T.C.

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEK DEĞERLİ VE KÜME DEĞERLİ P-BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

ALİ ERDURAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. İSHAK ALTUN

KIRIKKALE-2022

ALİ ERDURAN tarafından hazırlanan “TEK DEĞERLİ VE KÜME DEĞERLİ P-BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ” adlı tez çalışması, aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. İshak ALTUN

Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

İmza……………..

Başkan: Prof. Dr. Hakan ŞİMŞEK

Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

İmza……………..

Üye: Doç. Dr. Murat OLGUN

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

İmza……………..

Üye: Doç. Dr. Osman KEÇİLİOĞLU

Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

İmza……………..

Üye: Doç. Dr. Kadir KANAT

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

İmza……………..

Tez Savunma Tarihi: 02.02.2022

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. Recep ÇALIN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYANI

Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Ali ERDURAN

02.02.2022

ÖZET

TEK DEĞERLİ VE KÜME DEĞERLİ P-BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

ERDURAN, Ali
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Doktora Tezi
Danışman: Prof. Dr. İshak ALTUN
Şubat 2022, 62 sayfa

Bu tez çalışması üç temel kısımdan oluşmaktadır, birinci kısımda metrik sabit nokta teori alanı ile ilgili genel bilgiler verildikten sonra çalışmalarımızda temel büzülme tipi olan P- büzülme, ayrıca sabit noktada bilinen ve çalışmalarımızda temel olarak kullandığımız teoremler verildi.

İkinci kısımda metrik uzayda tek değerli ve küme değerli P- büzülme dönüşümler için sabit nokta teoremi ve sonuçları, ayrıca konveks metrik uzayda nonself dönüşümler için sabit nokta teoremi ve sonuçları, en son olarak da yeni bir uzay olarak çalışılan F-metrik ile ilgili temel tanım ve teoremler verildikten sonra P- büzülme üzerine sabit nokta teoremi sonuçları verildi.

Son kısım tarışma ve sonuç kısmı olup tez çalışmamız ile ilgili son değerlendirmeler yapıldı.

Anahtar Kelimeler: Sabit Nokta, P-büzülme, Küme Değerli Dönüşüm, Self Dönüşüm, None self Dönüşüm, Konveks Metrik Uzay.

ABSTRACT

SOME FIXED POINT THEOREMS FOR SINGLEVALUED AND
MULTIVALUED P-CONTRACTION MAPPINGS

ERDURAN, Ali
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, Ph. D. Thesis
Supervisor: Prof. Dr. İshak ALTUN
February 2022, 62 pages

This thesis consists of three main parts. In the first part, after giving general information about the metric fixed point theory area, P- contraction , which is the basic contraction type in our studies, and also the theorems that are known at the fixed point and used as the basis in our studies are given.

In the second part, the fixed point theorem and its results for the single-valued and multivalued P- contraction functions are given in the metric space, as well as the fixed point theorem and its results for the nonself functions are given in the convex metric space, and finally After giving the related basic definitions and theorems in the F- metric studied as a new space. The results of the fixed point theorem on P- contraction are given in the F- metric space.

The last part is the discussion and conclusion part and the final evaluations about our thesis.

Key Words: Fixed point, P-contraction, Multivauled function, Self function, none self function, Convex metric space.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca; tecrübe ve katkıları ile beni yönlendiren, tez konusunun oluşmasında ve hazırlanmasında hiçbir zaman yardımını eksik etmeyen değerli hocam, Sayın Prof. Dr. İshak ALTUN'a, desteğini hiçbir zaman eksik etmeyen sevgili eşime, anneme, babama ve aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

(M,p)	Metrik uzay
(M,D)	F- Metrik uzay
$P_C(M)$	M nin tüm kapalı alt kümeleri sınıfı
$P_B(M)$	M nin tüm sınırlı alt kümeleri sınıfı
$P_{CB}(M)$	M nin tüm kapalı ve sınırlı alt kümeleri sınıfı
$P_K(M)$	M nin tüm kompakt alt kümeleri sınıfı
$C(M)$	M nin tüm büzülebilir dönüşümleri sınıfı
$P(M)$	M nin tüm P-büzülebilir dönüşümleri sınıfı
h_p	Hausdorff-Pompeiu metrik

1 . GİRİŞ

Metrik sabit nokta teoremi kavramı ilk olarak 1922 yılında Banach'ın [25] tam metrik uzayda büzülme prensibini kullanarak self dönüşümlerin sabit noktasının varlığını ve tekliğini göstermesiyle ortaya çıkmıştır. Bu teoremdeki tamlık koşulu kaldırılamaz bir şarttır. Gerçekten, $M = [0,2)$ üzerinde $p(\zeta,\eta) = |\zeta - \eta|$ metriği tanımlı olsun ve $\Upsilon(\zeta) = \frac{\zeta}{2} + 1$ olarak alalım. (M,p) metrik uzayı tam değil, büzülme koşulu sağlanır, ancak Υ nun sabit noktası yoktur.

Bu teoremden sonra matematikçiler iki önemli teknik üzerine yoğunlaşıp sabit nokta teoremi çalışmalarını geliştirmişlerdir. Birincisi, teoremdeki metrik uzay kavramı yerine quasi metrik uzay [16], D metrik uzay [15], Kısmi metrik uzay [11], Fuzzy metrik uzay [12], JS metrik uzay [13] gibi genelleştirilmiş metrik uzaylar kullanarak yeni teorem ve sonuçlar sağlamışlardır. İkincisi ise Υ dönüşümü üzerindeki büzülme şartını değiştirerek hangi koşullarda sabit noktasının var olduğunu ve bu sabit noktanın tek olup olmadığını araştırarak yeni teorem ve sonuçlar sağlamışlardır. Örneğin; Kannan [17] tam metrik uzayda $c \in [0, \frac{1}{2})$ olmak üzere

$$p(\Upsilon\zeta, \Upsilon\eta) \leq c[p(\zeta, \Upsilon\zeta) + p(\eta, \Upsilon\eta)]$$

büzülme koşulunu kullanarak Υ nun sabit noktasının varlığını göstermiştir. Hemen burada belirtelim ki Banach büzülme koşulunu sağlayan her Υ dönüşümü süreklidir, ancak Kannan büzülme koşulunu sağlayan Υ dönüşümü sürekli olmak zorunda değildir. Ayrıca Subrahmanyam 1975 te Kannan büzülme koşulunun (M,p) metrik uzayının tamlığını karakterize ettiğini göstermiştir. Yani, (M,p) tam metrik uzaydır ancak ve ancak Kannan büzülme koşulunu sağlayan her Υ dönüşümü sabit noktaya sahiptir. Literatürde metrik uzayın tamlığını karakterize eden farklı büzülme koşulları vardır. Bunlarda biri Tomanari SUZUKİ'nin verdiği büzülme koşulu bir diğeri de Kirk'in verdiği büzülme koşuludur. Bakınız [21] ve [27].

Ciric [18] 1974 te $c \in [0,1)$ olmak üzere

$$p(\Upsilon\zeta,\Upsilon\eta) \leq c\max\{p(\zeta,\eta), p(\zeta,\Upsilon\zeta), p(\eta,\Upsilon\eta), p(\zeta,\Upsilon\eta), p(\eta,\Upsilon\zeta)\}$$

quasi büzülme koşulunu vererek literatürde bilinen bir çok büzülme şartını genellemiştir. Berinde [19] 2004 te $\theta \in [0,1)$ ve $L \geq 0$ olmak üzere

$$p(\Upsilon\zeta,\Upsilon\eta) \leq \theta p(\zeta,\eta) + Lp(\zeta,\Upsilon\eta)$$

büzülme koşulunu vererek yeni bir sabit nokta teoremi ispatlamış, bu büzülme koşuluna $(\theta,L)-$ zayıf büzülme adını vermiştir. Burada dikkat edelim ki $(\theta,L)-$ zayıf büzülme koşulunu sağlayan Υ dönüşümünün birden fazla sabit noktası olabilir. Wardowski [20] 2012 de belli özelliklere sahip fonksiyonlar sınıfından aldığı F fonksiyonunu kullanarak $\tau > 0$ olmak üzere

$$p(\Upsilon\zeta,\Upsilon\eta) > 0 \Rightarrow F(p(\Upsilon\zeta,\Upsilon\eta)) \leq F(p(\zeta,\eta)) - \tau$$

koşulunu sağlayan Υ dönüşümüne F-büzülme adını vererek Banach büzülme prensibinin yeni bir genellemesini vermiştir. Ovidiu Popescu [3] $c \in (0,1)$ olmak üzere

$$p(\Upsilon\zeta,\Upsilon\eta) \leq c[p(\zeta,\eta) + |p(\zeta,\Upsilon\zeta) - p(\eta,\Upsilon\eta)|]$$

özelliğini sağlayan Υ dönüşümüne P-büzülme adını vermiş ve yeni bir sabit nokta teoremi ispatlamıştır. Bu büzülme koşulu Banach büzülme prensibinin genellemelerinden en yenisi ve en sıradışı olanıdır. Daha sonra Altun [1] P-büzülebilirlik ($p(\Upsilon\zeta,\Upsilon\eta) < p(\zeta,\eta) + |p(\zeta,\Upsilon\zeta) - p(\eta,\Upsilon\eta)|$) kavramını verdikten sonra büzülebilirlik ($p(\Upsilon\zeta,\Upsilon\eta) < p(\zeta,\eta)$) ve Suzuki tipi büzülebilirlik ($\frac{1}{2}p(\zeta,\Upsilon\zeta) < p(\zeta,\eta) \Rightarrow p(\Upsilon\zeta,\Upsilon\eta) < p(\zeta,\eta)$) kavramları ile olan ilişkisini incelemiş, büzülebilirliğin P-büzülebilirliğin bir alt sınıfı olduğunu, ayrıca P-büzülebilirlik ile Suzuki tipi büzülebilirliğin birbirinden bağımsız olduğunu göstermiştir.

Diğer yandan, küme değerli dönüşümler için sabit nokta teoremi çalışmaları Nadler [22] ile başlamıştır, daha sonra bir çok matematikçi Pompeiu-Hausdorff metriği ve bir noktanın kümeye olan uzaklığı kavramı kullanılarak literatürdeki bilinen büzülme tipleri için Υ nun sabit noktasının varlığını göstermeye çalışmışlardır.

(M,p) bir tam metrik uzay ve $\Upsilon : M \to P_K(M)$ bir küme değerli dönüşüm ve $\varphi : (0,\infty) \to [0,1)$ fonksiyonu her $t \in (0,\infty)$ için $\lim_{r\to t^+} \sup \varphi(r) < 1$ özelliğini sağlasın. Eğer $\zeta \neq \eta$ özelliğine uygun her $\zeta, \eta \in M$ için

$$h_p(\Upsilon\zeta, \Upsilon\eta) \leq \varphi(p(\zeta,\eta))p(\zeta,\eta)$$

eşitsizliği sağlanırsa Υ bir sabit noktaya sahiptir.

Reich [24] 1972 de yukardaki sonucu verdikten 1974 te bu sonuçtan yola çıkarak burada Υ nun $P_K(M)$ değerli olması yerine $P_{CB}(M)$ değerli alabilir miyiz diyerek açık bir problem ortaya atmıştır. Bir çok matematikçi bu soruya cevap vermek için uğraşmış bunlardan en bilineni ve sonuca en yakını Mizoguchi-Takahashi [5] tarafından ispatlanmıştır. 2006 da Feng-Liu [6] Pompeiu-Hausdorff metriğini kullanmayarak küme değerli dönüşümler için sabit nokta varlığını ispatlama yoluna oldukça sıradışı bir bakış açısı getirmiştir.

1.1. Kaynak Özetleri

P- büzülme, *P* - büzülebilirlik kavramları ve temel olarak aldığımız Mizoguchi-Takahashi ve Klim ve Wardowski çalışmalarını [1], [2], [3], [4],[5],[6] numaralı kaynaklardan yararlanılmıştır. Metriksel konveks metrik uzay kavramı ve sabit nokta sonuçları için [7],[8], [9], [10]numaralı kaynaklardan yararlanılmıştır. Genelleştirilmiş metrik uzay ve büzülme tipleri için literatürdeki [11], [12], [13],[14], [15], [16], [17], [19], [20], [21], [22], [23], [25],[24], [26],[27],[28], [29] kaynaklardan yararlanılmıştır.

1.2. Tezin Amacı

Bu tez çalışmasında Metrik Sabit Nokta Teori alanında kapsamlı bir araştırma yapılmış, Tek değerli, küme değerli, self dönüşüm ve self olmayan dönüşüm arasındaki farklar incelenmiş, Metrik Sabit Nokta Teori alanında yeni bir büzülme olarak karşımıza çıkan P - büzülme tipi dönüşüm yardımıyla metrik uzay, konveks metrik uzay ve F-metrik uzayda Mizoguchi-Takahashi, Feng-Liu0, Klim-Wardowski gibi bilinen ünlü sabit nokta teoremlerine yeni bir bakış açısı getirip, uygulama alanlarındaki örnekleri verilmiştir.

2 . MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Temel Kavramlar

Metrik uzayda sabit nokta teoremi çalışmaları Banach sabit nokta teoremi ile başlamıştır. Sonrasında bir çok matematikçi tarafından yeni büzülme tipleri tanımlanıp metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır. Suzuki, sabit nokta teoremlerinin çeşidi arttığından literatürde kolaylık olması için metrik sabit nokta teori çalışmalarını aşağıdaki gibi 4 sınıfa ayırmıştır.

(M, p) bir metrik uzay $\Upsilon : M \to M$ bir fonksiyon olsun.

1- Leader tip teoremler sınıfı: Eğer bir sabit nokta teoremi "Υ bir tek sabit noktaya sahiptir ve $\{\Upsilon^n \xi\}$ Picard iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar. " hükmünü veriyorsa bu sınıfa aittir. Aşağıdaki teoremler bu sınıfa aittir.

