

$$|-\overline{a}|_{\mathbf{D}}=\sqrt{(-\varepsilon a^{*})^{2}}=\overline{0}=|\overline{a}|_{\mathbf{D}}\,.$$

2) $\overline{a}=a+\varepsilon a^{*}$ ve $\overline{b}=b+\varepsilon b^{*}\in\mathbf{D}$ için $\overline{a}\cdot\overline{b}$ nin dual mutlak değeri

$$\left|\overline{a}\cdot\overline{b}\right|_{\mathbf{D}}=\begin{cases}\overline{0} & ,ab=0\\ |ab|+\varepsilon\dfrac{(ab)\,(ab^{*}+ba^{*})}{|ab|} & ,ab\neq 0\end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. O halde, bu öncülde verilen eşitliğin varlığını iki durumda inceleyeceğiz:

$i)$ Kabul edelim ki $ab=0$ olsun. Bu durumda, a ve b den en az biri sıfır olacağından aşağıdaki eşitliği yazmak mümkündür:

$$\left|\overline{a}\cdot\overline{b}\right|_{\mathbf{D}}=|\overline{a}|_{\mathbf{D}}\left|\overline{b}\right|_{\mathbf{D}}.$$

$ii)$ $ab\neq 0$ olsun. Bu durumda, hem a hem de b reel sayıları sıfırdan farklı olacağından dolayı

$$\begin{aligned}\left|\overline{a}\cdot\overline{b}\right|_{\mathbf{D}} &= |ab|+\varepsilon\frac{(ab)\,(ab^{*}+ba^{*})}{|ab|}\\ &= |a|\,|b|+\varepsilon\left(\frac{bb^{*}}{|b|}\,|a|+\frac{aa^{*}}{|a|}\,|b|\right)\\ &= \left(|a|+\varepsilon a^{*}\frac{a}{|a|}\right)\left(|b|+\varepsilon b^{*}\frac{b}{|b|}\right)\\ &= |\overline{a}|_{\mathbf{D}}\left|\overline{b}\right|_{\mathbf{D}}\end{aligned}$$

elde edilir.

3) $b\neq 0$ için $\dfrac{\overline{a}}{\overline{b}}$ nin dual mutlak değeri

$$\left|\frac{\overline{a}}{\overline{b}}\right|_{\mathbf{D}}=\begin{cases}\overline{0} & ,a=0\\ \left|\dfrac{a}{b}\right|+\varepsilon\left(\dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a^{*}}{b}-\frac{ab^{*}}{b^{2}}\right)}{\left|\frac{a}{b}\right|}\right) & ,a\neq 0\end{cases}$$

şeklindedir. O halde, bu öncül için aşağıdaki iki durum mevcuttur:

$i)$ Eğer $a = 0$ ise kolaylıkla görülür ki

$$\left|\frac{\overline{a}}{\overline{b}}\right|_{\mathbf{D}} = \frac{|\overline{a}|_{\mathbf{D}}}{\left|\overline{b}\right|_{\mathbf{D}}}$$

dir.

$ii)$ $a \neq 0$ olsun. Aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\overline{a}}{\overline{b}}\right|_{\mathbf{D}} &= \left|\frac{a}{b}\right| + \varepsilon \frac{\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a^*}{b} - \frac{ab^*}{b^2}\right)}{\left|\frac{a}{b}\right|} \\
&= \frac{|a|}{|b|} + \left(\frac{aa^*}{|a|\,|b|} - \frac{b^*\,|a|}{b\,|b|}\right) \\
&= \left(|a| + \varepsilon \frac{aa^*}{|a|}\right)\left(\frac{|b| - \varepsilon \frac{bb^*}{|b|}}{b^2}\right) \\
&= \frac{|\overline{a}|_{\mathbf{D}}}{\left|\overline{b}\right|_{\mathbf{D}}}.
\end{aligned}$$

4) $a \neq 0$ ve $b \neq 0$ için $|\overline{a}|_{\mathbf{D}} = \left|\overline{b}\right|_{\mathbf{D}}$ olsun. Yukarıda ifade edilen dual mutlak değer tanımından $\overline{a} = \overline{b}$ ya da $\overline{a} = -\overline{b}$ olduğu kolaylıkla görülür. □

Tanım 3.1.3. $\overline{a} = a + \varepsilon a^*$ ve $\overline{b} = b + \varepsilon b^*$ iki dual sayı olsun. Bu dual sayılar arasındaki $\overline{a} <_{\mathbf{D}} \overline{b}$ $\left(\overline{a} \leq_{\mathbf{D}} \overline{b}\right)$ ilişkisi aşağıdaki şekildedir:

1) Öncelikle bu dual sayıların reel kısımları karşılaştırılır ve $a < b$ $(a < b)$ olmalıdır.

2) Eğer bu dual sayıların reel kısımları eşit ise bu sayıların dual kısımları karşılaştırılır ve $a^* < b^*$ $(a^* \leq b^*)$ olmalıdır.

Yukarıdaki tanım göz önüne alındığında aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 3.1.1. $\overline{a} = a + \varepsilon a^*$ ve $\overline{b} = b + \varepsilon b^*$ iki dual sayı olsun. Aşağıdaki ifadeler mevcuttur:

1) $\overline{a} <_{\mathbf{D}} \overline{b}$ gerek ve yeter şart $a < b$ veya $(a = b$ ve $a^* < b^*)$.

2) $\overline{a} \leq_{\mathbf{D}} \overline{b}$ gerek ve yeter şart $a < b$ veya $(a = b$ ve $a^* \leq b^*)$.

Teorem 3.1.4. $\overline{a} = a + \varepsilon a^*, \overline{b} = b + \varepsilon b^*$ ve $\overline{c} = c + \varepsilon c^*$ dual sayılar olsun. Bu durumda, $<_{\mathbf{D}}$ ve $\leq_{\mathbf{D}}$ bağıntıları aşağıdaki özellikleri sağlar:

1) Eğer $\overline{a} \neq \overline{b}$ ise ya $\overline{a} <_{\mathbf{D}} \overline{b}$ ya da $\overline{b} <_{\mathbf{D}} \overline{a}$ dir.

2) Eğer $\overline{a} <_{\mathbf{D}} \overline{b}$ ise $\overline{a} \neq \overline{b}$ dir.

3) Eğer $\overline{a} <_{\mathbf{D}} \overline{b}$ ve $\overline{b} <_{\mathbf{D}} \overline{c}$ ise $\overline{a} <_{\mathbf{D}} \overline{c}$ dir.

4) $\overline{a} \leq_{\mathbf{D}} \overline{a}$ dir.

5) Eğer $\overline{a} \leq_{\mathbf{D}} \overline{b}$ ve $\overline{b} \leq_{\mathbf{D}} \overline{a}$ ise $\overline{a} = \overline{b}$ dir.

6) Eğer $\overline{a} \leq_{\mathbf{D}} \overline{b}$ ve $\overline{b} \leq_{\mathbf{D}} \overline{c}$ ise $\overline{a} \leq_{\mathbf{D}} \overline{c}$ dir.

Açıklama 2. Yukarıdaki teoremden görülmektedir ki $<_{\mathbf{D}}$ sıralama bağıntısının ve $\leq_{\mathbf{D}}$ de kısmi sıralama bağıntısının özelliklerini sağlar. Bu çalışma boyunca $<_{\mathbf{D}}$ dual sıralama bağıntısı ve $\leq_{\mathbf{D}}$ de dual kısmi sıralama bağıntısı olarak adlandırılacaktır.

Tanım 3.1.5. $\overline{a} = a + \varepsilon a^*$ bir dual sayı olsun. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{D}^{+} &= \{\overline{a} = a + \varepsilon a^* \in \mathbf{D} \mid a > 0,\ a^* \in \mathbb{R}\}, \\
\mathbf{D}^{-} &= \{\overline{a} = a + \varepsilon a^* \in \mathbf{D} \mid a < 0,\ a^* \in \mathbb{R}\}, \\
\mathbf{D}^{0+} &= \{\overline{a} = a + \varepsilon a^* \in \mathbf{D} \mid a = 0,\ a^* > 0\}, \\
\mathbf{D}^{0-} &= \{\overline{a} = a + \varepsilon a^* \in \mathbf{D} \mid a = 0,\ a^* < 0\}
\end{aligned}
$$

cümleleri sırasıyla dual pozitif, dual negatif, yarı dual pozitif ve yarı dual negatif sayılar olarak adlandırılır.

Sonuç 3.1.2. Dual mutlak değer fonksiyonu ve yukarıdaki tanım birlikte dikkate alındığında, aşağıdaki ifadeleri yazmak mümkündür:

$$
\begin{aligned}
\overline{a} &\in \mathbf{D}^{+} \Rightarrow |\overline{a}|_{\mathbf{D}} = \overline{a}, \\
\overline{a} &\in \mathbf{D}^{-} \Rightarrow |\overline{a}|_{\mathbf{D}} = -\overline{a}, \\
\overline{a} &\in \mathbf{D}^{0+} \Rightarrow |\overline{a}|_{\mathbf{D}} = \overline{0}, \\
\overline{a} &\in \mathbf{D}^{0-} \Rightarrow |\overline{a}|_{\mathbf{D}} = \overline{0}.
\end{aligned}
$$

Teorem 3.1.6. $\overline{a} = a + \varepsilon a^* \in \mathbf{D}$ ve $n \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

1) $|\overline{a}^n|_{\mathbf{D}} = |\overline{a}|_{\mathbf{D}}^n$.

2) $a \neq 0$ için $|\overline{a}^{-n}|_{\mathbf{D}} = |\overline{a}|_{\mathbf{D}}^{-n}$.

İspat. 1) Eğer $a = 0$ ise $|\overline{a}^n|_{\mathbf{D}} = |\overline{a}|_{\mathbf{D}}^n$ olduğu açıktır. Şimdi, $a \neq 0$ olsun. O halde, iki durum söz konusudur:

$i)$ $a>0$ olsun. Bu durumda, $\overline{a}\in\mathbf{D}^{+}$ olduğundan $|\overline{a}|_{\mathbf{D}}=a+\varepsilon a^{*}=\overline{a}$ dir. Böylece, aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\begin{aligned}
|\overline{a}|_{\mathbf{D}}^{n} &= (a+\varepsilon a^{*})^{n} \\
&= a^{n}+\varepsilon a^{*}na^{n-1} \\
&= \overline{a}^{n} \\
&= |\overline{a}^{n}|_{\mathbf{D}}.
\end{aligned}$$

Burada, $a^{n}>0$ dır.

$ii)$ $a<0$ olsun. Bu durumda, $\overline{a}\in\mathbf{D}^{-}$ olduğundan $|\overline{a}|_{\mathbf{D}}=-a-\varepsilon a^{*}=-\overline{a}$ dir. $k\in\mathbb{N}$ için $n=2k$ ise aşağıdaki eşitlik kolaylıkla elde edilir:

$$\begin{aligned}
|\overline{a}|_{\mathbf{D}}^{n} &= (-a+\varepsilon(-a^{*}))^{2k} \\
&= (-a)^{2k}+\varepsilon(-a^{*})\,2k\,(-a)^{2k-1} \\
&= a^{2k}+\varepsilon a^{*}2ka^{2k-1} \\
&= a^{n}+\varepsilon a^{*}na^{n-1} \\
&= \overline{a}^{n} \\
&= |\overline{a}^{n}|_{\mathbf{D}}
\end{aligned}$$

dir. Burada, $a^{n}>0$ dır. Eğer $n=2k+1$ ise

$$\begin{aligned}
|\overline{a}|_{\mathbf{D}}^{n} &= (-a+\varepsilon(-a^{*}))^{2k+1} \\
&= (-a)^{2k+1}+\varepsilon(-a^{*})(2k+1)(-a)^{2k} \\
&= -a^{n}-\varepsilon a^{*}na^{n-1} \\
&= -\overline{a}^{n} \\
&= |\overline{a}^{n}|_{\mathbf{D}}
\end{aligned}$$

dir. Burada, $a^{n}<0$ dır.

$2)$ Teorem 3.1.2 nin üçüncü öncülü ve bu teoremin birinci öncülü birlikte dikkate alındığında, $a\neq 0$ için

$$\left|\overline{a}^{-n}\right|_{\mathbf{D}}=|\overline{a}|_{\mathbf{D}}^{-n}$$

olduğu kolayca görülür. □

Teorem 3.1.7. $\overline{a},\overline{b} \in \mathbf{D}$ ve $\overline{a} <_{\mathbf{D}} \overline{b}$ $\left(\text{veya } \overline{a} \leq_{\mathbf{D}} \overline{b}\right)$ olduğunu varsayalım. Her $\overline{c} = c + \varepsilon c^* \in \mathbf{D}$ için

$$\overline{a} \pm \overline{c} <_{\mathbf{D}} \overline{b} \pm \overline{c}$$

ve

$$\overline{a} \pm \overline{c} \leq_{\mathbf{D}} \overline{b} \pm \overline{c}$$

dual eşitsizlikleri vardır.

Teorem 3.1.8. $\overline{a} = a + \varepsilon a^*$, $\overline{b} = b + \varepsilon b^* \in \mathbf{D}$ ve $\overline{c} = c + \varepsilon c^* \in \mathbf{D}^+$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler mevcuttur:

1) Eğer $\overline{a} <_{\mathbf{D}} \overline{b}$ ise $\overline{a} \cdot \overline{c} <_{\mathbf{D}} \overline{b} \cdot \overline{c}$ ve $\frac{\overline{a}}{\overline{c}} <_{\mathbf{D}} \frac{\overline{b}}{\overline{c}}$ dir.

2) Eğer $\overline{a} \leq_{\mathbf{D}} \overline{b}$ ise $\overline{a} \cdot \overline{c} \leq_{\mathbf{D}} \overline{b} \cdot \overline{c}$ ve $\frac{\overline{a}}{\overline{c}} \leq_{\mathbf{D}} \frac{\overline{b}}{\overline{c}}$ dir.

İspat. 1) Kabul edelim ki $\overline{a} <_{\mathbf{D}} \overline{b}$ ve $\overline{c} = c + \varepsilon c^* \in \mathbf{D}^+$ olsun. Eğer $a < b$ ise $ac < bc$ ve $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ elde edilir öyle ki $\overline{a} \cdot \overline{c} <_{\mathbf{D}} \overline{b} \cdot \overline{c}$ ve $\frac{\overline{a}}{\overline{c}} <_{\mathbf{D}} \frac{\overline{b}}{\overline{c}}$ dir. Şimdi $a = b$ olsun. Bu durumda, $\overline{a} <_{\mathbf{D}} \overline{b}$ dual eşitsizliği düşünüldüğünde, $a^* < b^*$ olur. Hipotez göz önüne alındığında, $\overline{a} \cdot \overline{c}$ ve $\overline{b} \cdot \overline{c}$ $\left(\frac{\overline{a}}{\overline{c}} \text{ ve } \frac{\overline{b}}{\overline{c}}\right)$ ifadelerinin reel kısımları birbirine eşit iken bu ifadelerin dual kısımları arasında $ac^* + a^*c < bc^* + b^*c$ $\left(\frac{a^*}{c} - \frac{ac^*}{c^2} < \frac{b^*}{c} - \frac{bc^*}{c^2}\right)$ eşitsizliği mevcuttur. O halde, $<_{\mathbf{D}}$ dual sıralama bağıntısı dikkate alındığında, $\overline{a} \cdot \overline{c} <_{\mathbf{D}} \overline{b} \cdot \overline{c}$ ve $\frac{\overline{a}}{\overline{c}} <_{\mathbf{D}} \frac{\overline{b}}{\overline{c}}$ ifadeleri elde edilir.

2) Bu öncülün ispatı birinci öncülün ispatına benzer şekilde yapılır. □

Teorem 3.1.9. $\overline{a} = a + \varepsilon a^*, \overline{b} = b + \varepsilon b^* \in \mathbf{D}$ ve $\overline{c} = c + \varepsilon c^* \in \mathbf{D}^-$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler elde edilir:

1) Eğer $\overline{a} <_{\mathbf{D}} \overline{b}$ ise $\overline{a} \cdot \overline{c} >_{\mathbf{D}} \overline{b} \cdot \overline{c}$ ve $\frac{\overline{a}}{\overline{c}} >_{\mathbf{D}} \frac{\overline{b}}{\overline{c}}$ dir.

2) Eğer $\overline{a} \leq_{\mathbf{D}} \overline{b}$ ise $\overline{a} \cdot \overline{c} \geq_{\mathbf{D}} \overline{b} \cdot \overline{c}$ ve $\frac{\overline{a}}{\overline{c}} \geq_{\mathbf{D}} \frac{\overline{b}}{\overline{c}}$ dir.

Teorem 3.1.10. $\overline{a} = a + \varepsilon a^*, \overline{b} = b + \varepsilon b^* \in \mathbf{D}$, $\overline{c} = c + \varepsilon c^* \in \mathbf{D}^{0+}$ ve $\overline{a} <_{\mathbf{D}} \overline{b}$ olsun.

1) Kabul edelim ki $a < b$ olsun. Bu durumda, $\overline{a} \cdot \overline{c} <_{\mathbf{D}} \overline{b} \cdot \overline{c}$ dir.

2) Kabul edelim ki $a = b$ ve $a^* < b^*$ olsun. Bu durumda, $\overline{a} \cdot \overline{c} \leq_{\mathbf{D}} \overline{b} \cdot \overline{c}$ dir.

İspat. 1) $a < b$ ve $\overline{c} = c + \varepsilon c^* \in \mathbf{D}^{0+}$ olsun. Bu durumda, $\overline{a} \cdot \overline{c}$ ve $\overline{b} \cdot \overline{c}$ dual çarpımları hipotez ile birlikte göz önüne alındığında, $ac = bc = 0$ ve $ac^* + a^*c < bc^* + b^*c$

ifadeleri yazılabilir. Dual sayılar sistemi üzerinde tanımlanan sıralama bağıntısından $\overline{a}\cdot\overline{c} <_{\mathbf{D}} \overline{b}\cdot\overline{c}$ dir.

2) $a = b$ ve $a^* < b^*$ olsun. $\overline{c} = c+\varepsilon c^* \in \mathbf{D}^{0+}$ olduğundan $ac = bc = 0$ eşitliği ile $ac^* + a^*c \leq bc^* + b^*c$ eşitsizliği yazılabilir öyle ki $\overline{a}\cdot\overline{c} \leq_{\mathbf{D}} \overline{b}\cdot\overline{c}$ dir. □

Sonuç 3.1.3. $\overline{a} = a+\varepsilon a^*$, $\overline{b} = b+\varepsilon b^* \in \mathbf{D}$ ve $\overline{c} = c+\varepsilon c^* \in \mathbf{D}^{0+}$ olsun. Eğer $\overline{a} \leq_{\mathbf{D}} \overline{b}$ ise $\overline{a}\cdot\overline{c} \leq_{\mathbf{D}} \overline{b}\cdot\overline{c}$ dir.

Teorem 3.1.11. $\overline{a} = a+\varepsilon a^*$, $\overline{b} = b+\varepsilon b^* \in \mathbf{D}$, $\overline{c} = c+\varepsilon c^* \in \mathbf{D}^{0-}$ ve $\overline{a} <_{\mathbf{D}} \overline{b}$ olsun.

1) Kabul edelim ki $a < b$ olsun. Bu durumda, $\overline{a}\cdot\overline{c} >_{\mathbf{D}} \overline{b}\cdot\overline{c}$ dir.

2) Kabul edelim ki $a = b$ ve $a^* < b^*$ olsun. Bu durumda, $\overline{a}\cdot\overline{c} \geq_{\mathbf{D}} \overline{b}\cdot\overline{c}$ dir.

Sonuç 3.1.4. $\overline{a} = a+\varepsilon a^*$, $\overline{b} = b+\varepsilon b^* \in \mathbf{D}$ ve $\overline{c} = c+\varepsilon c^* \in \mathbf{D}^{0-}$ olsun. Eğer $\overline{a} \leq_{\mathbf{D}} \overline{b}$ ise $\overline{a}\cdot\overline{c} \geq_{\mathbf{D}} \overline{b}\cdot\overline{c}$ dir.

Teorem 3.1.12. $\overline{a} = a+\varepsilon a^*$, $\overline{b} = b+\varepsilon b^* \in \mathbf{D}^+$ için $\overline{0} <_{\mathbf{D}} \overline{a} <_{\mathbf{D}} \overline{b}$ olduğunu varsayalım. $1 \leq n \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki dual eşitsizlikler vardır:

1) $\overline{0} <_{\mathbf{D}} \overline{a}^{2n} <_{\mathbf{D}} \overline{b}^{2n}$.

2) $\overline{0} <_{\mathbf{D}} \overline{a}^{2n+1} <_{\mathbf{D}} \overline{b}^{2n+1}$.

3) $\dfrac{1}{\overline{a}} >_{\mathbf{D}} \dfrac{1}{\overline{b}} >_{\mathbf{D}} \overline{0}$.

İspat. $\overline{a} = a+\varepsilon a^*$, $\overline{b} = b+\varepsilon b^* \in \mathbf{D}^+$ için $\overline{0} <_{\mathbf{D}} \overline{a} <_{\mathbf{D}} \overline{b}$ olsun. Dual sayılar için ifade edilen sıralama bağıntısı dikkate alındığında teoremdeki her bir dual eşitsizliğin varlığını göstermek için ikişer durum söz konusudur:

1) Eğer $0 < a < b$ ise $0 < a^{2n} < b^{2n}$ elde edilir öyle ki $\overline{0} <_{\mathbf{D}} \overline{a}^{2n} <_{\mathbf{D}} \overline{b}^{2n}$ dir. Kabul edelim ki $0 < a = b$ olsun. Bu durumda, $a^* < b^*$ ve $2na^{2n-1} = 2nb^{2n-1} > 0$ olduğundan $a^*2na^{2n-1} < b^*2nb^{2n-1}$ eşitsizliği elde edilir. O halde, dual sayılar üzerindeki sıralama bağıntısı düşünüldüğünde $\overline{0} <_{\mathbf{D}} \overline{a}^{2n} <_{\mathbf{D}} \overline{b}^{2n}$ dual eşitsizliği mevcuttur.

2) Bu öncülün ispatı (1) öncülünün ispatına benzer olarak yapılır.

3) $0 < a < b$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b} > 0$ eşitsizliği yazılabilir ve bu eşitsizlik $\dfrac{1}{\overline{a}} >_{\mathbf{D}} \dfrac{1}{\overline{b}} >_{\mathbf{D}} \overline{0}$ dual eşitsizliğin var olduğunu gösterir. Şimdi, $0 < a = b$ olduğunu varsayalım. O halde, $a^* < b^*$ ve $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b} > 0$ olduğundan $-\dfrac{a^*}{a^2} > -\dfrac{b^*}{b^2}$ eşitsizliği vardır. Dual sıralama bağıntısından $\dfrac{1}{\overline{a}} >_{\mathbf{D}} \dfrac{1}{\overline{b}} >_{\mathbf{D}} \overline{0}$ dual eşitsizliği elde edilir. □

Teorem 3.1.13. $\overline{a} = a + \varepsilon a^*$, $\overline{b} = b + \varepsilon b^* \in \mathbf{D}^-$ için $\overline{a} <_{\mathbf{D}} \overline{b} <_{\mathbf{D}} \overline{0}$ olduğunu varsayalım. $1 \leq n \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki dual eşitsizlikler vardır:

1) $\overline{a}^{2n} >_{\mathbf{D}} \overline{b}^{2n} >_{\mathbf{D}} \overline{0}$.

2) $\overline{a}^{2n+1} <_{\mathbf{D}} \overline{b}^{2n+1} <_{\mathbf{D}} \overline{0}$.

3) $\overline{0} >_{\mathbf{D}} \dfrac{1}{\overline{a}} >_{\mathbf{D}} \dfrac{1}{\overline{b}}$.

Teorem 3.1.14. $\overline{a} = a + \varepsilon a^* \in \mathbf{D}^+$ ve $\overline{b} = b + \varepsilon b^* \in \mathbf{D}^-$ için $\overline{b} <_{\mathbf{D}} \overline{0} <_{\mathbf{D}} \overline{a}$ olduğundan $\dfrac{1}{\overline{b}} <_{\mathbf{D}} \overline{0} <_{\mathbf{D}} \dfrac{1}{\overline{a}}$ dir.

Teorem 3.1.15. $\overline{a} = a + \varepsilon a^*$ bir dual sayı olsun. Bu durumda, $\overline{0} <_{\mathbf{D}} \overline{a} <_{\mathbf{D}} 1 + \varepsilon 0$ dır. $\Leftrightarrow \overline{a} >_{\mathbf{D}} \overline{a}^2$ dir.

İspat. $\overline{a} = a + \varepsilon a^*$ bir dual sayı ve $\overline{0} <_{\mathbf{D}} \overline{a} <_{\mathbf{D}} 1 + \varepsilon 0$ olsun. Bu dual eşitsizliğin çözüm kümesi

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

şeklindedir. Burada,

$$\begin{aligned} S_1 &= \{\overline{a} = a + \varepsilon a^* \in \mathbf{D} \mid 0 < a < 1,\ a^* \in \mathbb{R}\}, \\ S_2 &= \{\overline{a} = a + \varepsilon a^* \in \mathbf{D} \mid a = 0,\ a^* > 0\}, \\ S_3 &= \{\overline{a} = a + \varepsilon a^* \in \mathbf{D} \mid a = 1,\ a^* < 0\} \end{aligned}$$

dir. O halde, yukarıdaki cümleler göz önüne alındığında aşağıdaki üç durum söz konusudur:

i) $\overline{a} \in S_1$ için $a > a^2$ olduğundan $\overline{a} >_{\mathbf{D}} \overline{a}^2$ dir.

ii) $\overline{a} \in S_2$ için $\overline{a}^2 = 0 + \varepsilon 0$ ve $a^* > 0$ olduğundan $\overline{a} >_{\mathbf{D}} \overline{a}^2$ dir.

iii) $\overline{a} \in S_3$ için $\overline{a}^2 = 1 + 2\varepsilon a^*$ ve $a^* < 0$ olduğundan $\overline{a} >_{\mathbf{D}} \overline{a}^2$ dir.

Şimdi, tersine $\overline{a} >_{\mathbf{D}} \overline{a}^2$ olsun. Dual sayılarda sıralama bağıntısından açıktır ki $\overline{a} \in S$, yani $\overline{0} <_{\mathbf{D}} \overline{a} <_{\mathbf{D}} 1 + \varepsilon 0$ dır. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Sonuç 3.1.5. $\overline{a}$ ve $\overline{b}$ iki dual sayı olsun. Bu durumda, aşağıdaki öncülleri elde etmek mümkündür:

1) Eğer $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbf{D}^+$ ise $\overline{a} \cdot \overline{b} >_{\mathbf{D}} \overline{0}$ dir.

2) Eğer $\overline{a} \in \mathbf{D}^+$ ve $\overline{b} \in \mathbf{D}^{0+}$ ise $\overline{a} \cdot \overline{b} >_{\mathbf{D}} \overline{0}$ dir.

3) Eğer $\overline{a} \in \mathbf{D}^{0+}$ ve $\overline{b} \in \mathbf{D}^{0+}$ ise $\overline{a} \cdot \overline{b} \geq_{\mathbf{D}} \overline{0}$ dir.

4) Eğer $\overline{a},\overline{b} \in \mathbf{D}^-$ ise $\overline{a}\cdot\overline{b} >_{\mathbf{D}} \overline{0}$ dir.

5) Eğer $\overline{a} \in \mathbf{D}^-$ ve $\overline{b} \in \mathbf{D}^{0-}$ ise $\overline{a}\cdot\overline{b} >_{\mathbf{D}} \overline{0}$ dir.

6) Eğer $\overline{a} \in \mathbf{D}^{0-}$ ve $\overline{b} \in \mathbf{D}^{0-}$ ise $\overline{a}\cdot\overline{b} \geq_{\mathbf{D}} \overline{0}$ dir.

7) Eğer $\overline{a} \in \mathbf{D}^+$ ve $\overline{b} \in \mathbf{D}^-$ ise $\overline{a}\cdot\overline{b} <_{\mathbf{D}} \overline{0}$ dir.

8) Eğer $\overline{a} \in \mathbf{D}^{0+}$ ve $\overline{b} \in \mathbf{D}^-$ ise $\overline{a}\cdot\overline{b} <_{\mathbf{D}} \overline{0}$ dir.

9) Eğer $\overline{a} \in \mathbf{D}^{0-}$ ve $\overline{b} \in \mathbf{D}^+$ ise $\overline{a}\cdot\overline{b} <_{\mathbf{D}} \overline{0}$ dir.

10) Eğer $\overline{a} \in \mathbf{D}^{0-}$ ve $\overline{b} \in \mathbf{D}^{0+}$ ise $\overline{a}\cdot\overline{b} \leq_{\mathbf{D}} \overline{0}$ dir.

Sonuç 3.1.6. 1) Herhangi bir $\overline{a} = a+\varepsilon a^*$ dual sayısı ve $\overline{\varsigma} = \varsigma+\varepsilon\varsigma^* \in \mathbf{D}^+$ için

$$|\overline{a}|_{\mathbf{D}} <_{\mathbf{D}} \overline{\varsigma} \Leftrightarrow -\overline{\varsigma} <_{\mathbf{D}} \overline{a} <_{\mathbf{D}} \overline{\varsigma}$$

dir.

2) Reel kısmı sıfırdan farklı herhangi bir $\overline{a} = a+\varepsilon a^*$ dual sayısı ve $\overline{\varsigma} = \varsigma+\varepsilon\varsigma^* \in \mathbf{D}^+$ için

$$|\overline{a}|_{\mathbf{D}} >_{\mathbf{D}} \overline{\varsigma} \Leftrightarrow \overline{a} >_{\mathbf{D}} \overline{\varsigma} \text{ veya } \overline{a} <_{\mathbf{D}} -\overline{\varsigma}$$

dir.

İspat. 1) $\overline{a} = a+\varepsilon a^*$ herhangi bir dual sayı ve $\overline{\varsigma} = \varsigma+\varepsilon\varsigma^* \in \mathbf{D}^+$ olsun. Bir dual sayının mutlak değeri

$$|\overline{a}|_{\mathbf{D}} = \begin{cases} \overline{0} & ,a=0 \\ |a|+\varepsilon a^*\dfrac{a}{|a|} & ,a\neq 0 \end{cases}$$

şeklindedir ve ayrıca, dual eşitsizlik sistemi göz önüne alındığında, $-\overline{\varsigma} <_{\mathbf{D}} \overline{a} <_{\mathbf{D}} \overline{\varsigma}$ dual eşitsizliğinin çözüm cümlesi

$$\begin{aligned} \overline{S} &= \{\overline{a} = a+\varepsilon a^* \in \mathbf{D} \mid -\varsigma < a < \varsigma,\ a^* \in \mathbb{R}\} \\ &\quad \cup \{\overline{a} = a+\varepsilon a^* \in \mathbf{D} \mid a = -\varsigma \text{ ve } a^* > -\varsigma^*\} \\ &\quad \cup \{\overline{a} = a+\varepsilon a^* \in \mathbf{D} \mid a = \varsigma \text{ ve } a^* < \varsigma^*\} \\ &= S_1 \cup S_2 \cup S_3 \end{aligned}$$

şeklindedir.

Şimdi, kabul edelim ki $|\overline{a}|_{\mathbf{D}} <_{\mathbf{D}} \overline{\varsigma}$ olsun. Eğer $a=0$ ise $0 \in (-\varsigma,\varsigma)$ olduğundan $\overline{a} \in \overline{S}$

dir. Kabul edelim ki $a \neq 0$ olsun. Bu durumda,

$$|a| + \varepsilon a^* \frac{a}{|a|} <_{\mathbf{D}} \varsigma + \varepsilon \varsigma^*$$

biçiminde olup dual sayılarda eşitsizlik tanımından $|a| < \varsigma$ veya $\left(|a| = \varsigma \text{ ve } a^* \frac{a}{|a|} < \varsigma^*\right)$ elde edilir ve her bir durum için açıkça görülmektedir ki $\overline{a} \in \overline{S}$, yani $-\overline{\varsigma} <_{\mathbf{D}} \overline{a} <_{\mathbf{D}} \overline{\varsigma}$ dir. Tersine $-\overline{\varsigma} <_{\mathbf{D}} \overline{a} <_{\mathbf{D}} \overline{\varsigma}$ olsun. Bu durumda, $\overline{a} \in \overline{S} = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ şeklinde olup her bir durum için $|\overline{a}|_{\mathbf{D}} <_{\mathbf{D}} \overline{\varsigma}$ olduğu açıktır.
2) Bu öncülün ispatı (1) öncülüne benzer şekilde gösterilir. □

Teorem 3.1.16. (Dual Cauchy-Schwarz eşitsizliği) $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n\}$ ve $\{\overline{b}_1, \overline{b}_2, ..., \overline{b}_n\}$ dual sayıların iki cümlesi olsun. Burada, $\overline{a}_i = a_i + \varepsilon a_i^*$, $\overline{b}_i = b_i + \varepsilon b_i^*$ ve $1 \leq i \leq n$ dir. Bu durumda,

$$\left(\overline{a}_1 \overline{b}_1 + ... + \overline{a}_n \overline{b}_n\right)^2 \leq_{\mathbf{D}} \left(\overline{a}_1^2 + ... + \overline{a}_n^2\right) \left(\overline{b}_1^2 + ... + \overline{b}_n^2\right)$$

veya bunun eşiti olan

$$\left\langle \overrightarrow{\overline{a}}, \overrightarrow{\overline{b}} \right\rangle_{\mathbf{D}}^2 \leq_{\mathbf{D}} \left\langle \overrightarrow{\overline{a}}, \overrightarrow{\overline{a}} \right\rangle_{\mathbf{D}} \left\langle \overrightarrow{\overline{b}}, \overrightarrow{\overline{b}} \right\rangle_{\mathbf{D}}$$

dual eşitsizliği vardır. Burada, $\overrightarrow{\overline{a}} = (\overline{a}_1, ..., \overline{a}_n) = \overrightarrow{a} + \varepsilon \overrightarrow{a^*}$ ve $\overrightarrow{\overline{b}} = \left(\overline{b}_1, ..., \overline{b}_n\right) = \overrightarrow{b} + \varepsilon \overrightarrow{b^*}$ dir.

İspat. Eğer $\overline{\lambda} \in \mathbf{D}$ için $\overrightarrow{\overline{a}} = \overline{\lambda} \overrightarrow{\overline{b}}$ ise bu durumda, $\left\langle \overrightarrow{\overline{a}}, \overrightarrow{\overline{b}} \right\rangle_{\mathbf{D}}^2 = \left\langle \overrightarrow{\overline{a}}, \overrightarrow{\overline{a}} \right\rangle_{\mathbf{D}} \left\langle \overrightarrow{\overline{b}}, \overrightarrow{\overline{b}} \right\rangle_{\mathbf{D}}$ olup $\left\langle \overrightarrow{\overline{a}}, \overrightarrow{\overline{b}} \right\rangle_{\mathbf{D}}^2 \leq_{\mathbf{D}} \left\langle \overrightarrow{\overline{a}}, \overrightarrow{\overline{a}} \right\rangle_{\mathbf{D}} \left\langle \overrightarrow{\overline{b}}, \overrightarrow{\overline{b}} \right\rangle_{\mathbf{D}}$ dir. Eğer $\overrightarrow{a}$ ve $\overrightarrow{b}$ vektörlerinden en az biri sıfır vektörü ise o zaman $\left\langle \overrightarrow{\overline{a}}, \overrightarrow{\overline{b}} \right\rangle_{\mathbf{D}}^2 = \left\langle \overrightarrow{\overline{a}}, \overrightarrow{\overline{a}} \right\rangle_{\mathbf{D}} \left\langle \overrightarrow{\overline{b}}, \overrightarrow{\overline{b}} \right\rangle_{\mathbf{D}} = \overline{0}$ olup $\left\langle \overrightarrow{\overline{a}}, \overrightarrow{\overline{b}} \right\rangle_{\mathbf{D}}^2 \leq_{\mathbf{D}} \left\langle \overrightarrow{\overline{a}}, \overrightarrow{\overline{a}} \right\rangle_{\mathbf{D}} \left\langle \overrightarrow{\overline{b}}, \overrightarrow{\overline{b}} \right\rangle_{\mathbf{D}}$ dir. Şimdi, $\overrightarrow{a} \neq 0$ ve $\overrightarrow{b} \neq 0$ olsun. Eğer $\overrightarrow{a}$ ve $\overrightarrow{b}$ vektörleri lineer bağımsız ise $\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle^2 < \langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a} \rangle \left\langle \overrightarrow{b}, \overrightarrow{b} \right\rangle$ olup dual sayılardaki sıralama bağıntısından $\left\langle \overrightarrow{\overline{a}}, \overrightarrow{\overline{b}} \right\rangle_{\mathbf{D}}^2 \leq_{\mathbf{D}} \left\langle \overrightarrow{\overline{a}}, \overrightarrow{\overline{a}} \right\rangle_{\mathbf{D}} \left\langle \overrightarrow{\overline{b}}, \overrightarrow{\overline{b}} \right\rangle_{\mathbf{D}}$ dual eşitsizliği elde edilir. Eğer $\overrightarrow{a}$ ve $\overrightarrow{b}$ reel vektörleri lineer bağımlı, yani $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$ için $\overrightarrow{a} = \mu \overrightarrow{b}$ eşitliği göz önüne alınırsa

$$\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle^2 = \left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a} \right\rangle \left\langle \overrightarrow{b}, \overrightarrow{b} \right\rangle \tag{3.1.1}$$

eşitliği ile

$$\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle \left(\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b^*} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{a^*}, \overrightarrow{b} \right\rangle \right) \leq \left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a} \right\rangle \left\langle \overrightarrow{b}, \overrightarrow{b^*} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{b}, \overrightarrow{b} \right\rangle \left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a^*} \right\rangle \tag{3.1.2}$$

eşitsizliği elde edilir. Dual sayılarda kısmi sıralama bağıntısı ile (3.1.1) ve (3.1.2) denklemleri birlikte göz önüne alındığında,

$$\left\langle \overrightarrow{\tilde{a}}, \overrightarrow{\tilde{b}} \right\rangle_{\mathbf{D}}^2 \leq_{\mathbf{D}} \left\langle \overrightarrow{\tilde{a}}, \overrightarrow{\tilde{a}} \right\rangle_{\mathbf{D}} \left\langle \overrightarrow{\tilde{b}}, \overrightarrow{\tilde{b}} \right\rangle_{\mathbf{D}}$$

dual eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Sonuç 3.1.7. $\overrightarrow{\tilde{x}}, \overrightarrow{\tilde{y}} \in \mathbf{D}^n$ birer dual vektör olmak üzere,

$$\left| \left\langle \overrightarrow{\tilde{x}}, \overrightarrow{\tilde{y}} \right\rangle_{\mathbf{D}} \right|_{\mathbf{D}} \leq_{\mathbf{D}} \left\| \overrightarrow{\tilde{x}} \right\|_{\mathbf{D}} \left\| \overrightarrow{\tilde{y}} \right\|_{\mathbf{D}}$$

dir.

Teorem 3.1.17. (Dual Minkowski eşitsizliği) $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n\}$ ve $\{\overline{b}_1, \overline{b}_2, ..., \overline{b}_n\}$ dual sayıların iki cümlesi olsun. Burada, $\overline{a}_i = a_i + \varepsilon a_i^*$, $\overline{b}_i = b_i + \varepsilon b_i^*$ ve $1 \leq i \leq n$ dir. $1 \leq p \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki iki durum mevcuttur:

1) Eğer $\forall a_i = 0,\ \exists b_i \neq 0$ ve $\left\langle \left(b_{t_1} |b_{t_1}|^{p-2}, ..., b_{t_n} |b_{t_n}|^{p-2} \right), \left(a_{t_1}^*, ..., a_{t_n}^* \right) \right\rangle \geq 0$ ise bu durumda,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \left| \overline{a}_k + \overline{b}_k \right|_{\mathbf{D}}^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq_{\mathbf{D}} \left(\sum_{k=1}^{n} \left| \overline{a}_k \right|_{\mathbf{D}}^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} \left| \overline{b}_k \right|_{\mathbf{D}}^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.1.3}$$

dual eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlik ayrıca,
$\forall b_i = 0,\ \exists a_i \neq 0$ ve $\left\langle \left(a_{t_1} |a_{t_1}|^{p-2}, a_{t_2} |a_{t_2}|^{p-2}, ..., a_{t_n} |a_{t_n}|^{p-2} \right), \left(b_{t_1}^*, ..., b_{t_n}^* \right) \right\rangle \geq 0$ iken de doğrudur. Burada, $1 \leq t_1, ..., t_n \leq n$, $\forall b_{t_i} \neq 0$ ve $\forall a_{t_i} \neq 0$ dır.

2) Diğer tüm durumlarda aşağıdaki dual eşitsizlik vardır:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \left| \overline{a}_k + \overline{b}_k \right|_{\mathbf{D}}^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq_{\mathbf{D}} \left(\sum_{k=1}^{n} \left| \overline{a}_k \right|_{\mathbf{D}}^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} \left| \overline{b}_k \right|_{\mathbf{D}}^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.1.4}$$

İspat. Kabul edelim ki $\forall a_i = 0$ ve $\exists b_i \neq 0$ olsun. Bu durumda, $1 \leq t_1, ..., t_n \leq n$ için aşağıdaki iki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\overline{a}_k+\overline{b}_k\right|_{\mathbf{D}}^{p}\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(|b_{t_1}|^p+\ldots+|b_{t_n}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad +\varepsilon\left(\frac{b_{t_1}|b_{t_1}|^{p-2}\left(a_{t_1}^*+b_{t_1}^*\right)+\ldots+b_{t_n}|b_{t_n}|^{p-2}\left(a_{t_n}^*+b_{t_n}^*\right)}{\sqrt[p]{\left(|b_{t_1}|^p+\ldots+|b_{t_n}|^p\right)^{p-1}}}\right)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n}|\overline{a}_k|_{\mathbf{D}}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\overline{b}_k\right|_{\mathbf{D}}^{p}\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(|b_{t_1}|^p+\ldots+|b_{t_n}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad +\varepsilon\left(\frac{b_{t_1}b_{t_1}^*|b_{t_1}|^{p-2}+\ldots+b_{t_n}b_{t_n}^*|b_{t_n}|^{p-2}}{\sqrt[p]{\left(|b_{t_1}|^p+\ldots+|b_{t_n}|^p\right)^{p-1}}}\right).\end{aligned}$$

Burada, $\forall b_{t_i}\neq 0$ dır. Eğer $\left\langle\left(b_{t_1}|b_{t_1}|^{p-2},b_{t_2}|b_{t_2}|^{p-2},\ldots,b_{t_n}|b_{t_n}|^{p-2}\right),\left(a_{t_1}^*,\ldots,a_{t_n}^*\right)\right\rangle\geq 0$ eşitsizliği geçerli ise (3.1.3) dual eşitsizliği elde edilir. Eğer

$$\left\langle\left(b_{t_1}|b_{t_1}|^{p-2},b_{t_2}|b_{t_2}|^{p-2},\ldots,b_{t_n}|b_{t_n}|^{p-2}\right),\left(a_{t_1}^*,\ldots,a_{t_n}^*\right)\right\rangle\leq 0$$

eşitsizliği mevcut ise bu durumda, (3.1.4) dual eşitsizliği elde edilir. Şimdi varsayalım ki $\forall b_i=0,\ \exists a_i\neq 0$ ve $\left\langle\left(a_{t_1}|a_{t_1}|^{p-2},a_{t_2}|a_{t_2}|^{p-2},\ldots,a_{t_n}|a_{t_n}|^{p-2}\right),\left(b_{t_1}^*,\ldots,b_{t_n}^*\right)\right\rangle\geq 0$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki dual eşitsizliği yazabiliriz:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\overline{a}_k+\overline{b}_k\right|_{\mathbf{D}}^{p}\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(|a_{t_1}|^p+\ldots+|a_{t_n}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad +\varepsilon\left(\frac{a_{t_1}|a_{t_1}|^{p-2}\left(a_{t_1}^*+b_{t_1}^*\right)+\ldots+a_{t_n}|a_{t_n}|^{p-2}\left(a_{t_n}^*+b_{t_n}^*\right)}{\sqrt[p]{\left(|a_{t_1}|^p+\ldots+|a_{t_n}|^p\right)^{p-1}}}\right) \\ &\geq_{\mathbf{D}} \left(|a_{t_1}|^p+\ldots+|a_{t_n}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad +\varepsilon\left(\frac{a_{t_1}a_{t_1}^*|a_{t_1}|^{p-2}+\ldots+a_{t_n}a_{t_n}^*|a_{t_n}|^{p-2}}{\sqrt[p]{\left(|a_{t_1}|^p+\ldots+|a_{t_n}|^p\right)^{p-1}}}\right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n}|\overline{a}_k|_{\mathbf{D}}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\overline{b}_k\right|_{\mathbf{D}}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Burada, $\forall a_{t_i} \neq 0$ dır. Eğer

$$\left\langle \left(a_{t_1} \left| a_{t_1} \right|^{p-2}, a_{t_2} \left| a_{t_2} \right|^{p-2}, ..., a_{t_n} \left| a_{t_n} \right|^{p-2} \right), \left(b_{t_1}^*, ..., b_{t_n}^* \right) \right\rangle \leq 0$$

ise (3.1.4) dual eşitsizliği elde edilir.

a_i ve b_i sayılarının diğer tüm durumları düşünüldüğünde (3.1.4) dual eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 3.1.18. (Dual Chebyshev eşitsizliği) $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n\}$ ve $\left\{\overline{b}_1, \overline{b}_2, ..., \overline{b}_n\right\}$ dual sayıların iki cümlesi olsun. Burada, $\overline{a}_i = a_i + \varepsilon a_i^*$, $\overline{b}_i = b_i + \varepsilon b_i^*$ ve $1 \leq i \leq n$ dir. Eğer $\overline{a}_1 \geq_{\mathbf{D}} \overline{a}_2 \geq_{\mathbf{D}} ... \geq_{\mathbf{D}} \overline{a}_n$ ve $\overline{b}_1 \geq_{\mathbf{D}} \overline{b}_2 \geq_{\mathbf{D}} ... \geq_{\mathbf{D}} \overline{b}_n$, veya $\overline{a}_1 \leq_{\mathbf{D}} \overline{a}_2 \leq_{\mathbf{D}} ... \leq_{\mathbf{D}} \overline{a}_n$ ve $\overline{b}_1 \leq_{\mathbf{D}} \overline{b}_2 \leq_{\mathbf{D}} ... \leq_{\mathbf{D}} \overline{b}_n$ ise bu durumda,

$$\left(\frac{\overline{a}_1 + \overline{a}_2 + ... + \overline{a}_n}{n} \right) \left(\frac{\overline{b}_1 + \overline{b}_2 + ... + \overline{b}_n}{n} \right) \leq_{\mathbf{D}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \overline{a}_k \overline{b}_k$$

dual eşitsizliği vardır.

İspat. Dual sıralama bağıntısı göz önüne alınarak teoremin ispatı kolaylıkla elde edilir. □

Teorem 3.1.19. (Dual aritmetik-geometrik eşitsizliği) $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n\}$ dual pozitif sayıların bir cümlesi olsun. Burada, $\overline{a}_i = a_i + \varepsilon a_i^*$, $a_i > 0$ ve $1 \leq i \leq n$ dir. Dual aritmetik ortalama

$$\overline{A}_n = \left(\frac{\overline{a}_1 + \overline{a}_2 + ... + \overline{a}_n}{n} \right)$$

ve dual geometrik ortalama

$$\overline{G}_n = \left(\overline{a}_1 \overline{a}_2 ... \overline{a}_n \right)^{\frac{1}{n}}$$

şeklinde olup

$$\overline{A}_n \geq_{\mathbf{D}} \overline{G}_n$$

dir.

İspat. $\overline{A}_n$ ve $\overline{G}_n$ ifadeleri açılırsa

$$\overline{A}_n = \left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \right) + \varepsilon \left(\frac{a_1^* + a_2^* + ... + a_n^*}{n} \right)$$

ve

$$\overline{G}_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} + \varepsilon \left(\frac{a_1^* a_2 a_3 ... a_n + a_2^* a_1 a_3 ... a_n + ... + a_n^* a_1 a_2 ... a_{n-1}}{n \sqrt[n]{(a_1 a_2 ... a_n)^{n-1}}} \right)$$

denklemleri elde edilir. Eğer a_i lerden en az ikisi birbirinden farklı ise bu durumda, $\left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \right) > \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$ olur öyle ki $\overline{A}_n \geq_{\mathbf{D}} \overline{G}_n$ dir. Eğer a_i lerin hepsi birbirine eşit ise bu durumda,

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \right) = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$

eşitliği ile

$$\left(\frac{a_1^* + a_2^* + ... + a_n^*}{n} \right) \geq \left(\frac{a_1^* a_2 a_3 ... a_n + a_2^* a_1 a_3 ... a_n + ... + a_n^* a_1 a_2 ... a_{n-1}}{n \sqrt[n]{(a_1 a_2 ... a_n)^{n-1}}} \right)$$

eşitsizliği vardır. Dual sayılarda kısmi sıralama bağıntısı göz önüne alınırsa, $\overline{A}_n \geq_{\mathbf{D}} \overline{G}_n$ dual eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Şimdi, bu dual sıralama bağıntısından faydalanarak $\mathbf{D}^n$ dual uzayında baz ve topolojiler oluşturulabileceğini göstereceğiz.

Teorem 3.1.20. $\mathbf{D}^n$ n-boyutlu bir dual uzay ve $\|\cdot\|$, $\mathbb{R}^n$ üzerinde norm olmak üzere,

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{\mathbf{D}} &: \mathbf{D}^n \to \mathbf{D} \\ \left\| \overrightarrow{\widetilde{x}} \right\|_{\mathbf{D}} &= \sqrt{\left\langle \overrightarrow{\widetilde{x}}, \overrightarrow{\widetilde{x}} \right\rangle_{\mathbf{D}}} = \begin{cases} \overline{0} & , \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \\ \|\overrightarrow{x}\| + \varepsilon \dfrac{\left\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x^*} \right\rangle}{\|\overrightarrow{x}\|} & , \overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0} \end{cases} \end{aligned}$$

dual fonksiyonu verilsin. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler mevcuttur:

i) $\forall \overrightarrow{\widetilde{x}} = \overrightarrow{x} + \varepsilon \overrightarrow{x^*} \in \mathbf{D}^n$ için $\left\| \overrightarrow{\widetilde{x}} \right\|_{\mathbf{D}} \geq_{\mathbf{D}} \overline{0}$ dir. Yani, $\left\| \overrightarrow{\widetilde{x}} \right\|_{\mathbf{D}} \in \mathbf{D}^+ \cup \{\overline{0}\}$ dir.

ii) $\forall \overrightarrow{\widetilde{x}} = \overrightarrow{x} + \varepsilon \overrightarrow{x^*} \in \mathbf{D}^n$ ve $\forall \overline{\lambda} = \lambda + \in \lambda^* \in \mathbf{D}$ için $\left\| \overline{\lambda}\, \overrightarrow{\widetilde{x}} \right\|_{\mathbf{D}} = \left| \overline{\lambda} \right|_{\mathbf{D}} \left\| \overrightarrow{\widetilde{x}} \right\|_{\mathbf{D}}$ dir.

iii) $\overrightarrow{\widetilde{x}} = \overrightarrow{x} + \varepsilon \overrightarrow{x^*}$, $\overrightarrow{\widetilde{y}} = \overrightarrow{y} + \varepsilon \overrightarrow{y^*} \in \mathbf{D}^n$ için $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{y} \neq \overrightarrow{0}$ ve $\left\langle \overrightarrow{x^*}, \overrightarrow{y} \right\rangle \geq 0$ $\left(\text{veya } \overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0},\ \overrightarrow{y} = \overrightarrow{0} \text{ ve } \left\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y^*} \right\rangle \geq 0 \right)$ şartlarının sağlanması durumunda

$$\left\| \overrightarrow{\widetilde{x}} + \overrightarrow{\widetilde{y}} \right\|_{\mathbf{D}} \geq_{\mathbf{D}} \left\| \overrightarrow{\widetilde{x}} \right\|_{\mathbf{D}} + \left\| \overrightarrow{\widetilde{y}} \right\|_{\mathbf{D}}$$

dual eşitsizliği elde edilir. Diğer tüm durumlarda,

$$\left\| \overrightarrow{\overline{x}} + \overrightarrow{\overline{y}} \right\|_{\mathbf{D}} \leq_{\mathbf{D}} \left\| \overrightarrow{\overline{x}} \right\|_{\mathbf{D}} + \left\| \overrightarrow{\overline{y}} \right\|_{\mathbf{D}}$$

dual eşitsizliği mevcuttur. Bu özelliğe dual üçgen eşitsizliği adı verilir [32].