Teorem 2.1.1 (Banach Sabit Nokta Teoremi)**.** (M, p) tam metrik uzay, $\Upsilon : M \to M$ bir dönüşüm olsun. Her $\zeta, \eta \in M$ için

$$p(\Upsilon\zeta, \Upsilon\eta) \leq cp(\zeta, \eta)$$

olacak şekilde bir $c \in (0, 1)$ varsa Υ bir tek sabit noktaya sahiptir. Ayrıca $\{\Upsilon^n \xi\}$ Picard iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

Teorem 2.1.2 (Kannan Sabit Nokta Teoremi)**.** (M, p) tam metrik uzay, $\Upsilon : M \to M$ bir dönüşüm olsun. Her $\zeta, \eta \in M$ için

$$p(\Upsilon\zeta, \Upsilon\eta) \leq c\,(p(\zeta, \Upsilon\zeta) + p(\eta, \Upsilon\eta))$$

olacak şekilde bir $c \in (0, \frac{1}{2})$ varsa Υ bir tek sabit noktaya sahiptir ve $\{\Upsilon^n \xi\}$ Picard iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

Teorem 2.1.3 (Edelstein Sabit Nokta Teoremi)**.** (M,p) kompakt metrik uzay, $\Upsilon : M \to M$ bir dönüşüm olsun. $\zeta \neq \eta$ özelliğinde ki her $\zeta,\eta \in M$ için

$$p(\Upsilon\zeta,\Upsilon\eta) < p(\zeta,\eta)$$

sağlanırsa Υ bir tek sabit noktaya sahiptir ve $\{\Upsilon^n\xi\}$ Picard iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

Teorem 2.1.4 (Reich Sabit Nokta Teoremi)**.** (M,p) bir metrik uzay, $\Upsilon : M \to M$ bir dönüşüm olsun her $\eta,\xi \in M$ için

$$p(\Upsilon\eta,\Upsilon\xi) \leq ap(\eta,\xi)+bp(\eta,\Upsilon\eta)+cp(\xi,\Upsilon\xi) \tag{2.1.1}$$

olacak şekilde $a,b,c > 0$, $0 < a+b+c < 1$ varsa Υ bir tek sabit noktaya sahiptir. $\{\Upsilon^n\xi\}$ Picard iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

2- Unnamed tip teoremler sınıfı: Eğer bir sabit nokta teoremi "Υ bir tek sabit noktaya sahiptir" hükmünü veriyorsa bu sınıfa aittir. Burada $\{\Upsilon^n\xi\}$ Picard iterasyon dizisi sabit noktaya yakınsaması gerekmez. Leader tipi sınıftaki bir teoremden Unnamed tipi sınıf için sabit nokta teoremi oluşturulabilir. Aşağıdaki teoremler bu sınıfa aittir.

Tanım 2.1.5. (M,p) bir metrik uzay, $\Upsilon : M \to M$ bir dönüşüm olsun her $\eta,\xi \in M$ ve $\eta \neq \xi$ için

$$p(\Upsilon\eta,\Upsilon\xi) < p(\eta,\xi)+|p(\eta,\Upsilon\eta)-p(\xi,\Upsilon\xi)|$$

ise Υ dönüşümüne P-büzülebilir denir.

Teorem 2.1.6 (P-Büzülebilir)**.** (M,p) bir kompakt metrik uzay, $\Upsilon : M \to M$ bir P-büzülebilir dönüşüm olsun. $f(\eta) = p(\eta,\Upsilon\eta)$ fonksiyonu alttan yarı sürekli ise Υ bir tek sabit noktaya sahiptir.

3- Subrahmanyam tip teoremler sınıfı: Eğer bir sabit nokta teoremi "Υ bir sabit noktaya sahiptir. (birden fazlada olabilir) $\{\Upsilon^n\xi\}$ Picard iterasyon dizisi bir sabit noktaya yakınsaktır." hükmünü veriyorsa bu sınıfa aittir. Aşağıdaki teoremler bu sınıfa aittir.

Teorem 2.1.7 (Zayıf Büzülme)**.** (M,p) tam metrik uzay $\Upsilon : M \to M$ dönüşümü her $\zeta,\eta \in M$ için

$$p(\Upsilon\zeta,\Upsilon\eta) \leq \theta p(x,y) + Ld(\eta,\Upsilon\zeta)$$

olcak şekilde $\theta \in (0,1)$ ve $L \geq 0$ varsa Υ bir sabit noktaya sahiptir.

4- Caristi tip teoremler sınıfı: Eğer bir sabit nokta teoremi "Υ bir sabit noktaya sahiptir" (Sabit noktası birden fazlada olabilir $\{\Upsilon^n\xi\}$ Picard iterasyon dizisi bir sabit noktaya yakınsak olması gerekmez) hükmünü veriyorsa bu sınıfa aittir. Aşağıdaki teoremler bu sınıfa aittir.

Teorem 2.1.8 (Caristi-Kirk Sabit Nokta Teoremi)**.** (M,p) bir tam metrik uzay, $\Upsilon : M \to M$ bir dönüşüm ve $\phi : M \to \mathbb{R}^+$ bir altan yarı sürekli fonksiyon olsun. Eğer $\zeta \in M$ için

$$p(\zeta,\Upsilon\zeta) \leq \phi(\zeta) - \phi(\Upsilon\zeta)$$

ise Υ bir sabit noktaya sahiptir.

(M,p) bir metrik uzay olmak üzere $A,B \in P(M)$ için δ ve h_p genişletilmiş reel değerli fonksiyonları

$$\delta(A,B) = \sup_{\zeta\in A}\{p(\zeta,B)\} = \sup_{\zeta\in A}\inf_{\eta\in B} p(\zeta,\eta)$$

ve

$$h_p(A,B) = \max\{\delta(A,B),\delta(B,A)\}\delta = \max\{\sup_{\zeta\in A}\inf_{\eta\in B} p(\zeta,\eta), \sup_{\zeta\in B}\inf_{\eta\in A} p(\zeta,\eta)\}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada dikkat edelim Eğer $M = \mathbb{R}$, $p(\zeta,\eta) = |\zeta-\eta|$ olmak üzere $A = [2,3]$, $B = [5,\infty)$ kümelerinden birini sınırlı küme olarak aldığımızda göreceğiz ki $\delta(A,B) = 3$ ve $\delta(B,A) = \infty$ ve dolaysıyla $H(A,B) = \infty$ olduğundan reel değerli olmaz. Ayrıca $\delta(A,B) \neq \delta(B,A)$ olduğundan simetri özelliğide sağlanmaz. Eğer δ ve h_p yi $P_B(M) \times P_B(M)$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar, olarak aldığımızda göreceğiz ki $M = \mathbb{R}$, $p(\zeta,\eta) = |\zeta-\eta|$ olmak üzere $A = [2,3]$, $B = (2,3)$,

$\delta(A,B) = \delta(B,A) = 0$ ve $h_p(A,B) = 0$ olur ancak $A \neq B$ olduğundan h_p, $P_B(M)$ üzerinde bir metrik olmaz.

Önerme 2.1.9. (M,p) bir metrik uzay ve $A,B,C \in P_B(M)$ olsun. O halde aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(i) $\delta(A,B) = 0 \Leftrightarrow A \subseteq \overline{B}$,

(ii) $B \subseteq C \Rightarrow \delta(A,B) \leq \delta(A,C)$,

(iii) $\delta(A \cup B, C) = \max\{\delta(A,C), \delta(B,C)\}$,

(iv) $\delta(A,B) \leq \delta(A,C) + \delta(C,B)$

(M,p) bir metrik uzay olsun. Bu durumda h_p, $P_{CB}(M)$ üzerinde bir metriktir. Bu metriğe Pompeiu-Hausdorff metriği denir.

(M,p) bir metrik uzay ve $\Upsilon : M \to P_{CB}(M)$ küme değerli dönüşüm olsun. Eğer her $\zeta, \eta \in M$ için

$$h_p(\Upsilon\zeta, \Upsilon\eta) \leq Lp(\zeta,\eta)$$

olacak şekilde bir $L \in [0,1)$ sabiti varsa Υ ye küme değerli büzülme dönüşümü denir. Nadler Banach sabit nokta teoreminin küme değerli versiyonunu aşağıdaki teoremle vererek sabit nokta teoremi alanına yeni bir bakış açısı getirmiştir.

Teorem 2.1.10 (Nadler)**.** (M,p) bir tam metrik uzay olsun. Eğer $\Upsilon : M \to P_{CB}(M)$ bir küme değerli büzülme dönüşümü ise, Υ bir sabit noktaya sahiptir.

Bu teoremden sonra bir çok matematikçi küme değerli dönüşümler için sabit nokta sonuçları vermiştir. Örneğin,

Teorem 2.1.11 (Reich)**.** (M,p) bir tam metrik uzay ve $\Upsilon : M \to P_K(M)$ bir küme değerli büzülme dönüşüm ve $\alpha : (0,\infty) \to [0,1)$ fonksiyonu her $t \in (0,\infty)$ için $\lim_{r \to t^+} \sup \alpha(r) < 1$ özelliği sağlansın. Eğer her $\zeta \neq \eta$ özelliğine uygun $\zeta, \eta \in M$ için

$$h_p(\Upsilon\zeta, \Upsilon\eta) \leq \alpha(p(\zeta,\eta))p(\zeta,\eta)$$

eşitsizliği sağlanırsa, o zaman Υ bir sabit noktaya sahiptir.

Reich yukardaki teoremi verdikten sonra burada "$P_K(M)$ yerine $P_{CB}(M)$ alırsak Υ bir sabit noktaya sahip olur mu?" şeklinde bir soru sormuştur. Bu soru üzerine bir çok çalışma yapılmıştır. Bunlardan en ünlüsü Mizoguchi-Takahashi'nin yaptığı çalışmadır.

Teorem 2.1.12 (Mizoguchi-Takahashi)**.** (M,p) bir tam metrik uzay ve $\Upsilon : M \to P_{CB}(M)$ bir kümedeğerli dönüşüm ve $\varphi : (0,\infty) \to [0,1)$ fonksiyon olsun. Eğer

i Her $t \in [0,\infty)$ için $\lim_{r\to t^+} \sup \varphi(r) < 1$,

ii Her $\eta, \xi \in M$, $\xi \neq \eta$ için

$$h_p(\Upsilon\eta, \Upsilon\xi) \leq \varphi(p(\eta,\xi))p(\eta,\xi)$$

koşulları sağlanırsa Υ bir sabit noktaya sahiptir.

Feng-Lui Pompeiu-Hausdorff metriğini kullanmayıp bir noktanın kümeye olan uzaklığı kavramını kullanarak küme değerli dönüşümleri için ilginç bir sabit nokta teoremi vermiştir.

Teorem 2.1.13 (Feng-Lui)**.** (M,p) bir tam metrik uzay ve $\Upsilon : M \to P_C(M)$ bir küme değerli dönüşüm olsun.

i $f(\eta) = p(\eta, \Upsilon\eta)$ fonksiyonu altan yarı sürekli,

ii Her $\eta \in M$ için

$$p(\xi, \Upsilon\xi) \leq cp(\eta,\xi)$$

koşulunu sağlayan bir $\xi \in I_b^\eta(\Upsilon)$ ve $c \in (0,1)$ $(c < b)$ var olsun.

Bu durumda Υ bir sabit noktaya sahiptir. Burada

$$I_b^\eta(\Upsilon) = \{\xi \in \Upsilon\eta : bp(\eta,\xi) \leq p(\eta,\Upsilon\eta)\}$$

dır.

Aşağıdaki örnekte göreceğiz ki Feng-Lui sabit nokta teoremi, Nadler sabit nokta teoreminin bir öz genelleştirmesidir

Örnek 1. $M=\{\frac{1}{2^k}:k\in\mathbb{N}\}\cup\{0,1\}$ üzerinde $p(\zeta,\eta)=|\zeta-\eta|$ metriği tanımlansın, (M,p) metrik uzayı tamdır. $\Upsilon:M\to P_C(M)$ dönüşümü

$$\Upsilon\zeta=\begin{cases}\left\{\frac{1}{2^{n+1}},1\right\} & , \quad \zeta=\frac{1}{2^n}, n\in\mathbb{N}\\ \left\{0,\frac{1}{2},\right\} & , \quad \zeta=0\end{cases}$$

şeklinde tanımlı olmak üzere her $n\in\mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} h_p(\Upsilon\frac{1}{2^n},\Upsilon 0) &= h_p\left(\left\{\frac{1}{2^{n+1}},1\right\},\{0,1\}\right)\\ &= \frac{1}{2}\geq\frac{1}{2^n}=\left|\frac{1}{2^n}-0\right|\\ &= p\left(\frac{1}{2^n},0\right)\end{aligned}$$

olduğundan Υ, küme değerli büzülme dönüşüm değildir. Diğer taraftan

$$f(\zeta)=p(\zeta,\Upsilon\zeta)=\begin{cases}\frac{1}{2^{n+1}} & , \quad \zeta=\frac{1}{2^n}, n\in\mathbb{N}\\ 0 & , \quad \zeta\in\{0,1\}\end{cases}$$

olacağından f süreklidir. Her $\zeta\in M$ ve en az bir $\eta\in I_{0,7}^{\zeta}$ için $p(\eta,\Upsilon\eta)=\frac{1}{2}p(\zeta,\eta)$ elde edildiğinden Feng-Lui sabit nokta teoreminin tüm şartları sağlanmıştır.

Feng-Lui sabit nokta teoremindeki c sabitinin $p(\zeta,\eta)$ nin bir fonksiyonu olarak göz önüne alıp Feng-Lui sabit nokta teoreminin bir genelleştirmesi aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Teorem 2.1.14 (Klim ve Wardowski)**.** (M,p) bir tam metrik uzay ve $\Upsilon:M\to P_C(M)$ bir küme değerli dönüşüm, $\varphi:(0,\infty)\to(0,b)$ tanımlı bir fonksiyon ve $b\in(0,1)$ olsun. Aşağıdaki koşullar sağlansın

i) $f(\eta)=p(\eta,\Upsilon\eta)$ fonksiyonu altan yarı süreklidir,

ii) Her $t\in[0,\infty)$ için $\limsup_{r\to t^+}\varphi(r)<b$,

iii) Her $\eta\in M$ için

$$p(\xi,\Upsilon\xi)\leq\varphi(p(\eta,\xi))p(\eta,\xi)$$

koşulu sağlayan bir $\xi\in I_b^{\eta}(\Upsilon)$ vardır.

Bu durumda Υ bir sabit noktaya sahiptir.

Örnek 2. $M=[0,1]$ üzerindeki $p(\zeta,\eta)=|\zeta-\eta|$ metriğini alalım. Bu durumda (M,p) tam metrik uzaydır. $\Upsilon : M \to P_C(M)$ dönüşümü

$$\Upsilon(\zeta)=\begin{cases}\left\{\frac{17}{96},\frac{1}{4}\right\} & , \quad \zeta=\frac{15}{32}\\ \left\{\frac{1}{2}\zeta^2\right\} & , \quad \zeta\neq\frac{15}{32}\end{cases}$$

ve $b=\frac{3}{4}$ olmak üzere $\varphi : [0,\infty) \to [0,b)$ fonksiyonu

$$\varphi(t)=\begin{cases}\frac{3}{2}t & , \quad t\in[0,\frac{7}{24})\cup(\frac{7}{24},\frac{1}{2})\\ \frac{425}{768} & , \quad t=\frac{7}{24}\\ \frac{1}{2} & , \quad t\in[\frac{1}{2},\infty)\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O halde

$$f(\zeta)=p(\zeta,\Upsilon\zeta)=\begin{cases}\zeta-\frac{1}{2}\zeta^2 & , \quad \zeta\neq\frac{15}{32}\\ \frac{7}{32} & , \quad \zeta=\frac{15}{32}\end{cases}$$

olup f fonksiyonu alttan yarı süreklidir. $\zeta\neq\frac{15}{32}$ ve $\eta=\frac{1}{2}\zeta^2\in\Upsilon\zeta$ için

$$bp(\zeta,\eta)\leq p(\zeta,\Upsilon\zeta)$$

ve

$$p(\eta,\Upsilon\eta)\leq\varphi(p(\zeta,\eta))p(\zeta,\eta)$$

olup, ayrıca $\zeta=\frac{15}{32}$ ve $\eta=\frac{17}{96}\in\Upsilon\zeta$ olarak aldığımızda üsteki eşitsizlikler sağlanır. Dolayısıyla Klim-Wardowski sabit nokta teoreminin tüm şartları sağlanır. Diğer taraftan, $b\in(0,\frac{3}{4}]$ ve $c\in(0,1)$, $c<b$ ise $\zeta=1$ ve $y=\frac{1}{2}\in\Upsilon1$ için

$$p(\frac{1}{2},\Upsilon\frac{1}{2})=\frac{3}{8}>cp(1,\frac{1}{2})$$

olmaktadır. Dolayısıyla, Feng-Lui sabit nokta teoremini şartları sağlanmaz.

3 . ARAŞTIRMA VE BULGULAR

3.1. TEK DEĞERLİ VE KÜME DEĞERLİ P BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN SABİT NOKTA SONUÇLARI

Bu bölümde Mizoguchi-Takahashi fonksiyonu yardımıyla küme değerli P-büzülme kavramının lineer olmayan versiyonu ile Klim ve Wardowski nin sonuçlarının yeni bir versiyonunu vereceğiz.

Tanım 3.1.1. (M,p) bir metrik uzay ve $\Upsilon : M \to P(M)$ bir küme değerli dönüşüm, $b \in (0,1)$ ve $\theta : [0,\infty) \to (0,b)$ olsun.

i Her $t \in [0,\infty)$ için

$$\lim_{r\to t^+} \sup \theta(t) < b \tag{3.1.1}$$

ii Her $\zeta \in M$ için

$$p(\zeta,\Upsilon\zeta) \leq \varphi(p(\zeta,\eta))[p(\zeta,\eta) + |p(\zeta,\Upsilon\zeta) - p(\eta,\Upsilon\eta)|]$$

olacak şekilde $\eta \in I_b^{\zeta}$ var

özelliği sağlanırsa Υ na küme değerli lineer olmayan P-büzülme dönüşüm denir. (Burada $t > 0$ için $\varphi(t) = \frac{\theta(t)}{2-\theta(t)}$ dir)

Not 1. $\varphi(r) > 0$ ve her $r \geq 0$ için $0 < \theta(r) = \frac{2\varphi(r)}{1+\varphi(r)} < b < 1$ olduğundan $0 < \varphi(r) < b < 1$ ve ayrıca her $r \geq 0$ için $\left(\frac{2\varphi(r)}{1+\varphi(r)}\right)\left(\frac{1-b}{b}\right) < 1$ dir.

Teorem 3.1.2. (M,p) bir tam metrik uzay ve $\Upsilon : M \to P_C(M)$ bir küme değerli lineer olmayan P-büzülme dönüşümü olsun. Eğer $f(\zeta) = p(\zeta,\Upsilon\zeta)$ fonksiyonu alttan yarı sürekli ise Υ bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. Kabul edelim ki Υ sabit noktaya sahip olmasın, bu durumda her $\zeta \in M$ için $P(\zeta, \Upsilon\zeta) > 0$ dır. Her $\zeta \in M$ için $\Upsilon\zeta \in P_C(M)$ olduğundan her $b \in (0,1)$ sabiti için I_b^{ζ} boş küme değildir. Ayrıca, $p(\zeta, \Upsilon\zeta) > 0$ olduğundan her $\zeta \in M$ için $\zeta \notin I_b^{\zeta}$ dır.
$\zeta_0 \in M$ bir keyfi nokta olsun. Kabülümüzden

$$p(\zeta_1, \Upsilon\zeta_1) \leq \varphi(p(\zeta_0, \zeta_1))[p(\zeta_0, \zeta_1) + |p(\zeta_0, \Upsilon\zeta_0) - p(\zeta_1, \Upsilon\zeta_1)|]$$

özelliğini sağlayan $\zeta_1 \in I_b^{\zeta_0}$, $\zeta_1 \neq \zeta_0$ vardır. Benzer şekilde $\zeta_1 \in M$ için,

$$p(\zeta_2, \Upsilon\zeta_2) \leq \varphi(p(\zeta_1, \zeta_2))[p(\zeta_1, \zeta_2) + |p(\zeta_1, \Upsilon\zeta_1) - p(\zeta_2, \Upsilon\zeta_2)|]$$

özelliğini sağlayan $\zeta_2 \in I_b^{\zeta_1}$, $\zeta_1 \neq \zeta_2$ vardır. Bu işleme devam ederek, $\zeta_n \in M$ için,

$$p(\zeta_{n+1}, \Upsilon\zeta_{n+1}) \leq \varphi(p(\zeta_n, \zeta_{n+1}))[p(\zeta_n, \zeta_{n+1}) + |p(\zeta_n, \Upsilon\zeta_n) - p(\zeta_{n+1}, \Upsilon\zeta_{n+1})|] \tag{3.1.2}$$

özelliğini sağlayan $\zeta_{n+1} \in I_b^{\zeta_n}$, $\zeta_{n+1} \neq \zeta_n$ vardır ve bu şekilde her $n \in \mathbb{N}$ için $\{\zeta_n\}$ dizisi tanımlanabilir. Şimdi eğer $m \in \mathbb{N}$ için

$$p(\zeta_{m+1}, \Upsilon\zeta_{m+1}) \geq p(\zeta_m, \Upsilon\zeta_m)$$

ise (3.1.2) den

$$\begin{aligned} p(\zeta_{m+1}, \Upsilon\zeta_{m+1}) &\leq \varphi(p(\zeta_m, \zeta_{m+1}))[p(\zeta_m, \zeta_{m+1}) + |p(\zeta_m, \Upsilon\zeta_m) - p(\zeta_{m+1}, \Upsilon\zeta_{m+1})|] \\ &= \varphi(p(\zeta_m, \zeta_{m+1}))[p(\zeta_m, \zeta_{m+1}) + p(\zeta_{m+1}, \Upsilon\zeta_{m+1}) - p(\zeta_m, \Upsilon\zeta_m)] \end{aligned}$$

elde edilir ve buradan

$$
\begin{aligned}
p(\zeta_{m+1},\Upsilon\zeta_{m+1}) &\leq \frac{\varphi(p(\zeta_m,\zeta_{m+1}))}{1-\varphi(p(\zeta_m,\zeta_{m+1}))}p(\zeta_m,\zeta_{m+1})-\frac{\varphi(p(\zeta_m,\zeta_{m+1}))}{1-\varphi(p(\zeta_m,\zeta_{m+1}))}p(\zeta_m,\Upsilon\zeta_m)\\
&= \frac{\varphi(p(\zeta_m,\zeta_{m+1}))}{1-\varphi(p(\zeta_m,\zeta_{m+1}))}[p(\zeta_m,\zeta_{m+1})-p(\zeta_m,\Upsilon\zeta_m)]\\
&\leq \frac{\varphi(p(\zeta_m,\zeta_{m+1}))}{1-\varphi(p(\zeta_m,\zeta_{m+1}))}[\frac{1}{b}p(\zeta_m,\zeta_{m+1})-p(\zeta_m,\Upsilon\zeta_m)]\\
&\leq \frac{\varphi(p(\zeta_m,\zeta_{m+1}))}{1-\varphi(p(\zeta_m,\zeta_{m+1}))}\frac{1-b}{b}p(\zeta_m,\Upsilon\zeta_m)\\
&< p(\zeta_m,\Upsilon\zeta_m)\\
&\leq p(\zeta_{m+1},\Upsilon\zeta_{m+1})
\end{aligned}
$$

olur ki bu bir çelişkidir. Bu durumda her $n\in\mathbb{N}$ için $p(\zeta_{n+1},\Upsilon\zeta_{n+1})<p(\zeta_n,\Upsilon\zeta_n)$ dır. Böylece (3.1.2) den

$$
p(\zeta_{n+1},\Upsilon\zeta_{n+1})\leq\varphi(p(\zeta_n,\zeta_{n+1}))[p(\zeta_n,\zeta_{n+1})+|p(\zeta_n,\Upsilon\zeta_n)-p(\zeta_{n+1},\Upsilon\zeta_{n+1})|]
$$

dır ve buradan

$$
\begin{aligned}
p(\zeta_{n+1},\Upsilon\zeta_{n+1}) &\leq \frac{\varphi(p(\zeta_n,\zeta_{n+1}))}{1+\varphi(p(\zeta_n,\zeta_{n+1}))}[p(\zeta_n,\zeta_{n+1})+p(\zeta_n,\Upsilon\zeta_n)]\\
&\leq \frac{2\varphi(p(\zeta_n,\zeta_{n+1}))}{1+\varphi(p(\zeta_n,\zeta_{n+1}))}p(\zeta_n,\zeta_{n+1})
\end{aligned}
$$

elde edilir. Şimdi $\zeta_{n+2}\in I_b^{\zeta_{n+1}}$ olduğu için

$$
\begin{aligned}
bp(\zeta_{n+1},\zeta_{n+2}) &\leq p(\zeta_{n+1},\Upsilon\zeta_{n+1})\\
&\leq \frac{2\varphi(p(\zeta_n,\zeta_{n+1}))}{1+\varphi(p(\zeta_n,\zeta_{n+1}))}p(\zeta_n,\zeta_{n+1})
\end{aligned}
$$

dır. Buradan,

$$
\begin{aligned}
p(\zeta_{n+1},\zeta_{n+2}) &\leq \frac{2\varphi(p(\zeta_n,\zeta_{n+1}))}{b[1+\varphi(p(\zeta_n,\zeta_{n+1}))]}p(\zeta_n,\zeta_{n+1})\\
&= \frac{\theta(p(\zeta_n,\zeta_{n+1}))}{b}p(\zeta_n,\zeta_{n+1})
\end{aligned}
$$

elde edilir ki $\theta(p(\zeta_n,\zeta_{n+1}))<b$ olduğundan her $n\in\mathbb{N}$ için

$$p(\zeta_{n+1},\zeta_{n+2})<p(\zeta_n,\zeta_{n+1})$$

dır. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} p(\zeta_n,\zeta_{n+1})=\delta$ olacak şekilde $\delta\geq 0$ vardır. Dolayısıyla (3.1.1) den

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{2\varphi(p(\zeta_n,\zeta_{n+1}))}{1+\varphi(p(\zeta_n,\zeta_{n+1}))}=\limsup_{n\to\infty}\theta(p(\zeta_n,\zeta_{n+1}))=q$$

olacak şekilde $q\in[0,b)$ vardır. Bu durumda her $b_0\in(q,b)$ ve her $n>n_0$ için

$$\theta(p(\zeta_n,\zeta_{n+1}))<b_0$$

olacak şekilde n_0 vardır. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}
p(\zeta_{n+1},\zeta_{n+2}) &\leq \frac{\theta(p(\zeta_n,\zeta_{n+1}))}{b}p(\zeta_n,\zeta_{n+1})\\
&\leq \frac{\theta(p(\zeta_n,\zeta_{n+1}))}{b}\frac{\theta(p(\zeta_{n-1},\zeta_n))}{b}p(\zeta_{n-1},\zeta_n)\\
&\vdots\\
&\leq \frac{1}{b^n}[\theta(p(\zeta_n,\zeta_{n+1}))\theta(p(\zeta_{n-1},\zeta_n))\cdots\theta(p(\zeta_0,\zeta_1))]p(\zeta_0,\zeta_1)\\
&\leq \frac{p(\zeta_0,\zeta_1)}{b^n}[b_0^{n-n_0}\theta(d(\zeta_{n_0-1},\zeta_{n_0}))\cdots\theta(p(\zeta_0,\zeta_1))]\\
&= \left(\frac{b_0}{b}\right)^{n-n_0}\frac{\theta(d(\zeta_{n_0-1},\zeta_{n_0}))\cdots\theta(p(\zeta_0,\zeta_1))}{b^{n_0}}p(\zeta_0,\zeta_1)
\end{aligned}$$

buradan

$$\begin{aligned}
\sum_{n=n_0}^{\infty}p(\zeta_{n+1},\zeta_{n+2}) &\leq \sum_{n=n_0}^{\infty}\left(\frac{b_0}{b}\right)^{n-n_0}\frac{\theta(d(\zeta_{n_0-1},\zeta_{n_0}))\cdots\theta(p(\zeta_0,\zeta_1))}{b^{n_0}}p(\zeta_0,\zeta_1)\\
&= \frac{\theta(d(\zeta_{n_0-1},\zeta_{n_0}))\cdots\theta(p(\zeta_0,\zeta_1))}{b^{n_0}}p(\zeta_0,\zeta_1)\sum_{n=n_0}^{\infty}\left(\frac{b_0}{b}\right)^{n-n_0}\\
&< \infty
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu durumda $\{\zeta_n\}$ bir Cauchy dizisidir. (M,p) tam metrik uzay olduğundan $\{\zeta_n\}$ dizisinin yakınsadığı bir $\xi \in M$ vardır. f alttan yarı sürekli olduğundan

$$\begin{aligned} p(\xi,\Upsilon\xi) &= f(\xi) \\ &\leq \lim_{n\to\infty}\inf f(\zeta_n) \\ &= \lim_{n\to\infty}\inf p(\zeta_n,\Upsilon\zeta_n) \\ &\leq \lim_{n\to\infty}\inf p(\zeta_n,\zeta_{n+1}) = 0 \end{aligned}$$

olur ki bu Υ nin sabit noktaya sahip olmama durumu ile çelişir. Bu durumda Υ bir sabit noktaya sahiptir. □

Teorem 3.1.2 de Υ küme değerli dönüşümünü $P_K(M)$ değerli olarak aldığımızda b sabitini 1 olarak alabiliriz.

Teorem 3.1.3. (M,p) metrik uzay ve $\Upsilon : M \to P_K(M)$ bir küme değerli dönüşüm ve $\theta : [0,\infty) \to (0,1)$ fonksiyonu olsun.

(i) $f(\zeta) = p(\zeta,\Upsilon\zeta)$ alttan yarı süreklidir.

(ii) Her $t \in [0,\infty)$ için

$$\lim_{r\to t^+}\sup \theta(r) < 1$$

(iii) Her $\zeta \in M$ için

$$p(\zeta,\Upsilon\zeta) \leq \varphi(p(\zeta,\eta))[p(\zeta,\eta) + |p(\zeta,\Upsilon\zeta) - p(\eta,\Upsilon\eta)|]$$

olacak şekilde $\eta \in I_1^{\zeta}$ vardır. (Burada $t \geq 0$ için $\varphi(t) = \frac{\theta(t)}{2-\theta(t)}$)

özellikleri sağlanırsa Υ bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. Kabul edelim ki Υ sabit noktaya sahip olmasın, bu durumda her $\zeta \in M$ için $p(\zeta,\Upsilon\zeta) > 0$ dır. Her $\zeta \in M$ için $\Upsilon\zeta \in P_K(M)$ olduğundan, $p(\zeta,\eta) = p(\zeta,\Upsilon\zeta)$ olacak şekilde $\eta \in \Upsilon\zeta$ vardır. Bu durumda, $\eta \in I_1^{\zeta}$, yani I_1^{ζ} boş küme değildir. Ayrıca $p(\zeta,\Upsilon\zeta) > 0$ olduğundan $\zeta \neq \eta$ dir.