Teorem 3.1.21. $\overline{a} = a + \varepsilon a^* \in \mathbf{D}^n$ ve $\overline{r} = r + \varepsilon r^* \in \mathbf{D}^+$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\overline{B}(\overline{a},\overline{r}) &= \{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n \mid \|x-a\| < r,\ x^* \in \mathbb{R}^n\} \\
&\quad \cup \left\{ \overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n \mid \|x-a\| = r \text{ ve } \frac{\langle x-a, x^*-a^* \rangle}{\|x-a\|} < r^* \right\} \\
&= U_1 \cup U_2 \\
&= U_1 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_l \quad (l \in I = \{1,2,\ldots\})
\end{aligned}$$

olsun. Bu durumda,

$$U_3 = \left\{ \overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n \mid x = a',\ m < x_1^* < n,\ x_{j+1}^* = c_j \in \mathbb{R},\ m,n \in [-\infty,\infty] \right\}$$

şeklinde olup bütün U_1, U_3, C_l $(l \in I = \{1,2,\ldots\})$ cümlelerinin koleksiyonu $\mathbf{D}^n$ üzerinde $\overline{\phi}$ bazını oluşturur. Bu bazdan elde edilen topoloji $\overline{\tau}_{\overline{d}}$ ile gösterilir [32].

İspat. İlk olarak, $\bigcup\limits_{\overline{A}_i \in \overline{\phi}} \overline{A}_i = \mathbf{D}^n$ olduğu açıktır. Şimdi, $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 = \varnothing$ dışında kalan bütün $\overline{A}_1, \overline{A}_2 \in \overline{\phi}$ için $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2$ cümlesinin $\overline{\phi}$ sınıfına ait bir takım cümlelerin keyfi birleşimi şeklinde yazılabileceğini gösterelim.

$$\begin{aligned}
\overline{B}_1 &= \{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n \mid \|x-a_1\| < r_1,\ x^* \in \mathbb{R}^n\} \\
&\quad \cup \left\{ \overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n \mid \|x-a_1\| = r_1 \text{ ve } \frac{\langle x-a_1, x^*-a_1^* \rangle}{\|x-a_1\|} < r_1^* \right\} \\
&= U_1 \cup C_1' \cup \ldots \cup C_l',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{B}_2 &= \{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n \mid \|x-a_2\| < r_2,\ x^* \in \mathbb{R}^n\} \\
&\quad \cup \left\{ \overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n \mid \|x-a_2\| = r_2 \text{ ve } \frac{\langle x-a_2, x^*-a_2^* \rangle}{\|x-a_2\|} < r_2^* \right\} \\
&= U_1' \cup C_1'' \cup \ldots \cup C_{l'}'',
\end{aligned}$$

$$U_3' = \left\{ \overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n \mid x = b',\ m_1 < x_1^* < n_1,\ x_{j+1}^* = c_j' \in \mathbb{R},\ m_1,n_1 \in [-\infty,\infty] \right\}$$

ve

$$U_3'' = \left\{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n \mid x = b'',\ m_2 < x_1^* < n_2,\ x_{j+1}^* = c_j'' \in \mathbb{R},\ m_2, n_2 \in [-\infty, \infty]\right\}$$

olmak üzere, $\overline{y} \in \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2$ olsun. O halde, oluşabilecek bütün durumları aşağıda inceleyelim:

$i)$ $\overline{y} \in U_3' \cap U_3''$ olsun. Bu durumda, $y = b' = b'' = b,\ m < y_1^* < n$ ve $y_{j+1}^* = c_j' = c_j'' = c_j$ biçiminde olup

$$U_3' \cap U_3'' = \left\{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n \mid x = b,\ m < x_1^* < n,\ x_{j+1}^* = c_j \in \mathbb{R},\ m, n \in [-\infty, \infty]\right\}$$

elde edilir. Burada, $m = \max\{m_1, m_2\}$ ve $n = \min\{n_1, n_2\}$ dir.

$ii)$ $\overline{y} \in U_1 \cap U_3''$ olsun. O halde, $U_1 \cap U_3'' = U_3'' \in \overline{\phi}$ dir.

$iii)$ $l \in I$ için $\overline{y} \in C_l' \cap U_3''$ olsun. Bu durumda, her bir $l \in I$ için $C_l' \cap U_3''$ cümlesi

$$U_3^i = \left\{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n \mid x = b^i,\ m_i < x_1^* < n_i,\ x_{j+1}^* = c_j^i \in \mathbb{R},\ m_i, n_i \in [-\infty, \infty]\right\}$$

şeklinde $\overline{\phi}$ sınıfına ait bir cümle biçiminde yazılabilir.

$iv)$ $\overline{y} \in U_1 \cap U_1'$ olsun. O halde, bu arakesit cümlesi

$$U^i = \{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n \mid \|x - a_i\| < r_i,\ x^* \in \mathbb{R}^n\}$$

şeklinde $\overline{\phi}$ sınıfına ait cümlelerin keyfi birleşimi şeklinde yazılabilir.

$v)$ $l' \in I$ için $\overline{y} \in U_1 \cap C_{l'}''$ olsun. Bu durumda, her bir $l' \in I$ için $U_1 \cap C_{l'}'' = C_{l'}'' \in \overline{\phi}$ olduğu açıktır.

$vi)$ $l, l' \in I$ için $\overline{y} \in C_l' \cap C_{l'}''$ olsun. Her bir $l, l' \in I$ için bu arakesit cümlesi ya $C_l^i \in \overline{\phi}$ şeklindeki bir cümle ile ifade edilebilir ya da $\overline{\phi}$ sınıfına ait U_3^i biçimindeki cümlelelerin keyfi birleşimi şeklinde yazılabilir.

Sonuç olarak, $\overline{\phi}$ sınıfı $\mathbf{D}^n$ üzerinde bir baz oluşturur ve bu bazdaki elemanların keyfi birleşimleri de $\overline{\tau}_{\overline{d}}$ ile gösterilen topolojiyi oluşturur. □

Teorem 3.1.22. $d_1, d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ birer metrik olmak üzere, $\overline{d} : \mathbf{D}^n \times \mathbf{D}^n \to \mathbf{D}$,

$$\overline{d}(\overline{x}, \overline{y}) = d_1(x, y) + \varepsilon d_2(x^*, y^*)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon aşağıdaki özellikleri sağlar:

$i)$ $\forall \overline{x},\overline{y} \in \mathbf{D}^n$ için $\overline{d}\left(\overline{x},\overline{y}\right) \geq_{\mathbf{D}} \overline{0}$ dir.

$ii)$ $\forall \overline{x},\overline{y} \in \mathbf{D}^n$ için $\overline{d}\left(\overline{x},\overline{y}\right) = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{y}$ dir.

$iii)$ $\forall \overline{x},\overline{y} \in \mathbf{D}^n$ için $\overline{d}\left(\overline{x},\overline{y}\right) = \overline{d}\left(\overline{y},\overline{x}\right)$ dir.

$iv)$ $\forall \overline{x},\overline{y},\overline{z} \in \mathbf{D}^n$ için $\overline{d}\left(\overline{x},\overline{y}\right) \leq_{\mathbf{D}} \overline{d}\left(\overline{x},\overline{z}\right) + \overline{d}\left(\overline{z},\overline{y}\right)$ dir.

İspat. $d_1, d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ birer metrik olmak üzere, $\overline{d} : \mathbf{D}^n \times \mathbf{D}^n \to \mathbf{D}$,

$$\overline{d}\left(\overline{x},\overline{y}\right) = d_1\left(x,y\right) + \varepsilon d_2\left(x^*,y^*\right)$$

şeklinde tanımlanan dual fonksiyonu ele alalım.

$i)$ $\forall \overline{x},\overline{y} \in \mathbf{D}^n$ için, $\overline{d}\left(\overline{x},\overline{y}\right) = d_1\left(x,y\right) + \varepsilon d_2\left(x^*,y^*\right) \geq_{\mathbf{D}} \overline{0}$ olduğu açıktır.

$ii)$ $\forall \overline{x},\overline{y} \in \mathbf{D}^n$ için,

$$\begin{aligned} \overline{d}\left(\overline{x},\overline{y}\right) &= \overline{0} \Leftrightarrow d_1\left(x,y\right) = 0 \text{ ve } d_2\left(x^*,y^*\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = y \text{ ve } x^* = y^* \\ &\Leftrightarrow \overline{x} = \overline{y} \end{aligned}$$

dir.

$iii)$ $\forall \overline{x},\overline{y} \in \mathbf{D}^n$ için, $\overline{d}\left(\overline{x},\overline{y}\right) = \overline{d}\left(\overline{y},\overline{x}\right)$ olduğu kolaylıkla görülmektedir.

$iv)$ $\forall \overline{x},\overline{y},\overline{z} \in \mathbf{D}^n$ için,

$$\begin{aligned} \overline{d}\left(\overline{x},\overline{y}\right) &= d_1\left(x,y\right) + \varepsilon d_2\left(x^*,y^*\right) \\ &\leq_{\mathbf{D}} d_1\left(x,z\right) + d_1\left(z,y\right) + \varepsilon\left(d_2\left(x^*,z^*\right) + d_2\left(z^*,y^*\right)\right) \\ &= \overline{d}\left(\overline{x},\overline{z}\right) + \overline{d}\left(\overline{z},\overline{y}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. □

Şimdi, $\overline{a} = a + \varepsilon a^* \in \mathbf{D}^n$ bir dual nokta ve $r, r^* \in \mathbb{R}^+$ için $\overline{r} = r + \varepsilon r^*$ bir dual sabit olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \overline{V} &= \left\{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n \mid \overline{d}\left(\overline{x},\overline{a}\right) <_{\mathbf{D}} \overline{r}\right\} \\ &= \left\{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n \mid d_1\left(x,a\right) < r,\ x^* \in \mathbb{R}^n\right\} \\ &\quad \cup \left\{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n \mid d_1\left(x,a\right) = r \text{ ve } d_2\left(x^*,a^*\right) < r^*\right\} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu $\overline{V}$ cümlesi dikkate alındığında aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.1.23. d_1 ve d_2, $\mathbb{R}^n$ üzerinde birer metrik, $\overline{a} = a + \varepsilon a^* \in \mathbf{D}^n$ bir dual nokta ve $r, r^* \in \mathbb{R}^+$ için $\overline{r} = r + \varepsilon r^*$ bir dual sabit olsun. Bu durumda, bütün

$$\Phi = \{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n \mid d_1(x,a) < r,\ x^* \in \mathbb{R}^n\}$$

ve

$$\Psi = \{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n \mid x = c \text{ ve } d_2(x^*, a^*) < r^*\}$$

cümlelerinin bir koleksiyonu $\mathbf{D}^n$ üzerinde $\overline{\phi}$ bazını oluşturur. Burada,

$$c \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid d_1(x,a) = r\}$$

dir.

Metrik uzaylarda açık ve kapalı yuvar cümlelerinin boş cümleden farklı olduklarını ama yuvar yüzeyinin boş bir cümle olabileceğini biliyoruz. Bu sebepten dolayı, yukarıdaki teoremde ufak bir değişiklik yaparak daha kullanışlı olan aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 3.1.24. d_1 ve d_2, $\mathbb{R}^n$ üzerinde birer metrik, $\overline{a} = a + \varepsilon a^* \in \mathbf{D}^n$ bir dual nokta ve $r, r^* \in \mathbb{R}^+$ için $\overline{r} = r + \varepsilon r^*$ bir dual sabit olsun. Bu durumda, bütün

$$\Phi = \{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n \mid d_1(x,a) < r,\ x^* \in \mathbb{R}^n\}$$

ve

$$\Psi = \{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n \mid x = c \ \text{(sabit) ve } d_2(x^*, a^*) < r^*\}$$

cümlelerinin bir koleksiyonu $\mathbf{D}^n$ üzerinde $\overline{\phi}$ bazını oluşturur.

İspat. Öncelikle, $\bigcup\limits_{\overline{A}_i \in \overline{\phi}} \overline{A}_i = \mathbf{D}^n$ olduğu açıktır. Şimdi de,

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n \mid d_1(x,a_1) < r_1,\ x^* \in \mathbb{R}^n\}, \\
\Phi_2 &= \{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n \mid d_1(x,a_2) < r_2,\ x^* \in \mathbb{R}^n\}, \\
\Psi_1 &= \{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n \mid x = c_1 \ \text{(sabit) ve } d_2(x^*, a_1^*) < r_1^*\}
\end{aligned}$$

ve

$$\Psi_2 = \{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n \mid x = c_2 \ \text{(sabit) ve } d_2(x^*, a_2^*) < r_2^*\}$$

biçimindeki cümleleri ele alalım.

i) $\overline{y} = y + \varepsilon y^* \in \Phi_1 \cap \Phi_2$ olsun. Bu durumda, $d_1(y, a_1) < r_1,\ d_1(y, a_2) < r_2$ ve $y^* \in \mathbb{R}^n$ olur öyle ki

$$\overline{y} \in \overline{A}_1 = \left\{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n \mid d_1(x, y) < r,\ x^* \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}^+\right\} \subset \Phi_1 \cap \Phi_2$$

olacak şekilde $\overline{A}_1 \in \overline{\phi}$ vardır.

ii) $\overline{y} = y + \varepsilon y^* \in \Phi_1 \cap \Psi_2$ olsun. Bu durumda, $\overline{y} \in \Phi_1 \cap \Psi_2 = \Psi_2 \in \overline{\phi}$ dir.

iii) $\overline{y} = y + \varepsilon y^* \in \Psi_1 \cap \Psi_2$ olsun. O halde, $y = c_1 = c_2 = c$, $d_2(y^*, a_1^*) < r_1^*$ ve $d_2(y^*, a_2^*) < r_2^*$ olur öyle ki

$$\overline{y} \in \overline{A}_2 = \left\{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n \mid x = c \text{ ve } d_2(x^*, y^*) < r^*,\ r^* \in \mathbb{R}^+\right\} \subset \Psi_1 \cap \Psi_2$$

olacak şekilde $\overline{A}_2 \in \overline{\phi}$ vardır.

Böylece ispat tamamlanır. □

Sonuç 3.1.8. Teorem 3.1.24 den elde edilen $\overline{\phi}$ bazındaki cümlelerin keyfi birleşiminden oluşturulan topoloji $\overline{\tau}$ ile gösterilirse,

$$\overline{\tau} = \left\{ \bigcup_{i \in I} \overline{A}_i \mid \overline{A}_i \in \overline{\phi} \right\}$$

biçimindedir ve ayrıca, $\overline{V} \in \overline{\tau}$ olduğu açıktır.

Teorem 3.1.25. $(\mathbf{D}^n, \overline{\tau})$ topolojik uzayı Hausdorff uzaydır.

İspat. $\forall \overline{p}, \overline{q} \in \mathbf{D}^n$ için $\overline{p} \neq \overline{q}$ olsun. Burada, $\overline{p} = p + \varepsilon p^*$ ve $\overline{q} = q + \varepsilon q^*$ biçiminde olup $p \neq q$ veya $(p = q$ ve $p^* \neq q^*)$ olabilir.

i) $p \neq q$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \overline{p} &\in \Phi_1 = \left\{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n \mid d_1(x, p) < r_1,\ x^* \in \mathbb{R}^n, r_1 \in \mathbb{R}^+\right\}, \\ \overline{q} &\in \Phi_2 = \left\{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n \mid d_1(x, q) < r_2,\ x^* \in \mathbb{R}^n, r_2 \in \mathbb{R}^+\right\} \end{aligned}$$

olmak üzere, $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \varnothing$ olacak şekilde $\Phi_1, \Phi_2 \in \overline{\tau}$ vardır.

$ii)$ $p = q$ ve $p^* \neq q^*$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned} \overline{p} &\in \Psi_1 = \left\{ \overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n \mid x = p \text{ ve } d_2\left(x^*, p^*\right) < r_1^*,\ r_1^* \in \mathbb{R}^+ \right\}, \\ \overline{q} &\in \Psi_2 = \left\{ \overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n \mid x = q \text{ ve } d_2\left(x^*, q^*\right) < r_2^*,\ r_2^* \in \mathbb{R}^+ \right\} \end{aligned}$$

olmak üzere, $\Psi_1 \cap \Psi_2 = \varnothing$ olacak şekilde $\Psi_1, \Psi_2 \in \overline{\tau}$ vardır.

(i) ve (ii) öncülleri dikkate alındığında $(\mathbf{D}^n, \overline{\tau})$ uzayı Hausdorff uzaydır. □

Örneğin, $\overline{d}_1 : \mathbf{D}^n \times \mathbf{D}^n \to \mathbf{D}$, $\overline{d}_1(\overline{x}, \overline{y}) = \|\overline{x} - \overline{y}\|_1 = \|x - y\| + \varepsilon \|x^* - y^*\|$ şeklinde tanımlanan $\overline{d}_1$ fonksiyonunun yukarıdaki teorem 3.1.22 şartlarını sağladığı açıktır ve ayrıca, bütün

$$\Phi = \{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n \mid \|x - p\| < r,\ x^* \in \mathbb{R}^n\}$$

ve

$$\Psi = \{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n \mid x = c \ \text{(sabit) ve } \|x^* - p^*\| < r^*\}$$

cümlelerinin bir koleksiyonu $\mathbf{D}^n$ üzerinde bir baz oluşturur. Bu bazdan elde edilen topoloji $\overline{\tau}_{\overline{d}_1}$ ile gösterilirse, $n = 1$ için $\overline{\tau}_{\overline{d}_1} = \overline{\tau}_{\overline{d}}$ ve $n \geq 2$ için $\overline{\tau}_{\overline{d}_1} \subseteq \overline{\tau}_{\overline{d}}$ biçimindedir. Diğer yandan, $n = 1$ için

$$\|\overline{x}\|_1 = |\overline{x}|_1 = |x| + \varepsilon |x^*|$$

biçiminde ifade edilirse, aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.1.26. $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n\}$ ve $\left\{\overline{b}_1, \overline{b}_2, ..., \overline{b}_n\right\}$ dual sayıların iki cümlesi olsun. Burada, $\overline{a}_i = a_i + \varepsilon a_i^*$, $\overline{b}_i = b_i + \varepsilon b_i^*$ ve $1 \leq i \leq n$ dir. Bu durumda, aşağıdaki dual eşitsizlikler mevcuttur:

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} \left|\overline{a}_k + \overline{b}_k\right|_1 \leq_{\mathbf{D}} \sum\limits_{k=1}^{n} |\overline{a}_k|_1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \left|\overline{b}_k\right|_1$ dir.

2) $\exists a_i \neq 0,\ \exists b_i \neq 0$ ve $2 \leq p \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{n} \left|\overline{a}_k + \overline{b}_k\right|_1^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq_{\mathbf{D}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\overline{a}_k|_1^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} \left|\overline{b}_k\right|_1^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ \overline{I}_1 &\leq_{\mathbf{D}} \overline{I}_2 + \overline{I}_3 \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

dir. Ayrıca, bu dual eşitsizlik $\forall a_i = b_i = 0$ için de sağlanır. Diğer yandan, $\forall a_i = 0, \exists b_i \neq 0$ ve $p \geq 2$ için dual$\left(\overline{I}_1\right) \leq$dual$\left(\overline{I}_3\right)$ ise (veya $\forall b_i = 0, \exists a_i \neq 0$ ve $p \geq 2$ için *dual* $\left(\overline{I}_1\right) \leq$ *dual* $\left(\overline{I}_2\right)$ ise) bu dual eşitsizlik sağlanır.

İspat. 1) $\{\overline{a}_1,\overline{a}_2,...,\overline{a}_n\}$ ve $\{\overline{b}_1,\overline{b}_2,...,\overline{b}_n\}$ dual sayıların iki cümlesi olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left|\overline{a}_k+\overline{b}_k\right|_1 &= |a_1+b_1|+...+|a_n+b_n|+\varepsilon\left(|a_1^*+b_1^*|+...+|a_n^*+b_n^*|\right) \\
&\leq_{\mathbf{D}} |a_1|+|b_1|+...+|a_n|+|b_n|+\varepsilon\left(|a_1^*|+|b_1^*|+...+|a_n^*|+|b_n^*|\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}|\overline{a}_k|_1+\sum_{k=1}^{n}\left|\overline{b}_k\right|_1
\end{aligned}$$

elde edilir.

2) $\{\overline{a}_1,\overline{a}_2,...,\overline{a}_n\}$ ve $\{\overline{b}_1,\overline{b}_2,...,\overline{b}_n\}$ dual sayıların iki cümlesi olmak üzere, $\exists a_i \neq 0$, $\exists b_i \neq 0$ ve $2 \leq p \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda, $1 \leq i \leq n$ için $\forall (a_i+b_i=0)$ ise (3.1.5) dual eşitsizliğini elde etmek mümkündür. Şimdi kabul edelim ki $\exists (a_i+b_i \neq 0)$ olsun. Minkowski eşitsizliğinden,

$$\sqrt[p]{|a_1+b_1|^p+...+|a_n+b_n|^p} \leq \sqrt[p]{|a_1|^p+...+|a_n|^p}+\sqrt[p]{|b_1|^p+...+|b_n|^p} \qquad (3.1.6)$$

olduğunu biliyoruz. Eğer, (3.1.6) eşitsizliği $<$ iken doğru ise (3.1.5) dual eşitsizliği elde edilir. $k>0$ için $a_i = kb_i$ olsun. Bu durumda,

$$\sqrt[p]{|a_1+b_1|^p+...+|a_n+b_n|^p} = \sqrt[p]{|a_1|^p+...+|a_n|^p}+\sqrt[p]{|b_1|^p+...+|b_n|^p}$$

olur ve ayrıca hipotezden,

$$\begin{aligned}
&\frac{|a_1+b_1|^{p-1}|a_1^*+b_1^*|+...+|a_n+b_n|^{p-1}|a_n^*+b_n^*|}{\sqrt[p]{\left(|a_1+b_1|^p+...+|a_n+b_n|^p\right)^{p-1}}} \\
=\ &\frac{|b_1|^{p-1}|a_1^*+b_1^*|+...+|b_n|^{p-1}|a_n^*+b_n^*|}{\sqrt[p]{\left(|b_1|^p+...+|b_n|^p\right)^{p-1}}} \\
\leq\ &\frac{|b_1|^{p-1}\left(|a_1^*|+|b_1^*|\right)+...+|b_n|^{p-1}\left(|a_n^*|+|b_n^*|\right)}{\sqrt[p]{\left(|b_1|^p+...+|b_n|^p\right)^{p-1}}} \\
=\ &\frac{|a_1|^{p-1}|a_1^*|+...+|a_n|^{p-1}|a_n^*|}{\sqrt[p]{\left(|a_1|^p+...+|a_n|^p\right)^{p-1}}}+\frac{|b_1|^{p-1}|b_1^*|+...+|b_n|^{p-1}|b_n^*|}{\sqrt[p]{\left(|b_1|^p+...+|b_n|^p\right)^{p-1}}}
\end{aligned}$$

şeklindedir. $\leq_{\mathbf{D}}$ bağıntısı düşünüldüğünde (3.1.5) dual eşitsizliği elde edilir. Diğer yandan, $\forall a_i = b_i = 0$ için de (3.1.5) dual eşitsizliği elde edilir. Şimdi de, kabul edelim ki $\forall a_i = 0, \exists b_i \neq 0$ ve $p \geq 2$ olsun. Dual sayılar sistemi göz önüne alındığında, $\bar{I}_2 = \bar{0}$, reel$(\bar{I}_1)$ =reel$(\bar{I}_3)$,

$$\text{dual}\left(\bar{I}_1\right) = \frac{|b_{t_1}|^{p-1}\left|a^*_{t_1} + b^*_{t_1}\right| + \ldots + |b_{t_n}|^{p-1}\left|a^*_{t_n} + b^*_{t_n}\right|}{\sqrt[p]{(|b_{t_1}|^p + \ldots + |b_{t_n}|^p)^{p-1}}}$$

ve

$$\text{dual}\left(\bar{I}_3\right) = \frac{|b_{t_1}|^{p-1}\left|b^*_{t_1}\right| + \ldots + |b_{t_n}|^{p-1}\left|b^*_{t_n}\right|}{\sqrt[p]{(|b_{t_1}|^p + \ldots + |b_{t_n}|^p)^{p-1}}}$$

biçimindedir. Burada, $\forall b_{t_i} \neq 0$ ve $1 \leq t_1, \ldots, t_n \leq n$ dir. Eğer, dual$(\bar{I}_1)$ $\leq$dual$(\bar{I}_3)$ ise $\bar{I}_1 \leq_{\mathbf{D}} \bar{I}_2 + \bar{I}_3$ ve dual$(\bar{I}_1)$ $\geq$dual$(\bar{I}_3)$ ise $\bar{I}_1 \geq_{\mathbf{D}} \bar{I}_2 + \bar{I}_3$ elde edilir. Ayrıca, $\forall b_i = 0, \exists a_i \neq 0$ ve $p \geq 2$ için de benzer şartlar altında dual eşitsizlikler elde edilir. □

Teorem 3.1.27. Teorem 3.1.21 de elde edilen $\overline{\tau}_{\overline{d}}$ topolojisindeki

$$\overline{U} = \{\bar{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n \mid \|x - a\| < r,\ x^* \in \mathbb{R}^n\}$$

cümlelerinden oluşan $\overline{\varphi}$ sınıfını ele alalım. $\overline{\varphi}$ sınıfı $\mathbf{D}^n$ üzerinde bir baz oluşturur ve bu bazdan elde edilen topoloji $\overline{\tau}_1$ ile gösterilirse $\overline{\tau}_1 \subseteq \overline{\tau}_{\overline{d}}$ dir [32].

Açıklama 3. Bir sonraki bölümde göreceğiz ki $\overline{\tau}_1$ topolojisinin cümleleri dual analitik fonksiyonların dual analitik bölgeleridir. Bu açık cümlelerin aynı zamanda $\overline{\tau}_{\overline{d}}$ topolojisinin de cümleleri oluğunu biliyoruz. Bu çalışma boyunca dual açık cümle olarak $\overline{\tau}_1$ topolojisinin cümleleri alınacaktır.

3.2. Dual Analitik Fonksiyonlar

Bu bölümde, daha sonraki bölümlerde sıkça kullanacağımız dual analitik fonksiyonların özellikleri var olan bilgiler ışığında eksik yerler tamamlanarak bir akış içerisinde detaylı bir şekilde incelenecektir. Ayrıca, dual analitik fonksiyonların integral tanımı verilecek ve dual eşitsizlik sistemi ile uyumu bir teorem ile verilip ispatlanacaktır.

Tanım 3.2.1. $\overline{x} = x + \varepsilon x^*$ bir dual değişken olsun. $\overline{\xi} : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ dual değişkenli fonksiyon

$$\overline{\xi}\,(\overline{x}) = \xi\,(x, x^*) + \varepsilon \xi^0\,(x, x^*)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, ξ ile ξ^0 iki değişkene sahip reel fonksiyonlardır.

Açıklama 4. Bu çalışma boyunca $\overline{\xi} : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ dual analitik fonksiyonunun $\overline{x} = x + \varepsilon x^*$ dual değişkenine göre türevini

$$\overset{\bullet}{\overline{\xi}}\,(\overline{x}) = \frac{d\overline{\xi}}{d\overline{x}} = \frac{d}{d\overline{x}}\overline{\xi}\,(\overline{x})$$

şeklindeki notasyonlarla ve $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun x reel değişkenine göre türevini de

$$\xi'\,(x) = \frac{d\xi}{dx} = \frac{d}{dx}\xi\,(x)$$

biçimindeki notasyonlarla ifade edeceğiz.

Aşağıdaki teoremde diğer çalışmalarda verilen ispatlardaki eksiklikler giderilerek dual fonksiyonların analitiklik şartları incelenecektir.

Teorem 3.2.2. $\overline{\xi} : \overline{U} \subseteq \mathbf{D} \to \mathbf{D}$, $\overline{\xi}\,(\overline{x}) = \xi\,(x, x^*) + \varepsilon \xi^0\,(x, x^*)$ dual fonksiyonunun $\overline{x} \in \overline{U}$ noktasında analitik olması için gerek ve yeter şart ξ_x ve ξ^0_x sürekli kısmi türevleri var olmalı ve ayrıca

$$\xi_{x^*} = 0, \; \xi^0_{x^*} = \xi_x$$

şartları sağlanmalıdır.

İspat. $\overline{\xi} : \overline{U} \subseteq \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ dual fonksiyonu $\overline{x} \in \overline{U}$ dual noktasında analitik olsun. Bu durumda,

$$\frac{d\overline{\xi}}{d\overline{x}} = \lim_{\overline{k} \to \overline{0}} \frac{\overline{\xi}\left(\overline{x} + \overline{k}\right) - \overline{\xi}\,(\overline{x})}{\overline{k}}$$

limiti mevcuttur. $\overline{k} = k + \varepsilon k^*$ ve $\overline{x} = x + \varepsilon x^*$ denilirse ve $\varepsilon^2 = 0$ olduğundan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{d\overline{\xi}}{d\overline{x}} = \lim_{(k,k^*) \to (0,0)} \left[\begin{array}{c} \frac{\xi(x+k, x^*+k^*) - \xi(x,x^*)}{k} \\ +\varepsilon \left(\frac{\xi^0(x+k, x^*+k^*) - \xi^0(x,x^*)}{k} - \frac{\xi(x+k, x^*+k^*) - \xi(x,x^*)}{k} \frac{k^*}{k} \right) \end{array} \right]$$

denklemi elde edilir. Hipotez gereği, bu limit mevcut olduğundan aşağıdaki ifade

$$\lim_{k\to 0, k^*=0}\left[\begin{array}{c}\frac{\xi(x+k,x^*+k^*)-\xi(x,x^*)}{k}\\ +\varepsilon\left(\frac{\xi^0(x+k,x^*+k^*)-\xi^0(x,x^*)}{k}-\frac{\xi(x+k,x^*+k^*)-\xi(x,x^*)}{k}\frac{k^*}{k}\right)\end{array}\right]=\frac{\partial\xi}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial\xi^0}{\partial x} \tag{3.2.1}$$

bulunur. Buradan görülmektedir ki bu dual fonksiyonun reel kısmının limiti $\dfrac{\partial\xi}{\partial x}$ dir. O halde,

$$\begin{aligned}\frac{\xi(x+k,x^*+k^*)-\xi(x,x^*)}{k} &= \frac{\xi(x+k,x^*+k^*)-\xi(x,x^*+k^*)}{k}\\ &\quad+\frac{\xi(x,x^*+k^*)-\xi(x,x^*)}{k}\end{aligned}$$

şeklinde olup $(k,k^*)\to(0,0)$ için limit alınırsa

$$\lim_{(k,k^*)\to(0,0)}\frac{\xi(x,x^*+k^*)-\xi(x,x^*)}{k}=0$$

olmalıdır. Bu limit var ve sıfıra eşit ise $\xi(x,x^*+k^*)-\xi(x,x^*)=0$ olmalıdır öyle ki $\xi(x,x^*)=\xi(x)$ biçimindedir. Yani, ξ fonksiyonu sadece x değişkenine bağlı bir fonksiyondur ve dolayısıyla $\dfrac{\partial\xi}{\partial x^*}=0$ dır. Diğer yandan, (3.2.1) eşitliğinden biliyoruz ki bu dual fonksiyonun dual kısmının limiti $\dfrac{\partial\xi^0}{\partial x}$ e eşittir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}&\frac{\xi^0(x+k,x^*+k^*)-\xi^0(x,x^*)}{k}-\frac{\xi(x+k,x^*+k^*)-\xi(x,x^*)}{k}\frac{k^*}{k}\\ =\;&\frac{\xi^0(x+k,x^*+k^*)-\xi^0(x,x^*+k^*)}{k}\\ &+\frac{\xi^0(x,x^*+k^*)-\xi^0(x,x^*)}{k}-\frac{\xi(x+k)-\xi(x)}{k}\frac{k^*}{k}\end{aligned}$$

şeklinde olup $(k,k^*)\to(0,0)$ için limit alınırsa

$$\lim_{(k,k^*)\to(0,0)}\left[\frac{\xi^0(x,x^*+k^*)-\xi^0(x,x^*)}{k}-\frac{\xi(x+k)-\xi(x)}{k}\frac{k^*}{k}\right]=0 \tag{3.2.2}$$

elde edilir. Bu limit var ve sıfıra eşit ise aşağıdaki ifade de vardır:

$$\lim_{k^*\to 0}\left(\lim_{k\to 0}\frac{k\left(\xi^0(x,x^*+k^*)-\xi^0(x,x^*)\right)-k^*\left(\xi(x+k)-\xi(x)\right)}{k^2}\right)=0.$$

Diğer yandan

$$\lim_{k\to 0}\frac{k\left(\xi^0(x,x^*+k^*)-\xi^0(x,x^*)\right)-k^*(\xi(x+k)-\xi(x))}{k^2}$$

limitinde $\frac{0}{0}$ belirsizliği olduğundan k ye göre türev alınırsa

$$\lim_{k^*\to 0}\left(\lim_{k\to 0}\left(\frac{\xi^0(x,x^*+k^*)-\xi^0(x,x^*)-k^*\xi_x(x+k)}{2k}\right)\right)=0$$

olur. (3.2.2) ifadesinin limiti var ve sıfıra eşit olduğundan açıkça görülmektedir ki

$$\xi^0(x,x^*+k^*)-\xi^0(x,x^*)=k^*\xi_x(x)$$

olmalıdır. O halde,

$$\frac{\xi^0(x,x^*+k^*)-\xi^0(x,x^*)}{k^*}=\xi_x(x)\quad(k^*\neq 0)$$

olup bu eşitliğin her iki tarafının $k^*\to 0$ için limiti alınırsa

$$\frac{\partial\xi^0}{\partial x^*}=\frac{\partial\xi}{\partial x}$$

elde edilir.

Tersine, ξ_x ve ξ^0_x sürekli kısmi türevleri var ve ayrıca $\xi_{x^*}=0$, $\xi^0_{x^*}=\xi_x$ olsun. Bu durumda, $\overline{\xi}$ dual fonksiyonu

$$\overline{\xi}(\overline{x})=\xi(x)+\varepsilon\left(x^*\xi'(x)+\widetilde{\xi}(x)\right)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, ξ en az ikinci basamaktan, $\widetilde{\xi}$ nın da en az birinci basamaktan türevleri var ve bu türevler süreklidir. O halde,

$$I=\lim_{\overline{k}\to\overline{0}}\frac{\overline{\xi}(\overline{x}+\overline{k})-\overline{\xi}(\overline{x})}{\overline{k}}=\lim_{(k,k^*)\to(0,0)}\left[\begin{array}{c}\frac{\xi(x+k)-\xi(x)}{k}\\ +\varepsilon\left(\begin{array}{c}x^*\left(\frac{\xi'(x+k)-\xi'(x)}{k}\right)+\frac{\widetilde{\xi}(x+k)-\widetilde{\xi}(x)}{k}\\ +\frac{k^*}{k}\xi'(x+k)-\frac{\xi(x+k)-\xi(x)}{k}\frac{k^*}{k}\end{array}\right)\end{array}\right]$$

şeklinde yazılabilir. Hipotezden, $\xi\in C^2$ ve $\widetilde{\xi}\in C^1$-sınıfından olduğundan aşağıdaki üç limitin mevcut olduğunu kolaylıkla söyleyebiliriz:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \lim_{(k,k^*)\to(0,0)} \frac{\xi(x+k)-\xi(x)}{k} = \xi'(x). \\
I_2 &= \lim_{(k,k^*)\to(0,0)} x^*\left(\frac{\xi'(x+k)-\xi'(x)}{k}\right) = x^*\xi''(x). \\
I_3 &= \lim_{(k,k^*)\to(0,0)} \frac{\widetilde{\xi}(x+k)-\widetilde{\xi}(x)}{k} = \widetilde{\xi}'(x).
\end{aligned}$$

Diğer yandan,

$$I_4 = \lim_{(k,k^*)\to(0,0)} \left(\frac{\xi'(x+k)k-\xi(x+k)+\xi(x)}{k^2}\right)k^*$$

şeklinde olup

$$\begin{aligned}
& \lim_{(k,k^*)\to(0,0)} \frac{\xi'(x+k)k-\xi(x+k)+\xi(x)}{k^2} \\
= & \lim_{(k,k^*)\to(0,0)} \left(\frac{\xi'(x+k)+\xi''(x+k)k-\xi'(x+k)}{2k}\right) \\
= & \frac{\xi''(x)}{2}
\end{aligned}$$

ve

$$\lim_{(k,k^*)\to(0,0)} k^* = 0$$

olduğundan

$$I_4 = \lim_{(k,k^*)\to(0,0)} \left(\frac{\xi'(x+k)k-\xi(x+k)+\xi(x)}{k^2}\right)k^* = \frac{\xi''(x)}{2}0 = 0$$

elde edilir. O halde; I_1, I_2, I_3 ve I_4 limitleri mevcut olduğundan I ifadesinin limiti mevcuttur ve bu limit

$$\begin{aligned}
I &= I_1+\varepsilon(I_2+I_3+I_4) \\
&= \xi'(x)+\varepsilon\left(x^*\xi''(x)+\widetilde{\xi}'(x)\right)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Böylece ispat tamamlanır. □

Sonuç 3.2.1. Yukarıdaki teoremden de görülmektedir ki $\overline{\xi} : \overline{U} \subseteq \mathbf{D} \to \mathbf{D}$, $\overline{\xi}(\overline{x}) =$

$\xi(x,x^*)+\varepsilon\xi^0(x,x^*)$ dual fonksiyonunun $\overline{x}$ dual noktasındaki türevi

$$\frac{d\overline{\xi}}{d\overline{x}}=\lim_{\triangle\overline{x}\to 0}\frac{\triangle\overline{\xi}}{\triangle\overline{x}}=\lim_{\triangle\overline{x}\to 0}\frac{\overline{\xi}(\overline{x}+\triangle\overline{x})-\overline{\xi}(\overline{x})}{\triangle\overline{x}} \tag{3.2.3}$$

şeklinde olup bu limit $\frac{\triangle x^*}{\triangle x}$ oranından bağımsızdır [33].

Sonuç 3.2.2. $\overline{\xi}:\overline{U}\subseteq\mathbf{D}\to\mathbf{D}$, $\overline{\xi}(\overline{x})=\xi(x,x^*)+\varepsilon\xi^0(x,x^*)$ dual fonksiyonunun analitiklik şartları

$$\frac{\partial\xi}{\partial x^*}=0 \text{ ve } \frac{\partial\xi^0}{\partial x^*}=\frac{\partial\xi}{\partial x} \tag{3.2.4}$$

şeklindedir. (3.2.4) denklemleri göz önüne alındığında

$$\xi(x,x^*)=\xi(x) \text{ ve } \xi^0(x,x^*)=x^*\frac{\partial\xi}{\partial x}+\widetilde{\xi}(x)$$

elde edilir. Burada; $\widetilde{\xi}$, $\overline{x}=x+\varepsilon x^*$ dual değişkenin reel kısmının herhangi bir fonksiyonudur. Bu durumda, dual analitik fonksiyonunun genel ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}\overline{\xi}(\overline{x}) &= \xi(x,x^*)+\varepsilon\xi^0(x,x^*)\\ &= \xi(x)+\varepsilon\left(x^*\xi'(x)+\widetilde{\xi}(x)\right).\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Yukarıdaki teoremden açıkça görülmektedir ki bu $\overline{\xi}$ dual analitik fonksiyonunun $\overline{x}$ dual değişkenine göre türevi

$$\begin{aligned}\frac{d\overline{\xi}}{d\overline{x}} &= \frac{\partial\xi}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial\xi^0}{\partial x}\\ &= \xi'(x)+\varepsilon\left(x^*\xi''(x)+\widetilde{\xi}'(x)\right)\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada açıktır ki $\overline{\xi}$ dual analitik fonksiyonunun $\overline{x}=x+\varepsilon x^*$ dual değişkenine göre türevi x reel değişkenine göre türevine indirgenmektedir [33] ve ayrıca, bu dual analitik fonksiyonların dual analitik bölgeleri $\overline{U}=U\times\mathbb{R}\in\overline{\tau}_1$ cümleleridir.

Açıklama 5. Bu çalışma boyunca ξ ve $\widetilde{\xi}$ fonksiyonları C^∞-sınıfından fonksiyonlar olarak ele alınacaktır.

Örnek 3.2.3. $\overline{\xi}(\overline{x})=x^3+\varepsilon\left(3x^2x^*+4x^2\right)$ fonksiyonunu ele alalım. Burada, $\xi(x,x^*)=x^3$ ve $\xi^0(x,x^*)=3x^2x^*+4x^2$ şeklinde olup bu $\overline{\xi}$ dual fonksiyonu analitiklik şartlarını sağlar ve $\xi\left(x\right)=x^3$ ve $\widetilde{\xi}\left(x\right)=4x^2$ fonksiyonları C^∞-sınıfından fonksiyonlardır. Şimdi, bu $\overline{\xi}$ fonksiyonunun $\overline{x}_0=x_0+\varepsilon x_0^*$ noktasındaki türevi için limit kavramı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{d\overline{\xi}}{d\overline{x}}\mid_{\overline{x}_0} &= \lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0}\frac{\overline{\xi}\left(\overline{x}\right)-\overline{\xi}\left(\overline{x}_0\right)}{\overline{x}-\overline{x}_0} \\
&= \lim_{(x,x^*)\to\left(x_0,x_0^*\right)}\frac{x^3-x_0^3+\varepsilon\left(3x^2x^*-3x_0^2x_0^*+4x^2-4x_0^2\right)}{x-x_0+\varepsilon\left(x^*-x_0^*\right)} \\
&= \lim_{(x,x^*)\to\left(x_0,x_0^*\right)}\left[\begin{array}{c}\frac{x^3-x_0^3}{x-x_0} \\ +\varepsilon\left(\frac{3x^2x^*-3x_0^2x_0^*}{x-x_0}-\left(\frac{x^3-x_0^3}{x-x_0}\right)\left(\frac{x^*-x_0^*}{x-x_0}\right)+\frac{4x^2-4x_0^2}{x-x_0}\right)\end{array}\right]
\end{aligned}$$

biçiminde olur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{d\overline{\xi}}{d\overline{x}}\mid_{\overline{x}_0} &= \lim_{(x,x^*)\to\left(x_0,x_0^*\right)}\left[\begin{array}{c}x^2+xx_0+x_0^2 \\ +\varepsilon\left(\frac{2x^2x^*-2x_0^2x_0^*+x^2x_0^*-xx^*x_0+xx_0x_0^*-x_0^2x^*}{x-x_0}+\frac{4x^2-4x_0^2}{x-x_0}\right)\end{array}\right] \\
&= \lim_{(x,x^*)\to\left(x_0,x_0^*\right)}\left[\begin{array}{c}x^2+xx_0+x_0^2 \\ +\varepsilon\left(2xx^*+xx_0^*+x_0x^*+2x_0x_0^*+4x+4x_0\right)\end{array}\right] \\
&= 3x_0^2+\varepsilon\left(6x_0x_0^*+8x_0\right)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Buradan da açıktır ki

$$\overline{\xi}\left(\overline{x}\right)=x^3+\varepsilon\left(3x^2x^*+4x^2\right)$$

dual analitik fonksiyonunun $\overline{x}_0$ noktasındaki türevi

$$\frac{d\overline{\xi}}{d\overline{x}}\mid_{\overline{x}_0}=3x_0^2+\varepsilon\left(6x_0x_0^*+8x_0\right)$$

olarak elde edilir ve yukarıdaki sonuçtan da

$$\begin{aligned}
\frac{d\overline{\xi}}{d\overline{x}}\mid_{\overline{x}_0} &= \frac{\partial\xi}{\partial x}\left(x_0,x_0^*\right)+\varepsilon\frac{\partial\xi^0}{\partial x}\left(x_0,x_0^*\right) \\
&= 3x_0^2+\varepsilon\left(6x_0x_0^*+8x_0\right)
\end{aligned}$$

olduğu kolaylıkla görülmektedir.

Yukarıdaki tanımlar ile Taylor seri açılımı göz önüne alınırsa aşağıdaki iyi bilinen fonksiyonlar yazılabilir [33]:

$$\begin{aligned}
\sin(x+\varepsilon x^*) &= \sin x+\varepsilon x^*\cos x. \\
\cos(x+\varepsilon x^*) &= \cos x-\varepsilon x^*\sin x. \\
\sqrt[n]{x+\varepsilon x^*} &= \sqrt[n]{x}+\varepsilon x^*\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}},\ x\neq 0 \text{ ve } n\in\mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Teorem 3.2.4. $\bar{x}=x+\varepsilon x^*$ bir dual değişken olsun. $n\in\mathbb{N}$ için

$$\bar{x}^n = x^n+\varepsilon x^* n x^{n-1}$$

dir [27].

Sonuç 3.2.3. Yukarıdaki teoremde görülmektedir ki $\xi(x)=x^n$ denilirse ξ türevlenebilen bir fonksiyon olup $\xi'(x)=nx^{n-1}$ dir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\bar{x}^n &= x^n+\varepsilon x^* n x^{n-1} \\
&= \xi(x)+\varepsilon x^*\xi'(x)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı bir dual analitik fonksiyondur.

Sonuç 3.2.4. $\overline{\xi}:\overline{U}\subseteq\mathbf{D}\to\mathbf{D}$, $\overline{\xi}(\bar{x})=\xi(x)+\varepsilon\left(x^*\xi'(x)+\widetilde{\xi}(x)\right)$ bir dual analitik fonksiyon olsun. Eğer $\overline{\xi}$ fonksiyonunun dual kısmı sabit veya bu fonksiyonun türevi sıfır ise $\overline{\xi}$ fonksiyonu sabittir. Ancak $\overline{\xi}$ fonksiyonunun reel kısmı sabit ise bu fonksiyon sabit olmak zorunda değildir. Gerçekten, $\widetilde{\xi}:U\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu en az C^1-sınıfından bir fonksiyon ve $a\in\mathbb{R}$ bir reel sabit olmak üzere, $\overline{\xi}(\bar{x}=x+\varepsilon x^*)=a+\varepsilon\widetilde{\xi}(x)$ şeklinde tanımlı dual fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon dual analitiklik şartlarını sağlar ve $\bar{x}$ dual değişkene göre türevi de

$$\begin{aligned}
\frac{d\overline{\xi}}{d\bar{x}} &= \lim_{\bar{k}\to\bar{0}}\frac{\overline{\xi}(\bar{x}+\bar{k})-\overline{\xi}(\bar{x})}{\bar{k}} \\
&= \lim_{(k,k^*)\to(0,0)}\left[0+\varepsilon\frac{\left(\widetilde{\xi}(x+k)-\widetilde{\xi}(x)\right)}{k}\right] \\
&= 0+\varepsilon\widetilde{\xi}'(x)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan da açıkça görülür ki $\overline{\xi}$ dual analitik fonksiyonunun dual kısmında bulunan $\widetilde{\xi}$ fonksiyonu, tanım cümlesi $U \subseteq \mathbb{R}$ olacak şekilde keyfi olarak seçilebilir.

Teorem 3.2.5. $\overline{\xi} : \overline{U} \subseteq \mathbf{D} \to \mathbf{D}$, $\overline{\xi}(\overline{x}) = \xi(x) + \varepsilon\left(x^*\xi'(x) + \widetilde{\xi}(x)\right)$ bir dual analitik fonksiyon ve $\forall x \in U \subseteq \mathbb{R}$ için $\xi'(x) \neq 0$ olsun. Bu durumda, ξ fonksiyonu birebirdir gerek ve yeter şart $\overline{\xi}$ dual analitik fonksiyonu birebirdir [32].

Tanım 3.2.6. $\overline{\xi} : \overline{U} \subseteq \mathbf{D} \to \overline{V} \subseteq \mathbf{D}$, $\overline{\xi}(\overline{x}) = \xi(x) + \varepsilon\left(x^*\xi'(x) + \widetilde{\xi}(x)\right)$ bir dual analitik fonksiyon ve $\forall x \in U \subseteq \mathbb{R}$ için $\xi'(x) \neq 0$ olsun. Eğer $\forall \overline{y} \in \overline{V} \subseteq \mathbf{D}$ için $\overline{y} = \overline{\xi}(\overline{x})$ olacak şekilde $\exists \overline{x} \in \overline{U} \subseteq \mathbf{D}$ var ise $\overline{\xi}$ dual analitik fonksiyonuna örtendir denir.

Tanım 3.2.7. $\overline{U}_1, \overline{U}_2, \overline{V}_1, \overline{V}_2 \subseteq \mathbf{D}$ olmak üzere, $\overline{\xi} : \overline{U}_1 \longrightarrow \overline{U}_2$,

$$\overline{\xi}(\overline{x}) = \xi(x) + \varepsilon\left(x^*\xi'(x) + \widetilde{\xi}(x)\right)$$

ve $\overline{\mu} : \overline{V}_1 \longrightarrow \overline{V}_2$,

$$\overline{\mu}(\overline{x}) = \mu(x) + \varepsilon\left(x^*\mu'(x) + \widetilde{\mu}(x)\right)$$

şeklinde tanımlı dual analitik fonksiyonlar olsun. Bu durumda, $\overline{\mu}$ fonksiyonunun görüntü cümlesinin $\overline{\xi}$ fonksiyonunun tanım cümlesinin içinde olması şartıyla, $\overline{\xi}$ ile $\overline{\mu}$ dual analitik fonksiyonlarının bileşkesi

$$\left(\overline{\xi} \circ \overline{\mu}\right)(\overline{x}) = (\xi \circ \mu)(x) + \varepsilon\left(x^*(\xi \circ \mu)'(x) + \widetilde{\mu}(x)(\xi' \circ \mu)(x) + \left(\widetilde{\xi} \circ \mu\right)(x)\right)$$

şeklinde tanımlanır. Bu bileşke fonksiyonun tanım cümlesi $\overline{\mu}$ fonksiyonunun tanım cümlesindeki $\overline{x}$ noktalarını içerir.

Tanım 3.2.8. $\overline{\xi} : \overline{U} \subseteq \mathbf{D} \to \overline{V} \subseteq \mathbf{D}$, $\overline{\xi}(\overline{x}) = \xi(x) + \varepsilon\left(x^*\xi'(x) + \widetilde{\xi}(x)\right)$ bir dual analitik fonksiyon ve $\forall x \in U \subseteq \mathbb{R}$ için $\xi'(x) \neq 0$ olsun. $\overline{\xi}$ fonksiyonu birebir ve örten ise $\left(\overline{\mu} \circ \overline{\xi}\right)(\overline{x}) = \overline{I}(\overline{x})$ ve $\left(\overline{\xi} \circ \overline{\mu}\right)(\overline{y}) = \overline{I}(\overline{y})$ birim fonksiyonlar olacak şekilde bir tek $\overline{\mu} : \overline{V} \subseteq \mathbf{D} \to \overline{U} \subseteq \mathbf{D}$ dual fonksiyonu vardır. Bu $\overline{\mu}$ fonksiyonuna $\overline{\xi}$ fonksiyonunun ters fonksiyonu denir ve $\overline{\mu} = \overline{\xi}^{-1}$ ile gösterilir.

Teorem 3.2.9. $\overline{\xi} : \overline{U} \subseteq \mathbf{D} \to \overline{\xi}\left(\overline{U}\right) \subseteq \mathbf{D}$, $\overline{\xi}(\overline{x}) = \xi(x) + \varepsilon\left(x^*\xi'(x) + \widetilde{\xi}(x)\right)$ bir dual analitik fonksiyon ve $\forall x \in U \subseteq \mathbb{R}$ için $\xi'(x) \neq 0$ olsun. Bu durumda, $\overline{\xi}$ dual fonksiyonunun tersi var ise

$$\overline{\xi}^{-1}(\overline{y}) = \xi^{-1}(y) + \varepsilon\left(y^*\left(\xi^{-1}\right)'(y) - \left(\widetilde{\xi} \circ \xi^{-1}\right)(y)\left(\xi^{-1}\right)'(y)\right)$$

biçiminde bir dual analitik fonksiyondur.