$\zeta_0 \in M$ keyfi bir nokta olsun. Kabulümüzden

$$p(\zeta_0,\zeta_1) = p(\zeta_0,\Upsilon\zeta_0)$$

ve

$$p(\zeta_1,\Upsilon\zeta_1) \leq \varphi(p(\zeta_0,\zeta_1))[p(\zeta_0,\zeta_1)+|p(\zeta_0,\Upsilon\zeta_0)-p(\zeta_1,\Upsilon\zeta_1)|]$$

özelliğini sağlayan $\zeta_1 \in \Upsilon\zeta_0$, $\zeta_0 \neq \zeta_1$ vardır. Benzer şekilde, $\zeta_1 \in M$ için

$$p(\zeta_1,\zeta_2) = p(\zeta_1,\Upsilon\zeta_1)$$

ve

$$p(\zeta_2,\Upsilon\zeta_2) \leq \varphi(p(\zeta_1,\zeta_2))[p(\zeta_1,\zeta_2)+|p(\zeta_1,\Upsilon\zeta_1)-p(\zeta_2,\Upsilon\zeta_2)|]$$

özelliğini sağlayan $\zeta_2 \in \Upsilon\zeta_1$, $\zeta_1 \neq \zeta_2$ vardır. Bu işleme devam ederek, $\zeta_n \in M$ için

$$p(\zeta_n,\zeta_{n+1}) = p(\zeta_n,\Upsilon\zeta_n)$$

ve

$$p(\zeta_{n+1},\Upsilon\zeta_{n+1}) \leq \varphi(p(\zeta_n,\zeta_{n+1}))[p(\zeta_n,\zeta_{n+1})+|p(\zeta_n,\Upsilon\zeta_n)-p(\zeta_{n+1},\Upsilon\zeta_{n+1})|]$$

özelliğini sağlayan $\zeta_n \in \Upsilon\zeta_{n+1}$, $\zeta_{n+1} = \zeta_n$ vardır ve bu şekilde M de bir $\{\zeta_n\}$ dizisi tanımlarız. $\varphi(p(\zeta_n,\zeta_{n+1})) < 1$ olduğundan Teorem 3.1.2 nin ispatına benzer şekilde $\{\zeta_n\}$ dizisi Cauchy dizisidir. M nin tamlığından $\{\zeta_n\}$ dizisi $\xi \in M$ noktasına yakınsaktır. f alttan yarı sürekli olduğundan

$$\begin{aligned}
0 &\leq p(\xi,\Upsilon\xi) = f(\xi) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \inf f(\zeta_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \inf p(\zeta_n,\Upsilon\zeta_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \inf p(\zeta_n,\zeta_{n+1}) = 0
\end{aligned}$$

olur ki bu T nin sabit noktaya sahip olmaması ile çelişir. Bu durumda Υ bir sabit noktaya sahiptir. □

Teorem 3.1.2 ve Teorem 3.1.3 de $\varphi(t) = c$ olarak aldığımızda aşağıdaki doğal sonuçları elde ederiz.

Sonuç 3.1.1. (M,p) tam metrik uzay ve $\Upsilon : M \to P_C(M)$ bir küme değerli dönüşüm olsun. Her $\zeta \in M$ için

$$p(\zeta, \Upsilon\zeta) \leq c[p(\zeta, \eta) + |p(\zeta, \Upsilon\zeta) - p(\eta, \Upsilon\eta)|]$$

özelliğini sağlayan $\zeta \in I_1^{\zeta}$ var olsun. ($c > 0$, $\frac{2c}{b(1+c)} < 1$) Bu durumda, $f(\zeta) = p(\zeta, \Upsilon\zeta)$ alttan yarı sürekli ise Υ bir sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 3.1.2. (M, p) tam metrik uzay ve $\Upsilon : M \to P_K(M)$ bir küme değerli dönüşüm olsun. Her $\zeta \in M$ için

$$p(\zeta, \Upsilon\zeta) \leq c[p(\zeta, \eta) + |p(\zeta, \Upsilon\zeta) - p(\eta, \Upsilon\eta)|]$$

özelliğini sağlayan $\zeta \in I_1^{\zeta}$ var olsun. ($c > 0$, $\frac{2c}{b(1+c)} < 1$) Bu durumda, $f(\zeta) = p(\zeta, \Upsilon\zeta)$ alttan yarı sürekli ise Υ bir sabit noktaya sahiptir.

Teorem 3.1.4. (M, p) tam metrik uzay ve $\Upsilon : M \to P_C(M)$ bir küme değerli dönüşüm ve $\theta : [0, \infty) \to (0, 1)$ fonksiyon olsun.

(i) $f(\zeta) = p(\zeta, \Upsilon\zeta)$ alttan yarı sürekli,

(ii) Her $t \in [0, \infty)$ için

$$\sup_{t \in [0,\infty)} \{\lim_{r \to t^+} \sup \theta(r)\} < 1 \tag{3.1.3}$$

(iii) Her $\zeta \in M$ ve $\eta \in \Upsilon\zeta$ için

$$p(\zeta, \Upsilon\zeta) \leq \varphi(p(\zeta, \eta))[p(\zeta, \eta) + |p(\zeta, \Upsilon\zeta) - p(\eta, \Upsilon\eta)|]$$

özellikleri sağlanırsa Υ bir sabit noktaya sahiptir. (Burada $t \geq 0$ için $\varphi(t) = \frac{\theta(t)}{2-\theta(t)}$ dır.)

İspat. (3.1.3) kabulümüzden $\lim_{r \to t^+} \sup \theta(t) = b(t)$ ve $\sup_{t \in [0,\infty)} b(t) = b < 1$ olacak şekilde her $t \geq 0$ için $b(t) \in (0, 1)$ vardır. Her $\zeta \in M$ için $\Upsilon\zeta$ kapalı olduğundan I_b^{ζ} boş küme değildir. Dolayısıyla (3.1.1) sağlayan $\eta \in I_b^{\zeta}$ vardır ve Teorem (3.1.3) den Υ bir sabit noktaya sahiptir. □

Teorem (3.1.3) tek değerli dönüşümler için ispatlanabilir. Burada dikkat edelim ki f fonksiyonu alttan yarı sürekli olmasına gerek yoktur.

Sonuç 3.1.3. (M,p) bir tam metrik uzay ve $\Upsilon : M \to M$ bir dönüşüm ve $\theta : [0,\infty) \to (0,1)$ fonksiyon olsun.

i Her $t \in [0,\infty)$ için $\lim_{r \to t^+} \sup \theta(r) < 1$

ii Her $\zeta, \eta \in M$ için

$$p(\Upsilon\zeta, \Upsilon\eta) \leq \varphi(p(\zeta,\eta))[p(\zeta,\eta) + |p(\zeta,\Upsilon\zeta) - p(\eta,\Upsilon\eta)|]$$

özellikleri sağlanırsa Υ bir tek sabit noktaya sahiptir. (Burada $t \geq 0$ için $\varphi(t) = \frac{\theta(t)}{2-\theta(t)}$ dır.)

Örnek 3. $M = \left\{ \frac{(-1)^n}{2^n} : n = 1,2,3,\cdots \right\} \cup \{0,1\}$ üzerinde alışılmış metrik tanımlanmış olsun. $\Upsilon : M \to P_C(M)$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\Upsilon(\zeta) = \begin{cases} \{\zeta\} & , \quad \zeta \in \{0,1\} \\ \left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}, \frac{(-1)^n}{2^{n+2}} \right\} & , \quad \zeta = \frac{(-1)^n}{2^n}, n \geq 1 \end{cases}.$$

Bu durumda

$$f(\zeta) = p(\zeta, \Upsilon\zeta) = \begin{cases} 0 & , \quad \zeta \in \{0,1\} \\ \frac{3}{2^{n+2}} & , \quad \zeta = \frac{(-1)^n}{2^n}, n \geq 1 \end{cases}$$

alttan yarı süreklidir. Şimdi $b = \frac{1}{2}$ ve $\varphi(t) = \frac{2}{27}$ ile birlikte (3.1.1) eşitsizliğinin sağlandığını göreceğiz.

Durum 1 $\zeta \in \{0,1\}$ olsun. Bu durumda $\eta = \zeta \in I^{\zeta}_{\frac{1}{2}}$, $p(\zeta,\Upsilon\zeta) = p(\eta,\Upsilon\eta) = 0$, dolayısıyla (3.1.1) sağlanır.

Durum 2 $n \geq 1$ için $\zeta = \frac{(-1)^n}{2^n}$ olsun. Bu durumda, $\eta = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \in I^{\zeta}_{\frac{1}{2}}$, $p(\eta,\Upsilon\eta) = \frac{3}{2^{n+3}}$ ve

$$p(\eta,\Upsilon\eta) = \frac{3}{2^{n+3}} = \frac{2}{27}\frac{27}{2^{n+4}} = \frac{2}{27}[p(\zeta,\eta) + |p(\zeta,\Upsilon\zeta) - p(\eta,\Upsilon\eta)|]$$

elde edilir ki Teorem (3.1.3) in tüm koşulları sağlanmış olur. Bu durumda Υ bir sabit noktaya sahiptir.

3.2. SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN UYGULAMALAR

Bu kısımda Sonuç 3.1.3 düşünerek 2. dereceden 2 değişkenli sınır-değer problemleri için varlık ve teklik teoremi vereceğiz.

$$\begin{cases} -\frac{d^2u}{dt^2} = f(t,u(t)) \quad , \quad t \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{3.2.1}$$

olacak şekilde $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun. Green fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$G(t,s) = \begin{cases} t(1-s) \quad , \quad 0 \le t < s \le 1 \\ s(1-t) \quad , \quad 0 \le s < t \le 1 \end{cases}$$

(3.2.1) problemi aşağıdaki integral denklemine denktir.

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))ds, \ \mathrm{t} \in [0,1]. \tag{3.2.2}$$

Bu durumda, $u \in C^2[0,1]$ (3.2.1) in bir çözümüdür ancak ve ancak (3.2.2) in çözümüdür. Dolayısıyla, (3.2.1) probleminin çözümünü $M = C[0,1]$ üzerinde tanımlı

$$\Upsilon u(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))ds \tag{3.2.3}$$

Υ operatörünün sabit noktasının varlığı olarak düşünebiliriz. (Burada $C[0,1]$; $[0,1]$ üzerinde tanımlı tüm sürekli fonksiyonların sınıfıdır.)

$$p_\infty(u,v) = \|u-v\| = \sup\{|u(t)-v(t)| : t \in [0,1]\}$$

olmak üzere (M, p_∞) metrik uzayı tamdır. Açıktır ki $\int_0^1 G(t,s)ds = \dfrac{t(1-t)}{2}$ ve böylece $\sup\limits_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)ds = \frac{1}{8}$.

Teorem 3.2.1. Kabul edelim ki aşağıdaki koşullar sağlansın;

(i) $|f(t,u(t)) - f(t,v(t))| \leq h(t)\{|u(t)-v(t)| + |\|u - \Upsilon u\| - \|v - \Upsilon v\||\}$ olacak şekilde sürekli $h : [0,1] \to [0,\infty)$ fonksiyon var olsun.

(ii) $\int\limits_0^1 G(t,s)h(s)ds \leq c$ olacak şekilde $c < 1$ var olsun.

Bu durumda (3.2.1) sınır değer probleminin bir tek çözümü vardır. Dikkat edelim ki eğer $\max_{s\in[0,1]} h(s) \leq 8c$ ise $\int\limits_0^1 G(t,s)h(s)ds \leq c$ dir.

İspat. (M, p_∞) tam metrik uzay ve (3.2.3) ile verilen M üzerinde Υ operatörünü düşünelim. Bu durumda, her $u, v \in M$ ve $t \in [0,1]$ için

$$
\begin{aligned}
|\Upsilon u(t) - \Upsilon v(t)| &= \left| \int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))ds - \int_0^1 G(t,s)f(s,v(s))ds \right| \\
&\leq \int_0^1 G(t,s)\,|f(s,u(s)) - f(s,v(s))|\,ds \\
&\leq \int_0^1 G(t,s)h(s)\{|u(s)-v(s)| + |\|u-\Upsilon u\| + \|v-\Upsilon v\||\}ds \\
&\leq \{\|u-v\| + |\|u-\Upsilon u\| + \|v-\Upsilon v\||\} \int_0^1 G(t,s)ds \\
&\leq c\{\|u-v\| + |\|u-\Upsilon u\| + \|v-\Upsilon v\||\}
\end{aligned}
$$

dir. Dolayısıyla

$$p_\infty(\Upsilon u, \Upsilon v) = \|\Upsilon u - \Upsilon v\| \leq c\{p_\infty(u,v) + |p_\infty(u,\Upsilon u) + p_\infty(v,\Upsilon v)|\}$$

olduğundan $\varphi(t) = c$ ve $\theta(t) = \frac{2c}{1+c}$ için Sonuç (3.1.3) deki koşullar sağlanır. Yani Υ bir tek sabit noktaya sahiptir. $\square$

3.3. KONVEKS METRİK UZAYLARDA NONSELF P-BÜZÜLMELER VE SABİT NOKTA SONUÇLARI

Metrik sabit nokta teori çalışmaları Banach sabit nokta teoreminden sonra tek değerli self dönüşüm ve küme değerli self dönüşümler için yeni büzülme dönüşüm prensibleri kullanılarak geliştiği ve genişletildiği gibi nonself yani tanım kümesi ve değer kümesi aynı olmayan dönüşümler için sabit nokta teoremi üzerine nasıl çalışmalar yapılır sorusu üzerine çalışarak konveks metrik uzaylarda sabit nokta teoremi sonuçlar elde edilmiştir.

Bu bölümde metriksel konveks metrik uzay M nin kapalı alt kümesi K dan M'ye tanımlı tek değerli nonself dönüşüm için P-büzülme koşulunu kullanarak sabit nokta teoremi sonuçları verilmiş, sonrasında M'nin kompakt alt kümesi K yı ele alarak c büzülme sabiti kulanılmayan P-büzülmenin daha katı versiyonu olan P-büzülebilir koşulu kullanılarak yeni bir sabit nokta teoremi verilmiştir, Son olarak da, Edelstein sabit nokta teoreminin nonself versiyonunu sonuç olarak verilmiştir.

Teorem 3.3.1. (M,p) kompakt metrik uzay ve $\Upsilon : M \to M$ bir P-büzülülebilir dönüşümü olsun. Eğer $f(\eta) = p(\eta, \Upsilon\eta)$ fonksiyonu alttan yarı sürekli ise Υ bir tek sabit noktaya sahiptir.

Teorem 3.3.2. (M,p) kompakt metrik uzay ve $\Upsilon : M \to M$ bir sürekli P-büzülülebilir dönüşümü olsun. Υ bir tek sabit noktaya sahiptir.