İspat. $\overline{\xi} : \overline{U} \subseteq \mathbf{D} \to \overline{\xi}\left(\overline{U}\right) \subseteq \mathbf{D}$, $\overline{\xi}(\overline{x}) = \xi(x) + \varepsilon\left(x^* \xi'(x) + \widetilde{\xi}(x)\right)$ bir dual analitik fonksiyon, $\forall x \in U \subseteq \mathbb{R}$ için $\xi'(x) \neq 0$ ve $\overline{\xi}$ dual fonksiyonunun tersi var olsun. Bu durumda, ξ birebir ve örten bir fonksiyon olup ξ^{-1} vardır ve ayrıca, $\forall x \in U \subseteq \mathbb{R}$ için $\xi'(x) \neq 0$ olduğundan $\left(\xi^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{\xi'(x)}$ biçimindedir. Diğer yandan, dual birim fonksiyon $\overline{I} : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$, $\overline{I}(\overline{x}) = x + \varepsilon x^*$ şeklinde olup

$$
\begin{aligned}
\left(\overline{\xi}^{-1} \circ \overline{\xi}\right)(\overline{x}) &= \left(\xi^{-1} \circ \xi\right)(x) + \varepsilon \begin{pmatrix} x^* \left(\xi^{-1} \circ \xi\right)'(x) + \widetilde{\xi}(x)\left(\xi^{-1}\right)'(\xi(x)) \\ -\widetilde{\xi}\left(\xi^{-1}(\xi(x))\right)\left(\xi^{-1}\right)'(\xi(x)) \end{pmatrix} \\
&= x + \varepsilon x^* \\
&= \overline{I}(\overline{x})
\end{aligned}
$$

dir. Benzer şekilde, $\left(\overline{\xi} \circ \overline{\xi}^{-1}\right)(\overline{y}) = \overline{I}(\overline{y})$ elde edilir. O halde, fonksiyonlarda eşitlik tanımından

$$
\overline{\xi}^{-1} \circ \overline{\xi} = \overline{\xi} \circ \overline{\xi}^{-1} = \overline{I}
$$

şeklindedir. Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
\overline{\xi}^{-1}(\overline{y}) &= \xi^{-1}(y) + \varepsilon\left(y^* \left(\xi^{-1}\right)'(y) - \left(\widetilde{\xi} \circ \xi^{-1}\right)(y)\left(\xi^{-1}\right)'(y)\right) \\
&= \mu(y) + \varepsilon\left(y^* \mu'(y) + \widetilde{\mu}(y)\right)
\end{aligned}
$$

biçiminde olup $\overline{\xi}^{-1}$ fonksiyonu dual analitiklik şartlarını sağlar ve μ ile $\widetilde{\mu}$ fonksiyonları C^{∞}-sınıfından fonksiyonlardır. □

Sonuç 3.2.5. $\overline{\xi} : \overline{U} \subseteq \mathbf{D} \to \overline{\xi}\left(\overline{U}\right) \subseteq \mathbf{D}$, $\overline{\xi}(\overline{x}) = \xi(x) + \varepsilon\left(x^* \xi'(x) + \widetilde{\xi}(x)\right)$ bir dual analitik fonksiyon ve $\forall x \in U \subseteq \mathbb{R}$ için $\xi'(x) \neq 0$ olsun. O halde, $\overline{\xi}$ dual fonksiyonunun tersi dual analitik bir fonksiyon olup bu fonksiyonun $\overline{y}$ dual değişkenine göre türevi

$$
\begin{aligned}
\frac{d\overline{\xi}^{-1}}{d\overline{y}} &= \frac{d\xi^{-1}}{dy} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial y}\left(y^* \left(\xi^{-1}\right)'(y) - \left(\widetilde{\xi} \circ \xi^{-1}\right)(y)\left(\xi^{-1}\right)'(y)\right) \\
&= \frac{1}{\overset{\bullet}{\overline{\xi}}(\overline{x})}
\end{aligned}
$$

biçimindedir.

Sonuç 3.2.6. $\overline{\xi} : \overline{U} \subseteq \mathbf{D} \to \overline{\xi}\left(\overline{U}\right) \subseteq \mathbf{D}$, $\overline{\xi}(\overline{x}) = \xi(x) + \varepsilon\left(x^* \xi'(x) + \widetilde{\xi}(x)\right)$ dual analitik fonksiyonunun tersinin tersi kendisine eşittir. Gerçekten, $\overline{\xi}$ dual analitik fonksiyonunun tersi

$$\begin{aligned}
\overline{\xi}^{-1}(\overline{y}) &= \xi^{-1}(y)+\varepsilon\left(y^{*}\left(\xi^{-1}\right)'(y)-\left(\widetilde{\xi}\circ\xi^{-1}\right)(y)\left(\xi^{-1}\right)'(y)\right)\\
&= \mu(y)+\varepsilon\left(y^{*}\mu'(y)+\widetilde{\mu}(y)\right)\\
&= \overline{\mu}(\overline{y})
\end{aligned}$$

şeklinde dual analitik bir fonksiyon olup

$$\begin{aligned}
\overline{\mu}^{-1}(\overline{x}) &= \xi(x)+\varepsilon\left(x^{*}\xi'(x)-\left(-\widetilde{\xi}\left(\xi^{-1}(\xi(x))\right)\right)\left(\xi^{-1}\right)'(\xi(x))\,\xi'(x)\right)\\
&= \xi(x)+\varepsilon\left(x^{*}\xi'(x)+\widetilde{\xi}(x)\right)\\
&= \overline{\xi}(\overline{x})
\end{aligned}$$

biçimindedir.

Teorem 3.2.10. $\overline{U}_1,\overline{U}_2,\overline{V}_1,\overline{V}_2\subseteq\mathbf{D}$ olmak üzere, $\overline{\xi}:\overline{U}_1\longrightarrow\overline{U}_2$,

$$\overline{\xi}(\overline{x})=\xi(x)+\varepsilon\left(x^{*}\xi'(x)+\widetilde{\xi}(x)\right)$$

ve $\overline{\mu}:\overline{V}_1\longrightarrow\overline{V}_2\subseteq\overline{U}_1$,

$$\overline{\mu}(\overline{x})=\mu(x)+\varepsilon\left(x^{*}\mu'(x)+\widetilde{\mu}(x)\right)$$

şeklinde tanımlı dual analitik fonksiyonlar olsun. Eğer $\overline{\mu}$ ve $\overline{\xi}$ fonksiyonları sırasıyla $\overline{x}$ ve $\overline{\mu}(\overline{x})$ noktalarında dual analitik fonksiyonlar ise bu durumda, $\overline{\xi}\circ\overline{\mu}$ bileşke fonksiyonu da dual analitik fonksiyondur ve ayrıca, bu dual analitik fonksiyonun $\overline{x}$ dual değişkenine göre türevi

$$\frac{d\left(\overline{\xi}\circ\overline{\mu}\right)}{d\overline{x}}=\frac{d\overline{\mu}}{d\overline{x}}(\overline{x})\,\frac{d\overline{\xi}}{d\overline{x}}(\overline{\mu}(\overline{x}))$$

şeklindedir.

İspat. $\overline{\xi}$ ve $\overline{\mu}$ fonksiyonları sırasıyla $\overline{\mu}(\overline{x})$ ve $\overline{x}$ noktalarında dual analitik fonksiyonlar olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \overline{\xi} \circ \overline{\mu} &: \overline{V}_1 \subseteq \mathbf{D} \to \overline{U}_2 \subseteq \mathbf{D} \\ \left(\overline{\xi} \circ \overline{\mu}\right)(\overline{x}) &= \overline{\xi}\left(\overline{\mu}\left(\overline{x}\right)\right) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı dual fonksiyon bir dual analitik fonksiyondur. Burada,

$$\left(\overline{\xi} \circ \overline{\mu}\right)(\overline{x}) = (\xi \circ \mu)(x) + \varepsilon \left(x^* (\xi \circ \mu)' + \widetilde{\mu}(x) \left(\xi' \circ \mu\right)(x) + \left(\widetilde{\xi} \circ \mu\right)(x)\right)$$

biçimindedir. O halde, bu fonksiyonun $\overline{x}$ dual değişkene göre türevi

$$\begin{aligned} \frac{d\left(\overline{\xi} \circ \overline{\mu}\right)}{d\overline{x}} &= (\xi \circ \mu)'(x) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\left(x^* (\xi \circ \mu)'(x) + \widetilde{\mu}(x) \left(\xi' \circ \mu\right)(x) + \left(\widetilde{\xi} \circ \mu\right)(x)\right) \\ &= \left(\mu'(x) + \varepsilon \left(x^* \mu''(x) + \widetilde{\mu}'(x)\right)\right) \\ &\quad \times \left(\xi'(\mu(x)) + \varepsilon \left(\left(x^* \mu'(x) + \widetilde{\mu}(x)\right) \xi''(\mu(x)) + \widetilde{\xi}'(\mu(x))\right)\right) \\ &= \frac{d\overline{\mu}}{d\overline{x}}(\overline{x}) \frac{d\overline{\xi}}{d\overline{x}}\left(\overline{\mu}(\overline{x})\right) \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. □

Teorem 3.2.11. $\overline{U} \subseteq \mathbf{D}$ bir bağlantılı dual açık cümle ve $\overline{\xi} : \overline{U} \subseteq \mathbf{D} \to \mathbf{D}$, $\overline{\xi}(\overline{x}) = \xi(x) + \varepsilon\left(x^* \xi'(x) + \widetilde{\xi}(x)\right)$ bir dual analitik fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$d\overline{\mu} = \overline{\xi} d\overline{x}$$

eşitliği $\overline{\xi} d\overline{x}$ nin integrali olarak adlandırılır ve

$$\begin{aligned} \overline{\mu}(\overline{x}) &= \int \overline{\xi}(\overline{x}) d\overline{x} \\ &= \int \xi(x) dx + \varepsilon \left(x^* \xi(x) + \int \widetilde{\xi}(x) dx\right) \\ &= \mu(x) + \varepsilon \left(x^* \mu'(x) + \widetilde{\mu}(x)\right) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca, $\overline{a} = a + \varepsilon a^*$ ve $\overline{b} = b + \varepsilon b^* \in \overline{U}$ olmak üzere,

$$\int_{\overline{a}}^{\overline{b}} \overline{\xi}(\overline{x}) d\overline{x} = \overline{\mu}\left(\overline{b}\right) - \overline{\mu}\left(\overline{a}\right)$$

biçimindedir ([27] ve [33]).

Açıklama 6. Yukarıdaki teorem 3.2.11 ile dual eşitsizlik sistemini göz önüne alalım ve $\overline{b} = b + \varepsilon b^* >_{\mathbf{D}} a + \varepsilon a^* = \overline{a}$ olsun. Bu durumda,

$i)$ $b > a$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{a}}^{\overline{b}} \overline{\xi}(\overline{x})\, d\overline{x} &= \overline{\mu}\left(\overline{b}\right) - \overline{\mu}\left(\overline{a}\right) \\
&= \mu(b) - \mu(a) + \varepsilon\left(b^*\mu'(b) - a^*\mu'(a) + \widetilde{\mu}(b) - \widetilde{\mu}(a)\right) \\
&= \int_a^b \xi(x)\, dx + \varepsilon\left(b^*\xi(b) - a^*\xi(a) + \int_a^b \widetilde{\xi}(x)\, dx\right)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada, ξ ve $\widetilde{\xi}$ fonksiyonları $[a,b] \subset U$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlardır.

$ii)$ $b = a$ ve $b^* > a^*$ ise bu durumda,

$$\int_{\overline{a}}^{\overline{b}} \overline{\xi}(\overline{x})\, d\overline{x} = 0 + \varepsilon\left(b^*\xi(b) - a^*\xi(a)\right)$$

şeklinde sırf dual bir sayıdır.

Teorem 3.2.12. $\overline{U} \subseteq \mathbf{D}$ bir bağlantılı dual açık cümle olmak üzere, $\overline{\xi}, \overline{\mu} : \overline{U} \subseteq \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ için

$$\overline{\xi}(\overline{x}) = \xi(x) + \varepsilon\left(x^*\xi'(x) + \widetilde{\xi}(x)\right)$$

ve

$$\overline{\mu}(\overline{x}) = \mu(x) + \varepsilon\left(x^*\mu'(x) + \widetilde{\mu}(x)\right)$$

dual analitik fonksiyonlar, $\overline{b} = b + \varepsilon b^* >_{\mathbf{D}} a + \varepsilon a^* = \overline{a}$ ve $\xi, \widetilde{\xi}, \mu$ ile $\widetilde{\mu}$ fonksiyonları $[a,b] \subset U$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler vardır:

1) $\int_{\overline{a}}^{\overline{b}} \overline{\xi}(\overline{x})\, d\overline{x} = -\int_{\overline{b}}^{\overline{a}} \overline{\xi}(\overline{x})\, d\overline{x}$.

2) $\int_{\overline{a}}^{\overline{a}} \overline{\xi}(\overline{x})\, d\overline{x} = \overline{0}$.

3) $\overline{k} = k + \varepsilon k^* \in \mathbf{D}$ olmak üzere, $\int_{\overline{a}}^{\overline{b}} \overline{k}\overline{\xi}(\overline{x})\, d\overline{x} = \overline{k}\int_{\overline{a}}^{\overline{b}} \overline{\xi}(\overline{x})\, d\overline{x}$ şeklindedir.

4) $\int_{\overline{a}}^{\overline{b}} \left(\overline{\xi}\left(\overline{x}\right) \pm \overline{\mu}\left(\overline{x}\right)\right) d\overline{x} = \int_{\overline{a}}^{\overline{b}} \overline{\xi}\left(\overline{x}\right) d\overline{x} \pm \int_{\overline{a}}^{\overline{b}} \overline{\mu}\left(\overline{x}\right) d\overline{x}.$

5) $\overline{c} = c + \varepsilon c^*$ ve $\overline{a} <_{\mathbf{D}} \overline{c} <_{\mathbf{D}} \overline{b}$ olmak üzere, $\int_{\overline{a}}^{\overline{c}} \overline{\xi}\left(\overline{x}\right) d\overline{x} + \int_{\overline{c}}^{\overline{b}} \overline{\xi}\left(\overline{x}\right) d\overline{x} = \int_{\overline{a}}^{\overline{b}} \overline{\xi}\left(\overline{x}\right) d\overline{x}$ dir.

6) $\forall x \in [a,b] \subset U$ için $\left\{\xi\left(x\right) > 0 \text{ ya da } \left(\xi\left(x\right) = 0 \text{ ve } \widetilde{\xi}\left(x\right) \geq 0\right)\right\}$ ise

$$\int_{\overline{a}}^{\overline{b}} \overline{\xi}\left(\overline{x}\right) d\overline{x} \geq_{\mathbf{D}} \overline{0}$$

dir.

7) $\forall x \in [a,b] \subset U$ için $\left\{\xi\left(x\right) > \mu\left(x\right) \text{ ya da } \left(\xi\left(x\right) = \mu\left(x\right) \text{ ve } \widetilde{\xi}\left(x\right) \geq \widetilde{\mu}\left(x\right)\right)\right\}$ ise

$$\int_{\overline{a}}^{\overline{b}} \overline{\xi}\left(\overline{x}\right) d\overline{x} \geq_{\mathbf{D}} \int_{\overline{a}}^{\overline{b}} \overline{\mu}\left(\overline{x}\right) d\overline{x}$$

dir.

İspat. $\overline{\xi}, \overline{\mu} : \overline{U} \subseteq \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ dual analitik fonksiyonlar olsun. Bu durumda, $b > a$ için

$$\int_{\overline{a}}^{\overline{b}} \overline{\xi}\left(\overline{x}\right) d\overline{x} = \int_{a}^{b} \xi\left(x\right) dx + \varepsilon \left(b^*\xi\left(b\right) - a^*\xi\left(a\right) + \int_{a}^{b} \widetilde{\xi}\left(x\right) dx\right)$$

ve $a = b$ ve $b^* > a^*$ için

$$\int_{\overline{a}}^{\overline{b}} \overline{\xi}\left(\overline{x}\right) d\overline{x} = 0 + \varepsilon \left(b^*\xi\left(b\right) - a^*\xi\left(a\right)\right)$$

biçiminde ifade edildiğini biliyoruz. O halde, $(1), (2), (3)$ ve (4) öncülleri integral tanımı kulllanılarak kolaylıkla gösterilir.

5) $\overline{a} = a + \varepsilon a^*$, $\overline{b} = b + \varepsilon b^*$ ve $\overline{c} = c + \varepsilon c^*$ olmak üzere; $\overline{a} <_{\mathbf{D}} \overline{c} <_{\mathbf{D}} \overline{b}$,

$$\overline{I}_1 = \int_{\overline{a}}^{\overline{c}} \overline{\xi}\left(\overline{x}\right) d\overline{x} = \int_{a}^{c} \xi\left(x\right) dx + \varepsilon \left(c^*\xi\left(c\right) - a^*\xi\left(a\right) + \int_{a}^{c} \widetilde{\xi}\left(x\right) dx\right),$$

$$\overline{I}_2 = \int_{\overline{c}}^{\overline{b}} \overline{\xi}\left(\overline{x}\right) d\overline{x} = \int_{c}^{b} \xi\left(x\right) dx + \varepsilon \left(b^*\xi\left(b\right) - c^*\xi\left(c\right) + \int_{c}^{b} \widetilde{\xi}\left(x\right) dx\right)$$

ve

$$\overline{I}_3 = \int\limits_{\overline{a}}^{\overline{b}} \overline{\xi}(\overline{x})\, d\overline{x} = \int\limits_{a}^{b} \xi(x)\, dx + \varepsilon \left(b^*\xi(b) - a^*\xi(a) + \int\limits_{a}^{b} \widetilde{\xi}(x)\, dx \right)$$

biçiminde olsun. $\overline{a} <_{\mathbf{D}} \overline{c} <_{\mathbf{D}} \overline{b}$ dual eşitsizliği ile tanımlanan dual sıralama bağıntısı birlikte göz önüne alındığında bu dual eşitsizlik dört cümlenin birleşiminden oluşur:

$i)$ $a < c < b$,

$ii)$ $a < c = b$ ve $c^* < b^*$,

$iii)$ $a = c < b$ ve $a^* < c^*$,

$iv)$ $a = b = c$ ve $a^* < c^* < b^*$.

Her bir durum için açıkça görülür ki $\overline{I}_1 + \overline{I}_2 = \overline{I}_3$ dür.

6) $\forall x \in [a,b] \subset U$ için $\left\{ \xi(x) > 0 \text{ ya da } \left(\xi(x) = 0 \text{ ve } \widetilde{\xi}(x) \geq 0 \right) \right\}$ olsun. Eğer $b > a$ ise

$$\overline{I} = \int\limits_{\overline{a}}^{\overline{b}} \overline{\xi}(\overline{x})\, d\overline{x} = \int\limits_{a}^{b} \xi(x)\, dx + \varepsilon \left(b^*\xi(b) - a^*\xi(a) + \int\limits_{a}^{b} \widetilde{\xi}(x)\, dx \right)$$

şeklinde yazılır. $\forall x \in [a,b]$ için $\xi(x) > 0$ ise $\int_a^b \xi(x)\, dx > 0$ olduğundan $\overline{I} \geq_{\mathbf{D}} \overline{0}$ elde edilir. $\forall x \in [a,b]$ için $\xi(x) = 0$ ve $\widetilde{\xi}(x) \geq 0$ ise $\int_a^b \xi(x)\, dx = 0,\ \xi(b) = \xi(a) = 0$ ve $\int_a^b \widetilde{\xi}(x)\, dx \geq 0$ olduğundan $\overline{I} \geq_{\mathbf{D}} \overline{0}$ olur. Şimdi de $a = b$ ve $b^* > a^*$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki eşitlik mevcuttur:

$$\overline{I} = \int\limits_{\overline{a}}^{\overline{b}} \overline{\xi}(\overline{x})\, d\overline{x} = 0 + \varepsilon\,(b^* - a^*)\,\xi(a)$$

Eğer $x = a = b$ için $\xi(x) > 0$ ise $(b^* - a^*)\,\xi(a) > 0$ olduğundan $\overline{I} \geq_{\mathbf{D}} \overline{0}$ yazılabilir. Eğer $x = a = b$ için $\xi(x) = 0$ ve $\widetilde{\xi}(x) \geq 0$ ise $\overline{I} = \overline{0}$ olduğundan $\overline{I} \geq_{\mathbf{D}} \overline{0}$ yazılabilir. Böylece ispat tamamlanır.

7) Yukarıdaki (6) öncülüne benzer şekilde ispat yapılır. □

Şimdi, çok değişkenli dual fonksiyonların analitiklik şartlarını inceleyeceğiz. Bir

$$\overline{\xi} : \overline{U} \subseteq \mathbf{D}^n \to \mathbf{D}$$

$$\overline{\xi}(\overline{x}) = \xi(x_1, x_2, ..., x_n, x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) + \varepsilon \xi^0 (x_1, x_2, ..., x_n, x_1^*, x_2^* ..., x_n^*)$$

biçiminde tanımlı dual fonksiyonunu ele alalım. Burada, $\overline{x}=(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n)=(x_1,...,x_n)+\varepsilon(x_1^*,...,x_n^*)=x+\varepsilon x^*$ şeklindedir. $\overline{\xi}:\overline{U}\subseteq \mathbf{D}^n\to\mathbf{D}$, $\overline{\xi}=\xi+\varepsilon\xi^0$ dual fonksiyonunun bir $\overline{a}\in\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n$ noktasındaki kısmi türevleri, limitin var olma şartıyla

$$\frac{\partial\overline{\xi}}{\partial\overline{x}_i}\mid_{\overline{a}}=\lim_{\triangle\overline{x}_i\to 0}\frac{\triangle\overline{\xi}}{\triangle\overline{x}_i}=\lim_{\triangle\overline{x}_i\to 0}\frac{\overline{\xi}(\overline{a}_1,...,\overline{a}_i+\triangle\overline{x}_i,...,\overline{a}_n)-\overline{\xi}(\overline{a}_1,...,\overline{a}_n)}{\triangle\overline{x}_i}$$

biçimindedir. Burada,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\overline{\xi}}{\partial\overline{x}_i}\mid_{\overline{a}}&=\frac{d}{d\overline{x}_i}\overline{\xi}(\overline{a}_1,...,\overline{x}_i,...\overline{a}_n)\mid_{\overline{x}_i=\overline{a}_i}\\&=\lim_{\overline{x}_i\to\overline{a}_i}\frac{\overline{\mu}(\overline{x}_i)-\overline{\mu}(\overline{a}_i)}{\overline{x}_i-\overline{a}_i}\quad\left(\overline{\mu}(\overline{x}_i)=\overline{\xi}(\overline{a}_1,...,\overline{x}_i,...\overline{a}_n)\right)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlandığından teorem 3.2.2 göz önüne alındığında, $1\le i\le n$ için ξ_{x_i} ve $\xi^0_{x_i}$ verilen noktada sürekli kısmi türevlere sahip ve ayrıca,

$$\frac{\partial\xi}{\partial x_i^*}=0 \text{ ve } \frac{\partial\xi^0}{\partial x_i^*}=\frac{\partial\xi}{\partial x_i}$$

şeklinde olup bu $\overline{\xi}$ fonksiyonunun $\overline{x}_i=x_i+\varepsilon x_i^*$ dual değişkenine göre kısmi türevi

$$\frac{\partial\overline{\xi}}{\partial\overline{x}_i}=\frac{\partial\xi}{\partial x_i}+\varepsilon\frac{\partial\xi^0}{\partial x_i}$$

biçiminde elde edilir. Ayrıca, sonuç 3.2.1'den biliyoruz ki bu limit $\frac{\triangle x_i^*}{\triangle x_i}$ oranından bağımsızdır. Bu durumda, ξ ve ξ^0 fonksiyonlarının diferensiyellenebilmesi ile $\varepsilon^2=0$ olduğu göz önüne alınıp Dimentberg'in [33] türev için yazdığı ifade genelleştirilerek yukarıdaki ifadeler aşağıdaki şekilde de bulunabilir:
$\overline{\xi}:\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n\to\mathbf{D}$ dual fonksiyonu için limitin var olma şartıyla $\frac{\partial\overline{\xi}}{\partial\overline{x}_i}\mid_{\overline{a}}$ ifadesi

$$\begin{aligned}\frac{\partial\overline{\xi}}{\partial\overline{x}_i}\mid_{\overline{a}}&=\frac{d}{d\overline{x}_i}\overline{\xi}(\overline{a}_1,...,\overline{x}_i,...,\overline{a}_n)\mid_{\overline{x}_i=\overline{a}_i}\\&=\frac{d\xi(a_1,...,x_i,...,a_n,a_1^*,...,x_i^*,...,a_n^*)+\varepsilon d\xi^0(a_1,...,x_i,...,a_n,a_1^*,...,x_i^*,...,a_n^*)}{dx_i+\varepsilon dx_i^*}\\&=\frac{\xi_{x_i}dx_i+\xi_{x_i^*}dx_i^*+\varepsilon\left(\xi^0_{x_i}dx_i+\xi^0_{x_i^*}dx_i^*\right)}{dx_i\left(1+\varepsilon\frac{dx_i^*}{dx_i}\right)\left(1-\varepsilon\frac{dx_i^*}{dx_i}\right)}\left(1-\varepsilon\frac{dx_i^*}{dx_i}\right)\end{aligned}$$

biçiminde olup bu ifade düzenlenirse

$$\frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{x}_i}|_{\overline{a}}=\left(\frac{\partial \xi}{\partial x_i}+\frac{\partial \xi}{\partial x_i^*}\frac{dx_i^*}{dx_i}\right)+\varepsilon\left(\frac{\partial \xi^0}{\partial x_i}+\left(\frac{\partial \xi^0}{\partial x_i^*}-\frac{\partial \xi}{\partial x_i}\right)\frac{dx_i^*}{dx_i}-\frac{\partial \xi}{\partial x_i^*}\left(\frac{dx_i^*}{dx_i}\right)^2\right) \tag{3.2.6}$$

elde edilir. Burada, ξ ve ξ^0 fonksiyonları birinci basamaktan sürekli kısmi türevlere sahiptir. Yukarıdaki şartı yerine getirmek için (3.2.6) eşitliğindeki $\dfrac{dx_i^*}{dx_i}$ nin katsayıları sıfıra eşitlenirse

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_i^*}=0 \text{ ve } \frac{\partial \xi^0}{\partial x_i^*}=\frac{\partial \xi}{\partial x_i} \tag{3.2.7}$$

elde edilir. (3.2.7) denklemleri $\overline{\xi}$ dual fonksiyonunun analitiklik şartlarıdır. (3.2.7) denklemleri dikkate alındığında aşağıdaki genel ifadeler yazılabilir:

$$\xi\left(x_1,x_2,...,x_n,x_1^*,x_2^*,...,x_n^*\right)=\xi\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$$

ve

$$\xi^0\left(x_1,x_2,...,x_n,x_1^*,x_2^*...,x_n^*\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i^*\frac{\partial \xi}{\partial x_i}+\widetilde{\xi}\left(x_1,x_2,...,x_n\right).$$

O halde, $\overline{U}\subseteq \mathbf{D}^n$ den $\mathbf{D}$ ye tanımlanan dual analitik fonksiyonların genel gösterimi

$$\begin{aligned}
\overline{\xi}\left(\overline{x}\right) &= \xi\left(x_1,x_2,...,x_n,x_1^*,x_2^*,...,x_n^*\right)+\varepsilon\xi^0\left(x_1,x_2,...,x_n,x_1^*,x_2^*...,x_n^*\right)\\
&= \xi\left(x_1,x_2,...,x_n\right)+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^*\frac{\partial \xi}{\partial x_i}+\widetilde{\xi}\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\right)\\
&= \xi\left(x\right)+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^*\frac{\partial \xi}{\partial x_i}+\widetilde{\xi}\left(x\right)\right)
\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

şeklindedir. Ayrıca, (3.2.6) ve (3.2.7) denklemleri dikkate alınırsa

$$\frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{x}_i}=\frac{\partial \xi}{\partial x_i}+\varepsilon\frac{\partial \xi^0}{\partial x_i}$$

olur. (3.2.8) eşitliğinden aşağıdaki genel ifade yazılabilir:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{x}_j} &= \frac{\partial \xi}{\partial x_j}+\varepsilon\frac{\partial \xi^0}{\partial x_j}\\
&= \frac{\partial \xi}{\partial x_j}+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^*\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_j\partial x_i}+\frac{\partial \widetilde{\xi}}{\partial x_j}\right).
\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Buradan görülmektedir ki $\overline{\xi}$ dual analitik fonksiyonunun $\overline{x}_j = x_j + \varepsilon x_j^*$ dual değişkenlerine göre kısmi türevleri x_j reel değişkenlerine göre kısmi türevlerine indirgenebilir. Burada, ξ en az ikinci basamaktan sürekli kısmi türevlere, $\widetilde{\xi}$ da en az birinci basamaktan sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonlardır ve $1 \leq j \leq n$ dir. Bu çalışma boyunca, ξ ve $\widetilde{\xi}$ fonksiyonlarını C^{∞}-sınıfından fonksiyonlar olarak ele alacağız. Ayrıca, $\overline{\xi}$ dual analitik fonksiyonlarının dual analitik bölgelerinin $\overline{U} = (U \subseteq \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \in \overline{\tau}_1$ cümleleri olduğu açıktır. Eğer $\overline{\xi}$ fonksiyonu $\overline{U} \subseteq \mathbf{D}^n$ cümlesinin her noktasında analitik ise $\overline{\xi}$ ye $\overline{U}$ üzerinde analitik fonksiyondur denir.

Örneğin;

$$\overline{\xi}\left(\overline{x}_1, \overline{x}_2\right) = x_1^2 + 2x_2 + \varepsilon\left(2x_1x_1^* + 2x_2^*\right)$$

dual fonksiyonunu ele alalım. $\xi = x_1^2 + 2x_2$ ve $\xi^0 = 2x_1x_1^* + 2x_2^*$ denilirse $\overline{\xi}$ fonksiyonu dual analitiklik şartlarını sağlamaktadır ve $\xi = x_1^2 + 2x_2$ ile $\widetilde{\xi} = 0$ fonksiyonlarının C^{∞}-sınıfından olduğu açıktır. Herhangi bir $\overline{a} = (\overline{a}_1, \overline{a}_2) \in \mathbf{D}^2$ noktasındaki $\overline{\xi}$ dual analitik fonksiyonunun kısmi türevleri

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{x}_1} \mid_{\overline{a}} &= \lim_{\overline{x}_1 \to \overline{a}_1} \frac{\overline{\xi}\left(\overline{x}_1, \overline{a}_2\right) - \overline{\xi}\left(\overline{a}_1, \overline{a}_2\right)}{\overline{x}_1 - \overline{a}_1} \\
&= \lim_{\left(x_1, x_1^*\right) \to \left(a_1, a_1^*\right)} \frac{x_1^2 + 2a_2 + \varepsilon\left(2x_1x_1^* + 2a_2^*\right) - a_1^2 - 2a_2 - \varepsilon\left(2a_1a_1^* + 2a_2^*\right)}{x_1 - a_1 + \varepsilon\left(x_1^* - a_1^*\right)} \\
&= \lim_{\left(x_1, x_1^*\right) \to \left(a_1, a_1^*\right)} \left[\left(x_1 + a_1\right) + \varepsilon\left(\left(x_1^* + a_1^*\right)\right)\right] \\
&= 2a_1 + \varepsilon 2a_1^*
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{x}_2} \mid_{\overline{a}} &= \lim_{\overline{x}_2 \to \overline{a}_2} \frac{\overline{\xi}\left(\overline{a}_1, \overline{x}_2\right) - \overline{\xi}\left(\overline{a}_1, \overline{a}_2\right)}{\overline{x}_2 - \overline{a}_2} \\
&= \lim_{\left(x_2, x_2^*\right) \to \left(a_2, a_2^*\right)} \frac{2x_2 - 2a_2 + \varepsilon\left(2x_2^* - 2a_2^*\right)}{x_2 - a_2 + \varepsilon\left(x_2^* - a_2^*\right)} \\
&= \lim_{\left(x_2, x_2^*\right) \to \left(a_2, a_2^*\right)} \left[2 + \varepsilon\left(\frac{2x_2^* - 2a_2^*}{x_2 - a_2} - 2\left(\frac{x_2^* - a_2^*}{x_2 - a_2}\right)\right)\right] \\
&= 2 + \varepsilon 0
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. (3.2.9) denkleminden de aynı sonuçların elde edileceği kolay bir şekilde görülmektedir.

Sonuç 3.2.7. $\overline{\xi}:\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n\to\mathbf{D}$ dual analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\overline{\xi}\left(\overline{x}\right)=\xi\left(x\right)+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^*\frac{\partial\xi}{\partial x_i}+\widetilde{\xi}\left(x\right)\right)$$

şeklinde olup ξ ve $\widetilde{\xi}$ fonksiyonları C^∞-sınıfından olduğundan $\overline{\xi}$ dual analitik fonksiyonunun $\overline{x}_j=x_j+\varepsilon x_j^*$ dual değişkene göre kısmi türevleri

$$\begin{aligned}\frac{\partial\overline{\xi}}{\partial\overline{x}_j} &= \frac{\partial\xi}{\partial x_j}+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^*\frac{\partial^2\xi}{\partial x_j\partial x_i}+\frac{\partial\widetilde{\xi}}{\partial x_j}\right)\\ &= \frac{\partial\xi}{\partial x_j}+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^*\frac{\partial^2\xi}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{\partial\widetilde{\xi}}{\partial x_j}\right)\\ &= \frac{\partial\xi}{\partial x_j}+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^*\frac{\partial\left(\frac{\partial\xi}{\partial x_j}\right)}{\partial x_i}+\frac{\partial\widetilde{\xi}}{\partial x_j}\right)\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir $(1\leq j\leq n)$. Eğer $\dfrac{\partial\xi}{\partial x_j}=\mu$ ve $\dfrac{\partial\widetilde{\xi}}{\partial x_j}=\widetilde{\mu}$ denilirse,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\overline{\xi}}{\partial\overline{x}_j} &= \mu\left(x\right)+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^*\frac{\partial\mu}{\partial x_i}+\widetilde{\mu}\left(x\right)\right)\\ &= \overline{\mu}\left(\overline{x}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. O halde, μ ve $\widetilde{\mu}$ fonksiyonları C^∞-sınıfından ve $\overline{\mu}$ fonksiyonu dual analitiklik şartlarını sağladığından $\dfrac{\partial\overline{\xi}}{\partial\overline{x}_j}$ dual fonksiyonu dual analitik bir fonksiyondur.

Tanım 3.2.13. $\overline{\xi}:\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n\to\mathbf{D}$ biçiminde tanımlı dual analitik fonksiyonların cümlesini $C\left(\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n,\mathbf{D}\right)$ ile gösterelim. Bu durumda,

$$C\left(\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n,\mathbf{D}\right)=\left\{\overline{\xi}\mid\overline{\xi}:\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n\to\mathbf{D},\ \overline{\xi}\left(\overline{x}\right)=\xi\left(x\right)+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^*\frac{\partial\xi}{\partial x_i}+\widetilde{\xi}\left(x\right)\right)\right\}$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca, $\overline{\mu}:\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n\to\mathbf{D}^m$, $\overline{\mu}\left(\overline{x}\right)=\left(\overline{\mu}_1\left(\overline{x}\right),\overline{\mu}_2\left(\overline{x}\right),...,\overline{\mu}_m\left(\overline{x}\right)\right)$ dual fonksiyonunu ele alalım. Eğer $1\leq j\leq m$ için $\overline{\mu}_j:\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n\to\mathbf{D}$ dual fonksiyonları dual analitik fonksiyonlar ise bu durumda, $\overline{\mu}$ dual fonksiyonu da dual analitik fonksiyondur.

Sonuç 3.2.8. $\overline{\xi},\overline{\mu}:\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n\to\mathbf{D}$ dual analitik fonksiyonlarını ve $\overline{\lambda}=\lambda+\varepsilon\lambda^*\in\mathbf{D}$ dual sayısını ele alalım. Böylece, aşağıdaki fonksiyonlar tanımlanabilir:

1) $+_C : C\left(\overline{U} \subseteq \mathbf{D}^n, \mathbf{D}\right) \times C\left(\overline{U} \subseteq \mathbf{D}^n, \mathbf{D}\right) \to C\left(\overline{U} \subseteq \mathbf{D}^n, \mathbf{D}\right),$

$$\overline{\xi} +_C \overline{\mu} : \overline{U} \subseteq \mathbf{D}^n \to \mathbf{D}$$

$$\begin{aligned} \left(\overline{\xi} +_C \overline{\mu}\right)(\overline{x}) &= \overline{\xi}(\overline{x}) + \overline{\mu}(\overline{x}) \\ &= \xi(x) + \mu(x) + \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^* \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_i} + \frac{\partial \mu}{\partial x_i}\right) + \widetilde{\xi}(x) + \widetilde{\mu}(x)\right). \end{aligned}$$

2) $\cdot_C : \mathbf{D} \times C\left(\overline{U} \subseteq \mathbf{D}^n, \mathbf{D}\right) \to C\left(\overline{U} \subseteq \mathbf{D}^n, \mathbf{D}\right),$

$$\overline{\lambda} \cdot_C \overline{\xi} : \overline{U} \subseteq \mathbf{D}^n \to \mathbf{D}$$

$$\begin{aligned} \left(\overline{\lambda} \cdot_C \overline{\xi}\right)(\overline{x}) &= \overline{\lambda} \cdot \overline{\xi}(\overline{x}) \\ &= \lambda \xi(x) + \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^* \left(\lambda \frac{\partial \xi}{\partial x_i}\right) + \lambda \widetilde{\xi}(x) + \lambda^* \xi(x)\right). \end{aligned}$$

3) $\cdot_{1C} : C\left(\overline{U} \subseteq \mathbf{D}^n, \mathbf{D}\right) \times C\left(\overline{U} \subseteq \mathbf{D}^n, \mathbf{D}\right) \to C\left(\overline{U} \subseteq \mathbf{D}^n, \mathbf{D}\right),$

$$\overline{\xi} \cdot_{1C} \overline{\mu} : \overline{U} \subseteq \mathbf{D}^n \to \mathbf{D}$$

$$\begin{aligned} \left(\overline{\xi} \cdot_{1C} \overline{\mu}\right)(\overline{x}) &= \overline{\xi}(\overline{x}) \cdot \overline{\mu}(\overline{x}) \\ &= \xi(x)\mu(x) + \varepsilon\left(\begin{array}{c} \sum_{i=1}^{n} x_i^* \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_i}\mu(x) + \xi(x)\frac{\partial \mu}{\partial x_i}\right) \\ + \xi(x)\widetilde{\mu}(x) + \widetilde{\xi}(x)\mu(x) \end{array}\right). \end{aligned}$$

Teorem 3.2.14. $\overline{\xi}$ ve $\overline{\mu}$ fonksiyonları $\overline{U} \subseteq \mathbf{D}^n$ den $\mathbf{D}$ ye tanımlı dual analitik fonksiyonlar ise bu durumda,

i) $\overline{\xi} \pm \overline{\mu}$

ii) $\overline{\xi} \cdot \overline{\mu}$

iii) $\dfrac{\overline{\xi}}{\overline{\mu}}, \; (reel(\overline{\mu}(\overline{x})) \neq 0)$

fonksiyonları da dual analitik fonksiyonlardır ve bu fonksiyonların $\overline{x}_j$ dual değişkene göre kısmi türevleri sırasıyla,

$$\frac{\partial\overline{\xi}}{\partial\overline{x}_j}\pm\frac{\partial\overline{\mu}}{\partial\overline{x}_j},\ \frac{\partial\overline{\xi}}{\partial\overline{x}_j}\cdot\overline{\mu}(\overline{x})+\overline{\xi}(\overline{x})\cdot\frac{\partial\overline{\mu}}{\partial\overline{x}_j},\ \frac{\frac{\partial\overline{\xi}}{\partial\overline{x}_j}\cdot\overline{\mu}(\overline{x})-\overline{\xi}(\overline{x})\cdot\frac{\partial\overline{\mu}}{\partial\overline{x}_j}}{\left(\overline{\mu}(\overline{x})\right)^2}$$

dir.

İspat. $\overline{\xi},\overline{\mu}:\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n\to\mathbf{D}$ dual analitik fonksiyonlar olsun. Bu durumda, $\overline{\xi}$ ve $\overline{\mu}$ dual analitik fonksiyonlarının

$$\overline{\xi}(\overline{x})=\xi(x)+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^*\frac{\partial\xi}{\partial x_i}+\widetilde{\xi}(x)\right)$$

ve

$$\overline{\mu}(\overline{x})=\mu(x)+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^*\frac{\partial\mu}{\partial x_j}+\widetilde{\mu}(x)\right)$$

şeklinde yazılabildiğini biliyoruz. Burada, $\xi,\mu,\widetilde{\xi}$ ve $\widetilde{\mu}$ fonksiyonları C^∞-sınıfındandır. $(i),(ii)$ ve (iii) öncüllerindeki fonksiyonların dual analitik fonksiyonlar ve (i) ile (ii) öncüllerindeki fonksiyonların $\overline{x}_j=x_j+\varepsilon x_j^*$ dual değişkenine göre kısmi türevlerinin

$$\frac{\partial\overline{\xi}}{\partial\overline{x}_j}\pm\frac{\partial\overline{\mu}}{\partial\overline{x}_j}\ \text{ve}\ \frac{\partial\overline{\xi}}{\partial\overline{x}_j}\cdot\overline{\mu}(\overline{x})+\overline{\xi}(\overline{x})\cdot\frac{\partial\overline{\mu}}{\partial\overline{x}_j}$$

olduğu kolayca görülmektedir. Ayrıca, $\mu(x)\neq 0$ ($\forall x\in U$ için) olmak üzere,

$$\frac{1}{\overline{\mu}(\overline{x})}=\frac{1}{\mu(x)}+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^*\frac{\partial\left(\frac{1}{\mu}\right)}{\partial x_i}-\frac{\widetilde{\mu}(x)}{\left(\mu(x)\right)^2}\right)$$

biçiminde olup bu dual analitik fonksiyonun $\overline{x}_j=x_j+\varepsilon x_j^*$ dual değişkenine göre kısmi türevleri

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\frac{1}{\overline{\mu}}\right)}{\partial\overline{x}_j} &= -\frac{\frac{\partial\mu}{\partial x_j}}{\left(\mu(x)\right)^2}+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^*\frac{\partial^2\left(\frac{1}{\mu}\right)}{\partial x_j\partial x_i}-\frac{\frac{\partial\widetilde{\mu}}{\partial x_j}}{\left(\mu(x)\right)^2}+2\frac{\widetilde{\mu}(x)\frac{\partial\mu}{\partial x_j}}{\left(\mu(x)\right)^3}\right)\\ &= -\frac{\frac{\partial\overline{\mu}}{\partial\overline{x}_j}}{\left(\overline{\mu}(\overline{x})\right)^2}\end{aligned}$$

şeklindedir. O halde, bu teoremin ikinci öncülü de göz önüne alındığında

$$\frac{\partial\left(\overline{\xi}\frac{1}{\overline{\mu}}\right)}{\partial\overline{x}_j}=\frac{\dfrac{\partial\overline{\xi}}{\partial\overline{x}_j}\cdot\overline{\mu}\left(\overline{x}\right)-\overline{\xi}\left(\overline{x}\right)\cdot\dfrac{\partial\overline{\mu}}{\partial\overline{x}_j}}{\left(\overline{\mu}\left(\overline{x}\right)\right)^2}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 3.2.15. $\overline{\mu}:\overline{I}\subseteq\mathbf{D}\to\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n$ ve $\overline{\xi}:\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n\to\mathbf{D}$ dual analitik fonksiyonlar olsun. Burada,

$$\begin{aligned}\overline{\mu}\left(\overline{t}\right) &= \left(\overline{\mu}_1\left(\overline{t}\right),\overline{\mu}_2\left(\overline{t}\right),...,\overline{\mu}_n\left(\overline{t}\right)\right)\\ &= \left(\mu_1\left(t\right),\mu_2\left(t\right),...,\mu_n\left(t\right)\right)+\varepsilon\begin{pmatrix} t^*\left(\mu_1'\left(t\right),\mu_2'\left(t\right),...,\mu_n'\left(t\right)\right)\\ +\left(\widetilde{\mu}_1\left(t\right),\widetilde{\mu}_2\left(t\right),...,\widetilde{\mu}_n\left(t\right)\right)\end{pmatrix}\\ &= \mu\left(t\right)+\varepsilon\left(t^*\mu'\left(t\right)+\widetilde{\mu}\left(t\right)\right)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\overline{\xi}\left(\overline{x}\right) &= \xi\left(x_1,x_2,...,x_n,x_1^*,x_2^*,...,x_n^*\right)+\varepsilon\xi^0\left(x_1,x_2,...,x_n,x_1^*,x_2^*...,x_n^*\right)\\ &= \xi\left(x\right)+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^n x_i^*\frac{\partial\xi}{\partial x_i}+\widetilde{\xi}\left(x\right)\right)\end{aligned}$$

şeklinde olup $\xi,\mu,\widetilde{\xi}$ ve $\widetilde{\mu}$ fonksiyonları C^∞-sınıfındandır. Eğer $\overline{\mu}$ ve $\overline{\xi}$ fonksiyonları sırasıyla $\overline{t}$ ve $\overline{\mu}\left(\overline{t}\right)$ noktalarında analitik ise $\overline{\xi}\circ\overline{\mu}:\overline{I}\subseteq\mathbf{D}\to\mathbf{D}$ bileşke fonksiyonu da dual analitik bir fonksiyon olup bu fonksiyonun $\overline{t}$ dual değişkene göre türevi

$$\frac{d\left(\overline{\xi}\circ\overline{\mu}\right)}{d\overline{t}}=\left(\xi\circ\mu\right)'\left(t\right)+\varepsilon\begin{pmatrix} t^*\left(\xi\circ\mu\right)''\left(t\right)+\dfrac{d}{dt}\left(\left\langle\widetilde{\mu}\left(t\right),\sum\limits_{i=1}^n\left(\xi_{x_i}\circ\mu\right)\left(t\right)\overrightarrow{e}_i\right\rangle\right)\\ +\left(\widetilde{\xi}\circ\mu\right)'\left(t\right)\end{pmatrix} \tag{3.2.10}$$

biçmindedir. Burada,

$$\left(\xi\circ\mu\right)'\left(t\right)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial\xi}{\partial x_i}\left(\mu\left(t\right)\right)\frac{d\mu_i}{dt}\left(t\right)$$

dir.

İspat. $\overline{\mu}:\overline{I}\subseteq\mathbf{D}\to\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n$ ve $\overline{\xi}:\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n\to\mathbf{D}$ dual analitik fonksiyonlar olsun. Bu durumda, $\overline{\xi} \circ \overline{\mu} : \overline{I} \subseteq \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ bileşke fonksiyonu

$$\begin{aligned}\left(\overline{\xi} \circ \overline{\mu}\right)(\overline{t}) &= (\xi \circ \mu)(t) + \varepsilon \left(\begin{array}{c} t^{*} (\xi \circ \mu)'(t) + \left\langle \widetilde{\mu}(t), \sum_{i=1}^{n} (\xi_{x_i} \circ \mu)(t) \overrightarrow{e}_i \right\rangle \\ + \left(\widetilde{\xi} \circ \mu\right)(t) \end{array} \right) \\ &= h(t) + \varepsilon \left(t^{*} h'(t) + \widetilde{h}(t) \right) \\ &= \overline{h}(\overline{t})\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada, h ile $\widetilde{h}$ fonksiyonları C^{∞}-sınıfından fonksiyonlar ve $\overline{h}$ fonksiyonu dual analitiklik şartlarını sağlar. Böylece, $\overline{\xi} \circ \overline{\mu}$ bileşke fonksiyonu dual analitik bir fonksiyon olup $\overline{t}$ dual değişkene göre türevi

$$\frac{d\left(\overline{\xi} \circ \overline{\mu}\right)}{d\overline{t}} = (\xi \circ \mu)'(t) + \varepsilon \left(\begin{array}{c} t^{*} (\xi \circ \mu)''(t) + \frac{d}{dt}\left(\left\langle \widetilde{\mu}(t), \sum_{i=1}^{n} (\xi_{x_i} \circ \mu)(t) \overrightarrow{e}_i \right\rangle \right) \\ + \left(\widetilde{\xi} \circ \mu\right)'(t) \end{array} \right)$$

şeklinde elde edilir. □

Sonuç 3.2.9. Tanımlanan dual-iç çarpım fonksiyonu ile dual analitik fonksiyonların bileşkelerinin dual değişkene göre türevi uyum içersindedir. Gerçekten, yukarıdaki teoremden de açıkça görülür ki $\overline{\xi} \circ \overline{\mu}$ bileşke fonksiyonunun türevi

$$\begin{aligned}\frac{d\left(\overline{\xi} \circ \overline{\mu}\right)}{d\overline{t}} &= \frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{x}_1}(\overline{\mu}(\overline{t})) \frac{d\overline{\mu}_1}{d\overline{t}}(\overline{t}) + \frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{x}_2}(\overline{\mu}(\overline{t})) \frac{d\overline{\mu}_2}{d\overline{t}}(\overline{t}) + \ldots + \frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{x}_n}(\overline{\mu}(\overline{t})) \frac{d\overline{\mu}_n}{d\overline{t}}(\overline{t}) \\ &= \left\langle \left(\frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{x}_1}, \frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{x}_2}, \ldots, \frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{x}_n} \right)(\overline{\mu}(\overline{t})), \left(\frac{d\overline{\mu}_1}{d\overline{t}}, \frac{d\overline{\mu}_2}{d\overline{t}}, \ldots, \frac{d\overline{\mu}_n}{d\overline{t}} \right)(\overline{t}) \right\rangle_{\mathbf{D}} \qquad (3.2.11)\end{aligned}$$

şeklinde de yazılabilir. (3.2.11) eşitliği açılırsa (3.2.10) eşitliğinin elde edileceği kolaylıkla görülür.

Tanım 3.2.16. $\overline{\xi} : \overline{V} \subseteq \mathbf{D}^m \to \mathbf{D}^l$ ve $\overline{\mu} : \overline{U} \subseteq \mathbf{D}^n \to \overline{V} \subseteq \mathbf{D}^m$ iki dual analitik fonksiyonu

$$\overline{\xi}(\overline{x}) = \xi(x) + \varepsilon \left(\sum_{j=1}^{m} x_j^{*} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} + \widetilde{\xi}(x) \right)$$

ve

$$\overline{\mu}(\overline{y}) = \mu(y) + \varepsilon \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^{*} \frac{\partial \mu}{\partial y_j} + \widetilde{\mu}(y) \right)$$

biçiminde olsun. Burada, $\xi(x) = (\xi_1(x), ..., \xi_l(x))$, $\widetilde{\xi}(x) = \left(\widetilde{\xi}_1(x), ..., \widetilde{\xi}_l(x)\right)$, $\mu(y) = (\mu_1(y), ..., \mu_m(y))$ ve $\widetilde{\mu}(y) = (\widetilde{\mu}_1(y), ..., \widetilde{\mu}_m(y))$ fonksiyonları C^{∞}-sınıfındandır. Bu durumda, $\overline{\mu}$ fonksiyonunun görüntü cümlesinin $\overline{\xi}$ fonksiyonunun tanım cümlesinin içinde olması şartıyla, $\overline{\mu}$ ile $\overline{\xi}$ dual analitik fonksiyonlarının bileşkesi

$$\begin{aligned} \overline{\xi} \circ \overline{\mu} &: \overline{U} \subseteq \mathbf{D}^n \to \mathbf{D}^l \\ \left(\overline{\xi} \circ \overline{\mu}\right)(\overline{y}) &= \overline{\xi}(\overline{\mu}(\overline{y})) \end{aligned}$$

şeklinde olup

$$\left(\overline{\xi} \circ \overline{\mu}\right)(\overline{y}) = (\xi \circ \mu)(y) + \varepsilon \left(\begin{array}{c} \sum\limits_{j=1}^{n} y_j^* \dfrac{\partial(\xi \circ \mu)}{\partial y_j} \\ + \left(\langle \widetilde{\mu}(y), \nabla \xi_1(\mu(y)) \rangle, ..., \langle \widetilde{\mu}(y), \nabla \xi_l(\mu(y)) \rangle\right) \\ + \left(\widetilde{\xi} \circ \mu\right)(y) \end{array} \right)$$

dir. Burada, $1 \leq i \leq l$ için $\nabla \xi_i(\mu(y)) = (\xi_{ix_1}(\mu(y)), ..., \xi_{ix_m}(\mu(y)))$ ve $1 \leq j \leq n$ için

$$\frac{\partial(\xi \circ \mu)}{\partial y_j} = \frac{\partial \mu_1}{\partial y_j}(y) \frac{\partial \xi}{\partial x_1}(\mu(y)) + \frac{\partial \mu_2}{\partial y_j}(y) \frac{\partial \xi}{\partial x_2}(\mu(y)) + ... + \frac{\partial \mu_m}{\partial y_j}(y) \frac{\partial \xi}{\partial x_m}(\mu(y))$$

şeklindedir.

Açıklama 7. $\overline{\xi} : \overline{U} \subseteq \mathbf{D}^n \to \mathbf{D}^n$, $\overline{\xi}(\overline{x}) = \left(\overline{\xi}_1(\overline{x}), \overline{\xi}_2(\overline{x}), ..., \overline{\xi}_n(\overline{x})\right)$ bir dual analitik fonksiyon ve $\forall \overline{p} = p + \varepsilon p^* \in \overline{U} \subseteq \mathbf{D}^n$ için $rankJ(\xi, p) = n$ olsun. Burada,

$$\overline{\xi}(\overline{x}) = \xi(x) + \varepsilon \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^* \frac{\partial \xi}{\partial x_j} + \widetilde{\xi}(x) \right)$$

biçiminde olup $\xi(x) = (\xi_1(x), \xi_2(x), ..., \xi_n(x))$ ve $\widetilde{\xi}(x) = \left(\widetilde{\xi}_1(x), \widetilde{\xi}_2(x), ..., \widetilde{\xi}_n(x)\right)$ fonksiyonları C^{∞}-sınıfındandır. O halde, $\forall p \in U$ için $\frac{\partial \xi}{\partial x_j}(p) \neq 0$ dır. Bu durumda, $p \in U$ ise $\xi(p) \in \xi(U)$ ve ayrıca, $p^* \in \mathbb{R}^n$, $\frac{\partial \xi}{\partial x_j}(p) \neq 0$ ve

$$dual\left(\overline{\xi}(\overline{p})\right) = \left(p_1^* \xi_{1_{x_1}}(p) + ... + p_n^* \xi_{1_{x_n}}(p) + \widetilde{\xi}_1(p), ..., p_1^* \xi_{n_{x_1}}(p) + ... + p_n^* \xi_{n_{x_n}}(p) + \widetilde{\xi}_n(p)\right)$$

biçiminde olduğundan aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.2.17. $\overline{\xi} : \overline{U} \subseteq \mathbf{D}^n \to \overline{\xi}\left(\overline{U}\right) \subseteq \mathbf{D}^n$, $\overline{\xi}(\overline{x}) = \left(\overline{\xi}_1(\overline{x}), \overline{\xi}_2(\overline{x}), ..., \overline{\xi}_n(\overline{x})\right)$ bir dual analitik fonksiyon olsun. Burada,

$$\overline{\xi}\left(\overline{x}\right)=\xi\left(x\right)+\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^*\frac{\partial\xi}{\partial x_j}+\widetilde{\xi}\left(x\right)\right)$$

biçiminde olup $\xi\left(x\right)=\left(\xi_1\left(x\right),\xi_2\left(x\right),...,\xi_n\left(x\right)\right)$ ve $\widetilde{\xi}\left(x\right)=\left(\widetilde{\xi}_1\left(x\right),\widetilde{\xi}_2\left(x\right),...,\widetilde{\xi}_n\left(x\right)\right)$ fonksiyonları C^∞-sınıfındandır. $\forall\overline{p}=p+\varepsilon p^*\in\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n$ için $rankJ\left(\xi,p\right)=n$ ise $\overline{\xi}:\overline{U}\to\overline{\xi}\left(\overline{U}\right)$ dual analitik fonksiyonunun tersi

$$\overline{\mu}:\overline{\xi}\left(\overline{U}\right)\to\overline{U}$$

$$\overline{\mu}\left(\overline{y}\right)=\mu\left(y\right)+\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}y_j^*\frac{\partial\mu}{\partial y_j}+\widetilde{\mu}\left(y\right)\right)$$

biçiminde tanımlı dual analitik bir fonksiyondur. Burada, $\mu\left(y\right)=\left(\xi\mid_U\right)^{-1}\left(y\right)$ ve $1\leq i\leq n$ için $\widetilde{\mu}_i\left(y\right)=\left\langle-\widetilde{\xi}\left(\mu\left(y\right)\right),\nabla\mu_i\left(y\right)\right\rangle$ dir [32].

Teorem 3.2.18. $\overline{\xi}:\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n\to\mathbf{D}$ biçiminde tanımlı dual analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $1\leq j,k\leq n$ için

$$\frac{\partial^2\overline{\xi}}{\partial\overline{x}_k\partial\overline{x}_j}=\frac{\partial^2\overline{\xi}}{\partial\overline{x}_j\partial\overline{x}_k}$$

dir.

İspat. $\overline{\xi}:\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n\to\mathbf{D}$ biçiminde tanımlı dual analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\overline{\xi}\left(\overline{x}\right)=\xi\left(x\right)+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^*\frac{\partial\xi}{\partial x_i}+\widetilde{\xi}\left(x\right)\right)$$

şeklinde olup ξ ve $\widetilde{\xi}$ fonksiyonları C^∞-sınıfındandır. $1\leq j\leq n$ için bu dual analitik fonksiyonunun $\overline{x}_j$ dual değişkenine göre kısmi türevleri

$$\begin{aligned}\frac{\partial\overline{\xi}}{\partial\overline{x}_j}&=\frac{\partial\xi}{\partial x_j}+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^*\frac{\partial^2\xi}{\partial x_j\partial x_i}+\frac{\partial\widetilde{\xi}}{\partial x_j}\right)\\&=\frac{\partial\xi}{\partial x_j}+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^*\frac{\partial^2\xi}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{\partial\widetilde{\xi}}{\partial x_j}\right)\\&=\mu\left(x\right)+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^*\frac{\partial\mu}{\partial x_i}+\widetilde{\mu}\left(x\right)\right)\end{aligned}\tag{3.2.12}$$

biçiminde olup μ ve $\widetilde{\mu}$ fonksiyonları C^{∞}-sınıfındandır öyle ki $\dfrac{\partial\overline{\xi}}{\partial\overline{x}_j} \in C\left(\overline{U} \subseteq \mathbf{D}^n, \mathbf{D}\right)$ dir. O halde, (3.2.12) eşitliğinin tekrar $\overline{x}_k$ dual değişkenine göre kısmi türevleri alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\overline{\xi}}{\partial\overline{x}_k\partial\overline{x}_j} &= \frac{\partial\mu}{\partial x_k} + \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^* \frac{\partial^2\mu}{\partial x_k\partial x_i} + \frac{\partial\widetilde{\mu}}{\partial x_k}\right) \\ &= \frac{\partial\mu}{\partial x_k} + \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^* \frac{\partial^2\mu}{\partial x_i\partial x_k} + \frac{\partial\widetilde{\mu}}{\partial x_k}\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\frac{\partial\mu}{\partial x_k} = \frac{\partial^2\xi}{\partial x_k\partial x_j} = \frac{\partial^2\xi}{\partial x_j\partial x_k} \text{ ve } \frac{\partial\widetilde{\mu}}{\partial x_k} = \frac{\partial^2\widetilde{\xi}}{\partial x_k\partial x_j} = \frac{\partial^2\widetilde{\xi}}{\partial x_j\partial x_k}$$

olduğundan aşağıdaki eşitlik mevcuttur:

$$\frac{\partial^2\overline{\xi}}{\partial\overline{x}_k\partial\overline{x}_j} = \frac{\partial^2\xi}{\partial x_j\partial x_k} + \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^* \frac{\partial^3\xi}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k} + \frac{\partial^2\widetilde{\xi}}{\partial x_j\partial x_k}\right). \tag{3.2.13}$$

Diğer yandan

$$\begin{aligned} \frac{\partial\overline{\xi}}{\partial\overline{x}_k} &= \frac{\partial\xi}{\partial x_k} + \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^* \frac{\partial^2\xi}{\partial x_i\partial x_k} + \frac{\partial\widetilde{\xi}}{\partial x_k}\right) \\ &= h(x) + \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^* \frac{\partial h}{\partial x_i} + \widetilde{h}(x)\right) \end{aligned}$$

olup buradan

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\overline{\xi}}{\partial\overline{x}_j\partial\overline{x}_k} &= \frac{\partial h}{\partial x_j} + \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^* \frac{\partial^2 h}{\partial x_i\partial x_j} + \frac{\partial\widetilde{h}}{\partial x_j}\right) \\ &= \frac{\partial^2\xi}{\partial x_j\partial x_k} + \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^* \frac{\partial^3\xi}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k} + \frac{\partial^2\widetilde{\xi}}{\partial x_j\partial x_k}\right) \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

eşitliği elde edilir. (3.2.13) ve (3.2.14) eşitlikleri birlikte göz önüne alınırsa

$$\frac{\partial^2\overline{\xi}}{\partial\overline{x}_k\partial\overline{x}_j} = \frac{\partial^2\overline{\xi}}{\partial\overline{x}_j\partial\overline{x}_k}$$

dir. □

Sonuç 3.2.10. $\overrightarrow{\overline{x}} = \overrightarrow{x} + \varepsilon\overrightarrow{x^*} \in \mathbf{D}^n$ bir dual vektör olmak üzere, bu dual vektörün normu $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$ için

$$\left\| \overrightarrow{\widetilde{x}} \right\|_{\mathbf{D}} = \| \overrightarrow{x} \| + \varepsilon \frac{\left\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x^*} \right\rangle}{\| \overrightarrow{x} \|}$$

şeklinde tanımlanır.

$$\xi\left(x_1, ..., x_n^*\right) = \xi\left(x_1, ..., x_n\right) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$$

denilirse $(x_1, x_2, ..., x_n) \neq (0, 0, ..., 0)$ için ξ fonksiyonu C^∞-sınıfındandır ve bu ξ fonksiyonunun x_i reel değişkenine göre kısmi türevleri

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_i} = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}} = \frac{x_i}{\| \overrightarrow{x} \|}$$

biçimindedir. Bu durumda, dual norm fonksiyonu

$$\begin{aligned} \left\| \overrightarrow{\widetilde{x}} \right\|_{\mathbf{D}} &= \| \overrightarrow{x} \| + \varepsilon \frac{\left\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x^*} \right\rangle}{\| \overrightarrow{x} \|} \\ &= \| \overrightarrow{x} \| + \varepsilon \left(x_1^* \frac{x_1}{\| \overrightarrow{x} \|} + x_2^* \frac{x_2}{\| \overrightarrow{x} \|} + ... + x_n^* \frac{x_n}{\| \overrightarrow{x} \|} \right) \\ &= \xi\left(x\right) + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^* \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \right) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. O halde, tanımlanan dual norm fonksiyonu da özel bir dual analitik fonksiyondur.

Tanım 3.2.19. $\widetilde{p} = (p_1, p_2, ..., p_n, p_1^*, p_2^*, ..., p_n^*) \in \mathbb{R}^{2n}$ ve $\{x_1, ..., x_n, x_1^*, ..., x_n^*\}$, $\mathbb{R}^{2n}$ nin koordinat fonksiyonları olmak üzere, $1 \leq i \leq n$ için

$$x_i : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R},\ x_i\left(\widetilde{p}\right) = p_i \text{ ve } x_i^* : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R},\ x_i^*\left(\widetilde{p}\right) = p_i^*$$

şeklinde olup

$$\left(x_i, x_i^*\right) : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ \left(x_i, x_i^*\right)\left(\widetilde{p}\right) = \left(x_i\left(\widetilde{p}\right), x_i^*\left(\widetilde{p}\right)\right)$$

yazılabilir. Bu durumda,

$$k : \mathbf{D}^n \to \mathbb{R}^{2n},\ k\left(\overline{p}\right) = \widetilde{p}$$

şeklinde tanımlı fonksiyon birebir ve örten olup $\overline{x}_i = x_i + \varepsilon x_i^*$ dual koordinat fonksiyonları

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{D}^n & \overset{\overline{x}_i}{\rightarrow} & \mathbf{D} \\ k_1 \downarrow & & \downarrow k_2 \\ \mathbb{R}^{2n} & \overset{(x_i, x_i^*)}{\rightarrow} & \mathbb{R}\times\mathbb{R} \end{array}$$

diyagramı göz önüne alındığında aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\overline{x}_i = k_2^{-1} \circ (x_i, x_i^*) \circ k_1. \tag{3.2.15}$$

Bu durumda, (3.2.15) eşitliği göz önüne alındığında $\overline{x}_i = x_i + \varepsilon x_i^*$ dual koordinat fonksiyonları aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} \overline{x}_i (\overline{p}) &= x_i (\widetilde{p}) + \varepsilon x_i^* (\widetilde{p}) \\ &= p_i + \varepsilon p_i^* \\ &= \overline{p}_i \end{aligned}$$

Burada, $\overline{p} = (\overline{p}_1, \overline{p}_2, ..., \overline{p}_n)$ ve $1 \leq i \leq n$ dir.

Sonuç 3.2.11. Yukarıdaki tanım göz önüne alındığında, $\overline{U} \subseteq \mathbf{D}^n$ den $\mathbf{D}$ ye tanımlı dual analitik fonksiyonlarının $\overline{x} = \overline{p}$ noktasındaki değerleri

$$\overline{\xi} (\overline{p}) = \xi (\widetilde{p}) + \varepsilon \xi^0 (\widetilde{p})$$

biçiminde olup

$$\begin{aligned} \overline{\xi} (\overline{x} (\overline{p})) &= \xi (x_1 (\widetilde{p}), x_2 (\widetilde{p}), ..., x_n (\widetilde{p})) \\ &\quad + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^* (\widetilde{p}) \frac{\partial \xi}{\partial x_i} (x_1 (\widetilde{p}), x_2 (\widetilde{p}), \ldots, x_n (\widetilde{p})) + \widetilde{\xi} (x_1 (\widetilde{p}), x_2 (\widetilde{p}), \ldots, x_n (\widetilde{p})) \right) \\ &= \xi (p_1, ..., p_n) + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{n} p_i^* \frac{\partial \xi}{\partial x_i} (p_1, ..., p_n) + \widetilde{\xi} (p_1, ..., p_n) \right) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$\xi (p_1, ..., p_n) \overset{Def}{=} \xi (x_1 (\widetilde{p}), x_2 (\widetilde{p}), ..., x_n (\widetilde{p}))$$

ve

$$\widetilde{\xi}\left(p_1,...,p_n\right)\overset{Def}{=}\widetilde{\xi}\left(x_1\left(\widetilde{p}\right),x_2\left(\widetilde{p}\right),...,x_n\left(\widetilde{p}\right)\right)$$

biçimindedir ve ayrıca, ξ ile $\widetilde{\xi}$ fonksiyonlarının

$$\begin{aligned}\xi &: U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\\ p &\to \xi\left(p\right)=\xi\left(x_1\left(p\right),x_2\left(p\right),...,x_n\left(p\right)\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\xi} &: U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\\ p &\to \widetilde{\xi}\left(p\right)=\widetilde{\xi}\left(x_1\left(p\right),x_2\left(p\right),...,x_n\left(p\right)\right)\end{aligned}$$

şekline de indirgenebileceği kolaylıkla görülmektedir.

4 . DUAL UZAYDA DİFERENSİYEL GEOMETRİ

Bu bölümde, öncelikle dual lineer bağımlılık ve dual lineer bağımsızlıkla ilgili birkaç tanım ve teoreme yer verilecektir. Bu ifadeler, ([27] ve [30]) kaynaklarının ışığında bu kaynaklardaki tanımlara ve teoremlere küçük düzeltmeler ve eklemeler yapılarak incelenecektir.

Tanım 4.0.1. $\overrightarrow{\overrightarrow{x}}_1, \overrightarrow{\overrightarrow{x}}_2, \dots, \overrightarrow{\overrightarrow{x}}_k \in \mathbf{D}^n$ dual vektörler ve $1 \leq i \leq k$ için $\overline{\lambda}_i = \lambda_i + \varepsilon\lambda_i^* \in \mathbf{D}$ olsun. Bu durumda,

$$\sum_{i=1}^{k} \overline{\lambda}_i \overrightarrow{\overrightarrow{x}}_i = \overrightarrow{\overrightarrow{0}}$$

eşitliği en az bir $\overline{\lambda}_i \neq \overline{0}$ için sağlanıyorsa, $\overrightarrow{\overrightarrow{x}}_1, \overrightarrow{\overrightarrow{x}}_2, \dots, \overrightarrow{\overrightarrow{x}}_k$ dual vektörleri dual lineer bağımlıdır denir. Dual lineer bağımlı olmayan dual vektörler dual lineer bağımsız olarak adlandırılır [30].

Tanım 4.0.2. $\mathbf{D}^n$ nin bir $S = \left\{ \overrightarrow{\overrightarrow{x}}_1, \overrightarrow{\overrightarrow{x}}_2, \dots, \overrightarrow{\overrightarrow{x}}_k \right\}$ alt cümlesi lineer bağımsız ve $Sp\{S\} = \mathbf{D}^n$ ise S cümlesine $\mathbf{D}^n$ nin bir bazı adı verilir [27].

Tanım 4.0.3. $1 \leq i \leq k$ için $\forall \overrightarrow{x}_i \neq \overrightarrow{0}$ olacak şekilde $\overrightarrow{\overrightarrow{x}}_1, \overrightarrow{\overrightarrow{x}}_2, \dots, \overrightarrow{\overrightarrow{x}}_k \in \mathbf{D}^n$ dual vektörleri verilsin. $1 \leq i, j \leq k$ için $\left\langle \overrightarrow{\overrightarrow{x}}_i, \overrightarrow{\overrightarrow{x}}_j \right\rangle_{\mathbf{D}} = \overline{0}$ $(i \neq j)$ ise $\Phi = \left\{ \overrightarrow{\overrightarrow{x}}_1, \overrightarrow{\overrightarrow{x}}_2, \dots, \overrightarrow{\overrightarrow{x}}_k \right\}$ cümlesi dual ortogonal cümle ve bu cümlenin her bir elemanının normu $1 + \varepsilon 0$ ise bu cümle dual ortonormal cümle olarak adlandırılır.

Teorem 4.0.4. $1 \leq i \leq k$ için $\forall \overrightarrow{x}_i \neq \overrightarrow{0}$ olacak şekilde $\overrightarrow{\overrightarrow{x}}_1, \overrightarrow{\overrightarrow{x}}_2, \dots, \overrightarrow{\overrightarrow{x}}_k \in \mathbf{D}^n$ dual vektörler olsun. $\Phi = \left\{ \overrightarrow{\overrightarrow{x}}_1, \overrightarrow{\overrightarrow{x}}_2, \dots, \overrightarrow{\overrightarrow{x}}_k \right\}$ cümlesi dual ortogonal ise dual lineer bağımsızdır.

İspat. $1 \leq i \leq k$ için $\forall \overrightarrow{x}_i \neq \overrightarrow{0}$ olacak şekilde $\Phi = \left\{ \overrightarrow{\overrightarrow{x}}_1, \overrightarrow{\overrightarrow{x}}_2, \dots, \overrightarrow{\overrightarrow{x}}_k \right\}$ dual ortogonal bir cümle ve $\overline{\lambda}_i = \lambda_i + \varepsilon\lambda_i^* \in \mathbf{D}$ için

$$\overline{\lambda}_1 \overrightarrow{\overrightarrow{x}}_1 + \overline{\lambda}_2 \overrightarrow{\overrightarrow{x}}_2 + \dots + \overline{\lambda}_k \overrightarrow{\overrightarrow{x}}_k = \overrightarrow{\overrightarrow{0}} \tag{4.0.1}$$

olsun. (4.0.1) eşitliğinin her iki tarafı sağdan $\overrightarrow{\tilde{x}}_1$ ile dual iç çarpıma tabi tutulursa

$$\overline{\lambda}_1 \left\langle \overrightarrow{\tilde{x}}_1, \overrightarrow{\tilde{x}}_1 \right\rangle_{\mathbf{D}} = \overline{0}$$

elde edilir. $\left\langle \overrightarrow{\tilde{x}}_1, \overrightarrow{\tilde{x}}_1 \right\rangle_{\mathbf{D}} = \langle \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_1 \rangle + \varepsilon 2 \left\langle \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x^*}_1 \right\rangle = a + \varepsilon a^*$ olup $\overrightarrow{x}_1 \neq \overrightarrow{0}$ olduğundan $a \neq 0$ dır öyle ki $\overline{\lambda}_1 \left\langle \overrightarrow{\tilde{x}}_1, \overrightarrow{\tilde{x}}_1 \right\rangle_{\mathbf{D}} = \overline{0}$ iken $\overline{\lambda}_1 = \overline{0}$ olmak zorundadır. Benzer şekilde, $\overrightarrow{\tilde{x}}_2, ..., \overrightarrow{\tilde{x}}_k$ dual vektörleri sırasıyla (4.0.1) eşitliği ile dual iç çarpıma tabi tutulursa

$$\overline{\lambda}_2 = \overline{\lambda}_3 = ... = \overline{\lambda}_k = \overline{0}$$

elde edilir. O halde, $\Phi = \left\{ \overrightarrow{\tilde{x}}_1, \overrightarrow{\tilde{x}}_2, ..., \overrightarrow{\tilde{x}}_k \right\}$ cümlesi dual lineer bağımsızdır. □

Teorem 4.0.5. $1 \leq i \leq k$ için $\overrightarrow{\tilde{x}}_i = \overrightarrow{x}_i + \varepsilon \overrightarrow{x^*_i} \left(\overrightarrow{x}_i, \overrightarrow{x^*_i} \in \mathbb{R}^n \right)$ olmak üzere, eğer $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, ..., \overrightarrow{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektörleri lineer bağımsız ise $\overrightarrow{\tilde{x}}_1, \overrightarrow{\tilde{x}}_2, ..., \overrightarrow{\tilde{x}}_k \in \mathbf{D}^n$ dual vektörleri dual lineer bağımsızdır.

İspat. $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, ..., \overrightarrow{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektörleri reel lineer bağımsız ve

$$\overline{\lambda}_1 \overrightarrow{\tilde{x}}_1 + \overline{\lambda}_2 \overrightarrow{\tilde{x}}_2 + ... + \overline{\lambda}_k \overrightarrow{\tilde{x}}_k = \overrightarrow{\tilde{0}}$$

eşitliği var olsun. Dual vektörlerde eşitlik tanımından

$$\lambda_1 \overrightarrow{x}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{x}_2 + ... + \lambda_k \overrightarrow{x}_k = \overrightarrow{0} \tag{4.0.2}$$

ve

$$\lambda_1^* \overrightarrow{x}_1 + \lambda_2^* \overrightarrow{x}_2 + ... + \lambda_k^* \overrightarrow{x}_k + \lambda_1 \overrightarrow{x_1^*} + \lambda_2 \overrightarrow{x_2^*} + ... + \lambda_k \overrightarrow{x_k^*} = \overrightarrow{0} \tag{4.0.3}$$

elde edilir. Hipotezden; $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, ..., \overrightarrow{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektörleri lineer bağımsız olduğundan $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0$ dır ve bu değerler (4.0.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$\lambda_1^* \overrightarrow{x}_1 + \lambda_2^* \overrightarrow{x}_2 + ... + \lambda_k^* \overrightarrow{x}_k = \overrightarrow{0}$$

olur. Aynı şekilde, $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, ..., \overrightarrow{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektörleri lineer bağımsız olduğundan $\lambda_1^* = \lambda_2^* = ... = \lambda_k^* = 0$ olur ve böylece $1 \leq i \leq k$ için $\overline{\lambda}_i = \overline{0}$ elde edilir. O halde, $\overrightarrow{\tilde{x}}_1, \overrightarrow{\tilde{x}}_2, ..., \overrightarrow{\tilde{x}}_k \in \mathbf{D}^n$ dual vektörleri dual lineer bağımsızdır. □

Teorem 4.0.6. $1 \leq i \leq n$ için $\overrightarrow{\widetilde{x}}_i = \overrightarrow{x}_i + \varepsilon \overrightarrow{x_i^*}$ $\left(\overrightarrow{x}_i, \overrightarrow{x_i^*} \in \mathbb{R}^n\right)$ olmak üzere, eğer $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, \ldots, \overrightarrow{x}_n \in \mathbb{R}^n$ vektörleri lineer bağımsız ise $\Phi = \left\{\overrightarrow{\widetilde{x}}_1, \overrightarrow{\widetilde{x}}_2, \ldots, \overrightarrow{\widetilde{x}}_n\right\}$ cümlesi $\mathbf{D}^n$ nin bir bazıdır.

İspat. $1 \leq i \leq n$ için

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\widetilde{x}}_i &= \left(\overline{x}_i^1, \overline{x}_i^2, \ldots, \overline{x}_i^n\right) \\
&= \left(x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^n\right) + \varepsilon\left(x_i^{*1}, x_i^{*2}, \ldots, x_i^{*n}\right) \\
&= \overrightarrow{x}_i + \varepsilon \overrightarrow{x_i^*}
\end{aligned}
$$

şeklinde ve $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, \ldots, \overrightarrow{x}_n \in \mathbb{R}^n$ vektörleri lineer bağımsız olsun. Bir önceki teoremden $\left\{\overrightarrow{\widetilde{x}}_1, \overrightarrow{\widetilde{x}}_2, \ldots, \overrightarrow{\widetilde{x}}_n\right\}$ cümlesi dual lineer bağımsızdır. Ayrıca, $\left\{\overrightarrow{\widetilde{x}}_1, \overrightarrow{\widetilde{x}}_2, \ldots, \overrightarrow{\widetilde{x}}_n\right\} \subset \mathbf{D}^n$ ve dual uzay toplama ve dual skaler ile çarpma işlemlerine göre kapalı olduğundan $Sp\left\{\overrightarrow{\widetilde{x}}_1, \overrightarrow{\widetilde{x}}_2, \ldots, \overrightarrow{\widetilde{x}}_n\right\} \subseteq \mathbf{D}^n$ dir. Şimdi, $\forall \overrightarrow{\widetilde{y}} \in \mathbf{D}^n$ için

$$
\overrightarrow{\widetilde{y}} = \overline{\lambda}_1 \overrightarrow{\widetilde{x}}_1 + \overline{\lambda}_2 \overrightarrow{\widetilde{x}}_2 + \ldots + \overline{\lambda}_n \overrightarrow{\widetilde{x}}_n \tag{4.0.4}
$$

olacak şekilde $\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \ldots, \overline{\lambda}_n$ dual katsayılarının var olduğunu göstermeliyiz. (4.0.4) eşitliğinin matris formu

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \overline{y}_1 \\ \overline{y}_2 \\ \vdots \\ \overline{y}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \overline{x}_1^1 & \overline{x}_2^1 & \cdots & \overline{x}_n^1 \\ \overline{x}_1^2 & \overline{x}_2^2 & \cdots & \overline{x}_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \overline{x}_1^n & \overline{x}_2^n & \cdots & \overline{x}_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\lambda}_1 \\ \overline{\lambda}_2 \\ \vdots \\ \overline{\lambda}_n \end{bmatrix} \\
[\overline{y}_i]_{1 \leq i \leq n} &= \left[\overline{A}\right]_{n \times n} \cdot \left[\overline{\lambda}_i\right]_{1 \leq i \leq n}
\end{aligned} \tag{4.0.5}
$$

şeklindedir ve $\left[\overline{A}\right]_{n \times n} = [A] + \varepsilon [A^*]$ denilirse

$$
[A] = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \cdots & x_n^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}_{n \times n}
$$

biçiminde olup $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, ..., \overrightarrow{x}_n \in \mathbb{R}^n$ vektörleri lineer bağımsız olduğundan $[A]$ matisinin tersi vardır öyle ki $\left[\overline{A}\right]$ dual matrisinin tersi de

$$\left[\overline{A}\right]^{-1} = [A]^{-1} + \varepsilon\left(-[A]^{-1}[A^*][A]^{-1}\right)$$

biçimindedir [34]. Bu durumda, (4.0.5) eşitliğinin her iki tarafı soldan $\left[\overline{A}\right]^{-1}$ ile çarpılırsa

$$\left[\overline{\lambda}_i\right]_{1 \leq i \leq n} = \left[\overline{A}\right]^{-1}[\overline{y}_i]_{1 \leq i \leq n}$$

elde edilir öyle ki $\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, ..., \overline{\lambda}_n \in \mathbf{D}$ vardır. O halde, $\mathbf{D}^n \subseteq Sp\left\{\overrightarrow{\overline{x}}_1, \overrightarrow{\overline{x}}_2, ..., \overrightarrow{\overline{x}}_n\right\}$ dir ve böylece $\mathbf{D}^n = Sp\left\{\overrightarrow{\overline{x}}_1, \overrightarrow{\overline{x}}_2, ..., \overrightarrow{\overline{x}}_n\right\}$ elde edilir. □

Teorem 4.0.7. $\forall \overrightarrow{\overline{y}} \in \mathbf{D}^n$ için $\left\langle \overrightarrow{\overline{y}}, \overrightarrow{\overline{x}} \right\rangle_{\mathbf{D}} = \overline{0}$ dir. $\Leftrightarrow \overrightarrow{\overline{x}} = \overrightarrow{\overline{0}}$ dir.

Sonuç 4.0.1. 1) $\mathbf{D}^n$ nin bir alt cümlesi $\Phi = \left\{\overrightarrow{\overline{x}}_1, \overrightarrow{\overline{x}}_2, ..., \overrightarrow{\overline{x}}_k\right\}$ olsun. Eğer Φ cümlesine ait en az bir dual vektörün reel kısmı sıfır vektörü ise Φ cümlesi dual lineer bağımlıdır.
2) $\Phi = \left\{\overrightarrow{\overline{x}}_1, \overrightarrow{\overline{x}}_2, ..., \overrightarrow{\overline{x}}_n\right\}$ cümlesi $\mathbf{D}^n$ nin bir bazı olsun. Bu durumda, $\mathbf{D}^n$ nin her elemanı Φ deki elemanların bir (dual) lineer birleşimi olarak tek türlü yazılır.

Açıklama 8. Veldkamp çalışmasında [30], "$\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^3$ vektörleri sıfır vektöründen farklı olmak üzere, $\overrightarrow{\overline{x}} = \overrightarrow{x} + \varepsilon \overrightarrow{x^*}$ ve $\overrightarrow{\overline{y}} = \overrightarrow{y} + \varepsilon \overrightarrow{y^*} \in \mathbf{D}^3$ iki dual vektör olsun. Bu durumda, $\overrightarrow{\overline{x}}$ ile $\overrightarrow{\overline{y}}$ vektörleri dual lineer bağımlıdır. $\Leftrightarrow \overrightarrow{\overline{x}} \times_{\mathbf{D}} \overrightarrow{\overline{y}} = \overrightarrow{\overline{0}}$ dir." şeklinde bir teoreme yer vermiştir. Fakat, $\overrightarrow{\overline{x}} = \overrightarrow{x} + \varepsilon \overrightarrow{x^*} = (1,0,0) + \varepsilon(1,2,0)$ ve $\overrightarrow{\overline{y}} = \overrightarrow{y} + \varepsilon \overrightarrow{y^*} = (1,0,0) + \varepsilon(2,1,0) \in \mathbf{D}^3$ dual vektörleri için

$$\overline{\lambda}_1 \overrightarrow{\overline{x}} + \overline{\lambda}_2 \overrightarrow{\overline{y}} = \overrightarrow{\overline{0}}$$

eşitliğinin $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ve $\lambda_1^* + \lambda_2^* = 0$ şeklinde olan $\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2 \in \mathbf{D}$ için sağlandığı kolaylıkla görülür ve yukarıdaki tanımdan da görülmektedir ki bu iki vektör dual lineer bağımlıdır. Fakat bu iki vektörün dual vektörel çarpımı

$$\overrightarrow{\overline{x}} \times_{\mathbf{D}} \overrightarrow{\overline{y}} = (0,0,0) + \varepsilon(0,0,-1) \neq \overrightarrow{\overline{0}}$$

olduğundan Veldkamp'ın vermiş olduğu teorem eksiktir. Bu teorem aşağıdaki gibi olmalıdır:

Teorem 4.0.8. $\overrightarrow{\widetilde{x}} = \overrightarrow{x} + \varepsilon \overrightarrow{x^*}$ ve $\overrightarrow{\widetilde{y}} = \overrightarrow{y} + \varepsilon \overrightarrow{y^*} \in \mathbf{D}^3$ iki dual vektör olsun. Bu durumda, aşağıdaki öncüller vardır:

i) $\overrightarrow{\widetilde{x}} \times_{\mathbf{D}} \overrightarrow{\widetilde{y}} = \overrightarrow{\widetilde{0}}$ ise $\overrightarrow{\widetilde{x}}$ ile $\overrightarrow{\widetilde{y}}$ vektörleri dual lineer bağımlıdır.

ii) $\overrightarrow{x}$ ile $\overrightarrow{y}$ vektörlerinden en az biri sıfır vektöründen farklı olsun. O halde, $\overrightarrow{\widetilde{x}} = \overline{\lambda}\,\overrightarrow{\widetilde{y}}$ $\left(\text{veya } \overrightarrow{\widetilde{y}} = \overline{\lambda}\,\overrightarrow{\widetilde{x}}\right)$ olacak şekilde $\overline{\lambda} \in \mathbf{D}$ vardır. $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{\widetilde{x}} \times_{\mathbf{D}} \overrightarrow{\widetilde{y}} = \overrightarrow{\widetilde{0}}$ dir.

İspat. *ii)* $\overrightarrow{x}$ ile $\overrightarrow{y}$ vektörlerinden en az biri sıfır vektöründen farklı olacak şekilde $\overrightarrow{\widetilde{x}} = \overrightarrow{x} + \varepsilon \overrightarrow{x^*}$ ve $\overrightarrow{\widetilde{y}} = \overrightarrow{y} + \varepsilon \overrightarrow{y^*} \in \mathbf{D}^3$ iki dual vektör olsun. Kabul edelim ki $\overrightarrow{y} \neq \overrightarrow{0}$ olsun.

Şimdi, $\overrightarrow{\widetilde{x}} = \overline{\lambda}\,\overrightarrow{\widetilde{y}}$ olacak şekilde $\overline{\lambda} \in \mathbf{D}$ var olsun. O halde, $\overrightarrow{\widetilde{y}} = \overrightarrow{y} + \varepsilon \overrightarrow{y^*}$ biçiminde olup hipotezden $\overrightarrow{x} = \lambda \overrightarrow{y}$ ve $\overrightarrow{x^*} = \lambda \overrightarrow{y^*} + \lambda^* \overrightarrow{y}$ elde edilir öyle ki

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\widetilde{x}} \times_{\mathbf{D}} \overrightarrow{\widetilde{y}} &= \overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y} + \varepsilon \left(\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y^*} + \overrightarrow{x^*} \times \overrightarrow{y} \right) \\
&= \lambda \left(\overrightarrow{y} \times \overrightarrow{y} \right) + \varepsilon \left(\lambda \left(\overrightarrow{y} \times \overrightarrow{y^*} \right) + \lambda \left(\overrightarrow{y^*} \times \overrightarrow{y} \right) + \lambda^* \left(\overrightarrow{y} \times \overrightarrow{y} \right) \right) \\
&= \overrightarrow{0} + \varepsilon \overrightarrow{0} \\
&= \overrightarrow{\widetilde{0}}
\end{aligned}
$$

dir.

Tersine, $\overrightarrow{\widetilde{x}} \times_{\mathbf{D}} \overrightarrow{\widetilde{y}} = \overrightarrow{\widetilde{0}}$ olsun. Bu durumda, dual vektörel çarpım ve dual vektörlerde eşitlik tanımı göz önüne alınırsa

$$
\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y} = \overrightarrow{0} \tag{4.0.6}
$$

ve

$$
\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y^*} + \overrightarrow{x^*} \times \overrightarrow{y} = \overrightarrow{0} \tag{4.0.7}
$$

elde edilir. Bu durumda, (4.0.6) eşitliğinden $\overrightarrow{x} = \lambda \overrightarrow{y}$ $\left(\overrightarrow{y} \neq \overrightarrow{0} \right)$ olacak şekilde $\lambda \in \mathbb{R}$ vardır. Bu eşitlik, (4.0.7) denkleminde yerine yazılırsa $\overrightarrow{x^*} - \lambda \overrightarrow{y^*} = \mu \overrightarrow{y}$ olacak şekilde $\mu \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\widetilde{x}} &= \overrightarrow{x} + \varepsilon \overrightarrow{x^*} \\
&= \lambda \overrightarrow{y} + \varepsilon \left(\lambda \overrightarrow{y^*} + \mu \overrightarrow{y} \right) \\
&= \overline{\lambda}\,\overrightarrow{\widetilde{y}}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada, $\overline{\lambda} = \lambda + \varepsilon\mu$ biçimindedir.

$i)$ Bu öncülün ispatı (ii) öncülü kullanılarak gösterilebilir. □

Teorem 4.0.9. $\overrightarrow{\widetilde{x}}, \overrightarrow{\widetilde{y}} \in \mathbf{D}^n$ iki dual vektör olsun. Bu durumda,

$$\left\langle \overrightarrow{\widetilde{x}}, \overrightarrow{\widetilde{y}} \right\rangle_{\mathbf{D}} = \overline{0} \Leftrightarrow \left\| \overrightarrow{\widetilde{x}} + \overrightarrow{\widetilde{y}} \right\|_{\mathbf{D}}^2 = \left\| \overrightarrow{\widetilde{x}} \right\|_{\mathbf{D}}^2 + \left\| \overrightarrow{\widetilde{y}} \right\|_{\mathbf{D}}^2$$

dir.

İspat. $\overrightarrow{\widetilde{x}} = \overrightarrow{x} + \varepsilon\overrightarrow{x^*}$ ve $\overrightarrow{\widetilde{y}} = \overrightarrow{y} + \varepsilon\overrightarrow{y^*}$ iki dual vektör ve $\left\langle \overrightarrow{\widetilde{x}}, \overrightarrow{\widetilde{y}} \right\rangle_{\mathbf{D}} = \overline{0}$ olsun. Dual sayılardaki eşitlik tanımından

$$\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = 0 \text{ ve } \left\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y^*} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{x^*}, \overrightarrow{y} \right\rangle = 0$$

elde edilir. Eğer $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$ ise, o zaman

$$\left\| \overrightarrow{\widetilde{x}} + \overrightarrow{\widetilde{y}} \right\|_{\mathbf{D}}^2 = \left\| \overrightarrow{\widetilde{x}} \right\|_{\mathbf{D}}^2 + \left\| \overrightarrow{\widetilde{y}} \right\|_{\mathbf{D}}^2$$

eşitliğini elde ederiz. Eğer $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ ve $\overrightarrow{y} \neq \overrightarrow{0}$ ise aşağıdaki eşitlik yazılır:

$$\begin{aligned}
\left\| \overrightarrow{\widetilde{x}} + \overrightarrow{\widetilde{y}} \right\|_{\mathbf{D}}^2 &= \|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|^2 + \varepsilon 2\left(\left\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x^*} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y^*} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{x^*}, \overrightarrow{y} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{y}, \overrightarrow{y^*} \right\rangle\right) \\
&= \|\overrightarrow{y}\|^2 + \varepsilon 2\left(\left\langle \overrightarrow{y}, \overrightarrow{y^*} \right\rangle\right) \\
&= \left\| \overrightarrow{\widetilde{x}} \right\|_{\mathbf{D}}^2 + \left\| \overrightarrow{\widetilde{y}} \right\|_{\mathbf{D}}^2 .
\end{aligned}$$

Bu eşitlik $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$ ve $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$ iken de sağlanır. Şimdi, kabul edelim ki $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$ ve $\overrightarrow{y} \neq \overrightarrow{0}$ olsun. $\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = 0$ olduğundan $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$ vektörü sıfır vektöründen farklıdır ve böylece, aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\begin{aligned}
\left\| \overrightarrow{\widetilde{x}} + \overrightarrow{\widetilde{y}} \right\|_{\mathbf{D}}^2 &= \|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|^2 + \varepsilon 2\left(\left\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x^*} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y^*} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{x^*}, \overrightarrow{y} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{y}, \overrightarrow{y^*} \right\rangle\right) \\
&= \|\overrightarrow{x}\|^2 + \|\overrightarrow{y}\|^2 + \varepsilon 2\left(\left\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x^*} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{y}, \overrightarrow{y^*} \right\rangle\right) \\
&= \left\| \overrightarrow{\widetilde{x}} \right\|_{\mathbf{D}}^2 + \left\| \overrightarrow{\widetilde{y}} \right\|_{\mathbf{D}}^2 .
\end{aligned}$$

Tersine, $\overrightarrow{\widetilde{x}}, \overrightarrow{\widetilde{y}} \in \mathbf{D}^n$ için $\left\| \overrightarrow{\widetilde{x}} + \overrightarrow{\widetilde{y}} \right\|_{\mathbf{D}}^2 = \left\| \overrightarrow{\widetilde{x}} \right\|_{\mathbf{D}}^2 + \left\| \overrightarrow{\widetilde{y}} \right\|_{\mathbf{D}}^2$ olsun. Eğer $\overrightarrow{x}$ ve $\overrightarrow{y}$ vektörlerinden en az biri sıfır vektörü ise, o zaman $\left\langle \overrightarrow{\widetilde{x}}, \overrightarrow{\widetilde{y}} \right\rangle_{\mathbf{D}} = \overline{0}$ elde edilir. Şimdi, $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$

ve $\overrightarrow{y} \neq \overrightarrow{0}$ olduğunu varsayalım. Hipotez göz önüne alındığında aşağıdaki eşitlikleri yazmak mümkündür:

$$\|\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}\|^2 = \|\overrightarrow{x}\|^2 + \|\overrightarrow{y}\|^2$$

ve

$$\left\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y^*} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{x^*}, \overrightarrow{y} \right\rangle = 0.$$

Böylece, bu eşitlikler $\left\langle \overrightarrow{\widetilde{x}}, \overrightarrow{\widetilde{y}} \right\rangle_{\mathbf{D}} = \overline{0}$ yazılmasına izin verir. □

Sonuç 4.0.2. $\overrightarrow{\widetilde{x}}_1, \overrightarrow{\widetilde{x}}_2, ..., \overrightarrow{\widetilde{x}}_k \in \mathbf{D}^n$ dual vektörler olsun $(k \leq n)$. $1 \leq i, j \leq k$ için eğer $\left\langle \overrightarrow{\widetilde{x}}_i, \overrightarrow{\widetilde{x}}_j \right\rangle_{\mathbf{D}} = \overline{0}$ $(i \neq j)$ ise aşağıdaki eşitlik mevcuttur:

$$\left\| \overrightarrow{\widetilde{x}}_1 + \overrightarrow{\widetilde{x}}_2 + ... + \overrightarrow{\widetilde{x}}_k \right\|_{\mathbf{D}}^2 = \left\| \overrightarrow{\widetilde{x}}_1 \right\|_{\mathbf{D}}^2 + \left\| \overrightarrow{\widetilde{x}}_2 \right\|_{\mathbf{D}}^2 + ... + \left\| \overrightarrow{\widetilde{x}}_k \right\|_{\mathbf{D}}^2.$$

Tanım 4.0.10.

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \left\{ \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x^*} \right) \mid \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x^*} \in \mathbb{R}^n \right\}$$

cümlesini ele alalım ve bu cümle üzerinde eşitlik, bir iç işlem ve bir dış işlem aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

i) $\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x^*} \right) = \left(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{y^*} \right)$ olması için gerek ve yeter şart $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$ ve $\overrightarrow{x^*} = \overrightarrow{y^*}$ olmasıdır.

ii) $\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x^*} \right)$ ve $\left(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{y^*} \right) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ için

$$+_1 : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

$$\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x^*} \right) +_1 \left(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{y^*} \right) = \left(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}, \overrightarrow{x^*} + \overrightarrow{y^*} \right).$$

iii) $\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x^*} \right) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ve $\overline{\lambda} = \lambda + \varepsilon\lambda^* \in \mathbf{D}$ için

$$\cdot_1 : \mathbf{D} \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

$$\overline{\lambda} \cdot_1 \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x^*} \right) = \left(\lambda \overrightarrow{x}, \lambda \overrightarrow{x^*} + \lambda^* \overrightarrow{x} \right).$$

Sonuç 4.0.3. $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \left\{ \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x^*} \right) \mid \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x^*} \in \mathbb{R}^n \right\}$ cümlesi üzerinde tanımlanan $+_1$ ve $\cdot_1$ işlemleri göz önüne alındığında $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, +_1, \cdot_1)$ cümlesi $(\mathbf{D}, +, \cdot)$ üzerinde bir modül oluşturur. Kolaylık için $+_1$ ve $\cdot_1$ işlemleri yerine $+$ ve $\cdot$ işlemlerini kullanacağız.

Teorem 4.0.11. $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, +, \cdot)$ ve $(\mathbf{D}^n, +, \cdot)$ cümleleri $(\mathbf{D}, +, \cdot)$ üzerinde birer modül olmak üzere, $\forall\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x^*}\right)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ için

$$f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbf{D}^n,\ f\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x^*}\right)=\overrightarrow{x}+\varepsilon\overrightarrow{x^*}=\overrightarrow{\tilde{x}}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon bir (modül) izomorfizmdir.

İspat. Birebirlik: $\forall\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x^*}\right),\left(\overrightarrow{y},\overrightarrow{y^*}\right)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ olmak üzere, $f\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x^*}\right)=f\left(\overrightarrow{y},\overrightarrow{y^*}\right)$ olsun. Bu durumda, $f\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x^*}\right)=\overrightarrow{x}+\varepsilon\overrightarrow{x^*}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon göz önüne alındığında

$$\overrightarrow{x}+\varepsilon\overrightarrow{x^*}=\overrightarrow{y}+\varepsilon\overrightarrow{y^*}$$

şeklinde olup dual vektörlerde eşitlik tanımınından $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{y}$ ve $\overrightarrow{x^*}=\overrightarrow{y^*}$ elde edilir. Böylece, $\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x^*}\right)=\left(\overrightarrow{y},\overrightarrow{y^*}\right)$ olduğundan f birebirdir.
Örtenlik: $\forall\overrightarrow{\tilde{y}}=\overrightarrow{y}+\varepsilon\overrightarrow{y^*}\in\mathbf{D}^n$ için $f\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x^*}\right)=\overrightarrow{y}+\varepsilon\overrightarrow{y^*}$ olacak şekilde $\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x^*}\right)=\left(\overrightarrow{y},\overrightarrow{y^*}\right)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ vardır. O halde, f örtendir.
Lineerlik: $\forall\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x^*}\right),\left(\overrightarrow{y},\overrightarrow{y^*}\right)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ ve $\forall\overline{\lambda}=\lambda+\varepsilon\lambda^*\in\mathbf{D}$ için

$$\begin{aligned}
f\left(\overline{\lambda}\cdot\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x^*}\right)+\left(\overrightarrow{y},\overrightarrow{y^*}\right)\right) &= f\left(\lambda\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y},\lambda\overrightarrow{x^*}+\lambda^*\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y^*}\right)\\
&= (\lambda\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y})+\varepsilon\left(\lambda\overrightarrow{x^*}+\lambda^*\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y^*}\right)\\
&= (\lambda+\varepsilon\lambda^*)\left(\overrightarrow{x}+\varepsilon\overrightarrow{x^*}\right)+\left(\overrightarrow{y}+\varepsilon\overrightarrow{y^*}\right)\\
&= \overline{\lambda}f\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x^*}\right)+f\left(\overrightarrow{y},\overrightarrow{y^*}\right)
\end{aligned}$$

şeklindedir.
Sonuç olarak, $f\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x^*}\right)=\overrightarrow{x}+\varepsilon\overrightarrow{x^*}=\overrightarrow{\tilde{x}}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon (modül) izomorfizmdir. □

Teorem 4.0.12. $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı, $\mathbf{D}^n$ nin $\overline{A}=\left\{\overrightarrow{\tilde{x}}=\overrightarrow{x}+\varepsilon\cdot\overrightarrow{0}\mid\overrightarrow{x}\in\mathbb{R}^n\right\}$ biçiminde tanımlanan bir alt cümlesine izomorftur [27].

İspat. $\overline{A}=\left\{\overrightarrow{\tilde{x}}=\overrightarrow{x}+\varepsilon\overrightarrow{0}\mid\overrightarrow{x}\in\mathbb{R}^n\right\}$ şeklindeki cümleyi ele alalım ve bu cümle üzerinde bir iç işlem

$$\overrightarrow{\tilde{x}}+\overrightarrow{\tilde{y}}=\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}+\varepsilon\overrightarrow{0}\in\overline{A}$$

ve $\lambda\in\mathbb{R}$ için bir dış işlem

$$\lambda\cdot\overrightarrow{\tilde{x}}=\lambda\overrightarrow{x}+\varepsilon\overrightarrow{0}\in\overline{A}$$

biçimindedir. Bu durumda, $f:\overline{A}\to\mathbb{R}^n,\ f\left(\overrightarrow{x}+\varepsilon\overrightarrow{0}\right)=\overrightarrow{x}$ şeklinde tanımlı fonksiyonun birebir ve örten olduğu kolaylıkla görülmektedir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}
f\left(\lambda\cdot\overrightarrow{\overline{x}}+\overrightarrow{\overline{y}}\right) &= f\left(\lambda\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}+\varepsilon\overrightarrow{0}\right)\\
&= \lambda\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}\\
&= \lambda f\left(\overrightarrow{x}+\varepsilon\overrightarrow{0}\right)+f\left(\overrightarrow{y}+\varepsilon\overrightarrow{0}\right)\\
&= \lambda f\left(\overrightarrow{\overline{x}}\right)+f\left(\overrightarrow{\overline{y}}\right)
\end{aligned}$$

olduğundan tanımlanan fonksiyon lineerdir. O halde, f fonksiyonu izomorfizmdir. □

Tanım 4.0.13.

$$\mathbb{R}^{2n}=\{X=(x_1,x_2,...,x_n,x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)\mid x_i,x_i^*\in\mathbb{R},\ 1\le i\le n\}$$

şeklinde tanımlanan cümle üzerinde eşitlik, bir iç işlem ve bir dış işlem aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

i) $X=Y$ olması için gerek ve yeter şart $x_i=y_i$ ve $x_i^*=y_i^*$ olmasıdır.

ii) $X=(x_1,x_2,...,x_n,x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$ ve $Y=(y_1,y_2,...,y_n,y_1^*,y_2^*,...,y_n^*)\in\mathbb{R}^{2n}$ için

$$\begin{aligned}
+_2 &: \mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^{2n}\\
X+_2Y &= (x_1+y_1,...,x_n+y_n,x_1^*+y_1^*,...,x_n^*+y_n^*).
\end{aligned}$$

iii) $X=(x_1,x_2,...,x_n,x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)\in\mathbb{R}^{2n}$ ve $\overline{\lambda}=\lambda+\varepsilon\lambda^*\in\mathbf{D}$ için

$$\begin{aligned}
\cdot_2 &: \mathbf{D}\times\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^{2n}\\
\overline{\lambda}\cdot_2X &= (\lambda x_1,...,\lambda x_n,\lambda x_1^*+\lambda^*x_1,...,\lambda x_n^*+\lambda^*x_n).
\end{aligned}$$

Sonuç 4.0.4. Yukarıda tanımlanan $+_2$ ve $\cdot_2$ işlemleri göz önüne alındığında $\left(\mathbb{R}^{2n},+_2,\cdot_2\right)$ cümlesi $(\mathbf{D},+,\cdot)$ birimli ve değişmeli halkası üzerinde bir modül oluşturur.

Teorem 4.0.14. $\left(\mathbb{R}^{2n},+_2,\cdot_2\right)$ ve $(\mathbf{D}^n,+,\cdot)$ cümleleri $(\mathbf{D},+,\cdot)$ üzerinde birer modül olmak üzere, $\forall X\in\mathbb{R}^{2n}$ için $g:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbf{D}^n,\ g(X)=\overrightarrow{x}+\varepsilon\overrightarrow{x^*}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon bir (modül) izomorfizmdir. Burada, $\overrightarrow{x}=(x_1,...,x_n)$, $\overrightarrow{x^*}=(x_1^*,...,x_n^*)$ ve $X=(x_1,...,x_n,x_1^*,...,x_n^*)$ şeklindedir.

Sonuç 4.0.5. Sırasıyla teorem 4.0.11 ve teorem 4.0.14 de ifade edilen $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbf{D}^n,\ f\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x^*}\right)=\overrightarrow{x}+\varepsilon\overrightarrow{x^*}=\overrightarrow{\widetilde{x}}$ ve $g:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbf{D}^n,\ g(X)=\overrightarrow{x}+\varepsilon\overrightarrow{x^*}$ fonksiyonları göz önüne alındığında aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

$$\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x^*}\right)\cong\overrightarrow{x}+\varepsilon\overrightarrow{x^*},$$

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n,x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)\cong\overrightarrow{x}+\varepsilon\overrightarrow{x^*}.$$

4.1. Dual Yöne Göre Türev

Tanım 4.1.1. $\overrightarrow{\widetilde{x}}=\overrightarrow{x}+\varepsilon\overrightarrow{x^*}\in\mathbf{D}^n$ bir dual vektör ve $\overline{p}=p+\varepsilon p^*\in\mathbf{D}^n$ bir dual nokta olmak üzere,

$$T_{\overline{p}}\mathbf{D}^n=\{\overline{p}\}\times\mathbf{D}^n=\left\{\left(\overline{p},\overrightarrow{\widetilde{x}}\right)\mid\overrightarrow{\widetilde{x}}\in\mathbf{D}^n\right\}$$

cümlesi üzerinde eşitlik, bir iç işlem ve bir dış işlem aşağıdaki şekilde tanımlanır:
i) $\left(\overline{p},\overrightarrow{\widetilde{x}}\right)=\left(\overline{q},\overrightarrow{\widetilde{y}}\right)$ olması için gerek ve yeter şart $\overline{p}=\overline{q}$ ve $\overrightarrow{\widetilde{x}}=\overrightarrow{\widetilde{y}}$ olmasıdır.
ii) $\forall\left(\overline{p},\overrightarrow{\widetilde{x}}\right),\left(\overline{p},\overrightarrow{\widetilde{y}}\right)\in\{\overline{p}\}\times\mathbf{D}^n$ için

$$\oplus:(\{\overline{p}\}\times\mathbf{D}^n)\times(\{\overline{p}\}\times\mathbf{D}^n)\to\{\overline{p}\}\times\mathbf{D}^n$$

$$\left(\overline{p},\overrightarrow{\widetilde{x}}\right)\oplus\left(\overline{p},\overrightarrow{\widetilde{y}}\right)=\left(\overline{p},\overrightarrow{\widetilde{x}}+\overrightarrow{\widetilde{y}}\right).$$

iii) $\forall\left(\overline{p},\overrightarrow{\widetilde{x}}\right)\in\{\overline{p}\}\times\mathbf{D}^n$ ve $\forall\overline{\lambda}\in\mathbf{D}$ için

$$\odot:\mathbf{D}\times(\{\overline{p}\}\times\mathbf{D}^n)\to\{\overline{p}\}\times\mathbf{D}^n$$

$$\overline{\lambda}\odot\left(\overline{p},\overrightarrow{\widetilde{x}}\right)=\left(\overline{p},\overline{\lambda}\cdot\overrightarrow{\widetilde{x}}\right).$$

Sonuç 4.1.1. $\{\overline{p}\}\times\mathbf{D}^n=\left\{\left(\overline{p},\overrightarrow{\widetilde{x}}\right)\mid\overrightarrow{\widetilde{x}}\in\mathbf{D}^n\right\}$ cümlesi üzerinde tanımlanan $\oplus$ ve $\odot$ işlemleri göz önüne alındığında $(\{\overline{p}\}\times\mathbf{D}^n,\oplus,\odot)$ cümlesi $(\mathbf{D},+,\cdot)$ birimli ve değişmeli halkası üzerinde bir modül oluşturur. Böylece, $(\{\overline{p}\}\times\mathbf{D}^n,\oplus,(\mathbf{D},+,\cdot),\odot)$ cümlesine dual tanjant uzayı ve bu cümlenin her bir elemanına dual tanjant vektörü adı verilir.