Teorem 3.3.3. (M,p) tam metrik uzay ve $\Upsilon : M \to M$ bir P-büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda Υ bir tek sabit noktaya sahiptir.

Tanım 3.3.4. (M,p) bir metrik uzay, $\Upsilon : M \to M$ bir dönüşüm olsun. $\eta \neq \xi$ özelliğindeki her $\eta, \xi \in M$ için

$$p(\Upsilon\eta, \Upsilon\xi) < p(\eta, \xi)$$

özelliği sağlanırsa Υ dönüşümüne büzülebilir denir.

Örnek 4. $M = [0,2]$, p alışılmış metrik ve $\Upsilon : M \to M$,

$$\Upsilon(\xi) = \begin{cases} 1 & , \quad \xi \leq 1 \\ 0 & , \quad \xi > 1 \end{cases}$$

bir dönüşüm olsun. Bu durumda $\Upsilon \in P(M) \backslash C(M)$ dir. (Burada $P(M)$; P-büzülebilir dönüşümleri sınıfı, $C(M)$; büzülebilir dönüşümleri sınıfı) Bu örnekten anlaşılacağı gibi $C(M)$, $P(M)$ nin bir öz alt sınıfıdır.

Teorem 3.3.5. (M, p) kompakt metrik uzay ve Υ, M üzerinde bir P-büzülebilir dönüşüm olsun. Eğer $f(\xi) = p(\xi, \Upsilon\xi)$ fonksiyonu alttan yarı sürekli ise, Υ bir tek sabit noktaya sahiptir.

Uyarı 1. Örnek (4) te Υ dönüşüm P-büzülebilir ve $f(\xi) = p(\xi, \Upsilon\xi)$ alttan yarı sürekli olduğundan Teorem (3.3.5) den Υ nin bir sabit noktası vardır. Dahası $\{\Upsilon^n x\}$ Picard dizisi sabit noktaya yakınsaktır. Ancak aşağıdaki örnekte de göreceğimiz gibi Picard iterasyon disizi Υ un sabit noktasına yakınsamak zorunda değildir. Bu durumda Teorem 3.3.2 Unnamed tipi teoremler sınıfına ait olur.

Örnek 5. $M = [-2,-1] \cup \{0\} \cup [1,2]$ üzerinde p alışılmış metrik tanımlı olsun. $\Upsilon : M \to M$ fonksiyonu

$$\Upsilon\zeta = \begin{cases} \frac{1-\zeta}{2} & , \quad \zeta \in [-2,-1) \\ -\zeta & , \quad \zeta \in (1,2] \\ 0 & , \quad \zeta \in \{-1,0,1\} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda Υ bir P-büzülebilir dönüşümdür ve

$$f(\zeta) = p(\zeta, \Upsilon\zeta) = \begin{cases} \frac{1-3\zeta}{2} & , \quad \zeta \in [-2,-1) \\ 2\zeta & , \quad \zeta \in (1,2] \\ 1 & , \quad \zeta \in \{-1,1\} \\ 0 & , \quad \zeta = 0 \end{cases}$$

fonksiyonu alttan yarı süreklidir.Υ dönüşümünün Teorem 3.3.2 den sabit noktası vardır. $\zeta_0 = 2$ başlangıç noktası ile oluşturulan Picard iterasyon dizisi Υ nın sabit noktasına yakınsamaz

Tanım 3.3.6. (M,p) bir metrik uzay olsun. $\eta \neq \xi$ özelliğindeki her $\eta,\xi \in M$ için

$$p(\eta,\zeta)+p(\zeta,\xi)=p(\eta,\xi)$$

özelliğini sağlayan $\eta \neq \xi \neq \zeta$, $\zeta \in M$ varsa bu (M,p) uzaya metriksel konveks metrik uzay denir.

$K \subseteq M$ kapalı bir altküme ve $\eta \in K$, $\xi \notin K$ ise

$$p(\eta,\zeta)+p(\zeta,\xi)=p(\eta,\xi)$$

olacak şekilde $\zeta \in \partial K$ vardır.

Teorem 3.3.7. (M,p) tam metriksel konveks metrik uzay, $K \subseteq M$ kapalı, $\Upsilon : K \to M$ dönüşümü her $\eta,\xi \in K$ için

$$p(\Upsilon\eta,\Upsilon\xi) \leq c\{p(\eta,\xi)+|p(\eta,\Upsilon\eta)-p(\xi,\Upsilon\xi)|\}$$

olacak şekilde $c \in [0,1)$ vardır özelliğini sağlasın. Eğer $\Upsilon(\partial K) \subseteq K$ ise Υ , K'da bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. Eğer $\Upsilon(K) \subset K$ ise kapalı K üzerinde bir self dönüşüm olduğundan Teorem 3.3.3 dan sabit noktası vardır. Kabul edelim ki $\Upsilon(K) \nsubseteq K$ olsun. Bu durumda $\Upsilon\eta \notin K$ olacak şekilde $\eta \in K$ vardır. K nın kapalılığından

$$p(\eta_0,\eta)+p(\eta,\Upsilon\eta_0)=p(\eta_0,\Upsilon\eta_0)$$

özelliğini sağlayan $\eta_0 \in \partial K$ vardır. Bu durumda $\partial K \neq \phi$ dır. $\eta_0 \in \partial K$ olsun. $\Upsilon(\partial K) \subseteq K$ olduğundan $\Upsilon\eta_0 \in K$ dır. Bu durumda $\eta_1 = \Upsilon\eta_0$ olarak seçebiliriz. Şimdi, $\Upsilon\eta_1 \in K$ ise $\eta_2 = \Upsilon\eta_1$ olarak alalım. $\Upsilon\eta_1 \notin K$ ise uzayın metriksel konveks olmasından

$$p(\eta_1,\eta_2)+p(\eta_2,\Upsilon\eta_1)=p(\eta_1,\Upsilon\eta_1)$$

özelliğini sağlayan $\eta_2 \in \partial K$ seçebiliriz. Bu işleme devam ederek terimleri aşağıdaki özelliklerden birine uygun bir $\{\eta_n\}$ dizisi oluşturabiliriz.

(i) $\Upsilon\eta_{n-1} \in K$ için $\eta_n = \Upsilon\eta_{n-1}$,

(ii)

$$p(\eta_{n-1},\eta_n) + p(\eta_n,\Upsilon\eta_{n-1}) = p(\eta_{n-1},\Upsilon\eta_{n-1})$$

olacak şekilde $\eta_n \in \partial K$ vardır.

İspatta kolaylık için $P = \{\eta_k \in \{\eta_n\} : \eta_k = \Upsilon\eta_{k-1}\}$ ve $Q = \{\eta_k \in \{\eta_n\} : \eta_k \neq \Upsilon\eta_{k-1}\}$ olarak alalım. Burada dikkat edelim ki $\{\eta_n\} \subseteq K$ ve $\eta_k \in Q$ ise η_{k-1}ve η_{k+1} terimlerinin her ikisi de P dedir. Üstelik $\Upsilon(\partial K) \subseteq K$ olduğundan dolayı $\{\eta_n\}$ dizisinin ardışık iki terimi Q da değildir. (Ancak ardışık iki terimi P de olabilir) Şimdi $\{\eta_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Bunu ispatlamak için üç durum ele alacağız. Aşağıda inceleyeceğimiz durumlarda her $n \in \mathbb{N}$ için $\eta_n \neq \Upsilon\eta_n$ olarak kabul edeceğiz, aksi halde η_n, Υ nin sabit noktasıdır.

Durum 1 $\eta_n, \eta_{n+1} \in P$. Bu durumda $\eta_n = \Upsilon\eta_{n-1}$ ve $\eta_{n+1} = \Upsilon\eta_n$ dır. Dolayısıyla büzülme koşulundan

$$\begin{aligned} p(\eta_n,\eta_{n+1}) &= p(\Upsilon\eta_{n-1},\Upsilon\eta_n) \\ &\leq c\{p(\eta_{n-1},\eta_n) + |p(\eta_{n-1},\Upsilon\eta_{n-1}) - p(\eta_n,\Upsilon\eta_n)|\} \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

elde ederiz. Şimdi $p(\eta_{n-1},\Upsilon\eta_{n-1}) \leq p(\eta_n,\Upsilon\eta_n)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda (3.3.1) den $p(\eta_n,\eta_{n+1}) \leq cp(\eta_n,\eta_{n+1})$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. ($c \in [0,1)$) Bu yüzden $p(\eta_{n-1},\Upsilon\eta_{n-1}) > p(\eta_n,\Upsilon\eta_n)$ olmalıdır. (3.3.1) den

$$\begin{aligned} p(\eta_n,\eta_{n+1}) &= p(\Upsilon\eta_{n-1},\Upsilon\eta_n) \\ &\leq c\{p(\eta_{n-1},\eta_n) + |p(\eta_{n-1},\Upsilon\eta_{n-1}) - p(\eta_n,\Upsilon\eta_n)|\} \\ &= cp(\eta_{n-1},\eta_n) + cp(\eta_{n-1},\Upsilon\eta_{n-1}) - cp(\eta_n,\eta_{n+1}) \\ &= 2cp(\eta_{n-1},\eta_n) - cp(\eta_n,\eta_{n+1}) \\ &\leq \frac{2c}{1+c}p(\eta_{n-1},\eta_n) \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

elde edilir.

Durum 2 $\eta_n \in P$ ve $\eta_{n+1} \in Q$. Bu durumda $\eta_n = \Upsilon\eta_{n-1}$, $\eta_{n+1} \neq \Upsilon\eta_n$ ve

$$p(\eta_n,\eta_{n+1}) + p(\eta_{n+1},\Upsilon\eta_n) = p(\eta_n,\Upsilon\eta_n)$$

dır. Büzülme koşulundan

$$\begin{aligned} p(\eta_n,\eta_{n+1}) &\leq p(\eta_n,\Upsilon\eta_n) \\ &= p(\Upsilon\eta_{n-1},\Upsilon\eta_n) \\ &\leq c\{p(\eta_{n-1},\eta_n)+|p(\eta_{n-1},\Upsilon\eta_{n-1})-p(\eta_n,\Upsilon\eta_n)|\} \end{aligned}$$

dır. Benzer işlemlerle

$$p(\eta_n,\eta_{n+1}) \leq \frac{2c}{1+c}p(\eta_{n-1},\eta_n)$$

elde edilir.

Durum 3 $\eta_n \in Q$ ve $\eta_{n+1} \in P$. Bu durumda $\eta_n \neq \Upsilon\eta_{n-1}$, $\eta_{n+1} = \Upsilon\eta_n$ ve

$$p(\eta_{n-1},\eta_n)+p(\eta_n,\Upsilon\eta_{n-1}) = p(\eta_{n-1},\Upsilon\eta_{n-1})$$

dır. Büzülme koşulundan

$$\begin{aligned} p(\eta_n,\eta_{n+1}) &\leq p(\eta_n,\Upsilon\eta_{n-1})+p(\Upsilon\eta_{n-1},\eta_{n+1}) \\ &= p(\eta_n,\Upsilon\eta_{n-1})+p(\Upsilon\eta_{n-1},\Upsilon\eta_n) \\ &\leq p(\eta_n,\Upsilon\eta_{n-1})+c\{p(\eta_{n-1},\eta_n) \\ &\quad +|p(\eta_{n-1},\Upsilon\eta_{n-1})-p(\eta_n,\Upsilon\eta_n)|\} \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

elde edilir. Şimdi $p(\eta_n,\Upsilon\eta_n) \geq p(\eta_{n-1},\Upsilon\eta_{n-1})$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} p(\eta_n,\Upsilon\eta_n) &\geq p(\eta_{n-1},\Upsilon\eta_{n-1}) \\ &= p(\eta_{n-1},\eta_n)+p(\eta_n,\Upsilon\eta_{n-1}) \\ &> p(\eta_n,\Upsilon\eta_{n-1}), \end{aligned}$$

diğer yandan (3.3.3) den

$$p(\eta_n,\eta_{n+1}) \leq p(\eta_n,\Upsilon\eta_{n-1})+c\{p(\eta_{n-1},\eta_n)+|p(\eta_{n-1},\Upsilon\eta_{n-1})-p(\eta_n,\Upsilon\eta_n)|\}$$

elde edilir ve buradan gerekli işlemlerle

$$(1-c)p(\eta_n,\eta_{n+1}) \leq (1-c)p(\eta_n,\eta_{n-1})$$

elde edilir. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $p(\eta_n,\Upsilon\eta_n) < p(\eta_{n-1},\Upsilon\eta_{n-1})$ olur ki benzer yolla

$$p(\eta_n,\eta_{n+1}) < \frac{2c}{1+c}p(\eta_{n-1},\eta_{n-2})$$

elde edilir. Bu incelediğimiz üç durum sonucunda $\{\eta_n\}$ dizisi her $n \geq 2$ için

$$p(\eta_n,\eta_{n+1}) \leq \lambda \max\{p(\eta_{n-1},\eta_n), p(\eta_{n-1},\eta_{n-2})\} \tag{3.3.4}$$

koşulunu sağlar ki burada $\lambda = \dfrac{2c}{1+c} < 1$ dır. Şimdi her $n \geq 1$ için tümevarım ile (3.3.4) den

$$p(\eta_n,\eta_{n+1}) \leq \lambda^{[\frac{n}{2}]} \max\{p(\eta_0,\eta_1), p(\eta_1,\eta_2)\} \tag{3.3.5}$$

elde edilir. Burada $[\frac{n}{2}]$; $\frac{n}{2}$ den küçük en büyük tamsayı olsun. $m=1$ için (3.3.5) in sağlandığı açıktır. Kabul edelim ki $1 \leq n \leq m$ için (3.3.5) sağlansın. $m \geq 2$ için

$$\begin{aligned}
p(\eta_{m+1},\eta_{m+2}) &\leq \lambda \max\{p(\eta_m,\eta_{m+1}), p(\eta_m,\eta_{m-1})\} \\
&\leq \lambda \max\left\{\begin{array}{c} \lambda^{[\frac{m}{2}]}\max\{\mathrm{p}(\eta_0,\eta_1),\mathrm{p}(\eta_1,\eta_2)\}, \\ \lambda^{[\frac{m-1}{2}]}\max\{\mathrm{p}(\eta_0,\eta_1),\mathrm{p}(\eta_1,\eta_2)\} \end{array}\right\} \\
&= \lambda \max\left\{\lambda^{[\frac{m}{2}]}, \lambda^{[\frac{m-1}{2}]}\right\} \max\{p(\eta_0,\eta_1), p(\eta_1,\eta_2)\} \\
&= \lambda\lambda^{[\frac{m-1}{2}]} \max\{p(\eta_0,\eta_1), p(\eta_1,\eta_2)\} \\
&= \lambda^{[\frac{m+1}{2}]} \max\{p(\eta_0,\eta_1), p(\eta_1,\eta_2)\}
\end{aligned}$$

elde edilir ki (3.3.5) her $n \in \mathbb{N}$ için doğrudur. Bu durumda $n > m$ için

$$\begin{aligned} p(\eta_n, \eta_m) &\leq p(\eta_n, \eta_{n+1}) + p(\eta_{n+1}, \eta_{n+2}) + ... + p(\eta_{m-1}, \eta_m) \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} p(\eta_i, \eta_{i+1}) \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} \lambda^{[\frac{i}{2}]} \max\{p(\eta_0, \eta_1), p(\eta_1, \eta_2)\} \\ &\leq 2\frac{\lambda^{[\frac{i}{2}]}}{1-\lambda} \max\{p(\eta_0, \eta_1), p(\eta_1, \eta_2)\} \end{aligned}$$

olur ki $\{\eta_n\}$ Cauchy dizisidir. $\{\eta_n\} \subseteq K$ ve K kapalı olduğundan $\{\eta_n\}$ dizisi K da bir noktaya yakınsar. Kabul edelim ki bu nokta η^* ve $\{\eta_{n_k}\} \subseteq \{\eta_n\}$ nin sonsuz bir alt dizisi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} p(\eta^*, \Upsilon\eta^*) &\leq p(\eta^*, \eta_{n_{k+1}}) + p(\eta_{n_{k+1}}, \Upsilon\eta^*) \\ &= p(\eta^*, \eta_{n_{k+1}}) + p(\Upsilon\eta_{n_k}, \Upsilon\eta^*) \end{aligned}$$

büzülme koşulundan

$$p(\eta^*, \Upsilon\eta^*) \leq p(\eta^*, \eta_{n_{k+1}}) + cp(\eta_{n_k}, \eta^*) + cp(\eta^*, \Upsilon\eta^*) + cp(\eta_{n_k}, \eta_{n_{k+1}})$$

elde edilir ki $n_k \to \infty$ için limit alırsak $p(\eta^*, \Upsilon\eta^*) = 0$ □