Sonuç 4.1.2. $\{\overline{p}\}\times\mathbf{D}^n=\left\{\left(\overline{p},\overrightarrow{\widetilde{x}}\right)\mid\overrightarrow{\widetilde{x}}\in\mathbf{D}^n\right\}$ cümlesinin her bir elemanı, $\oplus$ ve $\odot$

işlemleri göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}
\left(\overline{p}, \overrightarrow{\widetilde{x}}\right) &= \left(\overline{p}, \overrightarrow{x} + \varepsilon \overrightarrow{x^*}\right) \\
&= (\overline{p}, \overrightarrow{x}) \oplus \varepsilon \odot \left(\overline{p}, \overrightarrow{x^*}\right) \\
&= \left(\overline{p}, \overrightarrow{x} + \varepsilon \overrightarrow{0}\right) \oplus \varepsilon \odot \left(\overline{p}, \overrightarrow{x^*} + \varepsilon \overrightarrow{0}\right)
\end{aligned}$$

şeklinde yazmak mümkündür.

Açıklama 9. Sonuç 4.1.2 dikkate alındığında, elemanları $\left(\overline{p}, \overrightarrow{x} + \varepsilon \overrightarrow{0}\right)$ şeklinde olan cümle $\overline{B}$ ile gösterilirse,

$$\overline{B} = \left\{ \left(\overline{p}, \overrightarrow{x} + \varepsilon \overrightarrow{0}\right) \mid \overline{p} \in \mathbf{D}^n, \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \right\}$$

şeklindedir. Bu durumda, bu cümle üzerinde bir iç işlem

$$\left(\overline{p}, \overrightarrow{x} + \varepsilon \overrightarrow{0}\right) + \left(\overline{p}, \overrightarrow{y} + \varepsilon \overrightarrow{0}\right) = \left(\overline{p}, \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} + \varepsilon \overrightarrow{0}\right) \in \overline{B}$$

ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için bir dış işlem

$$\lambda \cdot \left(\overline{p}, \overrightarrow{x} + \varepsilon \overrightarrow{0}\right) = \left(\overline{p}, \lambda \overrightarrow{x} + \varepsilon \overrightarrow{0}\right) \in \overline{B}$$

şeklinde tanımlanır. Diğer yandan, $\widetilde{p} = (p_1, ..., p_n, p_1^*, ..., p_n^*) \in \mathbb{R}^{2n}$ için

$$\Psi = \left\{ (\widetilde{p}, (x_1, x_2, ..., x_n, 0, ..., 0)) \mid \widetilde{p} \in \mathbb{R}^{2n}, x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

cümlesini ele alalım ve bu cümle üzerinde eşitlik, bir iç işlem ve bir dış işlem aşağıdaki gibidir:

i) $(\widetilde{p}, (x_1, x_2, ..., x_n, 0, ..., 0)) = (\widetilde{q}, (y_1, y_2, ..., y_n, 0, ..., 0))$ olması için gerek ve yeter şart $\widetilde{p} = \widetilde{q}$ ve $x_i = y_i$ olmasıdır.

ii) $(\widetilde{p}, (x_1, x_2, ..., x_n, 0, ..., 0))$, $(\widetilde{p}, (y_1, y_2, ..., y_n, 0, ..., 0)) \in \Psi$ için

$$+ : \Psi \times \Psi \to \Psi,$$

$$(\widetilde{p}, (x_1, ..., x_n, 0, ..., 0)) + (\widetilde{p}, (y_1, ..., y_n, 0, ..., 0)) = (\widetilde{p}, x_1 + y_1, ..., x_n + y_n, 0, ..., 0).$$

iii) $(\widetilde{p},(x_1,x_2,...,x_n,0,...,0)) \in \Psi$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\cdot : \mathbb{R} \times \Psi \to \Psi,$$

$$\lambda \cdot (\widetilde{p},(x_1,x_2,...,x_n,0,...,0)) = (\widetilde{p},(\lambda x_1,\lambda x_2,...,\lambda x_n,0,...,0)).$$

Bu şekilde tanımlanan $(\Psi,+,(\mathbb{R},+,\cdot),\cdot)$ cümlesi $n-$boyutlu bir vektör uzayıdır. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.1.2.

$$\overline{B} = \left\{ \left(\overline{p}, \overrightarrow{x} + \varepsilon \overrightarrow{0}\right) \mid \overline{p} \in \mathbf{D}^n, \ \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \right\}$$

ve

$$\Psi = \left\{ (\widetilde{p},(x_1,x_2,...,x_n,0,...,0)) \mid \widetilde{p} \in \mathbb{R}^{2n}, x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

cümlelerini ele alalım. Bu durumda, $f : \overline{B} \to \Psi$,

$$f\left(\overline{p}, \overrightarrow{x} + \varepsilon \overrightarrow{0}\right) = (\widetilde{p},(x_1,x_2,...,x_n,0,...,0))$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon izomorfizmdir.

İspat. Birebirlik: $\forall \left(\overline{p}, \overrightarrow{x} + \varepsilon \overrightarrow{0}\right), \left(\overline{q}, \overrightarrow{y} + \varepsilon \overrightarrow{0}\right) \in \overline{B}$ için

$$f\left(\overline{p}, \overrightarrow{x} + \varepsilon \overrightarrow{0}\right) = f\left(\overline{q}, \overrightarrow{y} + \varepsilon \overrightarrow{0}\right)$$

olsun. Bu durumda, $f\left(\overline{p}, \overrightarrow{x} + \varepsilon \overrightarrow{0}\right) = (\widetilde{p},(x_1,x_2,...,x_n,0,...,0))$ şeklinde tanımlanan fonksiyon göz önüne alındığında

$$(\widetilde{p},(x_1,x_2,...,x_n,0,...,0)) = (\widetilde{q},(y_1,y_2,...,y_n,0,...,0))$$

elde edilir. Böylece, Ψ cümlesi üzerindeki eşitlik kavramından, $1 \leq i \leq n$ için

$$p_i = q_i, \ p_i^* = q_i^* \text{ ve } x_i = y_i$$

bulunur. Yani, $p_i = q_i$ ve $p_i^* = q_i^*$ olduğundan $p_i + \varepsilon p_i^* = q_i + \varepsilon q_i^*$ olup $\overline{p} = \overline{q}$ elde edilir.O halde, $\left(\overline{p}, \overrightarrow{x} + \varepsilon \overrightarrow{0}\right) = \left(\overline{q}, \overrightarrow{y} + \varepsilon \overrightarrow{0}\right)$ olduğundan f birebirdir.

Örtenlik: $\forall\left(\widetilde{q},(y_1,y_2,...,y_n,0,...,0)\right)\in\Psi$ için

$$f\left(\overline{p},\overrightarrow{x}+\varepsilon\overrightarrow{0}\right)=\left(\widetilde{q},(y_1,y_2,...,y_n,0,...,0)\right)$$

olacak şekilde $\left(\overline{p},\overrightarrow{x}+\varepsilon\overrightarrow{0}\right)=\left(\overline{q},\overrightarrow{y}+\varepsilon\overrightarrow{0}\right)\in\overline{B}$ vardır. Böylece, f fonksiyonu örtendir. Burada, $\overline{p}=p+\varepsilon p^*=(p_1,...,p_n)+\varepsilon\left(p_1^*,...,p_n^*\right)$ ve $\widetilde{q}=\left(q_1,...,q_n,q_1^*,...,q_n^*\right)$ dır.

Lineerlik: $\forall\left(\overline{p},\overrightarrow{x}+\varepsilon\overrightarrow{0}\right),\left(\overline{p},\overrightarrow{y}+\varepsilon\overrightarrow{0}\right)\in\overline{B}$ ve $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}
f\left(\lambda\cdot\left(\overline{p},\overrightarrow{x}+\varepsilon\overrightarrow{0}\right)+\left(\overline{p},\overrightarrow{y}+\varepsilon\overrightarrow{0}\right)\right) &= f\left(\overline{p},\lambda\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}+\varepsilon\overrightarrow{0}\right)\\
&= \left(\widetilde{p},(\lambda x_1+y_1,\lambda x_2+y_2,...,\lambda x_n+y_n,0,...,0)\right)\\
&= \lambda\left(\widetilde{p},(x_1,x_2,...,x_n,0,...,0)\right)\\
&\quad+\left(\widetilde{p},(y_1,y_2,...,y_n,0,...,0)\right)\\
&= \lambda f\left(\overline{p},\overrightarrow{x}+\varepsilon\overrightarrow{0}\right)+f\left(\overline{p},\overrightarrow{y}+\varepsilon\overrightarrow{0}\right)
\end{aligned}$$

dir. O halde, f lineerdir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.1.3. Teorem 4.1.2 den ve $(x_1,x_2,...,x_n,0,...,0)\cong(x_1,x_2,...,x_n)=\overrightarrow{x}$ olduğundan, $\{\overline{p}\}\times\mathbf{D}^n$ cümlesinin her bir elemanı

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\widetilde{x}}_{\overline{p}} &= \left(\overline{p},\overrightarrow{\widetilde{x}}\right)\\
&= \left(\overline{p},\overrightarrow{x}+\varepsilon\overrightarrow{0}\right)\oplus\varepsilon\odot\left(\overline{p},\overrightarrow{x^*}+\varepsilon\overrightarrow{0}\right)\\
&= \left(\widetilde{p},\overrightarrow{x}\right)\oplus\varepsilon\odot\left(\widetilde{p},\overrightarrow{x^*}\right)\\
&= \overrightarrow{x}_{\widetilde{p}}\oplus\varepsilon\odot\overrightarrow{x^*_{\widetilde{p}}}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $E_i=\left(0,...,\underbrace{1}_{i\text{-inci yer}},...,0,\underbrace{0,...,0}_{n\text{-tane}}\right)$ biçiminde olup

$$\begin{aligned}
\left(\widetilde{p},(x_1,x_2,...,x_n,0,...,0)\right) &= x_1E_{1_{\widetilde{p}}}+...+x_nE_{n_{\widetilde{p}}}\\
&= (x_1,...,x_n)_{\phi=\left\{E_{1_{\widetilde{p}}},...,E_{n_{\widetilde{p}}}\right\}}
\end{aligned}$$

şeklinde olduğu açıktır. Kolaylık için $\oplus$ ve $\odot$ işlemleri yerine $+$ ve $\cdot$ işlemleri kullanılırsa, $\forall \left(\overline{p}, \overrightarrow{\overline{x}}\right) \in \{\overline{p}\} \times \mathbf{D}^n$ için

$$\overrightarrow{\overline{x}}_{\overline{p}} = \overrightarrow{x}_{\widetilde{p}} + \varepsilon \overrightarrow{x^*_{\widetilde{p}}}$$

elde edilir. O halde, dual tanjant uzayı üzerinde tanımlanan iç ve dış işlemleri, $\forall \overrightarrow{\overline{x}}_{\overline{p}}, \overrightarrow{\overline{y}}_{\overline{p}} \in \{\overline{p}\} \times \mathbf{D}^n$ ve $\overline{\lambda} \in \mathbf{D}$ için

$$\overrightarrow{\overline{x}}_{\overline{p}} + \overrightarrow{\overline{y}}_{\overline{p}} = \overrightarrow{x}_{\widetilde{p}} + \overrightarrow{y}_{\widetilde{p}} + \varepsilon \left(\overrightarrow{x^*_{\widetilde{p}}} + \overrightarrow{y^*_{\widetilde{p}}}\right)$$

ve

$$\overline{\lambda} \cdot \overrightarrow{\overline{x}}_{\overline{p}} = \lambda \overrightarrow{x}_{\widetilde{p}} + \varepsilon \left(\lambda \overrightarrow{x^*_{\widetilde{p}}} + \lambda^* \overrightarrow{x}_{\widetilde{p}}\right)$$

biçiminde yazmak mümkündür.

Yukarıda elde edilen dual tanjant vektörlerini aşağıda verilen sonuç şeklinde de elde etmek mümkündür:

Sonuç 4.1.4. $\widetilde{p} \in \mathbb{R}^{2n}$ olmak üzere,

$$\{\widetilde{p}\} \times \mathbb{R}^{2n} = \{(\widetilde{p}, X) \mid X = (x_1, \ldots x_n, x_1^*, \ldots x_n^*)\}$$

cümlesi üzerinde eşitlik, bir iç işlem ve bir dış işlem aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:
i) $(\widetilde{p}, X) = (\widetilde{q}, Y)$ olması için gerek ve yeter şart $\widetilde{p} = \widetilde{q}$ ve $X = Y$ olmasıdır.
ii) $\forall (\widetilde{p}, X), (\widetilde{p}, Y) \in \{\widetilde{p}\} \times \mathbb{R}^{2n}$ için

$$+ : \left(\{\widetilde{p}\} \times \mathbb{R}^{2n}\right) \times \left(\{\widetilde{p}\} \times \mathbb{R}^{2n}\right) \to \{\widetilde{p}\} \times \mathbb{R}^{2n}$$

$$(\widetilde{p}, X) + (\widetilde{p}, Y) = (\widetilde{p}, X +_2 Y).$$

iii) $\forall (\widetilde{p}, X) \in \{\widetilde{p}\} \times \mathbb{R}^{2n}$ ve $\forall \overline{\lambda} = \lambda + \varepsilon \lambda^* \in \mathbf{D}$ için

$$\cdot : \mathbf{D} \times \left(\{\widetilde{p}\} \times \mathbb{R}^{2n}\right) \to \{\widetilde{p}\} \times \mathbb{R}^{2n}$$

$$\overline{\lambda} \cdot (\widetilde{p}, X) = \left(\widetilde{p}, \overline{\lambda} \cdot_2 X\right).$$

Bu durumda, $\left(\{\widetilde{p}\} \times \mathbb{R}^{2n}, +, \cdot\right)$ cümlesi $(\mathbf{D}, +, \cdot)$ birimli ve değişmeli halkası üzerinde bir modül oluşturur. Ayrıca,

$$f : \{\overline{p}\} \times \mathbf{D}^n \to \{\widetilde{p}\} \times \mathbb{R}^{2n},$$

$$f\left(\overline{p}, \overrightarrow{\widetilde{x}}\right) = (\widetilde{p}, X)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon (modül) izomorfizmdir. O halde,

$$\begin{aligned}
\left(\overline{p}, \overrightarrow{\widetilde{x}}\right) &= (\widetilde{p}, X) \\
&= (\widetilde{p}, (x_1, ..., x_n, 0, ..., 0)) + \varepsilon\, (\widetilde{p}, (x_1^*, ..., x_n^*, 0, ..., 0))
\end{aligned}$$

biçiminde ifade edilebilir. Kolaylık için, $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı, $\mathbb{R}^{2n}$ nin

$$A = \{(x_1, ..., x_n, 0, ..., 0) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

biçiminde tanımlanan bir alt cümlesine izomorf olduğundan

$$(x_1, x_2, ..., x_n, 0, ..., 0) \cong (x_1, x_2, ..., x_n) = \overrightarrow{x}$$

biçiminde gösterilebilir.

Sonuç 4.1.5. $\mathbf{D}^n$ nin her bir elemanının

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\widetilde{x}} &= \overline{x}_1 \cdot_{\mathbf{D}^n} \overrightarrow{\widetilde{e}}_1 +_{\mathbf{D}^n} ... +_{\mathbf{D}^n} \overline{x}_n \cdot_{\mathbf{D}^n} \overrightarrow{\widetilde{e}}_n \\
&= \overline{x}_1 \overrightarrow{e}_1 + ... + \overline{x}_n \overrightarrow{e}_n
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabildiğini biliyoruz. Burada, $1 \leq i \leq n$ için $\overrightarrow{\widetilde{e}}_i = \overrightarrow{e}_i + \varepsilon \overrightarrow{0} = \overrightarrow{e}_i$ dir. Bu durumda, $\{\overline{p}\} \times \mathbf{D}^n$ cümlesinin her bir elemanı

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\widetilde{x}}_{\overline{p}} &= \left(\overline{p}, \overrightarrow{\widetilde{x}}\right) \\
&= (\overline{p}, \overline{x}_1 \cdot \overrightarrow{\widetilde{e}}_1 + ... + \overline{x}_n \cdot \overrightarrow{\widetilde{e}}_n) \\
&= \overline{x}_1 \odot (\overline{p}, \overrightarrow{\widetilde{e}}_1) \oplus ... \oplus \overline{x}_n \odot (\overline{p}, \overrightarrow{\widetilde{e}}_n) \\
&= \overline{x}_1 (\overline{p}, \overrightarrow{e}_1) + ... + \overline{x}_n (\overline{p}, \overrightarrow{e}_n) \\
&= \overline{x}_1 \overrightarrow{e}_{1_{\overline{p}}} + ... + \overline{x}_n \overrightarrow{e}_{n_{\overline{p}}}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda,

$$\{\overline{p}\} \times \mathbf{D}^n = Sp\left\{\overrightarrow{e}_{1_{\overline{p}}}, ..., \overrightarrow{e}_{n_{\overline{p}}}\right\}$$

dir. Ayrıca, $\overline{\lambda}_i = \lambda_i + \varepsilon\lambda_i^* \in \mathbf{D}$ $(1 \leq i \leq n)$ için

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda}_i \overrightarrow{e}_{i_{\overline{p}}} = \overrightarrow{\overline{0}}_{\overline{p}} \tag{4.1.1}$$

eşitliği mevcut olsun. (4.1.1) eşitliği açılırsa

$$\overline{\lambda}_1 \overrightarrow{e}_{1_{\overline{p}}} + ... + \overline{\lambda}_n \overrightarrow{e}_{n_{\overline{p}}} = \left(\overline{p}, \overline{\lambda}_1 \overrightarrow{e}_1 + ... + \overline{\lambda}_n \overrightarrow{e}_n\right) = \left(\overline{p}, \overrightarrow{\overline{0}}\right)$$

elde edilir ve dual tanjant vektörlerindeki eşitlik tanımı kullanılırsa

$$\overline{\lambda}_1 \overrightarrow{e}_1 + ... + \overline{\lambda}_n \overrightarrow{e}_n = \overrightarrow{\overline{0}}$$

elde edilir. Bu durumda, dual vektörlerde eşitlik tanımından

$$\lambda_1 \overrightarrow{e}_1 + ... + \lambda_n \overrightarrow{e}_n = \overrightarrow{0}$$

ve

$$\lambda_1^* \overrightarrow{e}_1 + ... + \lambda_n^* \overrightarrow{e}_n = \overrightarrow{0}$$

eşitlikleri vardır. $\{\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n\}$ cümlesi lineer bağımsız olduğundan,

$$\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0 \text{ ve } \lambda_1^* = ... = \lambda_n^* = 0$$

olur ve böylece

$$\lambda_1 + \varepsilon\lambda_1^* = ... = \lambda_n + \varepsilon\lambda_n^* = 0 + \varepsilon 0$$

elde edilir. O halde, $\left\{\overrightarrow{e}_{1_{\overline{p}}}, ..., \overrightarrow{e}_{n_{\overline{p}}}\right\}$ cümlesi dual lineer bağımsızdır. Sonuç olarak, $\{\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n\}$ cümlesi $\mathbf{D}^n$ nin standart bazı iken $\left\{\overrightarrow{e}_{1_{\overline{p}}}, ..., \overrightarrow{e}_{n_{\overline{p}}}\right\}$ cümlesi de $\{\overline{p}\} \times \mathbf{D}^n$ nin standart bazıdır.

Tanım 4.1.3. Bir dual nokta $\overline{p} = (\overline{p}_1, ..., \overline{p}_n) = p + \varepsilon p^* \in \mathbf{D}^n$ ve bir dual vektör $\overrightarrow{\overline{v}} =$

$\overrightarrow{v}+\varepsilon\overrightarrow{v^*}\in\mathbf{D}^n$ $\left(\overrightarrow{v}\neq\overrightarrow{0}\right)$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma}\left(\bar{t}\right) &= \overline{p}+_{\mathbf{D}^n}\bar{t}\cdot_{\mathbf{D}^n}\overrightarrow{\widetilde{v}} \\
&= \overline{p}+\bar{t}\,\overrightarrow{\widetilde{v}} \\
&= p+t\overrightarrow{v}+\varepsilon\left(t^*\overrightarrow{v}+p^*+t\overrightarrow{v^*}\right) \\
&= \sigma\left(t\right)+\varepsilon\left(t^*\sigma'\left(t\right)+\widetilde{\sigma}\left(t\right)\right)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $\overline{\sigma}:\mathbf{D}\rightarrow\mathbf{D}^n$ dual analitik fonksiyonuna dual doğru adı verilir.

Tanım 4.1.4. $\overline{\xi}=\xi+\varepsilon\xi^0\in C\left(\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n,\mathbf{D}\right)$ dual değerli analitik bir fonksiyon, $\overline{p}=\left(\overline{p}_1,...,\overline{p}_n\right)=p+\varepsilon p^*\in\mathbf{D}^n$ bir dual nokta ve $\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}}\in\left\{\overline{p}\right\}\times\mathbf{D}^n$ bir dual tanjant vektör olsun. Bu durumda,

$$\frac{d}{d\bar{t}}\left(\overline{\xi}\left(\overline{p}+\bar{t}\,\overrightarrow{\widetilde{v}}\right)\right)|_{\bar{t}=\bar{0}}$$

dual sayısına $\overline{\xi}$ dual analitik fonksiyonunun $\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}}$ dual tanjant vektörü yönündeki türevi denir ve $\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}}\left[\overline{\xi}\right]$ ile gösterilir. Böylece,

$$\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}}\left[\overline{\xi}\right]=\frac{d}{d\bar{t}}\left(\overline{\xi}\left(\overline{p}+\bar{t}\,\overrightarrow{\widetilde{v}}\right)\right)|_{\bar{t}=\bar{0}}$$

şeklindedir.

Teorem 4.1.5. $\overline{\xi}=\xi+\varepsilon\xi^0\in C\left(\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n,\mathbf{D}\right)$ dual değerli analitik fonksiyonunun $\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}}\in\left\{\overline{p}\right\}\times\mathbf{D}^n$ dual tanjant vektörü yönündeki türevi

$$\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}}\left[\overline{\xi}\right]=\nabla\xi\;|_{\widetilde{p}}\cdot\overrightarrow{v}+\varepsilon\left(\nabla\xi^0\;|_{\widetilde{p}}\cdot\overrightarrow{v}+\nabla\xi\;|_{\widetilde{p}}\cdot\overrightarrow{v^*}\right)$$

şeklindedir. Burada,

$$\nabla\xi\;|_{\widetilde{p}}=\left(\frac{\partial\xi}{\partial x_1}\left(x\left(\widetilde{p}\right)\right),...,\frac{\partial\xi}{\partial x_n}\left(x\left(\widetilde{p}\right)\right)\right)$$

ve

$$\begin{aligned}
\nabla\xi^0\quad|\quad_{\widetilde{p}} &= \left(\frac{\partial\xi^0}{\partial x_1}\;|_{\widetilde{p}},...,\frac{\partial\xi^0}{\partial x_n}\;|_{\widetilde{p}}\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}p_i^*\frac{\partial^2\xi}{\partial x_i\partial x_1}\left(x\left(\widetilde{p}\right)\right)+\frac{\partial\widetilde{\xi}}{\partial x_1}\left(x\left(\widetilde{p}\right)\right),...,\sum_{i=1}^{n}p_i^*\frac{\partial^2\xi}{\partial x_i\partial x_n}\left(x\left(\widetilde{p}\right)\right)+\frac{\partial\widetilde{\xi}}{\partial x_n}\left(x\left(\widetilde{p}\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

biçimindedir.

İspat. Yukarıdaki tanımdan biliyoruz ki

$$\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}\left[\overline{\xi}\right]=\frac{d}{d\bar{t}}\left(\overline{\xi}\left(\overline{p}+\bar{t}\,\overrightarrow{\overline{v}}\right)\right)|_{\bar{t}=\bar{0}}$$

eşitliği mevcuttur. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\overline{p}+\bar{t}\,\overrightarrow{\overline{v}} &= (\overline{p}_1+\bar{t}\overline{v}_1,\ldots,\overline{p}_n+\bar{t}\overline{v}_n)\\ &= \left(\overline{x}_1\left(\overline{p}+\bar{t}\,\overrightarrow{\overline{v}}\right),\ldots,\overline{x}_n\left(\overline{p}+\bar{t}\,\overrightarrow{\overline{v}}\right)\right)\end{aligned}$$

olup burada $1\leq i\leq n$ için

$$\overline{x}_i\left(\overline{p}+\bar{t}\,\overrightarrow{\overline{v}}\right)=p_i+tv_i+\varepsilon\left(t^*v_i+p_i^*+tv_i^*\right)$$

şeklindedir. Bu dual fonksiyonlar dual analitik fonksiyon olduklarından bu fonksiyonların $\bar{t}$ dual değişkenine göre türevi

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\bar{t}}\overline{x}_i\left(\overline{p}+\bar{t}\,\overrightarrow{\overline{v}}\right) &= \frac{d}{dt}(p_i+tv_i)+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(t^*v_i+p_i^*+tv_i^*\right)\\ &= v_i+\varepsilon v_i^*\end{aligned}$$

dir.

$$\overline{\xi}\left(\overline{p}+\bar{t}\,\overrightarrow{\overline{v}}\right)=\overline{\xi}\left(\overline{x}_1\left(\overline{p}+\bar{t}\,\overrightarrow{\overline{v}}\right),\ldots,\overline{x}_n\left(\overline{p}+\bar{t}\,\overrightarrow{\overline{v}}\right)\right)$$

biçiminde olup sonuç 3.2.9 dikkate alındığında bu dual analitik fonksiyonunun $\bar{t}$ ye göre türevi

$$\frac{d}{d\bar{t}}\left(\overline{\xi}\left(\overline{p}+\bar{t}\,\overrightarrow{\overline{v}}\right)\right)=\frac{\partial\overline{\xi}}{\partial\overline{x}_1}|_{\overline{p}+\bar{t}\,\overrightarrow{\overline{v}}}\frac{\partial\overline{x}_1}{\partial\bar{t}}|_{\bar{t}}+\ldots+\frac{\partial\overline{\xi}}{\partial\overline{x}_n}|_{\overline{p}+\bar{t}\,\overrightarrow{\overline{v}}}\frac{\partial\overline{x}_n}{\partial\bar{t}}|_{\bar{t}} \qquad (4.1.2)$$

olduğunu biliyoruz. (4.1.2) denkleminin $\bar{t}=\bar{0}$ noktasındaki değeri

$$\frac{d}{d\bar{t}}\left(\overline{\xi}\left(\overline{p}+\bar{t}\,\overrightarrow{\overline{v}}\right)\right)|_{\bar{t}=\bar{0}}=\frac{\partial\overline{\xi}}{\partial\overline{x}_1}|_{\overline{p}}\frac{\partial\overline{x}_1}{\partial\bar{t}}|_{\bar{0}}+\ldots+\frac{\partial\overline{\xi}}{\partial\overline{x}_n}|_{\overline{p}}\frac{\partial\overline{x}_n}{\partial\bar{t}}|_{\bar{0}}$$

şeklindedir. $\overline{\xi}=\xi+\varepsilon\xi^0$ dual analitik fonksiyonunun $\overline{x}_j=x_j+\varepsilon x_j^*$ dual değişkenine göre kısmi türevleri

$$\begin{aligned}\frac{\partial\overline{\xi}}{\partial\overline{x}_j} &= \frac{\partial\xi}{\partial x_j}+\varepsilon\frac{\partial\xi^0}{\partial x_j}\\ &= \frac{\partial\xi}{\partial x_j}+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^*\frac{\partial^2\xi}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{\partial\widetilde{\xi}}{\partial x_j}\right)\end{aligned}$$

biçimindedir. Yani, $\overline{\xi}$ dual analitik fonksiyonun $\overline{x}_j = x_j+\varepsilon x_j^*$ dual değişkenine göre kısmi türevleri x_j reel değişkenine göre kısmi türevlerine indirgenmektedir. Diğer yandan, bu fonksiyonun $\overline{x}=\overline{p}$ dual noktasındaki değeri

$$\begin{aligned}\frac{\partial\overline{\xi}}{\partial\overline{x}_j}(\overline{x}(\overline{p})) &= \frac{\partial\xi}{\partial x_j}(\widetilde{p})+\varepsilon\frac{\partial\xi^0}{\partial x_j}(\widetilde{p})\\ &= \frac{\partial\xi}{\partial x_j}(x(\widetilde{p}))+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^*(\widetilde{p})\frac{\partial^2\xi}{\partial x_i\partial x_j}(x(\widetilde{p}))+\frac{\partial\widetilde{\xi}}{\partial x_j}(x(\widetilde{p}))\right)\end{aligned}$$

biçimindedir öyle ki

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\overline{t}}\left(\overline{\xi}\left(\overline{p}+\overline{t}\,\overrightarrow{\overline{v}}\right)\right)\ \Big|_{\ \overline{t}=\overline{0}} &= \left(\frac{\partial\xi}{\partial x_1}(x(\widetilde{p}))+\varepsilon\frac{\partial\xi^0}{\partial x_1}(x(\widetilde{p}))\right)(v_1+\varepsilon v_1^*)\\ &\quad+\ldots+\left(\frac{\partial\xi}{\partial x_n}(x(\widetilde{p}))+\varepsilon\frac{\partial\xi^0}{\partial x_n}(x(\widetilde{p}))\right)(v_n+\varepsilon v_n^*)\\ &= \nabla\xi\mid_{\widetilde{p}}\cdot\overrightarrow{v}+\varepsilon\left(\nabla\xi^0\mid_{\widetilde{p}}\cdot\overrightarrow{v}+\nabla\xi\mid_{\widetilde{p}}\cdot\overrightarrow{v^*}\right)\end{aligned}$$

dir. □

$\overline{\xi}=\xi+\varepsilon\xi^0\in C\left(\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n,\mathbf{D}\right)$ dual değerli analitik fonksiyonunun $\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}=\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}+\varepsilon\overrightarrow{v^*}_{\widetilde{p}}\in\{\overline{p}\}\times\mathbf{D}^n$ dual tanjant vektörü yönündeki türevinin

$$\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}\left[\overline{\xi}\right]=\nabla\xi\mid_{\widetilde{p}}\cdot\overrightarrow{v}+\varepsilon\left(\nabla\xi^0\mid_{\widetilde{p}}\cdot\overrightarrow{v}+\nabla\xi\mid_{\widetilde{p}}\cdot\overrightarrow{v^*}\right)$$

biçiminde olduğunu teorem 4.1.5 den biliyoruz. Bu durumda,

$$\nabla\xi\mid_{\widetilde{p}}\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[\xi],\ \nabla\xi^0\mid_{\widetilde{p}}\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[\xi^0\right]\ \text{ve}\ \nabla\xi\mid_{\widetilde{p}}\cdot\overrightarrow{v^*}=\overrightarrow{v^*}_{\widetilde{p}}[\xi]$$

denilirse

$$\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}\left[\overline{\xi}\right]=\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[\xi]+\varepsilon\left(\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[\xi^0\right]+\overrightarrow{v^*}_{\widetilde{p}}[\xi]\right) \tag{4.1.3}$$

şeklinde yazılır. Yukarıdaki teorem ve (4.1.3) eşitliği kapalı bir şekilde verilmiştir. Şimdi, bu ifadeyi detaylıca inceleyelim. $\nabla \xi^0 \mid_{\widetilde{p}} \cdot \overrightarrow{v}$ ifadesi

$$\nabla \xi^0 \mid_{\widetilde{p}} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}} \left[\xi^0\right] = \sum_{i=1}^{n} p_i^* \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}} \left[\xi_{x_i}\right] + \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}} \left[\widetilde{\xi}\right]$$

şeklinde yazılabildiğinden (4.1.3) denklemi

$$\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}} \left[\overline{\xi}\right] = \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}} [\xi] + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{n} p_i^* \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}} \left[\xi_{x_i}\right] + \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}} \left[\widetilde{\xi}\right] + \overrightarrow{v^*}_{\widetilde{p}} [\xi] \right)$$

biçiminde elde edilir. Burada, $\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}} \left[\widetilde{\xi}\right] = \nabla \widetilde{\xi} \mid_{\widetilde{p}} \cdot \overrightarrow{v}$ ve $1 \leq i \leq n$ için $\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}} \left[\xi_{x_i}\right] = \nabla \xi_{x_i} \mid_{\widetilde{p}} \cdot \overrightarrow{v}$ şeklindedir. Ayrıca, dikkat edilirse

$$\overrightarrow{v} [\xi] = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} v_j \tag{4.1.4}$$

şeklinde olup $1 \leq i \leq n$ için (4.1.4) eşitliğinin x_i reel değişkene göre kısmi türevleri alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overrightarrow{v} [\xi]\right) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_i \partial x_j} v_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_j \partial x_i} v_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \left(\xi_{x_i}\right)}{\partial x_j} v_j \\ &= \overrightarrow{v} \left[\xi_{x_i}\right] \end{aligned}$$

dir. O halde, aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overrightarrow{v} [\xi]\right) \right) \mid_{\widetilde{p}} = \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}} \left[\xi_{x_i}\right].$$

Bu çalışma boyunca, $\overline{\xi} = \xi + \varepsilon \xi^0 \in C\left(\overline{U} \subseteq \mathbf{D}^n, \mathbf{D}\right)$ dual değerli analitik fonksiyonunun $\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}}$ dual tanjant vektörü yönündeki türevini aşağıdaki şekilde ifade edeceğiz:

$$\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}} \left[\overline{\xi}\right] = \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}} [\xi] + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{n} p_i^* \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}} \left[\xi_{x_i}\right] + \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}} \left[\widetilde{\xi}\right] + \overrightarrow{v^*}_{\widetilde{p}} [\xi] \right).$$

Yukarıdaki teoremin ispatı (3.2.10) eşitliği kullanılarak da yapılabilir. Gerçekten, $\overline{\xi} = \xi + \varepsilon\xi^0 \in C\left(\overline{U} \subseteq \mathbf{D}^n, \mathbf{D}\right)$ dual değerli analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\overline{\xi}\left(\overline{x}\right) &= \xi\left(x_1,...,x_n\right) + \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^* \frac{\partial \xi}{\partial x_i}\left(x_1,...,x_n\right) + \widetilde{\xi}\left(x_1,...,x_n\right)\right) \\
&= \xi\left(x\right) + \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^* \frac{\partial \xi}{\partial x_i} + \widetilde{\xi}\left(x\right)\right)
\end{aligned}$$

şeklindedir ve dual doğrunun denklemi

$$\begin{aligned}
\overline{p} + \overline{t}\,\overrightarrow{\overline{v}} &= p + t\overrightarrow{v} + \varepsilon\left(t^*\overrightarrow{v} + p^* + t\overrightarrow{v^*}\right) \\
&= \sigma\left(t\right) + \varepsilon\left(t^*\sigma'\left(t\right) + \widetilde{\sigma}\left(t\right)\right)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılırsa

$$\begin{aligned}
\overline{\xi}\left(\overline{p} + \overline{t}\,\overrightarrow{\overline{v}}\right) &= \left(\xi \circ \sigma\right)\left(t\right) \\
&\quad + \varepsilon\left(t^*\left(\xi \circ \sigma\right)'\left(t\right) + \left\langle \widetilde{\sigma}\left(t\right), \sum_{i=1}^{n}\left(\xi_{x_i} \circ \sigma\right)\left(t\right)\overrightarrow{e}_i \right\rangle + \left(\widetilde{\xi} \circ \sigma\right)\left(t\right)\right)
\end{aligned}$$

dual analitik fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyonun $\overline{t}$ dual değişkenine göre türevi alınıp $\overline{t} = \overline{0}$ noktasındaki değeri yerine yazılırsa aşağıdaki denklem bulunur:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}\left[\overline{\xi}\right] &= \frac{\partial \xi}{\partial x_1}\left(\sigma\left(0\right)\right)\frac{d\sigma_1}{dt}\left(0\right) + ... + \frac{\partial \xi}{\partial x_n}\left(\sigma\left(0\right)\right)\frac{d\sigma_n}{dt}\left(0\right) \\
&\quad + \varepsilon\left[\begin{array}{c}
\frac{\partial \xi}{\partial x_1}\left(\sigma\left(0\right)\right)\frac{d\widetilde{\sigma}_1}{dt}\left(0\right) + ... + \frac{\partial \xi}{\partial x_n}\left(\sigma\left(0\right)\right)\frac{d\widetilde{\sigma}_n}{dt}\left(0\right) \\
+\left(\frac{\partial \xi_{x_1}}{\partial x_1}\left(\sigma\left(0\right)\right)\frac{d\sigma_1}{dt}\left(0\right) + ... + \frac{\partial \xi_{x_1}}{\partial x_n}\left(\sigma\left(0\right)\right)\frac{d\sigma_n}{dt}\left(0\right)\right)\widetilde{\sigma}_1\left(0\right) \\
+ .... + \left(\frac{\partial \xi_{x_n}}{\partial x_1}\left(\sigma\left(0\right)\right)\frac{d\sigma_1}{dt}\left(0\right) + ... + \frac{\partial \xi_{x_n}}{\partial x_n}\left(\sigma\left(0\right)\right)\frac{d\sigma_n}{dt}\left(0\right)\right)\widetilde{\sigma}_n\left(0\right) \\
+\frac{\partial \widetilde{\xi}}{\partial x_1}\left(\sigma\left(0\right)\right)\frac{d\sigma_1}{dt}\left(0\right) + ... + \frac{\partial \widetilde{\xi}}{\partial x_n}\left(\sigma\left(0\right)\right)\frac{d\sigma_n}{dt}\left(0\right)
\end{array}\right].
\end{aligned}$$

Diğer yandan; $1 \leq i, j \leq n$ için

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial x_i}\left(\sigma\left(0\right)\right) &= \frac{\partial \xi}{\partial x_i}\left(p_1,...,p_n\right) \overset{Def}{=} \frac{\partial \xi}{\partial x_i}\left(x_1\left(\widetilde{p}\right),...,x_n\left(\widetilde{p}\right)\right), \\
\frac{\partial \widetilde{\xi}}{\partial x_i}\left(\sigma\left(0\right)\right) &= \frac{\partial \widetilde{\xi}}{\partial x_i}\left(p_1,...,p_n\right) \overset{Def}{=} \frac{\partial \widetilde{\xi}}{\partial x_i}\left(x_1\left(\widetilde{p}\right),...,x_n\left(\widetilde{p}\right)\right),
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \widetilde{\sigma}_i(0) &= p_i^*, \\ \widetilde{\sigma}_i'(0) &= v_i^* \end{aligned}$$

olup

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \xi}{\partial x_i}(\sigma(0))\,v_i \overset{Def}{=} \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x_1(\widetilde{p}),\ldots,x_n(\widetilde{p}))\,v_i = \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[\xi]$$

şeklinde olduğundan

$$\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}\left[\overline{\xi}\right] = \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[\xi] + \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n} p_i^* \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[\xi_{x_i}] + \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[\widetilde{\xi}\right] + \overrightarrow{v^*}_{\widetilde{p}}[\xi]\right)$$

biçiminde ifade edilir. Sonuç olarak, $\overline{\xi} \in C\left(\overline{U} \subseteq \mathbf{D}^n, \mathbf{D}\right)$ dual analitik fonksiyonunun $\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}$ dual tanjant vektörü yönündeki türevi

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}\left[\overline{\xi}\right] &= \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[\xi] + \varepsilon\left(\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[\xi^0\right] + \overrightarrow{v^*}_{\widetilde{p}}[\xi]\right) \\ &= \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[\xi] + \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n} p_i^* \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[\xi_{x_i}] + \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[\widetilde{\xi}\right] + \overrightarrow{v^*}_{\widetilde{p}}[\xi]\right) \qquad (4.1.5) \end{aligned}$$

dir.

Teorem 4.1.6. $\overline{\xi}, \overline{\mu} \in C\left(\overline{U} \subseteq \mathbf{D}^n, \mathbf{D}\right)$ dual analitik fonksiyonlar, $\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}$, $\overrightarrow{\overline{w}}_{\overline{p}} \in \{\overline{p}\} \times \mathbf{D}^n$ ve $\overline{\lambda} = \lambda + \varepsilon\lambda^* \in \mathbf{D}$ olsun. Bu durumda,

1) $\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}\left[\overline{\xi} + \overline{\mu}\right] = \overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}\left[\overline{\xi}\right] + \overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}[\overline{\mu}]$,
2) $\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}\left[\overline{\lambda}\overline{\xi}\right] = \overline{\lambda}\,\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}\left[\overline{\xi}\right]$,
3) $\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}\left[\overline{\xi}\overline{\mu}\right] = \overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}\left[\overline{\xi}\right]\overline{\mu}(\overline{p}) + \overline{\xi}(\overline{p})\,\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}[\overline{\mu}]$,
4) $\left(\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}} + \overrightarrow{\overline{w}}_{\overline{p}}\right)\left[\overline{\xi}\right] = \overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}\left[\overline{\xi}\right] + \overrightarrow{\overline{w}}_{\overline{p}}\left[\overline{\xi}\right]$,
5) $\left(\overline{\lambda}\,\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}\right)\left[\overline{\xi}\right] = \overline{\lambda}\,\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}\left[\overline{\xi}\right]$

dir.

İspat. $\overline{\xi}, \overline{\mu} \in C\left(\overline{U} \subseteq \mathbf{D}^n, \mathbf{D}\right)$ dual analitik fonksiyonlar olsun. Bu durumda,

$$\overline{\xi}(\overline{x}) = \xi(x) + \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^* \frac{\partial \xi}{\partial x_i} + \widetilde{\xi}(x)\right)$$

ve

$$\overline{\mu}\left(\overline{x}\right)=\mu\left(x\right)+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{*}\frac{\partial\mu}{\partial x_i}+\widetilde{\mu}\left(x\right)\right)$$

şeklindedir. Burada, $\xi,\mu,\widetilde{\xi}$ ve $\widetilde{\mu}$ fonksiyonları C^{∞}-sınıfındandır.

1) $\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}=\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}+\varepsilon\overrightarrow{v^{*}_{\widetilde{p}}}$ dual tanjant vektörü olsun. Bu durumda,

$$\overline{\xi}\left(\overline{x}\right)+\overline{\mu}\left(\overline{x}\right)=\xi\left(x\right)+\mu\left(x\right)+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{*}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x_i}+\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\right)+\widetilde{\xi}\left(x\right)+\widetilde{\mu}\left(x\right)\right)$$

şeklinde olup

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}\left[\overline{\xi}+\overline{\mu}\right] &= \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[\xi+\mu]+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}p_i^{*}\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[\xi_{x_i}+\mu_{x_i}]+\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[\widetilde{\xi}+\widetilde{\mu}\right]+\overrightarrow{v^{*}}_{\widetilde{p}}[\xi+\mu]\right)\\ &= \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[\xi]+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}p_i^{*}\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[\xi_{x_i}]+\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[\widetilde{\xi}\right]+\overrightarrow{v^{*}}_{\widetilde{p}}[\xi]\right)\\ &\quad+\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[\mu]+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}p_i^{*}\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[\mu_{x_i}]+\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[\widetilde{\mu}]+\overrightarrow{v^{*}}_{\widetilde{p}}[\mu]\right)\\ &= \overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}\left[\overline{\xi}\right]+\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}[\overline{\mu}]\end{aligned}$$

elde edilir.

2) $\overline{\lambda}=\lambda+\varepsilon\lambda^{*}\in\mathbf{D}$ ve $\overline{\xi}=\xi+\varepsilon\xi^{0}\in C\left(\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^{n},\mathbf{D}\right)$ olsun. Bu durumda, bir dual sayı ile bir dual analitik fonksiyonun çarpımı

$$\overline{\lambda}\cdot\overline{\xi}\left(\overline{x}\right)=\lambda\xi\left(x\right)+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{*}\left(\lambda\frac{\partial\xi}{\partial x_i}\right)+\lambda\widetilde{\xi}\left(x\right)+\lambda^{*}\xi\left(x\right)\right)$$

şeklinde bir dual analitik fonksiyondur. O halde, (4.1.5) eşitliğini göz önüne aldığımız zaman

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}\left[\overline{\lambda\xi}\right] &= \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[\lambda\xi]+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}p_i^{*}\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[\lambda\xi_{x_i}]+\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[\lambda\widetilde{\xi}+\lambda^{*}\xi\right]+\overrightarrow{v^{*}}_{\widetilde{p}}[\lambda\xi]\right)\\ &= \lambda\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[\xi]+\varepsilon\left(\lambda\sum_{i=1}^{n}p_i^{*}\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[\xi_{x_i}]+\lambda\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[\widetilde{\xi}\right]+\lambda^{*}\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[\xi]+\lambda\overrightarrow{v^{*}}_{\widetilde{p}}[\xi]\right)\\ &= (\lambda+\varepsilon\lambda^{*})\left(\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[\xi]+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}p_i^{*}\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[\xi_{x_i}]+\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[\widetilde{\xi}\right]+\overrightarrow{v^{*}}_{\widetilde{p}}[\xi]\right)\right)\\ &= \overline{\lambda}\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}\left[\overline{\xi}\right]\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir.

3) $\overline{\xi},\overline{\mu}\in C\left(\overline{U}\subseteq \mathbf{D}^n,\mathbf{D}\right)$ dual analitik fonksiyonlar olmak üzere,

$$\overline{\xi}\left(\overline{x}\right)\cdot\overline{\mu}\left(\overline{x}\right)=\xi\left(x\right)\mu\left(x\right)+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^*\left(\frac{\partial\xi}{\partial x_i}\mu\left(x\right)+\xi\left(x\right)\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\right)+\xi\left(x\right)\widetilde{\mu}\left(x\right)+\widetilde{\xi}\left(x\right)\mu\left(x\right)\right).$$

şeklinde tanımlı olduğunu biliyoruz. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}\left[\overline{\xi}\overline{\mu}\right] &= \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[\xi\mu\right]+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}p_i^*\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[\xi_{x_i}\mu+\xi\mu_{x_i}\right]+\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[\xi\widetilde{\mu}+\widetilde{\xi}\mu\right]+\overrightarrow{v^*}_{\widetilde{p}}\left[\xi\mu\right]\right)\\
&= \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[\xi\right]\mu\left(x\left(\widetilde{p}\right)\right)+\xi\left(x\left(\widetilde{p}\right)\right)\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[\mu\right]+\\
&\quad +\varepsilon\left(\begin{array}{c}
\sum\limits_{i=1}^{n}p_i^*\left(\begin{array}{c}\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[\xi_{x_i}\right]\mu\left(x\left(\widetilde{p}\right)\right)+\xi_{x_i}\left(x\left(\widetilde{p}\right)\right)\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[\mu\right]\\ +\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[\xi\right]\mu_{x_i}\left(x\left(\widetilde{p}\right)\right)+\xi\left(x\left(\widetilde{p}\right)\right)\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[\mu_{x_i}\right]\end{array}\right)\\
+\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[\xi\right]\widetilde{\mu}\left(x\left(\widetilde{p}\right)\right)+\xi\left(x\left(\widetilde{p}\right)\right)\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[\widetilde{\mu}\right]\\
+\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[\widetilde{\xi}\right]\mu\left(x\left(\widetilde{p}\right)\right)+\widetilde{\xi}\left(x\left(\widetilde{p}\right)\right)\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[\mu\right]\\
+\overrightarrow{v^*}_{\widetilde{p}}\left[\xi\right]\mu\left(x\left(\widetilde{p}\right)\right)+\xi\left(x\left(\widetilde{p}\right)\right)\overrightarrow{v^*}_{\widetilde{p}}\left[\mu\right]
\end{array}\right)
\end{aligned}$$

olduğundan gerekli düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki eşitliği elde etmek mümkündür:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}\left[\overline{\xi}\overline{\mu}\right] &= \left(\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[\xi\right]+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}p_i^*\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[\xi_{x_i}\right]+\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[\widetilde{\xi}\right]+\overrightarrow{v^*}_{\widetilde{p}}\left[\xi\right]\right)\right)\\
&\quad\times\left(\mu\left(x\left(\widetilde{p}\right)\right)+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^*\left(\widetilde{p}\right)\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\left(x\left(\widetilde{p}\right)\right)+\widetilde{\mu}\left(x\left(\widetilde{p}\right)\right)\right)\right)\\
&\quad+\left(\xi\left(x\left(\widetilde{p}\right)\right)+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^*\left(\widetilde{p}\right)\frac{\partial\xi}{\partial x_i}\left(x\left(\widetilde{p}\right)\right)+\widetilde{\xi}\left(x\left(\widetilde{p}\right)\right)\right)\right)\\
&\quad\times\left(\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[\mu\right]+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}p_i^*\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[\mu_{x_i}\right]+\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[\widetilde{\mu}\right]+\overrightarrow{v^*}_{\widetilde{p}}\left[\mu\right]\right)\right)\\
&= \overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}\left[\overline{\xi}\right]\overline{\mu}\left(\overline{p}\right)+\overline{\xi}\left(\overline{p}\right)\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}\left[\overline{\mu}\right].
\end{aligned}$$

O halde,

$$\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}\left[\overline{\xi}\overline{\mu}\right]=\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}\left[\overline{\xi}\right]\overline{\mu}\left(\overline{p}\right)+\overline{\xi}\left(\overline{p}\right)\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}\left[\overline{\mu}\right]$$

dir.

(4) ve (5) öncülleri dual yöne göre türev tanımı kullanılarak kolaylıkla gösterilebilir.

□

Sonuç 4.1.6. Teorem 4.1.6 dan görülmektedir ki $\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}} \in \{\overline{p}\} \times \mathbf{D}^n$ dual tanjant vektörü $C\left(\overline{U} \subseteq \mathbf{D}^n, \mathbf{D}\right)$ den $\mathbf{D}$ ye tanımlı (modül) lineer ve leibniz kurallarını sağlayan bir operatördür. Yani;

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}} & : & C\left(\overline{U} \subseteq \mathbf{D}^n, \mathbf{D}\right) \to \mathbf{D} \\ \overline{\xi} & \to & \overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}}\left(\overline{\xi}\right) = \overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}}\left[\overline{\xi}\right] = \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[\xi] + \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n} p_i^* \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[\xi_{x_i}] + \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[\widetilde{\xi}\right] + \overrightarrow{v^*}_{\widetilde{p}}[\xi]\right) \end{array}$$

şeklindedir. Ayrıca, $\left\{\overrightarrow{e}_{1_{\overline{p}}}, \ldots, \overrightarrow{e}_{n_{\overline{p}}}\right\}$ cümlesinin $\{\overline{p}\} \times \mathbf{D}^n$ nin bir bazı olduğunu biliyoruz. Bu durumda, $1 \leq j \leq n$ için

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{e}_{j_{\overline{p}}}\left[\overline{\xi}\right] & = & \left(\overrightarrow{e}_{j}\left[\overline{\xi}\right]\right)(\overline{p}) = \overrightarrow{e}_{j_{\widetilde{p}}}[\xi] + \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n} p_i^* \overrightarrow{e}_{j_{\widetilde{p}}}[\xi_{x_i}] + \overrightarrow{e}_{j_{\widetilde{p}}}\left[\widetilde{\xi}\right]\right) \\ & = & \dfrac{\partial \xi}{\partial x_j}(x(\widetilde{p})) + \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n} p_i^* \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x_i \partial x_j}(x(\widetilde{p})) + \dfrac{\partial \widetilde{\xi}}{\partial x_j}(x(\widetilde{p}))\right) \\ & = & \dfrac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{x}_j}(\overline{p}) \end{array}$$

elde edilir. Her $\overline{p} \in \mathbf{D}^n$ için yukarıdaki eşitlik doğru olduğundan

$$\overrightarrow{e}_{j}\left[\overline{\xi}\right] = \frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{x}_j} = \frac{\partial \xi}{\partial x_j} + \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^* \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial \widetilde{\xi}}{\partial x_j}\right)$$

şeklindedir.

Tanım 4.1.7. $\overline{\xi} \in C\left(\overline{U} \subseteq \mathbf{D}^n, \mathbf{D}\right)$ dual değerli analitik fonksiyon olsun. Bu durumda, $\overline{\xi}$ nin diferansiyeli $d\overline{\xi}$ ile gösterilir ve

$$d\overline{\xi}\left(\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}}\right) = \overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}}\left[\overline{\xi}\right] = \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[\xi] + \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n} p_i^* \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[\xi_{x_i}] + \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[\widetilde{\xi}\right] + \overrightarrow{v^*}_{\widetilde{p}}[\xi]\right)$$

biçimindedir.

Sonuç 4.1.7. Dual birim fonksiyonu

$$\begin{array}{rcl} I & : & \mathbf{D} \to \mathbf{D}, \\ I(\overline{x}) & = & x + \varepsilon x^* \\ & = & x + \varepsilon\left((x)' x^* + 0(x)\right) \end{array}$$

şeklinde tanımlı dual analitik bir fonksiyon olup, $1 \leq i \leq n$ için dual koordinat fonksiyonları da

$$\begin{aligned}
\overline{x}_i &= x_i + \varepsilon x_i^* \\
&= x_i + \varepsilon \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^* \left(x_i\right)_{x_j} + \mathbf{0}\left(x\right) \right)
\end{aligned}$$

dual analitik foksiyonlardır. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
d\overline{x}_i \left(\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}} \right) &= \overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}} \left[\overline{x}_i\right] \\
&= \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}} \left[x_i\right] + \varepsilon \left(\sum_{j=1}^{n} p_j^* \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}} \left[\left(x_i\right)_{x_j} \right] + \overrightarrow{v^*}_{\widetilde{p}} \left[x_i\right] \right) \\
&= \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}} \left[x_i\right] + \varepsilon \overrightarrow{v^*}_{\widetilde{p}} \left[x_i\right] \\
&= v_i + \varepsilon v_i^*
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan görülmektedir ki $\{\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n\}$ cümlesi $\overline{p} \in \mathbf{D}^n$ nin dual koordinat fonksiyonları iken, $\{d\overline{x}_1, ..., d\overline{x}_n\}$ cümlesi de $\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}} \in \{\overline{p}\} \times \mathbf{D}^n$ dual tanjant vektörünün vektör kısmının koordinat fonksiyonlarıdır ve $\overline{p}$ dual noktasının seçilişinden bağımsızdır. Yani, $\forall \overrightarrow{\widetilde{v}} \in \mathbf{D}^n$ için

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\widetilde{v}} &= \left(\overline{v}_1, ..., \overline{v}_n\right) \\
&= \left(d\overline{x}_1 \left(\overrightarrow{\widetilde{v}} \right), ..., d\overline{x}_n \left(\overrightarrow{\widetilde{v}} \right) \right) \\
&= \left(v_1, ..., v_n\right) + \varepsilon \left(v_1^*, ..., v_n^*\right) \\
&= \overrightarrow{v} + \varepsilon \overrightarrow{v^*}
\end{aligned}$$

olur. Diğer yandan; $g_{ij} = \left\langle \overrightarrow{e}_i, \overrightarrow{e}_j \right\rangle$ şeklinde alınırsa $G = g_{ij} d\overline{x}_i d\overline{x}_j$, $\mathbf{D}^n$ üzerinde tanımlanan dual iç çarpımı verir. Yani, $\overrightarrow{\widetilde{v}}, \overrightarrow{\widetilde{w}} \in \mathbf{D}^n$ için

$$\begin{aligned}
G\left(\overrightarrow{\widetilde{v}}, \overrightarrow{\widetilde{w}} \right) &= g_{ij} d\overline{x}_i \left(\overrightarrow{\widetilde{v}} \right) d\overline{x}_j \left(\overrightarrow{\widetilde{w}} \right) \\
&= g_{ij} \left(v_i + \varepsilon v_i^*\right) \left(w_j + \varepsilon w_j^*\right) \\
&= v_1 w_1 + ... + v_n w_n + \varepsilon \left(\left(v_1 w_1^* + ... + v_n w_n^*\right) + \left(v_1^* w_1 + ... + v_n^* w_n\right) \right) \\
&= \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle + \varepsilon \left(\left\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w^*} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{v^*}, \overrightarrow{w} \right\rangle \right)
\end{aligned}$$

dir. O halde,

$$
\begin{aligned}
G\left(\overrightarrow{\widetilde{v}}, \overrightarrow{\widetilde{w}}\right) &= \left\langle \overrightarrow{\widetilde{v}}, \overrightarrow{\widetilde{w}} \right\rangle_{\mathbf{D}} \\
&= \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle + \varepsilon \left(\left\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w^*} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{v^*}, \overrightarrow{w} \right\rangle \right)
\end{aligned}
$$

olduğu kolayca görülür [36].

4.2. Dual Vektör Alanı

$\mathbf{D}^n$ nin her dual noktasına, bu noktada bir dual tanjant vektörü karşılık getiren fonksiyona dual vektör alanı denir. Yani,

$$
\begin{aligned}
\overline{X} &: \mathbf{D}^n \to T\mathbf{D}^n \\
\overline{p} &\to \overline{X}(\overline{p}) = \overline{X}_{\overline{p}} = X_{\widetilde{p}} + \varepsilon X^*_{\widetilde{p}}
\end{aligned}
$$

dır. Burada, $\overline{X} = X + \varepsilon X^*$ şeklindedir. $1 \leq i \leq n$ için

$$
\begin{aligned}
\overline{a}_i &: \overline{U} \subseteq \mathbf{D}^n \to \mathbf{D} \\
\overline{x} &\to \overline{a}_i(\overline{x})
\end{aligned}
$$

dual analitik foksiyonlarını ele alalım. Bu dual analitik fonksiyonlar

$$
\begin{aligned}
\overline{a}_i(\overline{x}) &= a_i(x_1, ..., x_n) + \varepsilon \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^* a_{i_{x_j}} + \widetilde{a}_i(x_1, ..., x_n) \right) \\
&= a_i(x) + \varepsilon \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^* a_{i_{x_j}} + \widetilde{a}_i(x) \right) \\
&= a_i + \varepsilon a_i^0
\end{aligned}
$$

biçiminde olup a_i ve $\widetilde{a}_i$ fonksiyonları C^∞-sınıfındandır. Bu durumda, dual (analitik) vektör alanının en genel gösterimi

$$
\overline{X} = (a_1, ..., a_n) + \varepsilon \left(a_1^0, ..., a_n^0\right) \tag{4.2.1}
$$

şeklinde elde edilir. O halde, yukarıda tanımlanan dual analitik fonksiyonlar göz önüne alınıp (4.2.1) denklemi genişletilirse,

$$\begin{aligned}
\overline{X}(\overline{x}) &= (a_1(x),...,a_n(x)) + \varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^* a_{1_{x_j}} + \widetilde{a}_1(x),...,\sum_{j=1}^{n} x_j^* a_{n_{x_j}} + \widetilde{a}_n(x)\right) \\
&= (a_1(x),...,a_n(x)) + \varepsilon\left(\begin{array}{c} x_1^*\left(a_{1_{x_1}},...,a_{n_{x_1}}\right) + ... + x_n^*\left(a_{1_{x_n}},...,a_{n_{x_n}}\right) \\ +\left(\left(\widetilde{a}_1(x),...,\widetilde{a}_n(x)\right)\right) \end{array}\right) \\
&= X(x) + \varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^* X_{x_j} + \widetilde{X}(x)\right) \\
&= X + \varepsilon X^*
\end{aligned}$$

biçimindedir. Bu dual vektör alanının $\overline{p} \in \mathbf{D}^n$ dual noktasındaki değeri

$$\begin{aligned}
\overline{X}(\overline{x}(\overline{p})) &= X(x(\widetilde{p})) + \varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^*(\widetilde{p}) X_{x_j}(x(\widetilde{p})) + \widetilde{X}(x(\widetilde{p}))\right) \\
&= X_{\widetilde{p}} + \varepsilon X_{\widetilde{p}}^*
\end{aligned}$$

şeklindedir. Dual vektör alanlarının cümlesi $\chi(\mathbf{D}^n)$ ile gösterilirse,

$$\chi(\mathbf{D}^n) = \left\{\overline{X} \mid \overline{X} : \mathbf{D}^n \to \{\overline{p}\} \times \mathbf{D}^n,\ \overline{X}(\overline{p}) = \overline{X}_{\overline{p}} = X_{\widetilde{p}} + \varepsilon X_{\widetilde{p}}^*\right\}$$

dir. Bu cümle üzerinde birer iç ve dış işlem tanımlayalım:

$i)$ $\forall \overline{X}, \overline{Y} \in \chi(\mathbf{D}^n)$ için

$$+_\chi : \chi(\mathbf{D}^n) \times \chi(\mathbf{D}^n) \to \chi(\mathbf{D}^n)$$

$$\overline{X} +_\chi \overline{Y} : \mathbf{D}^n \to \{\overline{p}\} \times \mathbf{D}^n,\ \left(\overline{X} +_\chi \overline{Y}\right)(\overline{p}) = \overline{X}(\overline{p}) + \overline{Y}(\overline{p}).$$

$ii)$ $\forall \overline{X} \in \chi(\mathbf{D}^n)$ ve $\forall \overline{\lambda} \in \mathbf{D}$ için

$$\cdot_\chi : \mathbf{D} \times \chi(\mathbf{D}^n) \to \chi(\mathbf{D}^n)$$

$$\overline{\lambda} \cdot_\chi \overline{X} : \mathbf{D}^n \to \{\overline{p}\} \times \mathbf{D}^n,\ \left(\overline{\lambda} \cdot_\chi \overline{X}\right)(\overline{p}) = \overline{\lambda} \cdot \overline{X}(\overline{p}).$$

Bu işlemler göz önüne alındığında, $\left(\chi(\mathbf{D}^n), +_\chi, \cdot_\chi\right)$ cümlesi $(\mathbf{D}, +, \cdot)$ üzerinde bir modül oluşturur. Kolaylık için, $+_\chi$ ve $\cdot_\chi$ işlemleri yerine sırasıyla $+$ ve $\cdot$ işlemlerini kullanacağız. Şimdi, $\overline{\xi} = \xi + \varepsilon\xi^0 \in C\left(\overline{U} \subseteq \mathbf{D}^n, \mathbf{D}\right)$ dual değerli analitik foksiyonunu ele alalım. Bu durumda,

$$\overline{X}\left[\overline{\xi}\right] = X[\xi] + \varepsilon\left(X\left[\xi^0\right] + X^*[\xi]\right) \tag{4.2.2}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona $\overline{\xi}$ dual analitik fonksiyonunun $\overline{X}$ dual vektör alanı yönündeki türevi denir. Burada,

$$X[\xi] = \nabla\xi\cdot X,\ X\left[\xi^0\right] = \nabla\xi^0\cdot X \text{ ve } X^*[\xi] = \nabla\xi\cdot X^*$$

biçimindedir. Şimdi, bu tanımı detaylıca inceleyelim. (4.2.2) denklemi açılırsa,

$$\begin{aligned}\overline{X}\left[\overline{\xi}\right] &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\xi}{\partial x_i}a_i + \varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^*\left(\xi_{x_ix_j}a_i + \xi_{x_i}a_{i_{x_j}}\right) + \xi_{x_i}\widetilde{a}_i + a_i\widetilde{\xi}_{x_i}\right)\right]\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\xi}{\partial x_i}a_i + \varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^*\frac{\partial\left(\frac{\partial\xi}{\partial x_i}a_i\right)}{\partial x_j} + \xi_{x_i}\widetilde{a}_i + a_i\widetilde{\xi}_{x_i}\right)\right]\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

denklemi elde edilir. (4.2.3) denkleminden açıktır ki $\overline{X}\left[\overline{\xi}\right]$ fonksiyonu dual analitik bir fonksiyondur. Bu durumda, $\overline{X} : C\left(\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n,\mathbf{D}\right)\to C\left(\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n,\mathbf{D}\right)$ dual vektör alanını aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

$$\overline{X}\left[\overline{\xi}\right] = X[\xi] + \varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^*\frac{\partial\left(X[\xi]\right)}{\partial x_j} + X\left[\widetilde{\xi}\right] + \widetilde{X}[\xi]\right). \tag{4.2.4}$$

Burada,

$$X[\xi] = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\xi}{\partial x_i}a_i,\ X\left[\widetilde{\xi}\right] = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\widetilde{\xi}}{\partial x_i}a_i \text{ ve } \widetilde{X}[\xi] = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\xi}{\partial x_i}\widetilde{a}_i$$

şeklindedir. (4.2.4) eşitliğinin $\overline{p}\in\mathbf{D}^n$ dual noktasındaki değeri

$$\begin{aligned}\left(\overline{X}\left[\overline{\xi}\right]\right)(\overline{p}) &= X_{\widetilde{p}}[\xi] + \varepsilon\left(X_{\widetilde{p}}\left[\xi^0\right] + X^*_{\widetilde{p}}[\xi]\right)\\ &= X_{\widetilde{p}}[\xi] + \varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^*(\widetilde{p})\frac{\partial\left(X[\xi]\right)}{\partial x_j}(x(\widetilde{p})) + X_{\widetilde{p}}\left[\widetilde{\xi}\right] + \widetilde{X}_{\widetilde{p}}[\xi]\right)\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir.

Sonuç 4.2.1. Eğer $\overline{X} = X + \varepsilon X^*$ bir dual analitik vektör alanı ve $\overline{\xi} = \xi + \varepsilon\xi^0$, $\overline{\mu} = \mu + \varepsilon\mu^0 \in C\left(\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n,\mathbf{D}\right)$ dual değerli analitik fonksiyonlar ise

1) $\overline{X}\left[\overline{\xi}+\overline{\mu}\right]=\overline{X}\left[\overline{\xi}\right]+\overline{X}\left[\overline{\mu}\right],$
2 $\forall\overline{\lambda}\in\mathbf{D}$ için $\overline{X}\left[\overline{\lambda\xi}\right]=\overline{\lambda}\overline{X}\left[\overline{\xi}\right],$
3) $\overline{X}\left[\overline{\xi}\overline{\mu}\right]=\overline{X}\left[\overline{\xi}\right]\overline{\mu}+\overline{\xi}\overline{X}\left[\overline{\mu}\right]$
eşitlikleri sağlanır.

4.3. Dual Vektör Alanlarının Lie Çarpımı

$\overline{X},\overline{Y}\in\chi\left(\mathbf{D}^n\right)$ ve $\overline{\xi}=\xi+\varepsilon\xi^0\in C\left(\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n,\mathbf{D}\right)$ olsun. Bu durumda, $1\leq i\leq n$ için $\overline{a}_i:\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n\to\mathbf{D}$ ve $\overline{b}_i:\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n\to\mathbf{D}$ dual fonksiyonları

$$\begin{aligned}\overline{a}_i\left(\overline{x}\right) &= a_i\left(x\right)+\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^*a_{ix_j}\left(x\right)+\widetilde{a}_i\left(x\right)\right)\\ &= a_i+\varepsilon a_i^0\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\overline{b}_i\left(\overline{x}\right) &= b_i\left(x\right)+\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^*b_{ix_j}\left(x\right)+\widetilde{b}_i\left(x\right)\right)\\ &= b_i+\varepsilon b_i^0\end{aligned}$$

şeklinde dual analitik fonksiyonlar olup $\overline{X}$ ve $\overline{Y}$ dual analitik vektör alanları

$$\overline{X}=\left(a_1,...,a_n\right)+\varepsilon\left(a_1^0,...,a_n^0\right)\text{ ve }\overline{Y}=\left(b_1,...,b_n\right)+\varepsilon\left(b_1^0,...,b_n^0\right)$$

biçimindedir. Yukarıdaki eşitlikler düzenlenirse, dual vektör alanları

$$\overline{X}\left(\overline{x}\right)=X\left(x\right)+\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^*X_{x_j}+\widetilde{X}\left(x\right)\right)$$

ve

$$\overline{Y}\left(\overline{x}\right)=Y\left(x\right)+\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^*Y_{x_j}+\widetilde{Y}\left(x\right)\right)$$

şeklinde elde edildiğini biliyoruz. Bu durumda,

$$\left[\overline{X},\overline{Y}\right]_{\mathbf{D}}:C\left(\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n,\mathbf{D}\right)\to C\left(\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n,\mathbf{D}\right),$$

$$\left[\overline{X},\overline{Y}\right]_{\mathbf{D}}\left(\overline{\xi}\right)=\left[\overline{X},\overline{Y}\right]_{\mathbf{D}}\left[\overline{\xi}\right]=\overline{X}\left[\overline{Y}\left[\overline{\xi}\right]\right]-\overline{Y}\left[\overline{X}\left[\overline{\xi}\right]\right]$$

şeklinde tanımlanan dual fonksiyon (modül) lineer ve Leibniz kurallarını sağlar. Bu dual fonksiyon açılırsa

$$\begin{aligned}\left[\overline{X},\overline{Y}\right]_{\mathbf{D}}\left[\overline{\xi}\right] &= X\left[Y\left[\xi\right]\right]-Y\left[X\left[\xi\right]\right] \\ &+\varepsilon\left(\begin{array}{c}\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^*\left(X\left[Y\left[\xi\right]\right]-Y\left[X\left[\xi\right]\right]\right)_{x_j}+X\left[Y\left[\widetilde{\xi}\right]\right]-Y\left[X\left[\widetilde{\xi}\right]\right] \\ +X\left[\widetilde{Y}\left[\xi\right]\right]-\widetilde{Y}\left[X\left[\xi\right]\right]+\widetilde{X}\left[Y\left[\xi\right]\right]-Y\left[\widetilde{X}\left[\xi\right]\right]\end{array}\right)\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Eğer

$$\begin{aligned}Z\left[\xi\right] &= \left[X,Y\right]\left[\xi\right]=X\left[Y\left[\xi\right]\right]-Y\left[X\left[\xi\right]\right], \\ Z\left[\widetilde{\xi}\right] &= \left[X,Y\right]\left[\widetilde{\xi}\right]=X\left[Y\left[\widetilde{\xi}\right]\right]-Y\left[X\left[\widetilde{\xi}\right]\right]\end{aligned}$$

ve

$$\widetilde{Z}\left[\xi\right]=\left[X,\widetilde{Y}\right]\left[\xi\right]+\left[\widetilde{X},Y\right]\left[\xi\right]=X\left[\widetilde{Y}\left[\xi\right]\right]-\widetilde{Y}\left[X\left[\xi\right]\right]+\widetilde{X}\left[Y\left[\xi\right]\right]-Y\left[\widetilde{X}\left[\xi\right]\right]$$

denilirse, bu takdirde

$$\overline{Z}\left[\overline{\xi}\right]=\left[\overline{X},\overline{Y}\right]_{\mathbf{D}}\left[\overline{\xi}\right]=Z\left[\xi\right]+\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^*\frac{\partial\left(Z\left[\xi\right]\right)}{\partial x_j}+Z\left[\widetilde{\xi}\right]+\widetilde{Z}\left[\xi\right]\right) \tag{4.3.1}$$

şeklinde olup yukarıdaki ifadeler göz önüne alındığında $\overline{p}\in\mathbf{D}^n$ için

$$\left(\overline{Z}\left[\overline{\xi}\right]\right)\left(\overline{p}\right)=Z_{\widetilde{p}}\left[\xi\right]+\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^*\left(\widetilde{p}\right)\frac{\partial\left(Z\left[\xi\right]\right)}{\partial x_j}\left(\widetilde{p}\right)+Z_{\widetilde{p}}\left[\widetilde{\xi}\right]+\widetilde{Z}_{\widetilde{p}}\left[\xi\right]\right)$$

dir. (4.3.1) denkleminden açıkça görülmektedir ki $\left[\overline{X},\overline{Y}\right]_{\mathbf{D}}\left[\overline{\xi}\right]$ dual fonksiyonu bir dual analitik fonksiyondur. Şimdi, bu dual analitik fonksiyonun (modül) lineer ve Leibniz kurallarını sağladığını gösterelim. $\overline{\xi},\overline{\mu}\in C\left(\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n,\mathbf{D}\right)$ ve $\overline{\lambda}\in\mathbf{D}$ olsun. Biliyoruz ki

$$\overline{\xi}\left(\overline{x}\right)+\overline{\mu}\left(\overline{x}\right)=\xi\left(x\right)+\mu\left(x\right)+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^*\left(\frac{\partial\xi}{\partial x_i}+\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\right)+\widetilde{\xi}\left(x\right)+\widetilde{\mu}\left(x\right)\right)$$

biçimindedir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\overline{Z}\left[\overline{\xi}+\overline{\mu}\right] &= Z[\xi+\mu]+\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^*\frac{\partial\left(Z[\xi+\mu]\right)}{\partial x_j}+Z\left[\widetilde{\xi}+\widetilde{\mu}\right]+\widetilde{Z}[\xi+\mu]\right)\\
&= Z[\xi]+\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^*\frac{\partial\left(Z[\xi]\right)}{\partial x_j}+Z\left[\widetilde{\xi}\right]+\widetilde{Z}[\xi]\right)\\
&\quad +Z[\mu]+\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^*\frac{\partial\left(Z[\mu]\right)}{\partial x_j}+Z[\widetilde{\mu}]+\widetilde{Z}[\mu]\right)\\
&= \overline{Z}\left[\overline{\xi}\right]+\overline{Z}[\overline{\mu}]
\end{aligned}$$

dir. Ayrıca, $\overline{\lambda}\in\mathbf{D}$ ve $\overline{\xi}\in C\left(\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n,\mathbf{D}\right)$ için

$$\overline{\lambda}\cdot\overline{\xi}\,(\overline{x})=\lambda\xi\,(x)+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^*\left(\lambda\frac{\partial\xi}{\partial x_i}\right)+\lambda\widetilde{\xi}\,(x)+\lambda^*\xi\,(x)\right)$$

biçiminde ifade edilebileceğini biliyoruz ve böylece, aşağıdaki eşitliği elde etmek mümkündür:

$$\begin{aligned}
\overline{Z}\left[\overline{\lambda\xi}\right] &= Z[\lambda\xi]+\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^*\frac{\partial\left(Z[\lambda\xi]\right)}{\partial x_j}+Z\left[\lambda\widetilde{\xi}+\lambda^*\xi\right]+\widetilde{Z}[\lambda\xi]\right)\\
&= \lambda Z[\xi]+\varepsilon\left(\lambda\sum_{j=1}^{n}x_j^*\frac{\partial\left(Z[\xi]\right)}{\partial x_j}+\lambda Z\left[\widetilde{\xi}\right]+\lambda^*Z[\xi]+\lambda\widetilde{Z}[\xi]\right)\\
&= \left(\lambda+\varepsilon\lambda^*\right)\left(Z[\xi]+\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^*\frac{\partial\left(Z[\xi]\right)}{\partial x_j}+Z\left[\widetilde{\xi}\right]+\widetilde{Z}[\xi]\right)\right)\\
&= \overline{\lambda}\overline{Z}\left[\overline{\xi}\right].
\end{aligned}$$

O halde, $\left[\overline{X},\overline{Y}\right]_{\mathbf{D}}$ dual analitik fonksiyonu (modül) lineerdir. Diğer yandan; $\overline{\xi},\overline{\mu}\in C\left(\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n,\mathbf{D}\right)$ için

$$\overline{\xi}\,(\overline{x})\cdot\overline{\mu}\,(\overline{x})=\xi\,(x)\,\mu\,(x)+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^*\left(\frac{\partial\xi}{\partial x_i}\mu\,(x)+\xi\,(x)\,\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\right)+\xi\,(x)\,\widetilde{\mu}\,(x)+\widetilde{\xi}\,(x)\,\mu\,(x)\right)$$

şeklinde olup

$$\overline{Z}\left[\overline{\xi}\overline{\mu}\right] = Z[\xi\mu]+\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^*\frac{\partial\left(Z[\xi\mu]\right)}{\partial x_j}+Z\left[\xi\widetilde{\mu}+\widetilde{\xi}\mu\right]+\widetilde{Z}[\xi\mu]\right)$$

biçiminde elde edilir. Böylece, yukarıdaki eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
\overline{Z}\left[\overline{\xi}\overline{\mu}\right] &= \left(Z[\xi]+\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^*\frac{\partial (Z[\xi])}{\partial x_j}+Z\left[\widetilde{\xi}\right]+\widetilde{Z}[\xi]\right)\right) \\
&\quad \times\left(\mu(x)+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^*\frac{\partial \mu}{\partial x_i}+\widetilde{\mu}(x)\right)\right) \\
&\quad +\left(\xi(x)+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^*\frac{\partial \xi}{\partial x_i}+\widetilde{\xi}(x)\right)\right) \\
&\quad \times\left(Z[\mu]+\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^*\frac{\partial (Z[\mu])}{\partial x_j}+Z[\widetilde{\mu}]+\widetilde{Z}[\mu]\right)\right) \\
&= \overline{Z}\left[\overline{\xi}\right]\overline{\mu}+\overline{\xi}\overline{Z}[\overline{\mu}]
\end{aligned}
$$

biçiminde bulunur. Sonuç olarak, $\left[\overline{X},\overline{Y}\right]_{\mathbf{D}}:C\left(\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n,\mathbf{D}\right)\to C\left(\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n,\mathbf{D}\right)$,

$$
\left[\overline{X},\overline{Y}\right]_{\mathbf{D}}\left(\overline{\xi}\right)=\overline{X}\left[\overline{Y}\left[\overline{\xi}\right]\right]-\overline{Y}\left[\overline{X}\left[\overline{\xi}\right]\right]
$$

şeklinde tanımlanan dual fonksiyon (modül) lineer ve Leibniz kurallarını sağlar.

Tanım 4.3.1. $\overline{X},\overline{Y}\in\chi(\mathbf{D}^n)$ olsun. Her $\overline{\xi}\in C\left(\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n,\mathbf{D}\right)$ için

$$
\begin{aligned}
\left[\overline{X},\overline{Y}\right]_{\mathbf{D}}\left[\overline{\xi}\right] &= \overline{X}\left[\overline{Y}\left[\overline{\xi}\right]\right]-\overline{Y}\left[\overline{X}\left[\overline{\xi}\right]\right] \\
&= X[Y[\xi]]-Y[X[\xi]]+ \\
&\quad +\varepsilon\left(\begin{array}{c}\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^*\left(X[Y[\xi]]-Y[X[\xi]]\right)_{x_j}+X\left[Y\left[\widetilde{\xi}\right]\right]-Y\left[X\left[\widetilde{\xi}\right]\right] \\ +X\left[\widetilde{Y}[\xi]\right]-\widetilde{Y}[X[\xi]]+\widetilde{X}[Y[\xi]]-Y\left[\widetilde{X}[\xi]\right]\end{array}\right) \\
&= Z[\xi]+\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^*\frac{\partial (Z[\xi])}{\partial x_j}+Z\left[\widetilde{\xi}\right]+\widetilde{Z}[\xi]\right)
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlı $\left[\overline{X},\overline{Y}\right]_{\mathbf{D}}$ dual analitik vektör alanına $\overline{X}$ ve $\overline{Y}$ dual vektör alanlarının dual Lie çarpımı adı verilir.

Teorem 4.3.2. $[,]_{\mathbf{D}}:\chi(\mathbf{D}^n)\times\chi(\mathbf{D}^n)\to\chi(\mathbf{D}^n)$ şeklinde tanımlanan dual fonksiyonu (modül) bilineerdir.

İspat. $\forall\overline{X},\overline{Y},\overline{W}\in\chi(\mathbf{D}^n)$ ve $\forall\overline{\lambda}\in\mathbf{D}$ için

$$
\left[\overline{\lambda}\overline{X}+\overline{Y},\overline{W}\right]_{\mathbf{D}}=\overline{\lambda}\left[\overline{X},\overline{W}\right]_{\mathbf{D}}+\left[\overline{Y},\overline{W}\right]_{\mathbf{D}}
$$

ve

$$\left[\overline{X},\overline{\lambda}\overline{Y}+\overline{W}\right]_{\mathbf{D}}=\overline{\lambda}\left[\overline{X},\overline{Y}\right]_{\mathbf{D}}+\left[\overline{X},\overline{W}\right]_{\mathbf{D}}$$

olduklarını göstermeliyiz. $\forall\overline{\lambda}\in\mathbf{D}$ ve $\forall\overline{\xi}\in C\left(\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^{n},\mathbf{D}\right)$ için

$$\begin{aligned}
\left[\overline{\lambda}\overline{X}+\overline{Y},\overline{W}\right]_{\mathbf{D}}\left[\overline{\xi}\right] &= [\lambda X+Y,W][\xi] \\
&\quad +\varepsilon\begin{pmatrix}\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{*}\left([\lambda X+Y,W][\xi]\right)_{x_j}+[\lambda X+Y,W]\left[\widetilde{\xi}\right] \\ +\left[\lambda X+Y,\widetilde{W}\right][\xi]+\left[\lambda\widetilde{X}+\lambda^{*}X+\widetilde{Y},W\right][\xi]\end{pmatrix} \\
&= \lambda[X,W][\xi]+[Y,W][\xi] \\
&\quad +\varepsilon\begin{pmatrix}\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{*}\left(\lambda[X,W][\xi]+[Y,W][\xi]\right)_{x_j} \\ +\lambda[X,W]\left[\widetilde{\xi}\right]+[Y,W]\left[\widetilde{\xi}\right] \\ +\lambda\left[X,\widetilde{W}\right][\xi]+\left[Y,\widetilde{W}\right][\xi] \\ +\lambda\left[\widetilde{X},W\right][\xi]+\lambda^{*}[X,W][\xi]+\left[\widetilde{Y},W\right][\xi]\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda, yukarıdaki ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned}
&\left[\overline{\lambda}\overline{X}+\overline{Y},\overline{W}\right]_{\mathbf{D}}\left[\overline{\xi}\right] \\
&= (\lambda+\varepsilon\lambda^{*})\left([X,W][\xi]+\varepsilon\begin{pmatrix}\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{*}\left([X,W][\xi]\right)_{x_j} \\ +[X,W]\left[\widetilde{\xi}\right]+\left[X,\widetilde{W}\right][\xi]+\left[\widetilde{X},W\right][\xi]\end{pmatrix}\right) \\
&\quad +[Y,W][\xi]+\varepsilon\begin{pmatrix}\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{*}\left([Y,W][\xi]\right)_{x_j}+[Y,W]\left[\widetilde{\xi}\right] \\ +\left[Y,\widetilde{W}\right][\xi]+\left[\widetilde{Y},W\right][\xi]\end{pmatrix} \\
&= \overline{\lambda}\left[\overline{X},\overline{W}\right]_{\mathbf{D}}\left[\overline{\xi}\right]+\left[\overline{Y},\overline{W}\right]_{\mathbf{D}}\left[\overline{\xi}\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Fonksiyon eşitliği tanımından

$$\left[\overline{\lambda}\overline{X}+\overline{Y},\overline{W}\right]_{\mathbf{D}}=\overline{\lambda}\left[\overline{X},\overline{W}\right]_{\mathbf{D}}+\left[\overline{Y},\overline{W}\right]_{\mathbf{D}}$$

biçiminde bulunur. Benzer hesaplamalar yapılarak aşağıdaki eşitliğin varlığı kolaylıkla elde edilir:

$$\left[\overline{X},\overline{\lambda}\overline{Y}+\overline{W}\right]_{\mathbf{D}}=\overline{\lambda}\left[\overline{X},\overline{Y}\right]_{\mathbf{D}}+\left[\overline{X},\overline{W}\right]_{\mathbf{D}}.$$

O halde, $\left[\overline{X},\overline{Y}\right]_{\mathbf{D}}$ fonksiyonu (modül) bilineerdir. $\square$

Teorem 4.3.3. $\overline{X},\overline{Y}$ ve $\overline{W}\in\chi(\mathbf{D}^n)$ olmak üzere,

1) $\left[\overline{X},\overline{Y}\right]_{\mathbf{D}}=-\left[\overline{Y},\overline{X}\right]_{\mathbf{D}}$,

2) $\left[\overline{X},\left[\overline{Y},\overline{W}\right]_{\mathbf{D}}\right]_{\mathbf{D}}+\left[\overline{Y},\left[\overline{W},\overline{X}\right]_{\mathbf{D}}\right]_{\mathbf{D}}+\left[\overline{W},\left[\overline{X},\overline{Y}\right]_{\mathbf{D}}\right]_{\mathbf{D}}=\overline{0}$ (dual Jakobi özdeşliği)

dir.

İspat. 1) $\overline{\xi}\in C\left(\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n,\mathbf{D}\right)$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\left[\overline{X},\overline{Y}\right]_{\mathbf{D}}\left[\overline{\xi}\right] &= X[Y[\xi]]-Y[X[\xi]]+\\
&\quad+\varepsilon\begin{pmatrix}\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^*\left(X[Y[\xi]]-Y[X[\xi]]\right)_{x_j}\\ +X\left[Y\left[\widetilde{\xi}\right]\right]-Y\left[X\left[\widetilde{\xi}\right]\right]\\ +X\left[\widetilde{Y}[\xi]\right]-\widetilde{Y}[X[\xi]]\\ +\widetilde{X}[Y[\xi]]-Y\left[\widetilde{X}[\xi]\right]\end{pmatrix}\\
&= -\left(Y[X[\xi]]-X[Y[\xi]]\right)+\\
&\quad+\varepsilon\begin{pmatrix}-\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^*\left(\left(Y[X[\xi]]-X[Y[\xi]]\right)\right)_{x_j}\\ -\left(Y\left[X\left[\widetilde{\xi}\right]\right]-X\left[Y\left[\widetilde{\xi}\right]\right]\right)\\ -\left(\widetilde{Y}[X[\xi]]-X\left[\widetilde{Y}[\xi]\right]\right)\\ -\left(Y\left[\widetilde{X}[\xi]\right]-\widetilde{X}[Y[\xi]]\right)\end{pmatrix}\\
&= -\left[\overline{Y},\overline{X}\right]_{\mathbf{D}}\left[\overline{\xi}\right]
\end{aligned}$$

elde edilir ve fonksiyon eşitliği tanımından $\left[\overline{X},\overline{Y}\right]_{\mathbf{D}}=-\left[\overline{Y},\overline{X}\right]_{\mathbf{D}}$ dir.

2) $\forall\overline{\xi}\in C\left(\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n,\mathbf{D}\right)$ için

$$\begin{aligned}
\left[\overline{X},\left[\overline{Y},\overline{W}\right]_{\mathbf{D}}\right]_{\mathbf{D}}\left[\overline{\xi}\right] &= \overline{X}\left[\left[\overline{Y},\overline{W}\right]_{\mathbf{D}}\left[\overline{\xi}\right]\right]-\left[\overline{Y},\overline{W}\right]_{\mathbf{D}}\left[\overline{X}\left[\overline{\xi}\right]\right]\\
&= X[[Y,W][\xi]]+\varepsilon\begin{pmatrix}\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^*\left(X[[Y,W][\xi]]\right)_{x_j}\\ +X\left[[Y,W]\left[\widetilde{\xi}\right]\right]+X\left[\left[Y,\widetilde{W}\right][\xi]\right]\\ +X\left[\left[\widetilde{Y},W\right][\xi]\right]+\widetilde{X}[[Y,W][\xi]]\end{pmatrix}\\
&\quad -[Y,W][X[\xi]]+\varepsilon\begin{pmatrix}-\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^*\left([Y,W][X[\xi]]\right)_{x_j}\\ -[Y,W]\left[X\left[\widetilde{\xi}\right]\right]-[Y,W]\left[\widetilde{X}[\xi]\right]\\ -\left[Y,\widetilde{W}\right][X[\xi]]-\left[\widetilde{Y},W\right][X[\xi]]\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

şeklinde yazıldığını bilyoruz. Diğer yandan,

$$X\left[[Y,W][\xi]\right]-[Y,W]\left[X[\xi]\right]=[X,[Y,W]][\xi]$$

olduğundan ve $\left(\left[\overline{X},\left[\overline{Y},\overline{W}\right]_{\mathbf{D}}\right]_{\mathbf{D}}+\left[\overline{Y},\left[\overline{W},\overline{X}\right]_{\mathbf{D}}\right]_{\mathbf{D}}+\left[\overline{W},\left[\overline{X},\overline{Y}\right]_{\mathbf{D}}\right]_{\mathbf{D}}\right)\left[\overline{\xi}\right]=\mathbf{A}\left[\overline{\xi}\right]$ denilirse, aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\left[\overline{\xi}\right] &= [X,[Y,W]][\xi]+[Y,[W,X]][\xi]+[W,[X,Y]][\xi] \\
&\quad +\varepsilon\left(\begin{array}{c}
\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^{*}\left([X,[Y,W]][\xi]+[Y,[W,X]][\xi]+[W,[X,Y]][\xi]\right)_{x_j} \\
+[X,[Y,W]]\left[\widetilde{\xi}\right]+[Y,[W,X]]\left[\widetilde{\xi}\right]+[W,[X,Y]]\left[\widetilde{\xi}\right] \\
+\left[\widetilde{X},[Y,W]\right][\xi]+\left[Y,\left[W,\widetilde{X}\right]\right][\xi]+\left[W,\left[\widetilde{X},Y\right]\right][\xi] \\
+\left[X,\left[\widetilde{Y},W\right]\right][\xi]+\left[\widetilde{Y},[W,X]\right][\xi]+\left[W,\left[X,\widetilde{Y}\right]\right][\xi] \\
+\left[X,\left[Y,\widetilde{W}\right]\right][\xi]+\left[Y,\left[\widetilde{W},X\right]\right][\xi]+\left[\widetilde{W},[X,Y]\right][\xi]
\end{array}\right) \\
&= 0+\varepsilon 0.
\end{aligned}$$

Böylece,

$$\left[\overline{X},\left[\overline{Y},\overline{W}\right]_{\mathbf{D}}\right]_{\mathbf{D}}+\left[\overline{Y},\left[\overline{W},\overline{X}\right]_{\mathbf{D}}\right]_{\mathbf{D}}+\left[\overline{W},\left[\overline{X},\overline{Y}\right]_{\mathbf{D}}\right]_{\mathbf{D}}=\overline{0}$$

elde edilir. □

4.4. Dual Türev Dönüşümleri

$\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n$ olmak üzere, $\overline{\xi}:\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n\to\mathbf{D}^m,\ \overline{\xi}(\overline{x})=\left(\overline{\xi}_1(\overline{x}),\overline{\xi}_2(\overline{x}),...,\overline{\xi}_m(\overline{x})\right)$ şeklinde tanımlı bir dual analitik fonksiyon olsun. Burada, $\overline{U}=(U\subseteq\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n$ ve $1\leq i\leq m$ için

$$\overline{\xi}_i(\overline{x})=\xi_i(x)+\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^{*}\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}+\widetilde{\xi}(x)\right)$$

biçimindedir. $\overline{p}\in\overline{U}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\overline{\xi}_{*\overline{p}} &: T_{\overline{p}}\mathbf{D}^n\to T_{\overline{\xi}(\overline{p})}\mathbf{D}^m \\
\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}} &\to \overline{\xi}_*\left(\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}\right)=\left(\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}\left[\overline{\xi}_1\right],\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}\left[\overline{\xi}_2\right],...,\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}\left[\overline{\xi}_m\right]\right)|_{\overline{\xi}(\overline{p})}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona $\overline{\xi}$ dual analitik fonksiyonunun $\overline{p}$ noktasındaki türev dönüşümü adı verilir. Yukarıdaki denklem genişletilirse,

$$\begin{aligned}\overline{\xi}_{*\overline{p}}\left(\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}}\right) &= \left(\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[\xi_1], \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[\xi_2], ..., \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[\xi_m]\right) \\ &\quad +\varepsilon\left(\begin{array}{c} p_1^*\left(\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[\xi_{1x_1}], \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[\xi_{2x_1}], ..., \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[\xi_{mx_1}]\right) \\ +...+p_n^*\left(\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[\xi_{1x_n}], \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[\xi_{2x_n}], ..., \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[\xi_{mx_n}]\right) \\ +\left(\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[\widetilde{\xi}_1\right], \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[\widetilde{\xi}_2\right], ..., \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[\widetilde{\xi}_m\right]\right) \\ +\left(\overrightarrow{v^*}_{\widetilde{p}}[\xi_1], \overrightarrow{v^*}_{\widetilde{p}}[\xi_2], ..., \overrightarrow{v^*}_{\widetilde{p}}[\xi_m]\right) \end{array}\right)\end{aligned}$$

şeklinde olup $\left(\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[\xi_1], \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[\xi_2], ..., \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[\xi_m]\right) = \xi_{*\widetilde{p}}\left(\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\right)$ denilirse

$$\overline{\xi}_{*\overline{p}}\left(\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}}\right) = \xi_{*\widetilde{p}}\left(\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\right) + \varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n} p_j^* \xi_{x_{j_{*\widetilde{p}}}}\left(\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\right) + \widetilde{\xi}_{*\widetilde{p}}\left(\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\right) + \xi_{*\widetilde{p}}\left(\overrightarrow{v^*}_{\widetilde{p}}\right)\right)$$

ifadesi elde edilir. Burada, $1 \leq j \leq n$ için

$$\xi_{x_{j_{*\widetilde{p}}}}\left(\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\right) = \left(\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[\xi_{1x_j}\right], \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[\xi_{2x_j}\right], ..., \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[\xi_{mx_j}\right]\right)$$

dir. O halde, $\overline{\xi}_{*\overline{p}}$ fonksiyonu $\overline{p}$ noktasındaki bir dual tanjant vektörünü $\overline{\xi}(\overline{p})$ noktasındaki bir dual tanjant vektörüne dönüştürür. Bu durumda, $\overline{q} = \overline{\xi}(\overline{p})$ olmak üzere,

$$\overline{\xi}_{*\overline{p}}\left(\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}}\right) = \overrightarrow{\widetilde{w}}_{\overline{q}} \in T_{\overline{q}}\mathbf{D}^m$$

şeklindedir. Ayrıca, $\forall \overline{X} \in \chi(\mathbf{D}^n)$ için

$$\begin{aligned}\overline{\xi}_* &: \chi(\mathbf{D}^n) \to \chi(\mathbf{D}^m) \\ \overline{\xi}_*\left(\overline{X}\right) &= \xi_*(X) + \varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^* \left(\xi_*(X)\right)_{x_j} + \widetilde{\xi}_*(X) + \xi_*\left(\widetilde{X}\right)\right)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı bir dual vektör alanıdır. Burada,

$$\begin{aligned}\xi_*(X) &= \left(X[\xi_1], X[\xi_2], ..., X[\xi_m]\right), \\ \widetilde{\xi}_*(X) &= \left(X\left[\widetilde{\xi}_1\right], X\left[\widetilde{\xi}_2\right], ..., X\left[\widetilde{\xi}_m\right]\right), \\ \xi_*\left(\widetilde{X}\right) &= \left(\widetilde{X}[\xi_1], \widetilde{X}[\xi_2], ..., \widetilde{X}[\xi_m]\right)\end{aligned}$$

biçimindedir.

Teorem 4.4.1. $\overline{\xi}:\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n\to\mathbf{D}^m$ dual analitik bir fonksiyon ve $\overline{p}\in\overline{U}$ olsun. Bu durumda, $\overline{\xi}_{*\overline{p}}:T_{\overline{p}}\mathbf{D}^n\to T_{\overline{\xi}(\overline{p})}\mathbf{D}^m$ dual türev dönüşümü (modül) lineerdir.

İspat. $\overline{\xi}:\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n\to\mathbf{D}^m$ bir dual analitik fonksiyon, $\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}},\overrightarrow{\widetilde{w}}_{\overline{p}}\in T_{\overline{p}}\mathbf{D}^n$ ve $\overline{\lambda}\in\mathbf{D}$ olsun. Bu durumda, göstermeliyiz ki

$$\overline{\xi}_{*\overline{p}}\left(\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}}+\overrightarrow{\widetilde{w}}_{\overline{p}}\right)=\overline{\xi}_{*\overline{p}}\left(\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}}\right)+\overline{\xi}_{*\overline{p}}\left(\overrightarrow{\widetilde{w}}_{\overline{p}}\right)$$

ve

$$\overline{\xi}_{*\overline{p}}\left(\overline{\lambda}\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}}\right)=\overline{\lambda}\overline{\xi}_{*\overline{p}}\left(\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}}\right)$$

dir.

$i)$ $\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}},\overrightarrow{\widetilde{w}}_{\overline{p}}\in T_{\overline{p}}\mathbf{D}^n$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\overline{\xi}_{*\overline{p}}\left(\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}}+\overrightarrow{\widetilde{w}}_{\overline{p}}\right) &= \xi_{*\widetilde{p}}\left(\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}+\overrightarrow{w}_{\widetilde{p}}\right)+\\ &\quad+\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}p_j^*\xi_{x_{j_{*\widetilde{p}}}}\left(\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}+\overrightarrow{w}_{\widetilde{p}}\right)+\widetilde{\xi}_{*\widetilde{p}}\left(\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}+\overrightarrow{w}_{\widetilde{p}}\right)+\xi_{*\widetilde{p}}\left(\overrightarrow{v^*}_{\widetilde{p}}+\overrightarrow{w^*}_{\widetilde{p}}\right)\right)\\ &= \overline{\xi}_{*\overline{p}}\left(\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}}\right)+\overline{\xi}_{*\overline{p}}\left(\overrightarrow{\widetilde{w}}_{\overline{p}}\right)\end{aligned}$$

dir.

$ii)$ $\overline{\lambda}=\lambda+\varepsilon\lambda^*\in\mathbf{D}$ için

$$\begin{aligned}\overline{\xi}_{*\overline{p}}\left(\overline{\lambda}\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}}\right) &= \xi_{*\widetilde{p}}\left(\lambda\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\right)+\\ &\quad+\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}p_j^*\xi_{x_{j_{*\widetilde{p}}}}\left(\lambda\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\right)+\widetilde{\xi}_{*\widetilde{p}}\left(\lambda\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\right)+\xi_{*\widetilde{p}}\left(\lambda\overrightarrow{v^*}_{\widetilde{p}}+\lambda^*\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\right)\right)\\ &= \lambda\xi_{*\widetilde{p}}\left(\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\right)+\\ &\quad+\varepsilon\left(\lambda\sum_{j=1}^{n}p_j^*\xi_{x_{j_{*\widetilde{p}}}}\left(\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\right)+\lambda\widetilde{\xi}_{*\widetilde{p}}\left(\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\right)+\lambda\xi_{*\widetilde{p}}\left(\overrightarrow{v^*}_{\widetilde{p}}\right)+\lambda^*\xi_{*\widetilde{p}}\left(\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\right)\right)\\ &= \overline{\lambda}\overline{\xi}_{*\overline{p}}\left(\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}}\right)\end{aligned}$$

dir. (i) ve (ii) öncüllerinden açıktır ki $\overline{\xi}_{*\overline{p}}$ dönüşümü (modül) lineerdir. □

Şimdi, (modül) lineer dönüşümüne verilen bazlara göre bir matris karşılık gelir. O halde, $\overline{\xi}_{*\overline{p}}$ lineer dönüşümüne $T_{\overline{p}}\mathbf{D}^n$ nin $\left\{\overrightarrow{\overline{e}}_{1\overline{p}},\overrightarrow{\overline{e}}_{2\overline{p}},...,\overrightarrow{\overline{e}}_{n\overline{p}}\right\}$ bazına ve $T_{\overline{q}}\mathbf{D}^m$ nin

$\left\{\overrightarrow{E}_{1\overline{q}},\overrightarrow{E}_{2\overline{q}},...,\overrightarrow{E}_{m\overline{q}}\right\}$ bazına göre karşılık gelen matrisi bulalım. $1\leq i\leq n$ için

$$\begin{aligned}
\overline{\xi}_{*\overline{p}}(\overrightarrow{e}_{i\overline{p}}) &= \left(\overrightarrow{e}_{i\overline{p}}\left[\overline{\xi}_1\right],\overrightarrow{e}_{i\overline{p}}\left[\overline{\xi}_2\right],...,\overrightarrow{e}_{i\overline{p}}\left[\overline{\xi}_m\right]\right)|_{\overline{q}} \\
&= \begin{pmatrix} \overrightarrow{e}_{i\widetilde{p}}[\xi_1]+\varepsilon\left(\sum\limits_{j=1}^{n}p_j^*\overrightarrow{e}_{i\widetilde{p}}\left[\xi_{1x_j}\right]+\overrightarrow{e}_{i\widetilde{p}}\left[\widetilde{\xi}_1\right]\right),..., \\ \overrightarrow{e}_{i\widetilde{p}}[\xi_m]+\varepsilon\left(\sum\limits_{j=1}^{n}p_j^*\overrightarrow{e}_{i\widetilde{p}}\left[\xi_{mx_j}\right]+\overrightarrow{e}_{i\widetilde{p}}\left[\widetilde{\xi}_m\right]\right)\end{pmatrix}|_{\overline{q}} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial\xi_1}{\partial x_i}(x(\widetilde{p}))+\varepsilon\left(\sum\limits_{j=1}^{n}p_j^*\frac{\partial^2\xi_1}{\partial x_j\partial x_i}(x(\widetilde{p}))+\frac{\partial\widetilde{\xi}_1}{\partial x_i}(x(\widetilde{p}))\right),..., \\ \frac{\partial\xi_m}{\partial x_i}(x(\widetilde{p}))+\varepsilon\left(\sum\limits_{j=1}^{n}p_j^*\frac{\partial^2\xi_m}{\partial x_j\partial x_i}(x(\widetilde{p}))+\frac{\partial\widetilde{\xi}_m}{\partial x_i}(x(\widetilde{p}))\right)\end{pmatrix}|_{\overline{q}} \\
&= \left(\frac{\partial\xi_1}{\partial x_i}(\widetilde{p})+\varepsilon\frac{\partial\xi_1^0}{\partial x_i}(\widetilde{p}),\frac{\partial\xi_2}{\partial x_i}(\widetilde{p})+\varepsilon\frac{\partial\xi_2^0}{\partial x_i}(\widetilde{p}),...,\frac{\partial\xi_m}{\partial x_i}(\widetilde{p})+\varepsilon\frac{\partial\xi_m^0}{\partial x_i}(\widetilde{p})\right)|_{\overline{q}} \\
&= \frac{\partial\overline{\xi}_1}{\partial\overline{x}_i}(\overline{p})\overrightarrow{E}_{1\overline{q}}+\frac{\partial\overline{\xi}_2}{\partial\overline{x}_i}(\overline{p})\overrightarrow{E}_{2\overline{q}}+...+\frac{\partial\overline{\xi}_m}{\partial\overline{x}_i}(\overline{p})\overrightarrow{E}_{m\overline{q}}
\end{aligned}$$

şeklinde olup karşılık gelen matris

$$\begin{aligned}
J\left(\overline{\xi},\overline{p}\right) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}|_{\widetilde{p}} & \frac{\partial\xi_1}{\partial x_2}|_{\widetilde{p}} & \cdots & \frac{\partial\xi_1}{\partial x_n}|_{\widetilde{p}} \\ \frac{\partial\xi_2}{\partial x_1}|_{\widetilde{p}} & \frac{\partial\xi_2}{\partial x_2}|_{\widetilde{p}} & \cdots & \frac{\partial\xi_2}{\partial x_n}|_{\widetilde{p}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial\xi_m}{\partial x_1}|_{\widetilde{p}} & \frac{\partial\xi_m}{\partial x_2}|_{\widetilde{p}} & \cdots & \frac{\partial\xi_m}{\partial x_n}|_{\widetilde{p}}\end{bmatrix}+\varepsilon\begin{bmatrix} \frac{\partial\xi_1^0}{\partial x_1}|_{\widetilde{p}} & \frac{\partial\xi_1^0}{\partial x_2}|_{\widetilde{p}} & \cdots & \frac{\partial\xi_1^0}{\partial x_n}|_{\widetilde{p}} \\ \frac{\partial\xi_2^0}{\partial x_1}|_{\widetilde{p}} & \frac{\partial\xi_2^0}{\partial x_2}|_{\widetilde{p}} & \cdots & \frac{\partial\xi_2^0}{\partial x_n}|_{\widetilde{p}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial\xi_m^0}{\partial x_1}|_{\widetilde{p}} & \frac{\partial\xi_m^0}{\partial x_2}|_{\widetilde{p}} & \cdots & \frac{\partial\xi_m^0}{\partial x_n}|_{\widetilde{p}}\end{bmatrix} \\
&= J(\xi,\widetilde{p})+\varepsilon J\left(\xi^0,\widetilde{p}\right) \qquad (4.4.1)
\end{aligned}$$

biçimindedir ve bu matrise dual Jakobiyen matris adı verilir. Ayrıca, dikkat edilirse (4.4.1) denkleminin

$$J\left(\overline{\xi},\overline{p}\right)=J(\xi,\widetilde{p})+\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}p_j^*J\left(\xi_{x_j},\widetilde{p}\right)+J\left(\widetilde{\xi},\widetilde{p}\right)\right)$$

şeklinde de yazılabileceği kolaylıkla görülmektedir. Diğer yandan, dual türev dönüşümü göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\overline{\xi}_{*\overline{p}} &: T_{\overline{p}}\mathbf{D}^n\rightarrow T_{\overline{\xi}(\overline{p})}\mathbf{D}^m \\
\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}} &\rightarrow \overline{\xi}_*\left(\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}\right)=J\left(\overline{\xi},\overline{p}\right)\cdot\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}
\end{aligned}$$

şeklinde olup

$$\overline{\xi}_*\left(\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}\right)=J(\xi,\widetilde{p})\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}+\varepsilon\left(J\left(\xi^0,\widetilde{p}\right)\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}+J(\xi,\widetilde{p})\overrightarrow{v^*}_{\widetilde{p}}\right)$$

biçimindedir [36].