Örnek 6. $M = \mathbb{R}$, p alışılmış metrik ve $K = [-1,0] \cup \left\{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$ olsun. Bu durumda (M, p) metriksel konveks metrik uzay ve K, M 'nin kapalı alt kümesidir. $A = \{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, $B = \{-\eta; \eta \in A\}$ ve $C = [-1,0] \setminus B$ olarak tanımlayalım. A, B, C ayrık kümelerdir ve $K = A \cup B \cup C$ dir. $\Upsilon : K \to M$ dönüşümünü

$$\Upsilon(\eta) = \begin{cases} -\frac{\eta}{3} & , \quad \eta \in A \\ \frac{1}{2^{n+1}} & , \quad \eta \in B, \ |\eta| = \frac{1}{2^n} \\ -\frac{\eta}{2} & , \quad \eta \in C \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Dikkat edelim ki $\partial K = \{-1, 0\} \cup A$ ve $\Upsilon(\partial K) \subseteq K$. Şimdi Υ nin bir nonself P-büzülme olduğunu göstereceğiz.

Durum 1 $\zeta,\eta \in A$, $\zeta,\eta \in B$ veya $\zeta,\eta \in C$ olarak alalım. Bu durumda

$$p(\Upsilon\zeta,\Upsilon\eta) \leq \frac{1}{2}p(\zeta,\eta)$$

Durum 2 $\zeta \in A$, $\eta \in B$ olarak olalım. Bu durumda

$$p(\Upsilon\zeta,\Upsilon\eta) = \left|-\frac{\zeta}{3} - \frac{1}{2^{n+1}}\right| = \frac{\zeta}{3} + \frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2}(\zeta + \frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2}p(\zeta,\eta)$$

Durum 3 $\zeta \in A$, $\eta \in C$ olarak olalım. Bu durumda

$$p(\Upsilon\zeta,\Upsilon\eta) = \left|-\frac{\zeta}{3} + \frac{\eta}{2}\right| = \frac{\zeta}{3} + \frac{|\eta|}{2} \leq \frac{\zeta}{2} + \frac{|\eta|}{2} = \frac{1}{2}p(\zeta,\eta)$$

Durum 4 $\zeta \in B$, $\eta \in C$ olarak olalım. Bu durumda

$$p(\Upsilon\zeta,\Upsilon\eta) = \left|\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{\eta}{2}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2^n} + \eta\right| = \frac{1}{2}p(\zeta,\eta)$$

olur ki Υ bir noself P-büzülmedir. Teorem 3.3.7 den Υ bir tek sabit noktaya sahiptir.

Teorem 3.3.8. (M,p) metriksel konveks metrik uzay K, M nin boş olmayan kompakt alt kümesi ve $\Upsilon : K \to M$ fonksiyonu $\eta \neq \xi$ özelliğindeki her $\eta,\xi \in K$ için

$$p(\Upsilon\eta,\Upsilon\xi) < p(\eta,\xi) + |p(\eta,\Upsilon\eta) - p(\xi,\Upsilon\xi)| \tag{3.3.6}$$

özelliği sağlasın. Eğer $\eta \to p(\eta,\Upsilon\eta)$ alttan yarı sürekli ve $\Upsilon(\partial K) \subseteq K$ ise Υ, K'da bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. Eğer $\Upsilon(K) \subset K$ ise kapalı K üzerinde bir self dönüşüm olduğundan Teorem 3.3.1 dan sabit noktası vardır. Kabul edelim ki $\Upsilon(K) \nsubseteq K$ olsun ve $f(\eta) = p(\eta,\Upsilon\eta)$ olarak tanımlanan $f : K \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu düşünelim. K kompakt ve f alttan yarı sürekli olduğundan $f(\eta_0) = \inf f(K)$ olacak şekilde $\eta_0 \in K$ vardır.

Durum 1. $\eta_0 \in \partial K$ ise $\Upsilon\eta_0 \in K$ dır. $\eta_0 \neq \Upsilon\eta_0$ olsun. Büzülebilirlik koşulundan

$$\begin{aligned} f(\Upsilon\eta_0) &= p(\Upsilon\eta_0, \Upsilon\Upsilon\eta_0) \\ &< p(\eta_0, \Upsilon\eta_0) + |p(\eta_0, \Upsilon\eta_0) - p(\Upsilon\eta_0, \Upsilon\Upsilon\eta_0)| \\ &= f(\eta_0) + |f(\eta_0) - f(\Upsilon\eta_0)| \\ &= f(\Upsilon\eta_0) \end{aligned}$$

bu bir çelişkidir. Bu durumda $\eta_0 = \Upsilon\eta_0$.

Durum 2. $\eta_0 \notin \partial K$ olsun. Bu durumda $\Upsilon\eta_0 \notin K$ dır. Uzay metriksel konveks olduğundan

$$p(\eta_0, \eta_1) + p(\eta_1, \Upsilon\eta_0) = p(\eta_0, \Upsilon\eta_0)$$

olacak şekilde $\eta_1 \in \partial K$ vardır. $\eta_0 \neq \eta_1$ olduğundan büzülebilirlik koşulundan

$$\begin{aligned} p(\Upsilon\eta_0, \Upsilon\eta_1) &< p(\eta_0, \eta_1) + |p(\eta_0, \Upsilon\eta_0) - p(\eta_1, \Upsilon\eta_1)| \\ &= p(\eta_1, \Upsilon\eta_1) - p(\eta_1, \Upsilon\eta_0) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu üçgen eşitsizliği ile çelişir. Bu durumda $\Upsilon\eta_0 \in K$ ve böylece $\eta_0 = \Upsilon\eta_0$. □

Örnek 7. $M = \mathbb{R}$, p alışılmış metrik ve $K = [0,1]$ olsun. Bu durumda (M, p) metriksel konveks metrik uzay ve K, M nin kompakt alt kümesidir. $\Upsilon : K \to M$ dönüşümünü aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$\Upsilon(\zeta) = \begin{cases} 1 & , \quad \zeta = 1 \\ \sqrt{1+\zeta^2} & , \quad \zeta \neq 1 \end{cases}$$

Υ, $[0,1)$ üzerinde bir büzülebilir dönüşümü olduğundan her $\zeta, \eta \in M, \zeta \neq \eta$ için 3.3.6 eşitsizliği sağlanır

$\zeta \in [0,1), \eta = 1$ olarak alalım,

$$\begin{aligned}
p(\Upsilon\zeta, \Upsilon\eta) &= \left|\sqrt{1+\zeta^2} - 1\right| \\
&= \sqrt{1+\zeta^2} - 1 \\
&= 1 + \sqrt{1+\zeta^2} - 2 \\
&\leq 1 + \sqrt{1+\zeta^2} - 2\zeta \\
&= 1 - \zeta + \sqrt{1+\zeta^2} - \zeta \\
&= p(\zeta, \eta) + p(\zeta, \Upsilon\zeta) \\
&= p(\zeta, \eta) + |p(\zeta, \Upsilon\zeta) - p(\xi, \Upsilon\xi)|
\end{aligned}$$

olur ki tüm $\zeta, \eta \in K, \zeta \neq \eta$ için (3.3.6) eşitsizliği sağlanmış olur. Son olarak $\Upsilon(\partial K)$ $\subseteq K$ ve

$$f(\zeta) = p(\zeta, \Upsilon\zeta) = \begin{cases} 0 & , \quad \zeta = 1 \\ \sqrt{1+\zeta^2} - \zeta & , \quad \zeta \neq 1 \end{cases}$$

alttan yarı sürekli olduğundan, Theorem 3.3.5 daki tüm koşullar sağlanmış olur.

Not 2. Eğer Υ fonksiyonu sürekli ise $f(\zeta) = p(\zeta, \Upsilon\zeta)$ fonksiyonuda süreklidir. Dolayısıyla alttan yarı süreklidir. Ancak f fonksiyonu alttan yarı sürekli olsa bile Υ dönüşümünün sürekli olması gerekmez. Böylece Theorem 3.3.2 ün noneself versiyonunu aşağıdaki sonuçla verebiliriz.

Sonuç 1. (M, p) metriksel konveks metrik uzay, K, M nin kompakt alt kümesi ve $\Upsilon : K \to M$ her $\zeta, \eta \in M$, $\zeta \neq \eta$ için (3.3.6) eşitsizliğin sağlayan sürekli bir dönüşüm olsun. Eğer $\Upsilon(\partial K) \subseteq K$ ise Υ K'da bir tek sabit noktaya sahiptir.

Son olarak, Sonuç 1 yardımıyla ünlü Edelstein sabit nokta teoreminin self olmayan versiyonunu verebiliriz.

Sonuç 2. (M, p) metriksel konveks metrik uzay, K, M nin kompakt alt kümesi ve $\Upsilon :$ $K \to M$ büzülebilir dönüşüm olsun. Eğer $\Upsilon(\partial K) \subseteq K$ ise Υ K'da bir tek sabit noktaya sahiptir.

3.4. F- METRİK UZAYDA P-BÜZÜLME ÜZERİNE SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bu bölümde yeni bir uzay olan F-metrik uzay ile ilgili temel tanım ve teoremleri verilmiş. Daha sonra F-metrik üzerinde sürekli Υ P-büzülme dönüşümü için sabit nokta teoremi ispatlanmış ve P-büzülmenin Feng-Lui tipi genelleştirmesi verilmiştir. $f:(0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olsun.

(i) $0<s<t\Rightarrow f(s)\leq f(t)$,

(ii) Her $(t_n)\subseteq(0,\infty)$ dizisi için $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f(t_n)=-\infty$

özelliklerini sağlayan fonksiyonların sınıfını Ω olarak alalım.

Tanım 3.4.1. $M\neq\varnothing$ herhangi bir küme, $D:M\times M\longrightarrow[0,\infty)$ olsun.

(i) Her $(\zeta,\eta)\in M\times M$ için $D(\zeta,\eta)=0\Rightarrow\zeta=\eta$,

(ii) Her $(\zeta,\eta)\in M\times M$ için $D(\zeta,\eta)=D(\eta,\zeta)$,

(iii) Her $(\zeta,\eta)\in M\times M$, her $N\in\mathbb{N}$, $N\geq2$ ve her $(\zeta,\eta)=(u_1,u_N)$ olacak şekildeki $(u_i)_1^N\subseteq M$ sonlu dizisi için

$$D(\zeta,\eta)>0\Longrightarrow f(D(\zeta,\eta))\leq f(\sum_{i=1}^{N-1}D(u_i,u_{i+1}))+\alpha$$

koşulunu sağlayan $(f,\alpha)\in\Omega\times[0,\infty)$ varsa D ye M üzerinde bir F-metrik, (M,D) ikilisine de F-metrik uzay denir.

Önerme 3.4.2. M üzerinde tanımlı herhangi bir p metrik aynı zamanda M üzerinde tanımlı F- metriktir.

Gerçekten, her $\zeta,\eta\in M$ için $p:M\times M\to\mathbb{R}^+$ bir metrik ve (M,p) bir metrik uzay olsun. M üzerinde $D:M\times M\to[0,\infty)$, $D(\zeta,\eta)=p(\zeta,\eta)$ şeklinde bir fonksiyon tanımlayalım.

(i) Her $\zeta,\eta\in M$ için, $D(\zeta,\eta)=p(\zeta,\eta)=0$ olsun. (M,p) bir metrik uzay olduğundan $p(\zeta,\eta)=0\Longleftrightarrow\zeta=\eta$ sağlanır.

(ii) Her $\zeta,\eta \in M$ için, $D(\zeta,\eta) = p(\zeta,\eta) = p(\eta,\zeta) = D(\eta,\zeta)$ dır.

(iii) Her $\zeta,\eta \in M$, her $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ ve her $(\zeta,\eta) = (u_1,u_N)$ olacak şekilde $(u_i)_1^N \subseteq M$ sonlu dizisi için,

$$\begin{aligned} D(\zeta,\eta) &= p(\zeta,\eta) = p(u_1,u_N) \\ &\leq p(u_1,u_2) + p(u_2,u_3) + \cdots + p(u_{N-1},u_N) \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} p(u_i,u_{i+1}) \end{aligned}$$

$p(\zeta,\eta) > 0$ ve $f(x) = \ln x$ olarak aldığımızda $f \in \Omega$ olduğu açıktır. Böylece $\alpha \in [0,\infty)$ için

$$\ln(D(\zeta,\eta)) = \ln(p(\zeta,\eta)) \leq \ln(\sum_{i=1}^{N-1} p(u_i,u_{i+1})) + \alpha$$

olup (i), (ii), (iii) den D, M üzerinde bir F-metrik olur.

Örnek 8. $M = \mathbb{N}$, her $\zeta,\eta \in M$ için $D : M \times M \to [0,\infty)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$D(\zeta,\eta) = \begin{cases} (\zeta-\eta)^2 & , \quad (\zeta,\eta) \in [0,3] \times [0,3] \\ |\zeta-\eta| & , \quad (\zeta,\eta) \notin [0,3] \times [0,3] \end{cases}$$

(i) $(\zeta,\eta) \in [0,3] \times [0,3]$ ise,

$$D(\zeta,\eta) = (\zeta-\eta)^2 = 0 \Longleftrightarrow \zeta - \eta = 0 \Longleftrightarrow \zeta = \eta$$

$(\zeta,\eta) \notin [0,3] \times [0,3]$ ise,

$$D(\zeta,\eta) = |\zeta-\eta| = 0 \Longleftrightarrow \zeta - \eta = 0 \Longleftrightarrow \zeta = \eta.$$

(ii) $(\zeta,\eta) \in [0,3] \times [0,3]$ ise,

$$D(\zeta,\eta) = (\zeta-\eta)^2 = (\eta-\zeta)^2 = D(\eta,\zeta)$$

$(\zeta,\eta) \notin [0,3]\times[0,3]$ ise,

$$D(\zeta,\eta) = |\zeta-\eta| = |\eta-\zeta| = D(\eta,\zeta).$$

(iii) Her $\zeta,\eta \in M$, her $N \in \mathbb{N}, N \geq 2$ ve her $(\zeta,\eta) = (u_1,u_N)$ olacak şekilde $(u_i)_1^N \subseteq \mathbb{N}$ sonlu dizi ve

$$\begin{aligned} I &= \{i = 1,2,\cdots,N-1 : (u_i,u_{i+1}) \in [0,3]\times[0,3]\} \\ J &= \{1,2,3,\cdots,N-1\} \setminus I \end{aligned}$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N-1} D(u_i,u_{i+1}) &= \sum_{i\in I} D(u_i,u_{i+1}) + \sum_{i\in J} D(u_i,u_{i+1}) \\ &= \sum_{i\in I} (u_i - u_{i+1})^2 + \sum_{i\in J} |u_i - u_{i+1}|. \end{aligned}$$

$(\zeta,\eta) \notin [0,3]\times[0,3]$ ise

$$\begin{aligned} D(\zeta,\eta) &= |\zeta-\eta|, \quad \zeta = u_1, \eta = u_N \\ &= |u_1 - u_N| \\ &\leq |u_1-u_2| + |u_2-u_3| + \cdots + |u_{N-1}-u_N| \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} |u_i - u_{i+1}| \\ &= \sum_{i\in I} |u_i-u_{i+1}| + \sum_{i\in J} |u_i-u_{i+1}| \\ &\leq \sum_{i\in I} (u_i-u_{i+1})^2 + \sum_{i\in J} |u_i-u_{i+1}| \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} D(u_i,u_{i+1}). \end{aligned}$$

$(\zeta,\eta) \notin [0,3]\times[0,3]$ ise

$$\begin{aligned}
D(\zeta,\eta) &= |\zeta-\eta|^2 \\
&\leq 3|\zeta-\eta| \\
&\leq 3\left(\sum_{i\in I}|u_i-u_{i+1}|+\sum_{i\in J}|u_i-u_{i+1}|\right) \\
&\leq 3\left(\sum_{i\in I}(u_i-u_{i+1})^2+\sum_{i\in J}|u_i-u_{i+1}|\right) \\
&= 3\sum_{i=1}^{N-1}D(u_i,u_{i+1}).
\end{aligned}$$

dır. Her $\eta,\gamma\in M$, her $N\in\mathbb{N}$, $N\geq 2$ ve her $(\zeta,\eta)=(u_1,u_N)$ olacak şekilde $(u_i)_1^N\subseteq M$ sonlu dizi için,

$$\begin{aligned}
D(\zeta,\eta)>0 &\implies D(\zeta,\eta)\leq 3\sum_{i=1}^{N-1}D(u_i,u_{i+1}) \\
&\implies \ln D(\zeta,\eta)\leq \ln\sum_{i=1}^{N-1}D(u_i,u_{i+1})+\ln 3.
\end{aligned}$$

dır. Bu durumda $(\mathbb{N},D)$ ikilisi F-metrik uzaydır.

Özel olarak $\zeta=1$, $\eta=3$ ve $\delta=2$ olarak aldığımızda

$$D(1,3)=4>D(1,2)+D(2,3)=1+1=2$$

olur ki metrik olma şartı olan üçgen eşitsizliği koşulunu sağlamaz. Dolayısıyla $(\mathbb{N},D)$, F-metrik uzay olmasına rağmen metrik uzay değildir.

Tanım 3.4.3. $M\neq\varnothing$ herhangi bir küme, $D: M\times M\to[0,\infty)$ bir fonksiyon olsun.

(i) Her $(\zeta,\eta)\in M\times M$ için, $D(\zeta,\eta)=0 \iff \zeta=\eta$,

(ii) Her $(\zeta,\eta)\in M\times M$ için, $D(\zeta,\eta)=D(\eta,\zeta)$,

(iii) Her $(\zeta,\eta)\in M\times M$ için,

$$D(\zeta,\eta)>0 \implies f(p(\zeta,\eta))\leq f(D(\zeta,\eta))\leq f(p(\zeta,\eta))+\alpha$$

olacak şekilde bir p metriği varsa D fonksiyonu $(f,\alpha) \in \Omega \times [0,\infty)$' a göre F-metrik sınırlıdır denir.

Teorem 3.4.4. $M \neq \varnothing$ herhangi bir küme, $D : M \times M \to [0,\infty)$ bir fonksiyon olsun.

(i) Her $(\zeta,\eta) \in M \times M$ için, $D(\zeta,\eta) = 0 \Longleftrightarrow \zeta = \eta$,

(ii) Her $(\zeta,\eta) \in M \times M$ için, $D(\zeta,\eta) = D(\eta,\zeta)$.

koşulları sağlansın. $(f,\alpha) \in \Omega \times [0,\infty)$ ve f sağdan sürekli olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) D, (f,α) ile birlikte M üzerinde bir F- metriktir.

(b) D, (f,α) ya göre F- metrik sınırlıdır.

İspat. (a)$\Longrightarrow$(b) D, M üzerinde bir F-metrik olsun. $p : M \times M \to [0,\infty)$, $p(\zeta,\eta) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i,u_{i+1}) : N \in \mathbb{N}, N \geq 2 \text{ ve her } (\zeta,\eta) = (u_1,u_N), (u_i)_1^N \subseteq M\right\}$ şeklinde tanımlı p fonksiyonu M üzerinde bir metriktir. Gerçekten, her $\zeta,\eta \in M$ için $p(\zeta,\eta) = 0$ olduğundan $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ ve her $(\zeta,\eta) = (u_1,u_N)$ olacak şekilde bir $(u_i)_1^N \subseteq M$ sonlu dizisi var öyle ki $\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i,u_{i+1}) = 0$. Dolayısıyla, her bir $i \in \{1,2,3,\cdots,N-1\}$ için $D(u_i,u_{i+1}) = 0$ dır. Bu durumda her bir $i \in \{1,2,3,\cdots,N-1\}$ için $u_i = u_{i+1}$ yani $\zeta = \eta$ olur. Tersine $\zeta = \eta$ iken $p(\zeta,\eta) = 0$ olduğu kolayca gösterilebilir. $(\zeta,\eta) \in M \times M$, $\zeta \neq \eta$ ve kabul edelim ki $p(\zeta,\eta) = 0$ olsun. $\varepsilon > 0$ ve d nin tanımından $N \in \mathbb{N}, N \geq 2$ ve her $(\zeta,\eta) = (u_1,u_N)$, $(u_i)_1^N \subseteq M$ için,

$$\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i,u_{i+1}) < \varepsilon$$

dır. f azalmayan olduğundan

$$f\left(\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i,u_{i+1})\right) < f(\varepsilon). \tag{3.4.1}$$

Diğer yandan, F-metrik'in üçüncü koşulundan

$$f(D(\zeta,\eta)) \leq f\left(\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i,u_{i+1})\right) + \alpha \tag{3.4.2}$$

bulunur. (3.4.1) ve (3.4.2) eşitsizlillerinden $f(D(\zeta,\eta)) \leq f(\varepsilon)+\alpha$ elde edilir. f fonksiyonunun özelliğinden $\varepsilon \longrightarrow 0$ için limit alınırsa $\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} f(\varepsilon)+\alpha = -\infty$ olur ki bu $f(D(\zeta,\eta)) \in [0,\infty)$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $p(\zeta,\eta) > 0$ dır. Her $\zeta,\eta \in M$ için F-metrik 'in ikinci koşulundan $D(u_i,u_{i+1}) = D(u_{i+1},u_i)$ olduğundan $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ ve her $(\zeta,\eta) = (u_1,u_N)$, $(u_i)_1^N \subseteq M$ için $p(\zeta,\eta) = p(\eta,\zeta)$ dir. Her $\zeta,\eta,\delta \in M$ ve $\lambda > 0$ için $\zeta = u_1,u_2,u_3,\cdots,u_N = \eta$ ve $\eta = u_N,u_{N+1},\cdots,u_M = \delta$,

$$\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i,u_{i+1}) < p(\zeta,\eta)+\lambda$$

eşitsizliği sağlanır. Aksi halde $\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i,u_{i+1}) \geq p(\zeta,\eta)+\lambda$ olur ki bu $p(\zeta,\eta)+\lambda$ nın infimum olması demektir. Bu da $p(\zeta,\eta)$ tanımı ile çelişir. Benzer şekilde

$$\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i,u_{i+1}) < p(\eta,\delta)+\lambda$$

eşitsizliği sağlanır. Bu iki eşitsizlikten

$$p(\zeta,\delta) \leq \sum_{i=1}^{N-1} D(u_i,u_{i+1}) < p(\zeta,\eta)+p(\eta,\delta)+2\lambda$$

elde edilir. $\lambda \longrightarrow 0$ için limit alınırsa, $p(\zeta,\delta) \leq p(\zeta,\eta)+p(\eta,\delta)$ olur. Bu durumda p, M üzerinde bir metriktir.

$D(\zeta,\eta) > 0$ olsun. p nin tanımından

$$p(\zeta,\eta) \leq D(\zeta,\eta)$$

dir. f 'nin azalmayan fonksiyon olduğundan

$$f(p(\zeta,\eta)) \leq f(D(\zeta,\eta)) \tag{3.4.3}$$

dir. $\varepsilon > 0$ ve infimum özelliğinden, $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ ve $(u_i)_1^N \subseteq M$, $(u_1,u_N) = (\zeta,\eta)$ için

$$\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i,u_{i+1}) < p(\zeta,\eta)+\varepsilon$$

ve buradan

$$f\left(\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i,u_{i+1})\right) < f\left(p(\zeta,\eta)+\varepsilon\right)$$

elde edilir. F- metrik'in üçüncü koşulundan

$$f(D(\zeta,\eta)) \leq f\left(\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i,u_{i+1})\right) + \alpha$$

olur ki buradan

$$f(D(\zeta,\eta)) \leq f(p(\zeta,\eta)+\varepsilon)+\alpha$$

elde edilir. f azalmayan ve sağdan sürekli olduğundan $\varepsilon \longrightarrow 0$ için limit alınırsa

$$f(D(\zeta,\eta)) \leq f(p(\zeta,\eta))+\alpha \tag{3.4.4}$$

(3.4.3) ve (3.4.4) den

$$f(p(\zeta,\eta)) \leq f(D(\zeta,\eta)) \leq f(p(\zeta,\eta))+\alpha$$

elde edilir ki böylece D nin F-metrik sınırlı olduğu göstermiş olur.

(b)$\Longrightarrow$(a) D, M üzerinde F-metrik sınırlı olsun. (i) ve (ii) koşulları sağlansın. $(\zeta,\eta) \in M \times M$, her $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ ve her $(\zeta,\eta) = (u_1,u_N)$ olacak şekilde $(u_i)_1^N \subseteq M$ sonlu dizisi için

$$\begin{aligned} p(\zeta,\eta) &= p(u_1,u_N) \\ &\leq p(u_1,u_2)+p(u_2,u_3)+\cdots+p(u_{N-1},u_N) \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} p(u_i,u_{i+1}). \end{aligned}$$

Diğer taraftan, f azalmayan ve D, F-metrik sınırlı olduğundan

$$\begin{aligned} (u,v)\in M\times M,\quad D(u,v)>0 \ &\Rightarrow\ f(p(u,v)) \leq f(D(u,v)) \leq f(p(u,v))+\alpha \\ &\Rightarrow\ p(u,v) \leq D(u,v) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda, $i \in \{1,2,3,\cdots,N-1\}$ için $p(u_i,u_{i+1}) \leq D(u_i,u_{i+1})$ olduğundan

$$\begin{array}{rrcl} & p(\zeta,\eta) & \leq & \sum\limits_{i=1}^{N-1} D(u_i,u_{i+1}) \\ \Longrightarrow & f(p(\zeta,\eta)) & \leq & f\left(\sum\limits_{i=1}^{N-1} D(u_i,u_{i+1})\right) \\ \Longrightarrow & f(p(\zeta,\eta))+\alpha & \leq & f\left(\sum\limits_{i=1}^{N-1} D(u_i,u_{i+1})\right)+\alpha \end{array}$$

elde edilir. Ayrıca, $f(D(\zeta,\eta)) \leq f(p(\zeta,\eta)+\alpha$ olduğundan

$$f(D(\zeta,\eta)) \leq f\left(\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i,u_{i+1})\right)+\alpha$$

olur ki böylece D nin M üzerinde metrik olduğu göstermiş olur. □

Tanım 3.4.5. (M,D) F-metrik uzay ve $A \subseteq M$ olsun. Her $\zeta \in A$ için bir $r > 0$ var öyle ki $B(\zeta,r) \subseteq A$ ise A, F-açık denir. Burada $B(\zeta,r) = \{\eta \in M : D(\zeta,\eta) < r\} \subseteq M$ dir. Ayrıca, $A \subseteq M$ nin tümleyeni $A^c = M \setminus A$ F-açık ise A ya F kapalı denir.

Not 3. (M,D) bir F-metrik uzay olsun. $\tau_F = \{A \subseteq M : A,\ F\text{-açıktır}\}$ şeklinde tanımlı τ_F, M üzerinde bir topolojidir.

Gerçekten, $\varnothing \in \tau_F$ dir. Çünkü $B(\zeta,r) \subseteq \varnothing$ olacak şekilde bir $\zeta \in \varnothing$ yoktur. Diğer yandan, her $\zeta \in M$ için $B(\zeta,r) = \{\eta \in M : D(\zeta,\eta) < r\} \subseteq M$ olduğundan M, F-açıktır. Dolayısıyla, $X \in \tau_F$ dir.
$A,B \in \tau_F$ olsun. $\zeta \in A \cap B$ alalım. Öyleyse $\zeta \in A$ ve $\zeta \in B$ dir. Dolayısıyla $B(\zeta,r_1) \subseteq A$ ve $B(\zeta,r_2) \subseteq B$ olacak şekilde bir $r_1,r_2 > 0$ vardır. Bu durumda, $r_0 = \min\{r_1,r_2\}$ olmak üzere $B(\zeta,r_0) \subseteq A \cap B$ dir. Böylece $A \cap B \in \tau_F$ dir.
I bir indis kümesi olmak üzere her $i \in I$ içn $A_i \in \tau_F$ olsun. $\zeta \in \cup_{i\in I} A_i$ alalım. Bu durumda, $\exists i_0 \in I$ var öyle ki $\zeta \in A_{i_0}$ dır. Öyleyse bir $r_0 > 0$ var öyle ki $B(\zeta,r_0) \subseteq A_{i_0}$ dır. Ayrıca, $A_{i_0} \subseteq \cup_{i\in I} A_i$ olduğundan, $B(\zeta,r_0) \subseteq \cup_{i\in I} A_i$ dir. Dolayısıyla $\cup_{i\in I} A_i \in \tau_F$ dir.