4.5. D-modül Eğrisi

Tanım 4.5.1.

$$\begin{aligned}\overline{\sigma} &: \bar{I}\subseteq\mathbf{D}\to\mathbf{D}^n\\ \overline{\sigma}(\bar{t}) &= \left(\overline{\sigma}_1(\bar{t}),\overline{\sigma}_2(\bar{t}),...,\overline{\sigma}_n(\bar{t})\right)\\ &= \left(\sigma_1(t,t^*)+\varepsilon\sigma_1^0(t,t^*),...,\sigma_n(t,t^*)+\varepsilon\sigma_n^0(t,t^*)\right)\\ &= \sigma(t,t^*)+\varepsilon\sigma^0(t,t^*)\end{aligned}$$

dual fonksiyonunu ele alalım. Burada, $\bar{I}=(I\subseteq\mathbb{R})\times\mathbb{R}$ ve $1\leq i\leq n$ için σ_i ile σ_i^0 fonksiyonları iki değişkenli reel fonksiyonlardır. Aşağıdaki iki şart sağlanırsa $\overline{\sigma}$ fonksiyonu **D**-modül eğrisi olarak adlandırılır:

$i)$ $\overline{\sigma}:\bar{I}\subseteq\mathbf{D}\to\mathbf{D}^n$ fonksiyonu dual analitik bir fonksiyondur. Yani, $1\leq i\leq n$ için

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}_i &: \bar{I}\subseteq\mathbf{D}\to\mathbf{D}\\ \overline{\sigma}_i(\bar{t}) &= \sigma_i(t,t^*)+\varepsilon\sigma_i^0(t,t^*)\\ &= \sigma_i(t)+\varepsilon\left(t^*\sigma_i'(t)+\widetilde{\sigma}_i(t)\right)\end{aligned}$$

biçimindedir. Burada, $1\leq i\leq n$ için σ_i ile $\widetilde{\sigma}_i$ fonksiyonları C^∞-sınıfındandır. O halde,

$$\begin{aligned}\overline{\sigma} &: \bar{I}\subseteq\mathbf{D}\to\mathbf{D}^n\\ \overline{\sigma}(\bar{t}) &= (\sigma_1(t),...,\sigma_n(t))+\varepsilon\left(t^*\left(\sigma_1'(t),...,\sigma_n'(t)\right)+\left(\widetilde{\sigma}_1(t),...,\widetilde{\sigma}_n(t)\right)\right)\\ &= \sigma(t)+\varepsilon\left(t^*\sigma'(t)+\widetilde{\sigma}(t)\right)\end{aligned}$$

şeklindedir.

ii) $\forall t \in I \subseteq \mathbb{R}$ için $\exists \sigma_i'(t) \neq 0$ olmalıdır $(1 \leq i \leq n)$.

Açıklama 10. $\overline{\sigma} : \bar{I} \subseteq \mathbf{D} \to \mathbf{D}^n,\ \overline{\sigma}(\bar{t}) = \sigma(t) + \varepsilon(t^*\sigma'(t) + \widetilde{\sigma}(t))$, **D**-modül eğrisi bu çalışma boyunca kısalık için **D**-eğrisi (veya eğri) olarak adlandırılacaktır.

Teorem 4.5.2. $\overline{\sigma} : \bar{I} \subseteq \mathbf{D} \to \mathbf{D}^n,\ \overline{\sigma}(\bar{t}) = \sigma(t) + \varepsilon(t^*\sigma'(t) + \widetilde{\sigma}(t))$ bir **D**-eğrisi olsun. Bu durumda, $\forall \bar{t} \in \bar{I}$ için

$$\begin{array}{rcl} \overline{\sigma}_{*\bar{t}} & : & T_{\bar{t}}\mathbf{D} \to T_{\overline{\sigma}(\bar{t})}\mathbf{D}^n \\ \overrightarrow{\widetilde{v}}_{\bar{t}} & \to & \overline{\sigma}_{*\bar{t}}\left(\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\bar{t}}\right) = \left(\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\bar{t}}[\overline{\sigma}_1], \overrightarrow{\widetilde{v}}_{\bar{t}}[\overline{\sigma}_2], ..., \overrightarrow{\widetilde{v}}_{\bar{t}}[\overline{\sigma}_n]\right) \end{array}$$

dönüşümü birebirdir.

İspat. $\overline{\sigma} : \bar{I} \subseteq \mathbf{D} \to \mathbf{D}^n,\ \overline{\sigma}(\bar{t}) = \sigma(t) + \varepsilon(t^*\sigma'(t) + \widetilde{\sigma}(t))$ bir **D**-eğrisi ve $\forall \bar{t} \in \bar{I}$ için $\overline{\sigma}_{*\bar{t}}\left(\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\bar{t}}\right) = \left(\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\bar{t}}[\overline{\sigma}_1], \overrightarrow{\widetilde{v}}_{\bar{t}}[\overline{\sigma}_2], ..., \overrightarrow{\widetilde{v}}_{\bar{t}}[\overline{\sigma}_n]\right)$ şeklinde tanımlanan $\overline{\sigma}_{*\bar{t}} : T_{\bar{t}}\mathbf{D} \to T_{\overline{\sigma}(\bar{t})}\mathbf{D}^n$ dönüşümünü ele alalım. Yukarıda tanımı verilen dual türev dönüşümü ile $\forall t \in I \subseteq \mathbb{R}$ için $\exists \sigma_i'(t) \neq 0$ olduğu göz önüne alınırsa, $\forall \overrightarrow{\widetilde{v}}_{\bar{t}}, \overrightarrow{\widetilde{w}}_{\bar{t}} \in T_{\bar{t}}\mathbf{D}$ için $\overline{\sigma}_{*\bar{t}}\left(\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\bar{t}}\right) = \overline{\sigma}_{*\bar{t}}\left(\overrightarrow{\widetilde{w}}_{\bar{t}}\right)$ ise $\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\bar{t}} = \overrightarrow{\widetilde{w}}_{\bar{t}}$ elde edilir öyle ki $\overline{\sigma}_{*\bar{t}}$ dönüşümü birebirdir. $\square$

Tanım 4.5.3. $\overline{\sigma} : \bar{I} \subseteq \mathbf{D} \to \mathbf{D}^n,\ \overline{\sigma}(\bar{t}) = \sigma(t) + \varepsilon(t^*\sigma'(t) + \widetilde{\sigma}(t))$ bir **D**-eğrisinin $\overline{\sigma}(\bar{t})$ noktasındaki hız vektörü

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{\sigma}}{d\bar{t}} &= \overset{\bullet}{\overline{\sigma}}(\bar{t}) \\ &= \lim_{\bar{k}\to\bar{0}} \frac{\overline{\sigma}\left(\bar{t}+\bar{k}\right) - \overline{\sigma}(\bar{t})}{\bar{k}} \\ &= \left(\lim_{\bar{k}\to\bar{0}} \frac{\overline{\sigma}_1\left(\bar{t}+\bar{k}\right) - \overline{\sigma}_1(\bar{t})}{\bar{k}}, ..., \lim_{\bar{k}\to\bar{0}} \frac{\overline{\sigma}_n\left(\bar{t}+\bar{k}\right) - \overline{\sigma}_n(\bar{t})}{\bar{k}}\right) \\ &= \left(\frac{d\overline{\sigma}_1}{d\bar{t}}(\bar{t}), ..., \frac{d\overline{\sigma}_n}{d\bar{t}}(\bar{t})\right) \\ &= \sigma'(t) + \varepsilon\left(t^*\sigma''(t) + \widetilde{\sigma}'(t)\right) \end{aligned}$$

şeklinde olup bu hız vektörünün dual normu

$$\begin{aligned} \left\|\overset{\bullet}{\overline{\sigma}}(\bar{t})\right\|_{\mathbf{D}} &= \sqrt{\left\langle \overset{\bullet}{\overline{\sigma}}(\bar{t}), \overset{\bullet}{\overline{\sigma}}(\bar{t}) \right\rangle_{\mathbf{D}}} \\ &= \left\|\sigma'(t)\right\| + \varepsilon\left(t^* \frac{\langle \sigma'(t), \sigma''(t)\rangle}{\|\sigma'(t)\|} + \frac{\langle \sigma'(t), \widetilde{\sigma}'(t)\rangle}{\|\sigma'(t)\|}\right) \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Burada dikkat edilirse,

$$\frac{d}{dt}\left(\left\|\sigma'(t)\right\|\right)=\frac{\langle\sigma'(t),\sigma''(t)\rangle}{\|\sigma'(t)\|}$$

şeklinde olup bu hız vektörünün dual normu

$$\left\|\overset{\bullet}{\overline{\sigma}}(\bar{t})\right\|_{\mathbf{D}}=\|\sigma'(t)\|+\varepsilon\left(t^{*}\frac{d}{dt}\left(\left\|\sigma'(t)\right\|\right)+\frac{\langle\sigma'(t),\widetilde{\sigma}'(t)\rangle}{\|\sigma'(t)\|}\right)$$

biçiminde yazılabilir.

Sonuç 4.5.1. $\overline{\sigma}:\bar{I}\subseteq\mathbf{D}\to\mathbf{D}^{n}$ bir **D**-eğrisi olsun. Eğer

$$\frac{d}{d\bar{t}}\left(\left\langle\overset{\bullet}{\overline{\sigma}}(\bar{t}),\overset{\bullet}{\overline{\sigma}}(\bar{t})\right\rangle_{\mathbf{D}}\right)=\bar{0}$$

ise $\left\langle\overset{\bullet}{\overline{\sigma}}(\bar{t}),\overset{\bullet}{\overline{\sigma}}(\bar{t})\right\rangle_{\mathbf{D}}=a+\varepsilon a^{*}\ \ (a>0)$ bir dual sabit olup bu eğrinin hız vektörünün normu

$$\left\|\overset{\bullet}{\overline{\sigma}}(\bar{t})\right\|_{\mathbf{D}}=\sqrt{a}+\varepsilon\frac{a^{*}}{2\sqrt{a}}$$

sabittir.

Tanım 4.5.4. $\overline{\sigma}:\bar{I}\subseteq\mathbf{D}\to\mathbf{D}^{n}$ bir **D**-eğrisi olmak üzere,

$$\left\|\overset{\bullet}{\overline{\sigma}}(\bar{t})\right\|_{\mathbf{D}}=1+0\varepsilon$$

ise bu eğriye birim hızlı **D**-eğrisi adı verilir. Bu durumda, $\left\|\overset{\bullet}{\overline{\sigma}}(\bar{t})\right\|_{\mathbf{D}}=1+0\varepsilon$ ise

$$\left\|\overset{\bullet}{\overline{\sigma}}(\bar{t})\right\|_{\mathbf{D}}=\|\sigma'(t)\|+\varepsilon\left(t^{*}\frac{d}{dt}\left(\left\|\sigma'(t)\right\|\right)+\frac{\langle\sigma'(t),\widetilde{\sigma}'(t)\rangle}{\|\sigma'(t)\|}\right)=1+0\varepsilon$$

şeklindedir. O halde; $\overline{\sigma}$, **D**-eğrisi birim hızlıdır. $\Longleftrightarrow\|\sigma'(t)\|=1$ ve $\langle\sigma'(t),\widetilde{\sigma}'(t)\rangle=0$ dır.

Teorem 4.5.5. $\overline{\sigma}:\bar{I}\subseteq\mathbf{D}\to\mathbf{D}^{n}$ bir **D**-eğrisi ve $\overline{\xi}\in C\left(\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^{n},\mathbf{D}\right)$ olsun. Bu durumda,

$$\overset{\bullet}{\overline{\sigma}}(\bar{t})\left[\overline{\xi}\right]=\frac{d\left(\overline{\xi}\circ\overline{\sigma}\right)}{d\bar{t}}$$

şeklindedir.

İspat. $\overline{\sigma}:\overline{I}\subseteq\mathbf{D}\to\mathbf{D}^n,\ \ \overline{\sigma}(\overline{t})=\sigma(t)+\varepsilon\left(t^*\sigma'(t)+\widetilde{\sigma}(t)\right)$ bir **D**-eğrisi ve

$$\begin{aligned}\overline{\xi}\ &:\ \overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n\to\mathbf{D}\\ \overline{\xi}(\overline{x})&=\xi(x)+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^*\frac{\partial\xi}{\partial x_i}+\widetilde{\xi}(x)\right)\end{aligned}$$

bir dual analitik fonksiyon olsun. Dual yöne göre türev tanımından aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\overset{\bullet}{\overline{\sigma}}(\overline{t})\left[\overline{\xi}\right]=\sigma'(t)[\xi]+\varepsilon\begin{pmatrix}t^*\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma'(t)[\xi_{x_i}]\,\sigma_i'(t)+\sigma''(t)[\xi]\right)\\ +\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma'(t)[\xi_{x_i}]\,\widetilde{\sigma}_i(t)\\ +\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_{x_i}\circ\sigma)(t)\,\widetilde{\sigma}_i'(t)+\sigma'(t)\left[\widetilde{\xi}\right]\end{pmatrix}.$$

Diğer yandan, $\sigma'(t)[\xi]=(\xi\circ\sigma)'(t)$, $\sigma'(t)\left[\widetilde{\xi}\right]=\left(\widetilde{\xi}\circ\sigma\right)'(t)$ ve

$$\sigma''(t)[\xi]=(\xi_{x_1}\circ\sigma)(t)\,\sigma_1''(t)+...+(\xi_{x_n}\circ\sigma)(t)\,\sigma_n''(t)$$

biçiminde olduğundan

$$\begin{aligned}\overset{\bullet}{\overline{\sigma}}(\overline{t})\left[\overline{\xi}\right]&=(\xi\circ\sigma)'(t)+\varepsilon\begin{pmatrix}t^*(\xi\circ\sigma)''(t)+\dfrac{d}{dt}\left(\left\langle\widetilde{\sigma}(t),\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_{x_i}\circ\sigma)(t)\,\overrightarrow{e}_i\right\rangle\right)\\ +\left(\widetilde{\xi}\circ\sigma\right)'(t)\end{pmatrix}\\ &=\frac{d\left(\overline{\xi}\circ\overline{\sigma}\right)}{d\overline{t}}\end{aligned}$$

elde edilir. □

Tanım 4.5.6. $\overline{\sigma}:\overline{I}\subseteq\mathbf{D}\to\mathbf{D}^n$ bir **D**-eğrisi ve $\overline{J}\subseteq\mathbf{D}$ bir dual açık cümle olsun. Eğer

$$\begin{aligned}\overline{k}\ &:\ \overline{J}\to\overline{I}\\ \overline{k}(\overline{s})&=k(s)+\varepsilon\left(s^*k'(s)+\widetilde{k}(s)\right)\quad\left(k'(s)\neq0\right)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı bir dual analitik fonksiyon olmak üzere, $\overline{k}^{-1}$ var ve dual analitik bir fonksiyon ise $\overline{k}$ fonksiyonuna $\overline{\sigma}$, **D**-eğrisinin bir parametre dönüşümü denir. Buna göre,

$$\begin{aligned}\overline{\beta} &= \overline{\sigma}\circ\overline{k}:\overline{J}\subseteq\mathbf{D}\to\mathbf{D}^n\\ \overline{\beta}\left(\overline{s}\right) &= \overline{\sigma}\left(\overline{k}\left(\overline{s}\right)\right)=\left(\overline{\sigma}_1\left(\overline{k}\left(\overline{s}\right)\right),...,\overline{\sigma}_n\left(\overline{k}\left(\overline{s}\right)\right)\right)\end{aligned}$$

D-eğrisine $\overline{\sigma}$, **D**-eğrisinin parametre dönüşümü ile yeniden parametrelendirilmişi denir. Burada, $1\leq i\leq n$ için

$$\overline{\sigma}_i\left(\overline{k}\left(\overline{s}\right)\right)=\left(\sigma_i\circ k\right)(s)+\varepsilon\left(\begin{array}{c} s^*\left(\sigma_i\circ k\right)'(s)+\widetilde{k}(s)\left(\sigma_i'\circ k\right)(s)\\ +\left(\widetilde{\sigma}_i\circ k\right)(s)\end{array}\right)$$

şeklinde tanımlıdır.

Teorem 4.5.7. $\overline{\sigma}$, $\mathbf{D}^n$ uzayında bir **D**-eğrisi ve $\overline{\beta}$, $\overline{\sigma}$ eğrisinin $\overline{k}$ ile yeniden parametrelendirilmişi olsun. Bu durumda,

$$\frac{d\overline{\beta}}{d\overline{s}}=\frac{d\overline{k}}{d\overline{s}}\left(\overline{s}\right)\frac{d\overline{\sigma}}{d\overline{t}}\left(\overline{k}\left(\overline{s}\right)\right)$$

dir.

İspat. $\overline{\sigma}:\overline{I}\subseteq\mathbf{D}\to\mathbf{D}^n$, $\overline{\sigma}\left(\overline{t}\right)=\sigma(t)+\varepsilon\left(t^*\sigma'(t)+\widetilde{\sigma}(t)\right)$ bir **D**-eğrisi ve

$$\begin{aligned}\overline{k} &: \overline{J}\to\overline{I}\\ \overline{k}\left(\overline{s}\right) &= k(s)+\varepsilon\left(s^*k'(s)+\widetilde{k}(s)\right)=t+\varepsilon t^*=\overline{t}\end{aligned}$$

olsun. Burada, $k'(s)\neq 0$ dır. Bu durumda,

$$\overline{\beta}\left(\overline{s}\right) = \overline{\sigma}\left(\overline{k}\left(\overline{s}\right)\right)=\left(\overline{\sigma}_1\left(\overline{k}\left(\overline{s}\right)\right),...,\overline{\sigma}_n\left(\overline{k}\left(\overline{s}\right)\right)\right)$$

biçiminde olup

$$\begin{aligned}\overline{\beta}\left(\overline{s}\right) &= \left(\left(\sigma_1\circ k\right)(s),...,\left(\sigma_n\circ k\right)(s)\right)+\varepsilon\left(\begin{array}{c} s^*\left(\left(\sigma_1\circ k\right)(s),...,\left(\sigma_n\circ k\right)(s)\right)'\\ \left(\begin{array}{c}\widetilde{k}(s)\left(\sigma_1'\circ k\right)(s)+\left(\widetilde{\sigma}_1\circ k\right)(s),...,\\ \widetilde{k}(s)\left(\sigma_n'\circ k\right)(s)+\left(\widetilde{\sigma}_n\circ k\right)(s)\end{array}\right)\end{array}\right)\\ &= \beta(s)+\varepsilon\left(s^*\beta'(s)+\widetilde{\beta}(s)\right)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı bir $\mathbf{D}$-eğrisidir. Burada, $\overline{\beta} = \overline{\sigma} \circ \overline{k} : \overline{J} \subseteq \mathbf{D} \to \mathbf{D}^n$ biçimindedir. Bu eğrinin $\overline{s}$ dual değişkene göre türevi

$$\begin{aligned}
\frac{d\overline{\beta}}{d\overline{s}} &= \left(k'(s)\sigma_1'(k(s)),...,k'(s)\sigma_n'(k(s))\right) \\
&\quad +\varepsilon \left(\begin{array}{c} s^* \left(\begin{array}{c} k''(s)\sigma_1'(k(s)) + (k'(s))^2 \sigma_1''(k(s)),..., \\ k''(s)\sigma_n'(k(s)) + (k'(s))^2 \sigma_n''(k(s)) \end{array} \right) \\ + \left(\begin{array}{c} \widetilde{k}'(s)\sigma_1'(k(s)) + \widetilde{k}(s)k'(s)\sigma_1''(k(s)) + k'(s)\widetilde{\sigma}_1'(k(s)),..., \\ \widetilde{k}'(s)\sigma_n'(k(s)) + \widetilde{k}(s)k'(s)\sigma_n''(k(s)) + k'(s)\widetilde{\sigma}_n'(k(s)) \end{array} \right) \end{array} \right)
\end{aligned}$$

biçiminde olup bu ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\frac{d\overline{\beta}}{d\overline{s}} &= \left(k'(s) + \varepsilon\left(s^* k''(s) + \widetilde{k}'(s)\right)\right) \\
&\quad \times \left(\sigma'(k(s)) + \varepsilon\left(s^* k'(s)\sigma''(k(s)) + \widetilde{k}(s)\sigma''(k(s)) + \widetilde{\sigma}'(k(s))\right)\right) \\
&= \frac{d\overline{k}}{d\overline{s}}(\overline{s}) \frac{d\overline{\sigma}}{d\overline{t}}\left(\overline{k}(\overline{s})\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 4.5.8. $\overline{\sigma} : \overline{I} \subseteq \mathbf{D} \to \mathbf{D}^n$ bir $\mathbf{D}$-eğrisi ve $\overline{\beta}$, $\overline{\sigma}$ eğrisinin $\overline{k}$ ile yeniden parametrelendirilmişi olsun. $\overline{k}(\overline{s}_0) = \overline{t}_0$ olmak üzere, $\overline{\sigma}$ eğrisinin $\overline{t}_0$ dual noktasındaki birim dual teğet vektör alanı $\overline{\eta}(\overline{t}_0)$, $\overline{\beta}$ eğrisinin $\overline{s}_0$ dual noktasındaki birim dual teğet vektör alanı $\overline{S}(\overline{s}_0)$ ile gösterilirse

$$\overline{S}(\overline{s}_0) = \overline{\eta}(\overline{t}_0) \text{ veya } \overline{S}(\overline{s}_0) = -\overline{\eta}(\overline{t}_0)$$

dir.

İspat. $\overline{\sigma} : \overline{I} \subseteq \mathbf{D} \to \mathbf{D}^n$, $\overline{\sigma}(\overline{t}) = \sigma(t) + \varepsilon(t^*\sigma'(t) + \widetilde{\sigma}(t))$ bir $\mathbf{D}$-eğrisi ve $\overline{k} : \overline{J} \to \overline{I}$, $\overline{k}(\overline{s}) = k(s) + \varepsilon\left(s^* k'(s) + \widetilde{k}(s)\right) = t + \varepsilon t^* = \overline{t}$ olsun. Burada, $k'(s) \neq 0$ dır. Yukarıdaki teoremden

$$\begin{aligned}
\overline{\beta} &= \overline{\sigma} \circ \overline{k} : \overline{J} \subseteq \mathbf{D} \to \mathbf{D}^n \\
\overline{\beta}(\overline{s}) &= \overline{\sigma}\left(\overline{k}(\overline{s})\right) = \left(\overline{\sigma}_1\left(\overline{k}(\overline{s})\right),...,\overline{\sigma}_n\left(\overline{k}(\overline{s})\right)\right)
\end{aligned}$$

dual fonksiyonunun bir $\mathbf{D}$-eğrisi olduğunu biliyoruz. Şimdi, $\overline{k}(\overline{s}_0) = \overline{t}_0$ olsun. Bu durumda,

$$\overline{S}\left(\overline{s}_0\right)=\frac{\overset{\bullet}{\overline{\beta}}\left(\overline{s}_0\right)}{\left\|\overset{\bullet}{\overline{\beta}}\left(\overline{s}_0\right)\right\|_{\mathbf{D}}}=\frac{\overset{\bullet}{\overline{k}}\left(\overline{s}_0\right)\overset{\bullet}{\overline{\sigma}}\left(\overline{t}_0\right)}{\left\|\overset{\bullet}{\overline{k}}\left(\overline{s}_0\right)\overset{\bullet}{\overline{\sigma}}\left(\overline{t}_0\right)\right\|_{\mathbf{D}}}$$

yazılabilir. Dual norm fonksiyonunun ikinci özelliği göz önüne alınırsa

$$\overline{S}\left(\overline{s}_0\right)=\frac{\overset{\bullet}{\overline{k}}\left(\overline{s}_0\right)}{\left|\overset{\bullet}{\overline{k}}\left(\overline{s}_0\right)\right|_{\mathbf{D}}}\frac{\overset{\bullet}{\overline{\sigma}}\left(\overline{t}_0\right)}{\left\|\overset{\bullet}{\overline{\sigma}}\left(\overline{t}_0\right)\right\|_{\mathbf{D}}}$$

elde edilir. Ayrıca, $\overset{\bullet}{\overline{k}}\left(\overline{s}_0\right)=k'\left(s_0\right)+\varepsilon\left(s_0^*k''\left(s_0\right)+\widetilde{k}'\left(s_0\right)\right)$ ve $k'\left(s_0\right)\neq 0$ olduğundan dual mutlak değer fonksiyonu göz önüne alınırsa $k'\left(s_0\right)>0$ ise $\left|\overset{\bullet}{\overline{k}}\left(\overline{s}_0\right)\right|_{\mathbf{D}}=\overset{\bullet}{\overline{k}}\left(\overline{s}_0\right)$ veya $k'\left(s_0\right)<0$ ise $\left|\overset{\bullet}{\overline{k}}\left(\overline{s}_0\right)\right|_{\mathbf{D}}=-\overset{\bullet}{\overline{k}}\left(\overline{s}_0\right)$ olur öyle ki

$$\overline{S}\left(\overline{s}_0\right)=\overline{\eta}\left(\overline{t}_0\right)\text{ veya }\overline{S}\left(\overline{s}_0\right)=-\overline{\eta}\left(\overline{t}_0\right)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

$\overline{\sigma}:\overline{I}\subseteq\mathbf{D}\to\mathbf{D}^n$ bir $\mathbf{D}$-eğrisi olsun. $\overline{t}_0\in\overline{I}$ olmak üzere, $\overline{\sigma}\left(\overline{t}_0\right)$ noktasından başlayarak dual yay uzunluğunu ölçtüğümüzü varsayalım. $\overline{t}=t+\varepsilon t^*>_{\mathbf{D}}t_0+\varepsilon t_0^*=\overline{t}_0$ olmak üzere, $\overline{\sigma}\left(\overline{t}\right)$ ile $\overline{\sigma}\left(\overline{t}_0\right)$ noktaları arasındaki dual yay uzunluğunu $\overline{\xi}\left(\overline{t}\right)$ ile gösterelim. Bu durumda, $\overline{\sigma}\left(\overline{t}\right)$ ile $\overline{\sigma}\left(\overline{t}_0\right)$ noktaları arasındaki dual yay uzunluğu

$$\overline{\xi}\left(\overline{t}\right)=\left|\int_{t_0}^{t}\left\|\sigma'\left(t\right)\right\|dt+\varepsilon\begin{pmatrix}t^*\left\|\sigma'\left(t\right)\right\|-t_0^*\left\|\sigma'\left(t_0\right)\right\|\\+\int_{t_0}^{t}\frac{\left\langle\sigma'(t),\widetilde{\sigma}'(t)\right\rangle}{\left\|\sigma'(t)\right\|}dt\end{pmatrix}\right|_{\mathbf{D}}$$

şeklindedir. Burada açıktır ki $t=t_0$ için $\overline{\xi}\left(t_0+\varepsilon t^*\right)=0+0\varepsilon$ dır. Şimdi, $t>t_0$ olsun. O halde, $\forall t\in I$ için $\left\|\sigma'\left(t\right)\right\|>0$ olduğundan $\int_{t_0}^{t}\left\|\sigma'\left(t\right)\right\|dt>0$ olup dual mutlak değer fonksiyonu tanımından

$$\begin{aligned}\overline{s}&=\overline{\xi}\left(\overline{t}\right)=\int_{t_0}^{t}\left\|\sigma'\left(t\right)\right\|dt+\varepsilon\begin{pmatrix}t^*\left\|\sigma'\left(t\right)\right\|-t_0^*\left\|\sigma'\left(t_0\right)\right\|+\\+\int_{t_0}^{t}\frac{\left\langle\sigma'(t),\widetilde{\sigma}'(t)\right\rangle}{\left\|\sigma'(t)\right\|}dt\end{pmatrix}\\&=\xi\left(t\right)+\varepsilon\left(t^*\xi'\left(t\right)+\widetilde{\xi}\left(t\right)\right)\end{aligned}$$

şeklindedir ve bu $\overline{\xi}$ dual analitik fonksiyonun $\bar{t}$ dual değişkenine göre türevi

$$\begin{aligned}\frac{d\overline{\xi}}{d\bar{t}} &= \left\|\sigma'(t)\right\| + \varepsilon\left(t^*\frac{d}{dt}\left(\left\|\sigma'(t)\right\|\right) + \frac{\langle\sigma'(t),\widetilde{\sigma}'(t)\rangle}{\|\sigma'(t)\|}\right)\\ &= \left\|\overset{\bullet}{\overline{\sigma}}(\bar{t})\right\|_{\mathbf{D}}\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir.

Örneğin,

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}(\bar{t}) &= p + t\overrightarrow{v} + \varepsilon\left(t^*\overrightarrow{v} + p^* + t\overrightarrow{v^*}\right)\\ &= \sigma(t) + \varepsilon\left(t^*\sigma'(t) + \widetilde{\sigma}(t)\right)\end{aligned}$$

dual doğrusunu ele alalım. Burada, $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ dır. Açıkça görülmektedir ki $\overline{\sigma}$ bir **D**-eğrisidir. Bu durumda, $\overline{\sigma}(\overline{a}) = \overline{A} = A + \varepsilon A^*$ ve $\overline{\sigma}\left(\overline{b}\right) = \overline{B} = B + \varepsilon B^*$ dual doğru üzerinde iki nokta ve $\overline{b} = b + \varepsilon b^* >_{\mathbf{D}} a + \varepsilon a^* = \overline{a}$ olsun. O halde, $\overline{\sigma}(\overline{a})$ ile $\overline{\sigma}\left(\overline{b}\right)$ dual noktaları arasındaki dual uzaklık (dual yay uzunluğu)

$$\begin{aligned}\overline{d}\left(\overline{A},\overline{B}\right) &= \left\|\overrightarrow{\overline{A}\overline{B}}\right\|_{\mathbf{D}}\\ &= \left|\int_a^b \left\|\sigma'(t)\right\| dt + \varepsilon\begin{pmatrix} b^*\|\sigma'(b)\| - a^*\|\sigma'(a)\| + \\ +\int_a^b \frac{\langle\sigma'(t),\widetilde{\sigma}'(t)\rangle}{\|\sigma'(t)\|}dt\end{pmatrix}\right|_{\mathbf{D}}\\ &= \left|(b-a)\|\overrightarrow{v}\| + \varepsilon\left((b^*-a^*)\|\overrightarrow{v}\| + (b-a)\frac{\left\langle\overrightarrow{v},\overrightarrow{v^*}\right\rangle}{\|\overrightarrow{v}\|}\right)\right|_{\mathbf{D}}\end{aligned}$$

şeklindedir. Ayrıca, $\overline{\sigma}$ birim hızlı bir **D**-eğrisi olsun. Bu durumda, $\overline{\sigma}(\overline{a})$ ile $\overline{\sigma}\left(\overline{b}\right)$ dual noktaları arasında kalan dual yay uzunluğu

$$\begin{aligned}\overline{L} &= \left|\int_a^b dt + \varepsilon(b^*-a^*)\right|_{\mathbf{D}}\\ &= \left|(b-a+\varepsilon(b^*-a^*))\right|_{\mathbf{D}}\\ &= \left|\overline{b}-\overline{a}\right|_{\mathbf{D}}\end{aligned}$$

biçimindedir.

Teorem 4.5.9. $\overline{\sigma}:\overline{I}\subseteq\mathbf{D}\to\mathbf{D}^n$ bir $\mathbf{D}$-eğrisi olsun. $\overline{\sigma}\circ\overline{k}:\overline{J}\to\mathbf{D}^n$ eğrisinin her noktasındaki hız vektörü birim vektör olacak şekilde $\overline{k}:\overline{J}\to\overline{I}$ dual parametre dönüşümü vardır.

İspat. $\overline{a}=a+\varepsilon a^*\in\overline{I}$ olmak üzere, $\forall\overline{t}\in\overline{I}$ için

$$\overline{s}=\overline{\xi}\left(\overline{t}\right)=\left|\int_a^t\left\|\sigma'\left(t\right)\right\|dt+\varepsilon\begin{pmatrix}t^*\left\|\sigma'\left(t\right)\right\|-a^*\left\|\sigma'\left(a\right)\right\|+\\+\int_a^t\frac{\left\langle\sigma'(t),\widetilde{\sigma}'(t)\right\rangle}{\left\|\sigma'(t)\right\|}dt\end{pmatrix}\right|_{\mathbf{D}}$$

olsun. $a<t$ için

$$\begin{aligned}\overline{s}&=\overline{\xi}\left(\overline{t}\right)\\&=\int_a^t\left\|\sigma'\left(t\right)\right\|dt+\varepsilon\begin{pmatrix}t^*\left\|\sigma'\left(t\right)\right\|-a^*\left\|\sigma'\left(a\right)\right\|\\+\int_a^t\frac{\left\langle\sigma'(t),\widetilde{\sigma}'(t)\right\rangle}{\left\|\sigma'(t)\right\|}dt\end{pmatrix}\\&=\xi\left(t\right)+\varepsilon\left(t^*\xi'\left(t\right)+\widetilde{\xi}\left(t\right)\right)\end{aligned}$$

biçiminde olup

$$\begin{aligned}\frac{d\overline{\xi}}{d\overline{t}}&=\left\|\sigma'\left(t\right)\right\|+\varepsilon\left(t^*\frac{d}{dt}\left(\left\|\sigma'\left(t\right)\right\|\right)+\frac{\left\langle\sigma'\left(t\right),\widetilde{\sigma}'\left(t\right)\right\rangle}{\left\|\sigma'\left(t\right)\right\|}\right)\\&=\xi'\left(t\right)+\varepsilon\left(t^*\xi''\left(t\right)+\widetilde{\xi}'\left(t\right)\right)\end{aligned}$$

şeklindedir. $\left\|\sigma'\left(t\right)\right\|>0$ olduğundan $\xi'\left(t\right)>0$ dır. O halde, ξ artan bir fonksiyon olup $\xi^{-1}\left(s\right)$ vardır ve $\left(\xi^{-1}\right)'\left(s\right)=\dfrac{1}{\xi'\left(t\right)}>0$ dır. Burada, $\overline{\xi}:\overline{I}\to\overline{J}$, $\overline{\xi}\left(\overline{t}\right)=\overline{s}$ şeklindedir. Bu durumda, $\overline{\xi}^{-1}$ vardır ve

$$\overline{\xi}^{-1}\left(\overline{s}\right)=\xi^{-1}\left(s\right)+\varepsilon\left(s^*\left(\xi^{-1}\right)'\left(s\right)-\left(\widetilde{\xi}\circ\xi^{-1}\right)\left(s\right)\left(\xi^{-1}\right)'\left(s\right)\right)$$

biçiminde ifade edilen dual analitik bir fonksiyondur. $\overline{\xi}^{-1}=\overline{k}$ diyelim. Bu durumda, $\overline{k}:\overline{J}\to\overline{I}$ şeklinde olup

$$\begin{aligned}\overline{k}\left(\overline{s}\right)&=\overline{\xi}^{-1}\left(\overline{s}\right)\\&=k\left(s\right)+\varepsilon\left(s^*k'\left(s\right)+\widetilde{k}\left(s\right)\right)\end{aligned}$$

dir. $\overline{\sigma} \circ \overline{k} = \overline{\beta}$ denilirse,

$$\begin{aligned} \overline{\beta} &= \overline{\sigma} \circ \overline{k} : \overline{J} \to \mathbf{D}^n \\ \overline{\beta}(\overline{s}) &= \overline{\sigma}\left(\overline{k}(\overline{s})\right) = \left(\overline{\sigma}_1\left(\overline{k}(\overline{s})\right), ..., \overline{\sigma}_n\left(\overline{k}(\overline{s})\right)\right) \end{aligned}$$

şeklinde olup yukarıdaki teoremden biliyoruz ki

$$\frac{d\overline{\beta}}{d\overline{s}} = \frac{d\overline{k}}{d\overline{s}}(\overline{s}) \frac{d\overline{\sigma}}{d\overline{t}}\left(\overline{k}(\overline{s})\right)$$

dir. $\left(\xi^{-1}\right)'(s) = \dfrac{1}{\xi'(t)} > 0$ olduğundan dual mutlak değer tanımından açıktır ki

$$\left|\frac{d\overline{k}}{d\overline{s}}(\overline{s})\right|_{\mathbf{D}} = \frac{d\overline{k}}{d\overline{s}}(\overline{s})$$

biçimindedir ve böylece dual normun ikinci özelliğinden

$$\begin{aligned} \left\|\frac{d\overline{\beta}}{d\overline{s}}\right\|_{\mathbf{D}} &= \left\|\frac{d\overline{k}}{d\overline{s}}(\overline{s}) \frac{d\overline{\sigma}}{d\overline{t}}\left(\overline{k}(\overline{s})\right)\right\|_{\mathbf{D}} \\ &= \left|\frac{d\overline{k}}{d\overline{s}}(\overline{s})\right|_{\mathbf{D}} \left\|\frac{d\overline{\sigma}}{d\overline{t}}(\overline{t})\right\|_{\mathbf{D}} \\ &= \frac{d\overline{k}}{d\overline{s}}(\overline{s}) \left\|\overset{\bullet}{\overline{\sigma}}(\overline{t})\right\|_{\mathbf{D}} \\ &= 1 + 0\varepsilon \end{aligned}$$

dur. □

D-eğrileri için Frenet Formülleri

Bu kısımda, Öklid 3-uzayında bir eğri için elde edilen Frenet formülleri ışığında **D**-eğrileri için Frenet formüllerini detaylı bir şekilde inceleyeceğiz. Bu çalışmada, **D**-eğrilerinin bu formüllerinin hangi şartlar altında var olduğunu detaylı bir şekilde inceleyeceğiz ve birim hızlı olmayan **D**-eğrilerinin de Frenet formüllerini elde edeceğiz. $\overline{\sigma} : \overline{I} \subseteq \mathbf{D} \to \mathbf{D}^3$ bir **D**-eğrisi olsun. Bu eğrinin dual hız vektörü

$$\overset{\bullet}{\overline{\sigma}}(\overline{t}) = \sigma'(t) + \varepsilon\left(t^* \sigma''(t) + \widetilde{\sigma}'(t)\right)$$

olup bu dual vektörün normu

$$\left\|\overset{\bullet}{\overline{\sigma}}(\bar{t})\right\|_{\mathbf{D}} = \|\sigma'(t)\| + \varepsilon\left(t^*\frac{d}{dt}\left(\|\sigma'(t)\|\right) + \frac{\langle\sigma'(t), \widetilde{\sigma}'(t)\rangle}{\|\sigma'(t)\|}\right)$$

şeklinde olduğunu biliyoruz. Şimdi, $\left\|\overset{\bullet}{\overline{\sigma}}(\bar{t})\right\|_{\mathbf{D}} = 1 + 0\varepsilon$ olduğunu kabul edelim. O halde, $\|\sigma'(t)\| = 1$ ve $\langle\sigma'(t), \widetilde{\sigma}'(t)\rangle = 0$ şeklindedir. Bu durumda,

$$\overline{\eta}(\bar{t}) = \overset{\bullet}{\overline{\sigma}}(\bar{t}) = \sigma'(t) + \varepsilon\left(t^*\sigma''(t) + \widetilde{\sigma}'(t)\right)$$

dual fonksiyonuna birim dual teğet vektör alanı denir. Bu vektör alanı

$$\begin{aligned}\overline{\eta}(\bar{t}) &= \eta(t) + \varepsilon\left(t^*\eta'(t) + \widetilde{\eta}(t)\right)\\ &= \sigma'(t) + \varepsilon\left(t^*\sigma''(t) + \widetilde{\sigma}'(t)\right)\\ &= \eta + \varepsilon\eta^0\end{aligned}$$

şeklinde olup buradan açıktır ki

$$\langle\eta, \eta\rangle = \left\langle\sigma'(t), \sigma'(t)\right\rangle = 1$$

ve

$$\left\langle\eta, \eta^0\right\rangle = \left\langle\sigma'(t), t^*\sigma''(t) + \widetilde{\sigma}'(t)\right\rangle = 0$$

dır. $\overline{\eta} = \overline{\eta}(\bar{t})$ bir dual vektör alanı olduğundan bu dual vektör alanının $\bar{t}$ dual değişkene göre türevi

$$\overset{\bullet}{\overline{\eta}}(\bar{t}) = \sigma''(t) + \varepsilon\left(t^*\sigma'''(t) + \widetilde{\sigma}''(t)\right)$$

şeklindedir. Bu ifade; $\overline{\sigma}$ eğrisi üzerinde bir dual vektör alanı olup bu ifadeye dual eğrilik vektör alanı denir ve bu vektör alanının normu $\sigma''(t) \neq 0$ olmak üzere,

$$\left\|\overset{\bullet}{\overline{\eta}}(\bar{t})\right\|_{\mathbf{D}} = \|\sigma''(t)\| + \varepsilon\left(t^*\frac{\langle\sigma''(t), \sigma'''(t)\rangle}{\|\sigma''(t)\|} + \frac{\langle\sigma''(t), \widetilde{\sigma}''(t)\rangle}{\|\sigma''(t)\|}\right)$$

olarak hesaplanır. $\kappa(t) = \|\sigma''(t)\|$ denilirse;

$$\frac{d}{dt}(\kappa(t)) = \frac{\langle\sigma''(t), \sigma'''(t)\rangle}{\|\sigma''(t)\|}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\overline{\kappa}(\bar{t}) &= \left\|\overset{\bullet}{\overline{\eta}}(\bar{t})\right\|_{\mathbf{D}} \\ &= \kappa(t)+\varepsilon\left(t^{*}\kappa'(t)+\widetilde{\kappa}(t)\right) \\ &= \kappa+\varepsilon\kappa^{0}\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$\widetilde{\kappa}(t)=\frac{\langle\sigma''(t),\widetilde{\sigma}''(t)\rangle}{\|\sigma''(t)\|}$$

biçimindedir. Bu $\overline{\kappa}$ fonksiyonuna dual eğrilik fonksiyonu adı verilir. Dual eğrilik vektör alanının (dual) normlanmışına $\overline{\sigma}$ eğrisinin dual asal normal vektör alanı denir ve $\overline{\vartheta}(\bar{t})$ ile gösterilir. Bu durumda,

$$\overline{\vartheta}(\bar{t})=\frac{\sigma''(t)}{\|\sigma''(t)\|}+\varepsilon\left(\begin{array}{c} t^{*}\left(\frac{\sigma'''(t)\|\sigma''(t)\|^{2}-\langle\sigma''(t),\sigma'''(t)\rangle\sigma''(t)}{\|\sigma''(t)\|^{3}}\right) \\ +\frac{\widetilde{\sigma}''(t)\|\sigma''(t)\|^{2}-\langle\sigma''(t),\widetilde{\sigma}''(t)\rangle\sigma''(t)}{\|\sigma''(t)\|^{3}}\end{array}\right)$$

şeklindedir. Eğer, $\vartheta(t)=\dfrac{\sigma''(t)}{\|\sigma''(t)\|}$ denilirse;

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\sigma''(t)}{\|\sigma''(t)\|}\right)=\frac{\sigma'''(t)\|\sigma''(t)\|^{2}-\langle\sigma''(t),\sigma'''(t)\rangle\sigma''(t)}{\|\sigma''(t)\|^{3}}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\overline{\vartheta}(\bar{t}) &= \vartheta(t)+\varepsilon\left(t^{*}\vartheta'(t)+\widetilde{\vartheta}(t)\right) \\ &= \vartheta+\varepsilon\vartheta^{0}\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$\widetilde{\vartheta}(t)=\frac{\widetilde{\sigma}''(t)\|\sigma''(t)\|^{2}-\langle\sigma''(t),\widetilde{\sigma}''(t)\rangle\sigma''(t)}{\|\sigma''(t)\|^{3}}$$

dir. Burada açıktır ki

$$\langle\vartheta,\vartheta\rangle=1 \text{ ve } \left\langle\vartheta,\vartheta^{0}\right\rangle=0$$

olduğundan

$$\left\|\overline{\vartheta}\left(\bar{t}\right)\right\|_{\mathbf{D}}=1+0\varepsilon$$

biçimindedir. Dual binormal vektör alanı $\overline{\gamma}(\bar{t})$ ile gösterilir ve

$$\begin{aligned}\overline{\gamma}(\bar{t}) &= \eta\left(t\right)\times\vartheta\left(t\right)+\varepsilon\left(t^{*}\frac{d}{dt}\left(\eta\left(t\right)\times\vartheta\left(t\right)\right)+\eta\left(t\right)\times\widetilde{\vartheta}\left(t\right)+\widetilde{\eta}\left(t\right)\times\vartheta\left(t\right)\right)\\ &= \gamma(t)+\varepsilon\left(t^{*}\gamma'\left(t\right)+\widetilde{\gamma}(t)\right)\\ &= \gamma+\varepsilon\gamma^{0}\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Burada,

$$\langle\gamma,\gamma\rangle=\langle\eta\left(t\right)\times\vartheta\left(t\right),\eta\left(t\right)\times\vartheta\left(t\right)\rangle$$

olup Lagrange özdeşliğinden ([31] ve [35])

$$\langle\gamma,\gamma\rangle=1$$

ve

$$\begin{aligned}\left\langle\gamma,\gamma^{0}\right\rangle &= t^{*}\left(\left\langle\eta\left(t\right),\eta'\left(t\right)\right\rangle+\left\langle\vartheta\left(t\right),\vartheta'\left(t\right)\right\rangle\right)\\ &\quad+\left\langle\vartheta\left(t\right),\widetilde{\vartheta}\left(t\right)\right\rangle+\langle\eta\left(t\right),\widetilde{\eta}\left(t\right)\rangle\end{aligned}$$

biçiminde olup yukarıdaki denklemler göz önüne alındığında

$$\left\langle\gamma,\gamma^{0}\right\rangle=0$$

elde edilir. Sonuç olarak, $\left\|\overset{\bullet}{\overline{\sigma}}\left(\bar{t}\right)\right\|_{\mathbf{D}}=1+0\varepsilon$ birim hızlı **D**-eğrisinin sırasıyla, dual teğet vektör alanı, dual asal vektör alanı ve dual binormal vektör alanı

$$\begin{aligned}\overline{\eta}\left(\bar{t}\right) &= \eta\left(t\right)+\varepsilon\left(t^{*}\eta'\left(t\right)+\widetilde{\eta}\left(t\right)\right)=\eta+\varepsilon\eta^{0},\\ \overline{\vartheta}\left(\bar{t}\right) &= \vartheta\left(t\right)+\varepsilon\left(t^{*}\vartheta'\left(t\right)+\widetilde{\vartheta}\left(t\right)\right)=\vartheta+\varepsilon\vartheta^{0}\end{aligned}$$

ve

$$\overline{\gamma}(\bar{t})=\gamma(t)+\varepsilon\left(t^{*}\gamma'\left(t\right)+\widetilde{\gamma}(t)\right)=\gamma+\varepsilon\gamma^{0}$$

şeklindedir ve ayrıca,

$$\begin{aligned}\langle\eta,\eta\rangle &= 1, \quad \left\langle\eta,\eta^{0}\right\rangle=0\\ \langle\vartheta,\vartheta\rangle &= 1, \quad \left\langle\vartheta,\vartheta^{0}\right\rangle=0\\ \langle\gamma,\gamma\rangle &= 1, \quad \left\langle\gamma,\gamma^{0}\right\rangle=0\end{aligned}$$

biçiminde hesaplanır. Böylece; $\overline{\eta},\overline{\vartheta}$ ve $\overline{\gamma}$ vektör alanlarının dual normu $1+0\varepsilon$ dual sayısına eşittir.

Şimdi, bu vektör alanlarının birbirleriyle olan dual iç çarpımlarını inceleyelim. İlk olarak, $\left\langle\overline{\eta}\left(\bar{t}\right),\overline{\vartheta}\left(\bar{t}\right)\right\rangle_{\mathbf{D}}$ dual iç çarpımı

$$\left\langle\overline{\eta}\left(\bar{t}\right),\overline{\vartheta}\left(\bar{t}\right)\right\rangle_{\mathbf{D}}=\langle\eta,\vartheta\rangle+\varepsilon\left(\left\langle\eta,\vartheta^{0}\right\rangle+\left\langle\eta^{0},\vartheta\right\rangle\right)$$

şeklinde olup

$$\begin{aligned}\langle\eta,\vartheta\rangle &= \langle\eta\left(t\right),\vartheta\left(t\right)\rangle=0,\\ \left\langle\eta,\vartheta^{0}\right\rangle &= t^{*}\frac{\langle\sigma'\left(t\right),\sigma'''\left(t\right)\rangle}{\left\|\sigma''\left(t\right)\right\|}+\frac{\langle\sigma'\left(t\right),\widetilde{\sigma}''\left(t\right)\rangle}{\left\|\sigma''\left(t\right)\right\|}\end{aligned}\tag{4.5.1}$$

ve

$$\left\langle\eta^{0},\vartheta\right\rangle=t^{*}\frac{\langle\sigma''\left(t\right),\sigma''\left(t\right)\rangle}{\left\|\sigma''\left(t\right)\right\|}+\frac{\langle\widetilde{\sigma}'\left(t\right),\sigma''\left(t\right)\rangle}{\left\|\sigma''\left(t\right)\right\|}\tag{4.5.2}$$

elde edilir. $\overline{\sigma}$, **D**-eğrisi birim hızlı olduğundan

$$\left\|\sigma'\left(t\right)\right\|=1\text{ve }\left\langle\sigma'\left(t\right),\widetilde{\sigma}'\left(t\right)\right\rangle=0$$

şeklinde olup bu ifadelerin t reel değişkenine göre türevleri alınırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\left\langle\eta,\vartheta^{0}\right\rangle+\left\langle\eta^{0},\vartheta\right\rangle=0.$$

Böylece,

$$\begin{aligned}\left\langle\overline{\eta}\left(\bar{t}\right),\overline{\vartheta}\left(\bar{t}\right)\right\rangle_{\mathbf{D}} &= \langle\eta,\vartheta\rangle+\varepsilon\left(\left\langle\eta,\vartheta^{0}\right\rangle+\left\langle\eta^{0},\vartheta\right\rangle\right)\\ &= 0+0\varepsilon\\ &= \overline{0}\end{aligned}$$

olur. Diğer yandan, $\left\langle \overline{\vartheta}\left(\bar{t}\right), \overline{\gamma}(\bar{t})\right\rangle_{\mathbf{D}}$ dual iç çarpımı

$$\left\langle \overline{\vartheta}\left(\bar{t}\right), \overline{\gamma}(\bar{t})\right\rangle_{\mathbf{D}} = \langle \vartheta, \gamma\rangle + \varepsilon\left(\left\langle \vartheta, \gamma^{0}\right\rangle + \left\langle \vartheta^{0}, \gamma\right\rangle\right)$$

şeklindedir. O halde,

$$\langle \vartheta, \gamma\rangle = \langle \vartheta\left(t\right), \gamma(t)\rangle = \langle \vartheta\left(t\right), \eta\left(t\right) \times \vartheta\left(t\right)\rangle = 0$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\left\langle \vartheta, \gamma^{0}\right\rangle = t^{*}\left(\left\langle \vartheta\left(t\right), \eta\left(t\right) \times \vartheta'\left(t\right)\right\rangle\right) + \left\langle \vartheta\left(t\right), \eta\left(t\right) \times \widetilde{\vartheta}\left(t\right)\right\rangle$$

ve

$$\left\langle \vartheta^{0}, \gamma\right\rangle = t^{*}\left(\left\langle \vartheta'\left(t\right), \eta\left(t\right) \times \vartheta\left(t\right)\right\rangle\right) + \left\langle \widetilde{\vartheta}\left(t\right), \eta\left(t\right) \times \vartheta\left(t\right)\right\rangle$$

biçiminde olup determinant fonksiyonu ([31] ve [35]) göz önüne alındığında

$$\left\langle \vartheta, \gamma^{0}\right\rangle + \left\langle \vartheta^{0}, \gamma\right\rangle = 0$$

olarak bulunur. Böylece,

$$\left\langle \overline{\vartheta}\left(\bar{t}\right), \overline{\gamma}(\bar{t})\right\rangle_{\mathbf{D}} = \langle \vartheta, \gamma\rangle + \varepsilon\left(\left\langle \vartheta, \gamma^{0}\right\rangle + \left\langle \vartheta^{0}, \gamma\right\rangle\right) = 0 + 0\varepsilon$$

olur. Son olarak,

$$\langle \overline{\gamma}(\bar{t}), \overline{\eta}\left(\bar{t}\right)\rangle_{\mathbf{D}} = \langle \gamma, \eta\rangle + \varepsilon\left(\left\langle \gamma, \eta^{0}\right\rangle + \left\langle \gamma^{0}, \eta\right\rangle\right)$$

şeklinde olup

$$\begin{aligned}
\langle \gamma, \eta\rangle &= \langle \gamma(t), \eta\left(t\right)\rangle = 0, \\
\left\langle \gamma, \eta^{0}\right\rangle &= t^{*}\left(\left\langle \eta\left(t\right) \times \vartheta\left(t\right), \eta'\left(t\right)\right\rangle\right) + \langle \eta\left(t\right) \times \vartheta\left(t\right), \widetilde{\eta}\left(t\right)\rangle
\end{aligned}$$

ve

$$\left\langle \gamma^{0}, \eta\right\rangle = t^{*}\left(\left\langle \eta'\left(t\right) \times \vartheta\left(t\right), \eta\left(t\right)\right\rangle\right) + \langle \widetilde{\eta}\left(t\right) \times \vartheta\left(t\right), \eta\left(t\right)\rangle$$

elde edilir. Determinant fonksiyonunun özelliği göz önüne alındığında

$$\left\langle \gamma, \eta^0 \right\rangle + \left\langle \gamma^0, \eta \right\rangle = 0$$

şeklindedir ve böylece

$$\begin{aligned} \langle \overline{\gamma}(\bar{t}), \overline{\eta}(\bar{t}) \rangle_{\mathbf{D}} &= \langle \gamma, \eta \rangle + \varepsilon \left(\left\langle \gamma, \eta^0 \right\rangle + \left\langle \gamma^0, \eta \right\rangle \right) \\ &= \overline{0} \end{aligned}$$

biçimindedir.

Sonuç olarak, $\left\{ \overline{\eta}(\bar{t}), \overline{\vartheta}(t), \overline{\gamma}(\bar{t}) \right\}$ cümlesi dual ortonormal bir sistem oluşturur. $\overline{\eta}, \overline{\vartheta}$ ve $\overline{\gamma}$ dual vektör alanlarına $\overline{\sigma}$, **D**-eğrisinin dual Frenet vektör alanları, $\left\{ \overline{\eta}(\bar{t}), \overline{\vartheta}(t), \overline{\gamma}(\bar{t}) \right\}$ dual ortonormal cümlesi $\overline{\sigma}$, **D**-eğrisinin dual Frenet çatısı olarak adlandırılır.

Sonuç 4.5.2. $\overline{\sigma} : \bar{I} \subseteq \mathbf{D} \to \mathbf{D}^3$ bir **D**-eğrisi olmak üzere, bu eğrinin $\forall \bar{t}_0 \in \bar{I}$ noktasında $\left\{ \overline{\eta}(\bar{t}_0), \overline{\vartheta}(\bar{t}_0), \overline{\gamma}(\bar{t}_0) \right\}$ dual Frenet çatısı $T_{\overline{\sigma}(\bar{t}_0)}\mathbf{D}^3$ dual tanjant uzayının bir bazıdır.

$\overline{\eta}, \overline{\vartheta}$ ve $\overline{\gamma}$ dual vektör alanları dual analitik vektör alanları olduklarından bu vektör alanlarının dual değişkene göre türevleri vardır. Şimdi, bu türevleri $\left\{ \overline{\eta}(\bar{t}), \overline{\vartheta}(t), \overline{\gamma}(\bar{t}) \right\}$ çatısına göre hesaplayalım. İlk olarak,

$$\begin{aligned} \overset{\bullet}{\overline{\eta}}(\bar{t}) &= \sigma''(t) + \varepsilon \left(t^* \sigma'''(t) + \widetilde{\sigma}''(t) \right) \\ &= \eta'(t) + \varepsilon \left(t^* \eta''(t) + \widetilde{\eta}'(t) \right) \\ &= \vartheta(t) \kappa(t) + \varepsilon \left(t^* \frac{d}{dt} (\vartheta(t) \kappa(t)) + \vartheta(t) \widetilde{\kappa}(t) + \widetilde{\vartheta}(t) \kappa(t) \right) \\ &= \left(\kappa(t) + \varepsilon \left(t^* \kappa'(t) + \widetilde{\kappa}(t) \right) \right) \left(\vartheta(t) + \varepsilon \left(t^* \vartheta'(t) + \widetilde{\vartheta}(t) \right) \right) \\ &= \overline{\kappa}(\bar{t}) \overline{\vartheta}(\bar{t}) \end{aligned}$$

şeklindedir. Diğer yandan, biliyoruz ki

$$\langle \overline{\gamma}(\bar{t}), \overline{\gamma}(\bar{t}) \rangle_{\mathbf{D}} = 1 + 0\varepsilon \tag{4.5.3}$$

dır ve ayrıca,

$$\langle \overline{\gamma}(\bar{t}), \overline{\gamma}(\bar{t}) \rangle_{\mathbf{D}} = \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle + 2\varepsilon \left(t^* \left\langle \gamma(t), \gamma'(t) \right\rangle + \langle \gamma(t), \widetilde{\gamma}(t) \rangle \right)$$

şeklinde dual analitik bir fonksiyon olup (4.5.3) eşitliğinin her iki tarafının $\bar{t}$ dual değişkene göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\bar{t}}\left(\langle\overline{\gamma}(\bar{t}),\overline{\gamma}(\bar{t})\rangle_{\mathbf{D}}\right) &= 2\left(\langle\gamma'(t),\gamma(t)\rangle+\varepsilon\begin{pmatrix} t^*\left(\langle\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle+\langle\gamma(t),\gamma''(t)\rangle\right) \\ \langle\gamma'(t),\widetilde{\gamma}(t)\rangle+\langle\gamma(t),\widetilde{\gamma}'(t)\rangle\end{pmatrix}\right) \\
&= 2\left\langle\gamma'(t)+\varepsilon\left(t^*\gamma''(t)+\widetilde{\gamma}'(t)\right),\gamma(t)+\varepsilon\left(t^*\gamma'(t)+\widetilde{\gamma}(t)\right)\right\rangle_{\mathbf{D}} \\
&= 2\left\langle\frac{d\overline{\gamma}}{d\bar{t}},\overline{\gamma}(\bar{t})\right\rangle_{\mathbf{D}} \\
&= 0+0\varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde, $\frac{d\overline{\gamma}}{d\bar{t}}\perp_{\mathbf{D}}\overline{\gamma}(\bar{t})$ dir. Diğer yandan,

$$\langle\overline{\gamma}(\bar{t}),\overline{\eta}(\bar{t})\rangle_{\mathbf{D}}=0+0\varepsilon \tag{4.5.4}$$

şeklinde olduğunu biliyoruz.

$$\langle\overline{\gamma}(\bar{t}),\overline{\eta}(\bar{t})\rangle_{\mathbf{D}}=\langle\gamma(t),\eta(t)\rangle+\varepsilon\begin{pmatrix} t^*\frac{d}{dt}\left(\langle\gamma(t),\eta(t)\rangle\right) \\ +\langle\gamma(t),\widetilde{\eta}(t)\rangle+\langle\widetilde{\gamma}(t),\eta(t)\rangle\end{pmatrix}$$

dual analitik bir fonksiyon olup determinant fonksiyonu göz önüne alındığında, (4.5.4) eşitliğinin her iki tarafının $\bar{t}$ dual değişkenine göre türevi alınırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\bar{t}}\left(\langle\overline{\gamma}(\bar{t}),\overline{\eta}(\bar{t})\rangle_{\mathbf{D}}\right) &= \langle\gamma'(t),\eta(t)\rangle+\varepsilon\begin{pmatrix} t^*\left(\langle\gamma'(t),\eta'(t)\rangle+\langle\gamma''(t),\eta(t)\rangle\right) \\ +\langle\gamma'(t),\widetilde{\eta}(t)\rangle+\langle\widetilde{\gamma}'(t),\eta(t)\rangle\end{pmatrix} \\
&= \left\langle\gamma'(t)+\varepsilon\left(t^*\gamma''(t)+\widetilde{\gamma}'(t)\right),\eta(t)+\varepsilon\left(t^*\eta'(t)+\widetilde{\eta}(t)\right)\right\rangle_{\mathbf{D}} \\
&= \left\langle\frac{d\overline{\gamma}}{d\bar{t}},\overline{\eta}(\bar{t})\right\rangle_{\mathbf{D}} \\
&= 0+0\varepsilon.
\end{aligned}$$

O halde, $\frac{d\overline{\gamma}}{d\bar{t}}\perp_{\mathbf{D}}\overline{\eta}(\bar{t})$ dir. Sonuç olarak,

$$\dot{\overline{\gamma}}(\bar{t})=\overline{\rho}\,\overline{\vartheta}(\bar{t})$$

olacak şekilde $\overline{\rho}:\overline{U}\subseteq\mathbf{D}\to\mathbf{D}$ bir dual analitik fonksiyonu vardır. Bu fonksiyon $\overline{\rho}=-\overline{\tau}$

biçiminde gösterilir. Burada, $\overline{\tau}(\overline{t})=\tau(t)+\varepsilon\left(t^{*}\tau'(t)+\widetilde{\tau}(t)\right)$ dir. Bu fonksiyona dual burulma fonksiyonu adı verilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
\overset{\bullet}{\overline{\gamma}}(\overline{t}) &= -\overline{\tau}(\overline{t})\,\overline{\vartheta}(\overline{t}) \\
&= -\tau(t)\,\vartheta(t)+\varepsilon\left(t^{*}\frac{d}{dt}\left(-\tau(t)\,\vartheta(t)\right)-\tau(t)\,\widetilde{\vartheta}(t)-\widetilde{\tau}(t)\,\vartheta(t)\right) \\
&= \gamma'(t)+\varepsilon\left(t^{*}\gamma''(t)+\widetilde{\gamma}'(t)\right)
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. O halde,

$$\overset{\bullet}{\overline{\eta}}(\overline{t})=\vartheta(t)\,\kappa(t)+\varepsilon\left(t^{*}\frac{d}{dt}\left(\vartheta(t)\,\kappa(t)\right)+\vartheta(t)\,\widetilde{\kappa}(t)+\widetilde{\vartheta}(t)\,\kappa(t)\right)$$

ve

$$\overset{\bullet}{\overline{\gamma}}(\overline{t})=-\tau(t)\,\vartheta(t)+\varepsilon\left(t^{*}\frac{d}{dt}\left(-\tau(t)\,\vartheta(t)\right)-\tau(t)\,\widetilde{\vartheta}(t)-\widetilde{\tau}(t)\,\vartheta(t)\right)$$

biçimindedir. Şimdi de $\forall\overline{t}\in\overline{I}\subseteq\mathbf{D}$ için $\overset{\bullet}{\overline{\vartheta}}(\overline{t})\in Sp\left\{\overline{\eta}(\overline{t}),\overline{\vartheta}(t),\overline{\gamma}(\overline{t})\right\}$ olduğundan

$$\overset{\bullet}{\overline{\vartheta}}=\overline{a}\overline{\eta}+\overline{b}\overline{\vartheta}+\overline{c}\overline{\gamma} \tag{4.5.5}$$

olacak şekilde $\overline{a},\overline{b},\overline{c}:\overline{I}\subseteq\mathbf{D}\to\mathbf{D}$ dual analitik fonksiyonları vardır. Biliyoruz ki

$$\left\langle\overline{\vartheta}(\overline{t}),\overline{\eta}(\overline{t})\right\rangle_{\mathbf{D}}=0+0\varepsilon. \tag{4.5.6}$$

$$\left\langle\overline{\vartheta}(\overline{t}),\overline{\eta}(\overline{t})\right\rangle_{\mathbf{D}}=\langle\vartheta(t),\eta(t)\rangle+\varepsilon\begin{pmatrix} t^{*}\frac{d}{dt}\left(\langle\vartheta(t),\eta(t)\rangle\right) \\ +\langle\vartheta(t),\widetilde{\eta}(t)\rangle+\left\langle\widetilde{\vartheta}(t),\eta(t)\right\rangle\end{pmatrix}$$

biçiminde olup (4.5.6) eşitliğinin her iki tarafının $\overline{t}$ dual değişkenine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\overline{t}}\left(\left\langle\overline{\vartheta}(\overline{t}),\overline{\eta}(\overline{t})\right\rangle_{\mathbf{D}}\right) &= \left\langle\vartheta'(t),\eta(t)\right\rangle+\left\langle\vartheta(t),\eta'(t)\right\rangle \\
&\quad+\varepsilon\begin{pmatrix} t^{*}\begin{pmatrix}\langle\vartheta'(t),\eta'(t)\rangle+\langle\vartheta(t),\eta''(t)\rangle \\ +\langle\vartheta''(t),\eta(t)\rangle+\langle\vartheta'(t),\eta'(t)\rangle\end{pmatrix} \\ +\langle\vartheta'(t),\widetilde{\eta}(t)\rangle+\left\langle\widetilde{\vartheta}'(t),\eta(t)\right\rangle \\ +\langle\vartheta(t),\widetilde{\eta}'(t)\rangle+\left\langle\widetilde{\vartheta}(t),\eta'(t)\right\rangle\end{pmatrix} \\
&= 0+0\varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\left\langle \vartheta'(t), \eta(t)\right\rangle &= -\left\langle \vartheta(t), \eta'(t)\right\rangle \\ &= -\kappa(t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \vartheta'(t), \eta'(t)\right\rangle + \left\langle \vartheta''(t), \eta(t)\right\rangle &= -\left\langle \vartheta(t), \eta''(t)\right\rangle - \left\langle \vartheta'(t), \eta'(t)\right\rangle \\ &= -\kappa'(t)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\left\langle \vartheta'(t), \widetilde{\eta}(t)\right\rangle + \left\langle \widetilde{\vartheta}'(t), \eta(t)\right\rangle &= -\left\langle \vartheta(t), \widetilde{\eta}'(t)\right\rangle - \left\langle \widetilde{\vartheta}(t), \eta'(t)\right\rangle \\ &= -\widetilde{\kappa}(t)\end{aligned}$$

dir. (4.5.5) eşitliğinin her iki tarafı $\overline{\eta}$ ile dual anlamda iç çarpıma tabi tutulursa

$$\overline{a}(\bar{t}) = \left\langle \frac{d}{d\bar{t}}\left(\overline{\vartheta}(\bar{t})\right), \overline{\eta}(\bar{t})\right\rangle_{\mathbf{D}} = -\kappa(t) + \varepsilon\left(-t^{*}\kappa'(t) - \widetilde{\kappa}(t)\right) = -\overline{\kappa}(\bar{t})$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$\left\langle \overline{\vartheta}(\bar{t}), \overline{\vartheta}(\bar{t})\right\rangle_{\mathbf{D}} = 1 + 0\varepsilon \tag{4.5.7}$$

ve

$$\left\langle \overline{\vartheta}(\bar{t}), \overline{\vartheta}(\bar{t})\right\rangle_{\mathbf{D}} = \left\langle \vartheta(t), \vartheta(t)\right\rangle + 2\varepsilon\left(t^{*}\left(\left\langle \vartheta(t), \vartheta'(t)\right\rangle\right) + \left\langle \vartheta(t), \widetilde{\vartheta}(t)\right\rangle\right)$$

şeklinde olup (4.5.7) eşitliğinin her iki tarafının $\bar{t}$ ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\bar{t}}\left(\left\langle \overline{\vartheta}(\bar{t}), \overline{\vartheta}(\bar{t})\right\rangle_{\mathbf{D}}\right) &= 2\begin{pmatrix} \left\langle \vartheta'(t), \vartheta(t)\right\rangle \\ +\varepsilon\begin{pmatrix} t^{*}\left(\left\langle \vartheta'(t), \vartheta'(t)\right\rangle + \left\langle \vartheta(t), \vartheta''(t)\right\rangle\right) \\ +\left\langle \vartheta'(t), \widetilde{\vartheta}(t)\right\rangle + \left\langle \vartheta(t), \widetilde{\vartheta}'(t)\right\rangle \end{pmatrix}\end{pmatrix} \\ &= 2\left\langle \vartheta'(t) + \varepsilon\left(t^{*}\vartheta''(t) + \widetilde{\vartheta}'(t)\right), \vartheta(t) + \varepsilon\left(t^{*}\vartheta'(t) + \widetilde{\vartheta}(t)\right)\right\rangle_{\mathbf{D}} \\ &= 2\left\langle \frac{d\overline{\vartheta}}{d\bar{t}}(\bar{t}), \overline{\vartheta}(\bar{t})\right\rangle_{\mathbf{D}} \\ &= 0 + \varepsilon 0\end{aligned}$$

olur. (4.5.5) eşitliğinin her iki tarafı $\overline{\vartheta}$ ile dual anlamda iç çarpıma tabi tutulursa, $\overline{b}(\overline{t}) = 0 + 0\varepsilon$ olarak bulunur. Son olarak,

$$\left\langle \overline{\vartheta}(\overline{t}), \overline{\gamma}(\overline{t}) \right\rangle_{\mathbf{D}} = \overline{0} \tag{4.5.8}$$

ve

$$\left\langle \overline{\vartheta}(\overline{t}), \overline{\gamma}(\overline{t}) \right\rangle_{\mathbf{D}} = \langle \vartheta(t), \gamma(t) \rangle + \varepsilon \begin{pmatrix} t^* \left(\langle \vartheta(t), \gamma'(t) \rangle + \langle \vartheta'(t), \gamma(t) \rangle \right) \\ + \langle \vartheta(t), \widetilde{\gamma}(t) \rangle + \left\langle \widetilde{\vartheta}(t), \gamma(t) \right\rangle \end{pmatrix}$$

biçiminde olup (4.5.8) eşitliğinin her iki tarafının $\overline{t}$ ye göre türevi alınırsa ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} \left\langle \vartheta'(t), \gamma(t) \right\rangle &= -\left\langle \vartheta(t), \gamma'(t) \right\rangle \\ &= \tau(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\langle \vartheta'(t), \gamma'(t) \right\rangle + \left\langle \vartheta''(t), \gamma(t) \right\rangle &= -\left\langle \vartheta'(t), \gamma'(t) \right\rangle - \left\langle \vartheta(t), \gamma''(t) \right\rangle \\ &= \tau'(t) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \left\langle \vartheta'(t), \widetilde{\gamma}(t) \right\rangle + \left\langle \widetilde{\vartheta}'(t), \gamma(t) \right\rangle &= -\left\langle \widetilde{\vartheta}(t), \gamma'(t) \right\rangle - \left\langle \vartheta(t), \widetilde{\gamma}'(t) \right\rangle \\ &= \widetilde{\tau}(t) \end{aligned}$$

elde edilir. (4.5.5) denkleminin her iki tarafı $\overline{\gamma}$ dual analitik vektör alanı ile dual iç çarpıma tabi tutulursa

$$\overline{c}(\overline{t}) = \tau(t) + \varepsilon \left(t^* \tau'(t) + \widetilde{\tau}(t) \right) = \overline{\tau}(\overline{t})$$

biçiminde elde edilir. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} \overset{\bullet}{\overline{\eta}}(\overline{t}) &= \vartheta(t)\kappa(t) + \varepsilon \left(t^* \frac{d}{dt} \left(\vartheta(t)\kappa(t) \right) + \vartheta(t)\widetilde{\kappa}(t) + \widetilde{\vartheta}(t)\kappa(t) \right) \\ &= \eta'(t) + \varepsilon \left(t^* \eta''(t) + \widetilde{\eta}'(t) \right), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\overset{\bullet}{\overline{\vartheta}}(\bar{t}) &= -\kappa(t)\eta(t)+\tau(t)\gamma(t)+\varepsilon\begin{pmatrix} t^{*}\frac{d}{dt}\left(-\kappa(t)\eta(t)+\tau(t)\gamma(t)\right) \\ -\widetilde{\kappa}(t)\eta(t)-\kappa(t)\widetilde{\eta}(t) \\ +\widetilde{\tau}(t)\gamma(t)+\tau(t)\widetilde{\gamma}(t) \end{pmatrix} \\
&= \vartheta'(t)+\varepsilon\left(t^{*}\vartheta''(t)+\widetilde{\vartheta}'(t)\right)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\overset{\bullet}{\overline{\gamma}}(\bar{t}) &= -\tau(t)\vartheta(t)+\varepsilon\left(t^{*}\frac{d}{dt}\left(-\tau(t)\vartheta(t)\right)-\tau(t)\widetilde{\vartheta}(t)-\widetilde{\tau}(t)\vartheta(t)\right) \\
&= \gamma'(t)+\varepsilon\left(t^{*}\gamma''(t)+\widetilde{\gamma}'(t)\right)
\end{aligned}
$$

şeklindedir ve bu ifadelerin matris formu

$$
\begin{bmatrix} \eta'(t) \\ \vartheta'(t) \\ \gamma'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(t) & 0 \\ -\kappa(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta(t) \\ \vartheta(t) \\ \gamma(t) \end{bmatrix},
$$

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \eta''(t) \\ \vartheta''(t) \\ \gamma''(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \kappa'(t) & 0 \\ -\kappa'(t) & 0 & \tau'(t) \\ 0 & -\tau'(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta(t) \\ \vartheta(t) \\ \gamma(t) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & \kappa(t) & 0 \\ -\kappa(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta'(t) \\ \vartheta'(t) \\ \gamma'(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \widetilde{\eta}'(t) \\ \widetilde{\vartheta}'(t) \\ \widetilde{\gamma}'(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \widetilde{\kappa}(t) & 0 \\ -\widetilde{\kappa}(t) & 0 & \widetilde{\tau}(t) \\ 0 & -\widetilde{\tau}(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta(t) \\ \vartheta(t) \\ \gamma(t) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & \kappa(t) & 0 \\ -\kappa(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\eta}(t) \\ \widetilde{\vartheta}(t) \\ \widetilde{\gamma}(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

biçimindedir.

Tanım 4.5.10. $\overline{\sigma}: \overline{I} \subseteq \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}^3$ birim hızlı bir **D**-eğrisi olsun. Bu durumda, $\overline{\sigma}(\overline{s})$ dual noktasından geçen ve dual normalleri $\overline{\gamma}, \overline{\eta}$ ve $\overline{\vartheta}$ olan dual düzlemlere sırasıyla verilen noktadaki dual oskülatör düzlem, dual normal düzlem ve dual rektifiyan düzlem adı verilir.

Teorem 4.5.11. $\mathbf{D}^3$ de bir **D**-eğrisinin dual doğru olması için gerek ve yeter şart bu eğrinin her noktasındaki dual eğrilik vektör alanının $\overrightarrow{\overline{0}}$ olmasıdır.

İspat. $\overline{\sigma}: \overline{I} \subseteq \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}^3$ birim hızlı bir **D**-eğrisi olsun. Eğer birim hızlı değilse birim hızlı hale getirilebilir. Ayrıca, $\overline{\sigma}$ eğrisinin her noktasındaki dual eğrilik vektör alanı $\overrightarrow{\overline{0}}$ olsun. Bu durumda, $\forall \overline{s} \in \overline{I}$ için $\overset{\bullet}{\overline{\eta}}(\overline{s}) = \overrightarrow{\overline{0}}$ biçimindedir ve

$$\begin{aligned} \overset{\bullet}{\overline{\eta}}(\overline{s}) &= \sigma''(s) + \varepsilon\left(s^*\sigma'''(s) + \widetilde{\sigma}''(s)\right) \\ &= \overrightarrow{0} + \varepsilon\overrightarrow{0} \end{aligned}$$

olduğundan $1 \leq i \leq 3$ için $\sigma_i''(s) = 0$ ve $\widetilde{\sigma}_i''(s) = 0$ elde edilir. O halde, aşağıdaki denklemi yazmak mümkündür:

$$\begin{aligned} \overset{\bullet\bullet}{\overline{\sigma}}_i(\overline{s}) &= \sigma_i''(s) + \varepsilon\left(s^*\sigma_i'''(s) + \widetilde{\sigma}_i''(s)\right) \\ &= 0 + \varepsilon 0. \end{aligned}$$

Dual fonksiyonlar için tanımlanan integral kavramı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \int \overset{\bullet\bullet}{\overline{\sigma}}_i(\overline{s})\, d\overline{s} &= \int \sigma_i''(s)\, ds + \varepsilon\left(s^*\sigma_i''(s) + \int \widetilde{\sigma}_i''(s)\, ds\right) \\ &= \sigma_i'(s) + \varepsilon\left(s^*\sigma_i''(s) + \widetilde{\sigma}_i'(s)\right) \\ &= v_i + \varepsilon v_i^* \quad (v_i, v_i^* \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

elde edilir. Tekrar yukarıdaki ifadenin integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} \int \overset{\bullet}{\overline{\sigma}}_i(\overline{s})\, d\overline{s} &= \int v_i ds + \varepsilon\left(s^* v_i + \int v_i^* ds\right) \\ &= \sigma_i(s) + \varepsilon\left(s^*\sigma_i'(s) + \widetilde{\sigma}_i(s)\right) \\ &= v_i s + c_i + \varepsilon\left(s^* v_i + v_i^* s + c_i^*\right) \end{aligned}$$

şeklindedir. O halde,

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}(\overline{s}) &= (\overline{\sigma}_1(\overline{s}), \overline{\sigma}_2(\overline{s}), \overline{\sigma}_3(\overline{s})) \\ &= c + s\overrightarrow{v} + \varepsilon\left(s^*\overrightarrow{v} + c^* + s\overrightarrow{v^*}\right)\end{aligned}$$

dual doğrusu elde edilir. Burada, $c = (c_1, c_2, c_3)$, $c^* = \left(c_1^*, c_2^*, c_3^*\right)$, $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ve $\overrightarrow{v^*} = \left(v_1^*, v_2^*, v_3^*\right)$ biçimindedir.
Tersine, $\overline{\sigma}$ bir dual doğru ise $\overset{\bullet}{\overline{\eta}}(\overline{s}) = \overrightarrow{0}$ olduğu kolaylıkla görülmektedir. □

Açıklama 11. $\overline{\sigma} : \overline{I} \subseteq \mathbf{D} \to \mathbf{D}^3$ birim hızlı olmayan bir **D**-eğrisi olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\left\|\overset{\bullet}{\overline{\sigma}}(\overline{t})\right\|_{\mathbf{D}} &= \|\sigma'(t)\| + \varepsilon\left(t^*\frac{d}{dt}(\|\sigma'(t)\|) + \frac{\langle\sigma'(t), \widetilde{\sigma}'(t)\rangle}{\|\sigma'(t)\|}\right) \\ &\neq 1 + \varepsilon 0\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu $\overline{\sigma}$ eğrisinin birim hızlı hale getirilmiş hali $\overline{\beta}$ olsun. O halde,

$$\overline{\beta} = \overline{\sigma} \circ \overline{k} : \overline{J} \subseteq \mathbf{D} \to \mathbf{D}^3$$

biçiminde olup $\left\|\overset{\bullet}{\overline{\beta}}(\overline{s})\right\|_{\mathbf{D}} = 1 + \varepsilon 0$ dır. Burada,

$$\begin{aligned}\overline{k} &: \overline{J} \subseteq \mathbf{D} \to \overline{I} \subseteq \mathbf{D} \\ \overline{s} &\to \overline{k}(\overline{s}) = \overline{t}\end{aligned}$$

şeklinde dual analitik bir fonksiyon ve tersi var, tersi de dual analitik olan bir fonksiyon olduğunu biliyoruz. Böylece, $\overline{\beta}$ eğrisinin dual Frenet formüllerine $\overline{\eta}, \overline{\vartheta}, \overline{\gamma}$, dual eğrilik ve dual burulma fonksiyonlarına $\overline{\kappa}$ ve $\overline{\tau}$ denilirse, $\overline{\sigma}$ eğrisinin dual Frenet formülleri ile dual eğrilik ve dual burulma fonksiyonları $\overline{\eta} \circ \overline{k}^{-1}, \overline{\vartheta} \circ \overline{k}^{-1}, \overline{\gamma} \circ \overline{k}^{-1}, \overline{\kappa} \circ \overline{k}^{-1}$ ve $\overline{\tau} \circ \overline{k}^{-1}$ şeklindedir.

Teorem 4.5.12. $\overline{\sigma} : \overline{I} \subseteq \mathbf{D} \to \mathbf{D}^3$ bir **D**-eğrisi ve $\overline{\kappa} \in \mathbf{D}^+$ olsun.

$$\begin{aligned}\left\|\overset{\bullet}{\overline{\sigma}}(\overline{t})\right\|_{\mathbf{D}} &= \|\sigma'(t)\| + \varepsilon\left(t^*\frac{d}{dt}(\|\sigma'(t)\|) + \frac{\langle\sigma'(t), \widetilde{\sigma}'(t)\rangle}{\|\sigma'(t)\|}\right) \\ &= v + \varepsilon v^* \\ &= \overline{v}\end{aligned}$$

olmak üzere,

$i)\ \dfrac{\overset{\bullet}{\overline{\eta}}}{\overline{v}}=\overline{\kappa}\overline{\vartheta},$

$ii)\ \dfrac{\overset{\bullet}{\overline{\vartheta}}}{\overline{v}}=-\overline{\kappa}\overline{\eta}+\overline{\tau}\overline{\gamma},$

$iii)\ \dfrac{\overset{\bullet}{\overline{\gamma}}}{\overline{v}}=-\overline{\tau}\overline{\vartheta}$

eşitlikleri mevcuttur.

Sonuç 4.5.3. $\overline{\sigma}:\bar{I}\subseteq\mathbf{D}\to\mathbf{D}^3$ birim hızlı olmayan bir **D**-eğrisi olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\left\|\overset{\bullet}{\overline{\sigma}}(\bar{t})\right\|_{\mathbf{D}} &= \|\sigma'(t)\|+\varepsilon\left(t^*\frac{d}{dt}(\|\sigma'(t)\|)+\frac{\langle\sigma'(t),\widetilde{\sigma}'(t)\rangle}{\|\sigma'(t)\|}\right)\\ &\neq 1+\varepsilon 0\end{aligned}$$

şeklindedir. O halde, bu eğrinin birim dual teğet vektör alanı ve birim dual binormal vektör alanı sırasıyla

$$\begin{aligned}\overline{\eta}(\bar{t}) &= \eta(t)+\varepsilon\left(t^*\eta'(t)+\widetilde{\eta}(t)\right)\\ &= \eta+\varepsilon\eta^0\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\overline{\gamma}(\bar{t}) &= \gamma(t)+\varepsilon\left(t^*\gamma'(t)+\widetilde{\gamma}(t)\right)\\ &= \gamma+\varepsilon\gamma^0\end{aligned}$$

biçiminde olup

$$\begin{aligned}\eta(t) &= \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|},\\ \widetilde{\eta}(t) &= \frac{\widetilde{\sigma}'(t)\|\sigma'(t)\|^2-\langle\sigma'(t),\widetilde{\sigma}'(t)\rangle\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|^3},\\ \gamma(t) &= \frac{\sigma'(t)\times\sigma''(t)}{\|\sigma'(t)\times\sigma''(t)\|},\\ \widetilde{\gamma}(t) &= -\frac{\langle\sigma'(t)\times\sigma''(t),\sigma'(t)\times\widetilde{\sigma}''(t)+\widetilde{\sigma}'(t)\times\sigma''(t)\rangle(\sigma'(t)\times\sigma''(t))}{\|\sigma'(t)\times\sigma''(t)\|^3}\\ &\quad+\frac{\sigma'(t)\times\widetilde{\sigma}''(t)+\widetilde{\sigma}'(t)\times\sigma''(t)}{\|\sigma'(t)\times\sigma''(t)\|}\end{aligned}$$

şeklindedir. Yukarıda bulduğumuz dual teğet ile dual binormal vektör alanlarını dikkate aldığımızda, dual asal normal vektör alanı

$$\begin{aligned}\overline{\vartheta}(\bar{t}) &= \vartheta(t)+\varepsilon\left(t^{*}\vartheta'(t)+\widetilde{\vartheta}(t)\right)\\ &= \gamma(t)\times\eta(t)+\varepsilon\begin{pmatrix} t^{*}\frac{d}{dt}(\gamma(t)\times\eta(t)) \\ +\gamma(t)\times\widetilde{\eta}(t)+\widetilde{\gamma}(t)\times\eta(t)\end{pmatrix}\\ &= \vartheta+\varepsilon\vartheta^{0}\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Burada kolaylıkla görülmektedir ki $\|\overline{\eta}(\bar{t})\|_{\mathbf{D}}=\|\overline{\gamma}(\bar{t})\|_{\mathbf{D}}=\left\|\overline{\vartheta}(\bar{t})\right\|_{\mathbf{D}}=1+\varepsilon 0$ şeklindedir. Son olarak, dual eğrilik ve dual burulma fonksiyonlarının denklemi

$$\begin{aligned}\overline{\kappa}(\bar{t}) &= \kappa(t)+\varepsilon\left(t^{*}\kappa'(t)+\widetilde{\kappa}(t)\right)\\ &= \kappa+\varepsilon\kappa^{0}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\overline{\tau}(\bar{t}) &= \tau(t)+\varepsilon\left(t^{*}\tau'(t)+\widetilde{\tau}(t)\right)\\ &= \tau+\varepsilon\tau^{0}\end{aligned}$$

biçiminde olup

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \frac{\|\sigma'(t)\times\sigma''(t)\|}{\|\sigma'(t)\|^{3}},\\ \widetilde{\kappa}(t) &= \frac{\left\langle\sigma'(t)\times\sigma''(t),\sigma'(t)\times\widetilde{\sigma}''(t)+\widetilde{\sigma}'(t)\times\sigma''(t)\right\rangle}{\|\sigma'(t)\times\sigma''(t)\|\,\|\sigma'(t)\|^{3}}\\ &\quad-\frac{3}{\|\sigma'(t)\|^{5}}\left\langle\sigma'(t),\widetilde{\sigma}'(t)\right\rangle\left(\|\sigma'(t)\times\sigma''(t)\|\right),\\ \tau(t) &= \frac{\left\langle\sigma'(t)\times\sigma''(t),\sigma'''(t)\right\rangle}{\|\sigma'(t)\times\sigma''(t)\|^{2}}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\widetilde{\tau}(t) &= \frac{\left\langle\sigma'(t)\times\sigma''(t),\widetilde{\sigma}'''(t)\right\rangle+\left\langle\sigma'''(t),\sigma'(t)\times\widetilde{\sigma}''(t)+\widetilde{\sigma}'(t)\times\sigma''(t)\right\rangle}{\|\sigma'(t)\times\sigma''(t)\|^{2}}\\ &\quad-2\frac{\left\langle\sigma'(t)\times\sigma''(t),\sigma'''(t)\right\rangle\left\langle\sigma'(t)\times\sigma''(t),\sigma'(t)\times\widetilde{\sigma}''(t)+\widetilde{\sigma}'(t)\times\sigma''(t)\right\rangle}{\|\sigma'(t)\times\sigma''(t)\|^{4}}\end{aligned}$$

şeklinde elde edilirler. Böylece, birim hızlı olmayan bir **D**-eğrisinin dual Frenet formülleri ile dual eğrilik ve dual burulma fonksiyonlarının denklemlerini elde ettik.

4.6. Dual Kovaryant Türev

Tanım 4.6.1. $\overline{p} = p + \varepsilon p^* \in \mathbf{D}^n$ bir dual nokta, $\overrightarrow{\overline{v}} = \overrightarrow{v} + \varepsilon \overrightarrow{v^*} \in \mathbf{D}^n$ bir dual vektör ve $\overline{W} \in \chi(\mathbf{D}^n)$ bir dual vektör alanı olsun. $\overline{\sigma} : \mathbf{D} \to \mathbf{D}^n$, $\overline{\sigma}(\overline{t}) = \overline{p} + \overline{t}\,\overrightarrow{\overline{v}}$ bir dual doğru olmak üzere, $\overline{W}$ dual vektör alanını $\overline{\sigma}$ eğrisine kısıtlayalım. Bu durumda,

$$\overline{D}_{\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}} \overline{W} = \frac{d}{d\overline{t}} \overline{W}(\overline{\sigma}(\overline{t})) \mid_{\overline{t}=\overline{0}}$$

dual tanjant vektörüne $\overline{W}$ dual vektör alanının $\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}$ dual tanjant vektörüne göre dual kovaryant türevi denir.

Açıklama 12. $\overline{W} = W + \varepsilon W^* \in \chi(\mathbf{D}^n)$ bir dual vektör alanı olsun. Burada, $\overline{W} = (\overline{w}_1, \overline{w}_2, ..., \overline{w}_n)$ biçiminde olup $1 \leq i \leq n$ için $\overline{w}_i : \overline{U} \subseteq \mathbf{D}^n \to \mathbf{D}$ biçimindeki dual analitik fonksiyonlar

$$\overline{w}_i(\overline{x}) = w_i(x) + \varepsilon \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^* \frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \widetilde{w}_i(x) \right)$$

şeklindedir. $\overline{\sigma} : \mathbf{D} \to \mathbf{D}^n$, $\overline{\sigma}(\overline{t}) = \overline{p} + \overline{t}\,\overrightarrow{\overline{v}}$ bir dual doğru olmak üzere,

$$\begin{aligned} \overline{w}_i(\overline{\sigma}(\overline{t})) &= (w_i \circ \sigma)(t) \\ &\quad + \varepsilon \left(t^* (w_i \circ \sigma)'(t) + \left\langle \widetilde{\sigma}(t), \sum_{j=1}^{n} \left(w_{ix_j} \circ \sigma \right)(t) \overrightarrow{e}_j \right\rangle + (\widetilde{w}_i \circ \sigma)(t) \right) \end{aligned}$$

olup bu dual analitik fonksiyonunun $\overline{t}$ dual değişkene göre türevi alınır ve $\overline{t} = \overline{0}$ noktasındaki değeri yerine yazılırsa

$$\frac{d}{d\overline{t}} \overline{w}_i(\overline{\sigma}(\overline{t})) \mid_{\overline{t}=\overline{0}} = \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[w_i] + \varepsilon \left(\sum_{j=1}^{n} p_j^* \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}} \left[w_{ix_j} \right] + \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}} [\widetilde{w}_i] + \overrightarrow{v^*}_{\widetilde{p}} [w_i] \right)$$

dir. Burada, $\overline{\sigma}(\overline{t}) = \sigma(t) + \varepsilon (t^* \sigma'(t) + \widetilde{\sigma}(t))$ biçimindedir. Eğer

$$D_{\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}} W = \left(\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[w_1], \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[w_2], ..., \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[w_n] \right)$$

denilirse

$$\begin{aligned}\overline{D}_{\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}}\overline{W} &= \frac{d}{d\overline{t}}\overline{W}\left(\overline{\sigma}\left(\overline{t}\right)\right)|_{\overline{t}=\overline{0}} \\ &= D_{\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}}W+\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}p_j^* D_{\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}}W_{x_j}+D_{\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}}\widetilde{W}+D_{\overrightarrow{v^*}_{\widetilde{p}}}W\right)\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca, $\overline{D}_{\overline{V}(\overline{p})}\overline{W}$ dual tanjant vektörü $\left(\overline{D}_{\overline{V}}\overline{W}\right)(\overline{p})$ biçiminde yazılabilir.

Tanım 4.6.2. $\overline{W},\overline{V}\in\chi\left(\mathbf{D}^n\right)$ iki dual vektör alanı olmak üzere,

$$\overline{D}_{\overline{V}}\overline{W}=D_V W+\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^*\left(D_V W\right)_{x_j}+D_V\widetilde{W}+D_{\widetilde{V}}W\right)$$

şeklinde tanımlı dual (analitik) vektör alanıdır ve bu vektör alanına $\overline{W}$ dual vektör alanının $\overline{V}$ dual vektör alanına göre dual kovaryant türevi denir.

Teorem 4.6.3. $\forall\overline{a},\overline{b}\in\mathbf{D}$, $\overline{\xi}\in C\left(\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n,\mathbf{D}\right)$, $\forall\overline{Y},\overline{Z}\in\chi\left(\mathbf{D}^n\right)$ ve $\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}$, $\overrightarrow{\overline{w}}_{\overline{p}}\in\{\overline{p}\}\times\mathbf{D}^n$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$i)$ $\overline{D}_{\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}}\left(\overline{a}\overline{Y}+\overline{b}\overline{Z}\right)=\overline{a}\overline{D}_{\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}}\overline{Y}+\overline{b}\overline{D}_{\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}}\overline{Z}$.

$ii)$ $\overline{D}_{\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}}\left(\overline{\xi}\overline{Y}\right)=\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}\left[\overline{\xi}\right]\overline{Y}\left(\overline{p}\right)+\overline{\xi}\left(\overline{p}\right)\overline{D}_{\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}}\overline{Y}$.

$iii)$ $\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}\left[\left\langle\overline{Y},\overline{Z}\right\rangle_{\mathbf{D}}\right]=\left\langle\overline{D}_{\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}}\overline{Y},\overline{Z}\left(\overline{p}\right)\right\rangle_{\mathbf{D}}+\left\langle\overline{Y}\left(\overline{p}\right),\overline{D}_{\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}}\overline{Z}\right\rangle_{\mathbf{D}}$.

$iv)$ $\overline{D}_{\overline{a}\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}+\overline{b}\overrightarrow{\overline{w}}_{\overline{p}}}\overline{Y}=\overline{a}\overline{D}_{\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}}\overline{Y}+\overline{b}\overline{D}_{\overrightarrow{\overline{w}}_{\overline{p}}}\overline{Y}$.

İspat. Her $\overline{Y},\overline{Z}\in\chi\left(\mathbf{D}^n\right)$ için, dual analitik vektör alanlarının

$$\overline{Y}\left(\overline{x}\right)=Y\left(x\right)+\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^*Y_{x_j}+\widetilde{Y}\left(x\right)\right)$$

ve

$$\overline{Z}\left(\overline{x}\right)=Z\left(x\right)+\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^*Z_{x_j}+\widetilde{Z}\left(x\right)\right)$$

şeklinde yazıldığını biliyoruz.

$i)$ $\forall \overline{a},\overline{b}\in \mathbf{D}$, $\forall \overline{Y},\overline{Z}\in \chi\left(\mathbf{D}^{n}\right)$ ve $\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}}\in\{\overline{p}\}\times \mathbf{D}^{n}$ için

$$\begin{aligned}
\overline{D}_{\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}}}\left(\overline{a}\overline{Y}+\overline{b}\overline{Z}\right) &= D_{\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}}\left(aY+bZ\right)\\
&\quad +\varepsilon\left(\begin{array}{c}\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^{*} D_{\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}}\left(aY+bZ\right)_{x_j}+D_{\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}}\left(a\widetilde{Y}+a^{*}Y+b\widetilde{Z}+b^{*}Z\right)\\ +D_{\overrightarrow{v^{*}}_{\widetilde{p}}}\left(aY+bZ\right)\end{array}\right)\\
&= aD_{\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}}Y+bD_{\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}}Z\\
&\quad +\varepsilon\left(\begin{array}{c}\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^{*}\left(aD_{\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}}Y_{x_j}+bD_{\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}}Z_{x_j}\right)+aD_{\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}}\widetilde{Y}+a^{*}D_{\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}}Y\\ +bD_{\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}}\widetilde{Z}+b^{*}D_{\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}}Z+aD_{\overrightarrow{v^{*}}_{\widetilde{p}}}Y+bD_{\overrightarrow{v^{*}}_{\widetilde{p}}}Z\end{array}\right)
\end{aligned}$$

şeklinde olup düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\overline{D}_{\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}}}\left(\overline{a}\overline{Y}+\overline{b}\overline{Z}\right) &= \left(a+\varepsilon a^{*}\right)\left(D_{\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}}Y+\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}p_j^{*}D_{\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}}Y_{x_j}+D_{\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}}\widetilde{Y}+D_{\overrightarrow{v^{*}}_{\widetilde{p}}}Y\right)\right)\\
&\quad +\left(b+\varepsilon b^{*}\right)\left(D_{\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}}Z+\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}p_j^{*}D_{\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}}Z_{x_j}+D_{\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}}\widetilde{Z}+D_{\overrightarrow{v^{*}}_{\widetilde{p}}}Z\right)\right)\\
&= \overline{a}\overline{D}_{\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}}}\overline{Y}+\overline{b}\overline{D}_{\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}}}\overline{Z}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$iii)$ $\forall \overline{Y},\overline{Z}\in \chi\left(\mathbf{D}^{n}\right)$ için,

$$\begin{aligned}
\left\langle \overline{Y}\left(\overline{x}\right),\overline{Z}\left(\overline{x}\right)\right\rangle_{\mathbf{D}} &= \left\langle Y\left(x\right),Z\left(x\right)\right\rangle\\
&\quad +\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^{*}\left(\left\langle Y,Z\right\rangle\right)_{x_j}+\left\langle Y\left(x\right),\widetilde{Z}\left(x\right)\right\rangle+\left\langle \widetilde{Y}\left(x\right),Z\left(x\right)\right\rangle\right)
\end{aligned}$$

şeklinde olup

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}}\left[\left\langle \overline{Y},\overline{Z}\right\rangle_{\mathbf{D}}\right] &= \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[\left\langle Y,Z\right\rangle\right]\\
&\quad +\varepsilon\left(\begin{array}{c}\sum\limits_{j=1}^{n}p_j^{*}\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[\left\langle Y,Z\right\rangle_{x_j}\right]+\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[\left\langle Y,\widetilde{Z}\right\rangle+\left\langle \widetilde{Y},Z\right\rangle\right]\\ +\overrightarrow{v^{*}}_{\widetilde{p}}\left[\left\langle Y,Z\right\rangle\right]\end{array}\right)
\end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. Bu denklem açılırsa

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}}\left[\left\langle \overline{Y},\overline{Z}\right\rangle_{\mathbf{D}}\right] &= \left\langle D_{\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}}Y, Z\left(x\left(\widetilde{p}\right)\right)\right\rangle + \left\langle Y\left(x\left(\widetilde{p}\right)\right), D_{\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}}Z\right\rangle \\
&\quad +\varepsilon\left(\begin{array}{c}
\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^{*}\left(\begin{array}{c}
\left\langle D_{\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}}Y_{x_j}, Z\left(x\left(\widetilde{p}\right)\right)\right\rangle + \left\langle Y_{x_j}, D_{\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}}Z\right\rangle \\
+\left\langle D_{\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}}Y, Z_{x_j}\right\rangle + \left\langle Y\left(x\left(\widetilde{p}\right)\right), D_{\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}}Z_{x_j}\right\rangle
\end{array}\right) \\
+\left\langle D_{\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}}Y, \widetilde{Z}\left(x\left(\widetilde{p}\right)\right)\right\rangle + \left\langle Y\left(x\left(\widetilde{p}\right)\right), D_{\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}}\widetilde{Z}\right\rangle \\
+\left\langle D_{\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}}\widetilde{Y}, Z\left(x\left(\widetilde{p}\right)\right)\right\rangle + \left\langle \widetilde{Y}\left(x\left(\widetilde{p}\right)\right), D_{\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}}Z\right\rangle \\
+\left\langle D_{\overrightarrow{v^{*}}_{\widetilde{p}}}Y, Z\left(x\left(\widetilde{p}\right)\right)\right\rangle + \left\langle Y\left(x\left(\widetilde{p}\right)\right), D_{\overrightarrow{v^{*}}_{\widetilde{p}}}Z\right\rangle
\end{array}\right)
\end{aligned}
$$

biçiminde olup dual iç-çarpım fonksiyonu göz önüne alınırsa,

$$
\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}}\left[\left\langle \overline{Y},\overline{Z}\right\rangle_{\mathbf{D}}\right] = \left\langle \overline{D}_{\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}}}\overline{Y}, \overline{Z}\left(\overline{p}\right)\right\rangle_{\mathbf{D}} + \left\langle \overline{Y}\left(\overline{p}\right), \overline{D}_{\overrightarrow{\widetilde{v}}_{\overline{p}}}\overline{Z}\right\rangle_{\mathbf{D}}
$$

eşitliği elde edilir. □

5 . SONUÇ

Bu tezde, $\mathbb{R}^2$ üzerinde tanımlı olan sözlük sıralama bağıntısından yararlanılarak dual sayılar sistemi üzerinde tanımlanan sıralama bağıntısının tüm özellikleri detaylı bir şekilde incelenmiş ve ayrıca, bazı özel eşitsizlikler bu sıralama bağıntısı kullanılarak dual sayılar sisteminde ele alınmıştır. Daha sonra, bu sıralama bağıntısı kullanılarak bazı topolojiler elde edilmiş ve elde edilen bu topolojiler karşılaştırılmıştır. Diğer yandan, dual analitik fonksiyonlar detaylı bir şekilde ele alınmış ve tüm eksiklikleri giderilmiştir.

Son olarak, diferensiyel geometride önemli bir yere sahip olan yöne göre türev, vektör alanı, türev dönüşümü, lie çarpımı, eğri ve kovaryant türev gibi kavramlar verilen teoremlerle de desteklenerek dual uzayda detaylı bir şekilde incelenmiştir.

İleri bir çalışma olarak, dual sayılar sistemi üzerinde farklı bir sıralama bağıntısı tanımlanıp bu tezdeki teoremler bu yeni bağıntıya göre tekrar incelenebilir. Ayrıca, bu yeni sıralama bağıntısı yardımıyla topolojiler oluşturulabilir ve bu tezdeki topolojiler ile karşılaştırılabilir. Diğer yandan, bu tez dual uzayın temel yapılarını ele aldığı için daha sonra bu kavramlar kullanılarak diferensiyel geometrinin farklı yapıları dual uzayda araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Ponte, J.P., The history of the concept of function and some educational applications, The Mathematics, 3(2), 1992.

[2] Bayazit, İ., Aksoy, Y., Fonksiyon kavramı: epistemolojisi, algı türleri ve zihinsel gelişimiErciyes University Journal of the Enstitute of Science and Technology, 29(1), 1-9, 2013.

[3] Zembat, İ.Ö., Özmantar, M.F., Bingölbali, E., Şandır, H., Delice, A., Tanımları ve Tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar(1.baskı), Ankara:Pegem-Akademi, 2013.

[4] Clifford, W.K., Preliminary sketch of biquaternions. Proc. London Math. Soc. 4, 381-395, 1873.

[5] Katelnikov, A.P., Screw calculus and some of its applications in geometry and mechanics. Annals of the Imperial University, Kazan, 1895.

[6] Study, E., Geometrie der dynamen. Druck und Verlag von B.G. Teubner, Leibzing, 1903.

[7] Hacısalihoğlu, H.H., Study map of a circle. Journal of the Fac. Sci. of K.T.Ü. I, 69-80, 1977.

[8] Cheng, H.H., Programming with dual numbers and its applications in mechanisms design. Eng. Comput. 10 (4): 212-229, 1994.

[9] Cheng, H.H., Thompson, S., Computer-aided displacement analysis of spatial mechanisms using the C^H programming language. Adv. Eng. Software 23 (3): 163-172, 1995.

[10] Wald, R.M., A new type of gauge invariance for a collection of massless spin-2 field, II. Geometrical interpretation. Class. Quant. Grav. 4 (5): 1279-1316, 1987.

[11] McCarthy, J.M., An introduction to theoretical kinematics. The MIT Press Cambridge, London, 1990.

[12] Gungor, M.A., Ersoy, S., Tosun, M., Dual Lorentzian spherical motions and dual Euler-Savary formula. European Journal of Mechanics A/Solids 28, 820-826, 2009.

[13] Fink, A.M., An essay on the history of inequalities. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 249, 118-134, 2000.

[14] Halmani, E., Liljedahl, P., Inequalities in the history of mathematics: From Peculiarities to a Hard Discipline. GeoGebra International Journal of Romania, 4(2), 43-56, 2015.

[15] Beckenbach, E.F., Bellman, R., Inequalities. Springer-Verlag, New York, 1961.

[16] Hardy, G.E., Littlewood, J.E., Polya, G., Inequalities. Cambridge Univ. Press. Cambridge, UK, 1934.

[17] Mitrinovic, D.S., Analytic Inequalities. Springer-Verlag, New York, 1970.

[18] Munkres, J.R., Topology. The Second Edition, ISBN 0-13-181629-2, 2000.

[19] Herman, J., Kucera, R., Simsa, J., Equations and inequalities: Elementary problems and theorems in algebra and number theory, Springer, 2000.

[20] Hacısalihoğlu, H.H., Lineer Cebir. Gazi Üniversitesi Basın-Yayın Yüksekokulu Matbaası Müdürlüğü, Ankara, 1985.

[21] Sabuncuoğlu, A., Lineer Cebir. Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim Danışmanlığı Tic. Ltd. Şti., Ankara, 2014.

[22] Walenza, J.R., Linear algebra. Springer-Verlag, 1993.

[23] Sabuncuoğlu, A., Diferensiyel Geometri. Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim Danışmanlığı Tic. Ltd. Şti., Ankara, 2014.

[24] Hacısalihoğlu, H.H., Diferensiyel Geometri. Gazi Üniversitesi Basın-Yayın Yüksekokulu Basımevi, Ankara, 1983.

[25] O'Neill, B., Elementary differential geometry, Elsiver, USA, 2006.

[26] Thomas, G.B.T., Weir, M.D., Hass, J.R., Thomas' Calculus. Pearson Education Inc., 2011.

[27] Hacısalihoğlu, H.H., Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi. Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara, 1983.

[28] Önder, M., Uğurlu, H.H., Normal and spherical curves in dual space $\mathbf{D}^3$. Mediterranean Journal of Mathematics, 10, 1527-1537, 2013.

[29] Li, Y., Pei, D., Evolutes of dual spherical curves for ruled surfaces. Mathematical Methods in the Applied Science 39 (11): 3005-3015, 2016.

[30] Veldkamp, G.R., On the use of dual numbers, vectors and matrices in instantaneous spatial kinematics. Mechanism and Machine Theory, 2, 141-156, 1976.

[31] Larson, R.E., Hostetler, R.P., Edward, B.H., Calculus with analytic geometry. D.C. Heath and Conpany, 1990.

[32] Aktaş, B., Dual Yüzeyler ve Üzerindeki Bazı Özel Eğriler. Doctorial Dissertation, Kırıkkale Üniversitesi, Kırıkkale, 2020.

[33] Dimentberg, F.M., The screw calculus and its applications to mechanics. Foreign Technology Division, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1965.

[34] Gu, Y.-L., Luh, J.Y.S., Dual number transformations and its applications to robotics. IEEE Journal of Robotics and Automation, RA-3, 615-623, 1987.

[35] Sabuncuoğlu, A., Analitik Geometri. Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim Danışmanlığı Tic. Ltd. Şti., Ankara, 2007.

[36] Durmaz, O., Aktaş, B., Gündoğan, H., New Approaches on dual space. Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics 35 (2): 437-458, 2020.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Olgun DURMAZ

Doğum Tarihi :

Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise **:** Ödemiş Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi, Haziran 2008

Lisans **:** Kırıkkale Üniversitesi, Matematik Bölümü, Haziran 2013

Yüksek Lisans **:** Kırıkkale Üniversitesi, FBE, Haziran 2015

Çalıştığı Kurum ve Yıllar :

Atatürk Üniversitesi, Matematik Bölümü (2018-)

Yayınları:

1.) Durmaz, O., Aktaş, B., Gündoğan, H., New Approaches on dual space. Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics 35 (2): 253-272, 2020.

Araştırma Alanları **:** Dual Uzay, Hareket Geometrisi, Lorentz-Minkowski Uzayları