Teorem 3.4.6. (M,D) bir F-metrik uzay ve $A \subseteq M$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) A, F-kapalıdır.

(ii) Her $\{\zeta_n\} \subseteq A$ dizisi için $\lim\limits_{n\to\infty} D(\zeta_n,\zeta) = 0$, $\zeta \in M$ ise $\zeta \in A$ dır.

İspat. (i)$\Longrightarrow$(ii) A, F-kapalı, $\{\zeta_n\}$ A' da bir dizi ve $\lim\limits_{n\to\infty} D(\zeta_n,\zeta)=0$, $\zeta\in M$ olsun. Bu durumda $M\setminus A$, F-açık olduğundan bir $r>0$ var öyle ki $B(\zeta,r)\subseteq M\setminus A$ dır. Öyleyse $B(\zeta,r)\cap A=\varnothing$ dir. Diğer yandan, $\lim\limits_{n\to\infty} D(\zeta_n,\zeta)=0$ olduğundan bir $N\in\mathbb{N}$ var öyle ki her $n\geq N$ için $D(\zeta_n,\zeta)<r$ dir. Dolayısıyla, her $n\geq N$ için $\zeta_n\in B(\zeta,r)$ ve $\zeta_N\in B(\zeta,r)\cap A$ olur ki bu $B(\zeta,r)\cap A=\varnothing$ ile çelişir. Bu durumda $\zeta\in A$ dır.

(ii)$\Longrightarrow$(i) $\zeta\in M\setminus A$ olsun. Kabul edelim ki A, F-kapalı olmasın. Bu durumda her $r>0$ için $\zeta_r\in B(\zeta,r)\cap A$ olur ki (yani $B(\zeta,r)\cap A\neq\varnothing$ dır.) $n\in\mathbb{N}$ için $r=\frac{1}{n}$ olarak alabiliriz. Öyleyse, $n\in\mathbb{N}$ için $\zeta_n\in B(\zeta,\frac{1}{n})\cap A$ dır. (ii) koşulundan $\{\zeta_n\}\subseteq A$ dizisi için $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} D(\zeta_n,\zeta)=0$, $\zeta\in A$ dır. Bu ise $\zeta\in M\setminus A$ olması ile çelişir. Bu durumda A, F-kapalıdır. $\square$

Teorem 3.4.7. (M,D) bir F-metrik uzay, $a\in M$ ve $r>0$, $B(a,r)\subseteq M$

$$B(a,r)=\{\zeta\in M : D(a,\zeta)\leq r\}$$

olsun. Aşağıdaki koşul sağlanıyorsa $B(a,r)$, F -kapalıdır. Her $\{\zeta_n\}\subseteq M$ dizisi için,

$$\lim_{n\to\infty} D(\zeta_n,\zeta)=0,\ \zeta\in M\Longrightarrow D(\zeta,\eta)\leq \lim_{n\to\infty}\sup D(\zeta_n,\eta),\ \eta\in M \tag{3.4.5}$$

İspat. $\zeta\in M$ için $\{\zeta_n\}\subseteq B(a,r)$, $\lim\limits_{n\to\infty} D(\zeta_n,\zeta)=0$ olsun. (3.4.5) koşulundan $\zeta\in B(a,r)$ olduğunu göstermeliyiz. $B(a,r)$ tanımından, $n\in\mathbb{N}$ için $D(\zeta_n,a)\leq r$ dır. (3.4.5) koşulundan $D(\zeta,a)\leq\lim\limits_{n\to\infty}\sup D(\zeta_n,\eta)\leq r$ dir. Dolayısıyla, $D(\zeta,a)\leq r$ dır. Yani $\zeta\in B(\zeta,a)$ dır. Teorem (3.4.6) den, $B(a,r)$, F-kapalıdır. $\square$

Tanım 3.4.8. (M,D) bir F-metrik uzay, $A\subseteq M$ olsun. M nin A yı kapsayan F-kapalı alt kümelerinin arakesitine A nın kapanışı denir. $\overline{A}$ ile gösterilir. $\overline{A}$, A yı kapsayan en küçük kapalı kümedir.

Teorem 3.4.9. (M,D) bir F- metrik uzay ve $A\subseteq M$ olsun.

$$x\in\overline{A}, r>0\Longrightarrow B(x,r)\cap A\neq\varnothing.$$

İspat. $(f,\alpha)\in\Omega\times[0,\infty)$ ve $(\zeta,\eta)\in M\times M$, her $N\in\mathbb{N}, N\geq 2$ ve her $(\zeta,\eta)=(u_1,u_N)$

olacak şekildeki $(u_i)_1^N \subseteq M$ sonlu dizisi için,

$$D(\zeta,\eta)>0 \Longrightarrow f(D(\zeta,\eta)) \leq f\left(\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i,u_{i+1})\right)+\alpha$$

olsun.

$$\overline{A}=\{\zeta \in M: \text{ her } r>0 \text{ için, } a \in A \text{ var öyle ki } D(\zeta,a)<r\}$$

şeklinde $\overline{A}$ kümesi tanımlayalım. $A \subseteq M$ olduğundan her $\zeta \in A$ için $\zeta \in M$ dır. Ayrıca $0 \leq D(\zeta,a)<r$ olduğundan $\zeta \in \overline{A}$ dır. Dolayısıyla, $A \subseteq \overline{A}$ ve $\overline{A} \neq \varnothing$ dır. $\{\zeta_n\} \subseteq A$ bir dizi ve $\lim\limits_{n\to\infty} D(\zeta_n,\zeta)=0$ ve $\zeta \in M$ olsun. $\zeta \in \overline{A}$ olduğunu göstereceğiz. $r>0$ olsun. $f \in \Omega$ olduğundan bir $\delta_r>0$ var öyle ki

$$0<t<\delta_r \Longrightarrow f(t)<f(r)-\alpha \tag{3.4.6}$$

Diğer yandan $\lim\limits_{n\to\infty} D(\zeta_n,\zeta)=0$ olduğundan $N \in \mathbb{N}$ var öyle ki

$$D(\zeta_n,\zeta) \leq \frac{\delta_r}{3},\ n \in \mathbb{N}.$$

$\zeta_N \in \overline{A}$ olduğundan $a \in A$ var öyle ki

$$D(\zeta_n,a) \leq \frac{\delta_r}{3}.$$

$D(\zeta,a)>0$ ise F-metriğin üçüncü koşulundan

$$\begin{aligned} F(D(\zeta,a)) &\leq f(D(\zeta,\zeta_N)+D(\zeta_N,a))+\alpha \\ &\leq f(\frac{2\delta_r}{3})+\alpha. \end{aligned}$$

(3.4.6) dan $\frac{2\delta_r}{3}<\delta_r$ olduğundan $f(\frac{2\delta_r}{3})<f(r)-a$ elde edilir. □

Tanım 3.4.10. (M,D) bir F-metrik uzay, $\{\zeta_n\}$, M de bir dizi olsun. Eğer $\{\zeta_n\}$ dizisi τ_F topolojisine göre $\zeta \in M$ noktasına yakınsak ise $\{\zeta_n\}$ dizisi ζ ye F-yakınsak denir ve $\zeta_n \longrightarrow \zeta$ şeklinde gösterilir.

Tanımdan da anlaşılacağı gibi, her $\zeta \in O_\zeta$, $O_\zeta \subseteq M$ F-açık için $N \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n \geq N$ için $\zeta_n \in O_\zeta$ dir.

Teorem 3.4.11. (M,D) bir F-metrik uzay, $\{\zeta_n\}$, M de bir dizi olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) $\{\zeta_n\}$ dizisi ζ ye F-yakınsaktır,

(ii) $\lim_{n\longrightarrow\infty} D(\zeta_n,\zeta)=0$ dır.

İspat. (i)⇒(ii) $\{\zeta_n\}$ dizisi ζ ye F-yakınsak olsun. Bu durumda, ζ noktasını içeren her A açığı için bir $N\in\mathbb{N}$ var öyle ki her $n\geq N$ için $\zeta_n\in A$ dır. Ayrıca, $A\in\tau_F$ olduğundan her $\zeta\in A$ için bir $r>0$ var öyle ki $B(\zeta,r)\subseteq A$ dır. $B(\zeta,r)=A$ olarak alırsak $\zeta\in B(\zeta,r)$ olacak şekildeki her $r>0$ için bir $N\in\mathbb{N}$ var öyle ki her $n\geq N$ için $D(\zeta_n,\zeta)<r$ dir. Dolayısıyla, $\lim_{n\longrightarrow\infty} D(\zeta_n,\zeta)=0$ dır.
(ii) ⇒(i) $\lim_{n\longrightarrow\infty} D(\zeta_n,\zeta)=0$ olsun. Bu durumda, $\zeta\in M$ ve her $r>0$ için bir $N\in\mathbb{N}$ var öyle ki her $n\geq N$ için $D(\zeta_n,\zeta)<r$ dir. Öyleyse, $\zeta_n\in B(\zeta,r)$ ve $B(\zeta,r)$, ζ yi içeren bir açıktır. Dolayısıyla, ζ yi içeren bir $B(\zeta,r)$ açığı için bir $N\in\mathbb{N}$ var öyle ki her $n\geq N$ için $\zeta_n\in B(\zeta,r)$ dir. Yani, $\{\zeta_n\}$ dizisi ζ noktasına F-yakınsaktır. □

Teorem 3.4.12. (M,D) bir F metrik uzay, $\{\zeta_n\}$, M de bir dizi olsun.

$$\zeta,\eta\in M,\ \lim_{n\longrightarrow\infty} D(\zeta_n,\zeta)=\lim_{n\longrightarrow\infty} D(\zeta_n,\eta)=0\Longrightarrow \zeta=\eta.$$

İspat. $\zeta,\eta\in M$, $\lim_{n\longrightarrow\infty} D(\zeta_n,\zeta)=\lim_{n\longrightarrow\infty} D(\zeta_n,\eta)=0$ olsun. Kabul edelim ki $\zeta\neq\eta$ olsun. Bu durumda $D(\zeta,\eta)>0$ ve F-metriğin üçüncü koşulundan, $(f,\alpha)\in\Omega$ var öyle ki her $n\in\mathbb{N}$ için $f(D(\zeta,\eta))\leq f(D(\zeta,\zeta_n)+D(\zeta_n,\eta))+\alpha$ dır. Diğer yandan, F-metrik'in ikinci koşulu ve $f\in\Omega$ olduğundan $\lim_{n\longrightarrow\infty} f(D(\zeta,\zeta_n)+D(\zeta_n,\eta))+\alpha=-\infty$ olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, $\eta=\zeta$ dir. □

Tanım 3.4.13. (M,D) bir F-metirk uzay, $\{\zeta_n\}$, M de bir dizi olsun. $\lim_{n\longrightarrow\infty} D(\zeta_n,\zeta_m)=0$ ise $\{\zeta_n\}$ dizisi bir F-Cauchy disizidir. Eğer her $\{\zeta_n\}$, F-Cauchy dizisi M de bir noktaya yakınsak ise (M,D), F-metrik uzayı F-tamdır.

Teorem 3.4.14. (M,D) bir F-metirk uzay, $\{\zeta_n\}$, M de bir dizi olsun. $\{\zeta_n\}$ dizisi F-yakınsak ise F-Cauchy dizisidir.

İspat. $(f,\alpha)\in\Omega\times[0,\infty)$, F-metriğin üçüncü koşulu sağlansın, $\zeta\in M$ ve

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} D(\zeta_n,\zeta)=0 \tag{3.4.7}$$

$\varepsilon > 0$ olsun. $f \in \Omega$ olduğundan her $\{t_n\} \subseteq [0,\infty)$ dizisi için $t_n \longrightarrow 0 \Longleftrightarrow \lim_{n \longrightarrow \infty} f(t_n) = -\infty$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ var öyle ki

$$0 < t < \delta \Longrightarrow f(t) < f(\varepsilon) - \alpha. \tag{3.4.8}$$

Diğer yandan, (3.4.7) den bir $N \in \mathbb{N}$ var öyle ki $n,m \geq N$ için

$$D(\zeta_n,\zeta) + D(\zeta_m,\zeta) < \delta \tag{3.4.9}$$

dır. $n,m \geq N$ olsun. $\zeta_n = \zeta_m$ ise bu durumda, (i) den $D(\zeta_n,\zeta_m) = 0 < \varepsilon$ dır. $\zeta_n \neq \zeta_m$ ise bu durumda, (3.4.9) dan

$$0 < D(\zeta_n,\zeta) + D(\zeta_m,\zeta) < \delta$$

dır. Dolayısıyla, (3.4.8) den $f(D(\zeta_n,\zeta) + D(\zeta_m,\zeta)) < f(\varepsilon) - \alpha$ elde edilir. Ayrıca, F-metriğin üçüncü koşulundan $f(D(\zeta_m,\zeta_n)) < f(D(\zeta_n,\zeta) + D(\zeta_m,\zeta)) + \alpha$ dır. İki eşitsizlikten

$$f(D(\zeta_m,\zeta_n)) < f(\varepsilon)$$

olur ki f azalmayan olduğundan $D(\zeta_m,\zeta_n) \leq \varepsilon$ bulunur. Böylece $\lim_{n \longrightarrow \infty} D(\zeta_m,\zeta_n) = 0$, yani $\{\zeta_n\}$, F-Cauchy dizisidir. □

Tanım 3.4.15. (M,D) bir F-metrik uzay, $A \subseteq M$ olsun. A, τ_F topolojisine göre kompakt ise A F-kompaktır.

Teorem 3.4.16. (M,D) bir F-metrik uzay, $A \subseteq M$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) A, F- kompaktır.

(ii) Her $\{\zeta_n\} \subseteq A$ için $\lim_{n \longrightarrow \infty} D(\zeta_{n_k},\zeta) = 0$ olacak şekilde $\{\zeta_{n_k}\}$ alt dizisi ve $\zeta \in M$ vardır.

İspat. (i)$\Longrightarrow$(ii) $A \subseteq X$ F- kompakt olsun. A nın F-kapalı alt kümelerinden oluşan her azalmayan dizisinin boş kümeden farklı arakesitine sahip olduğu görülebilir. $\{\zeta_n\} \subseteq A$ bir dizi olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $C_n = \{\zeta_n, \zeta_{n+1}, \zeta_{n+2}, \cdots\}$ ve $C_{n+1} = \{\zeta_{n+1}, \zeta_{n+2},$

$\zeta_{n+3},\cdots\}$ olduğundan $C_{n+1}\subseteq C_n$ dir. Ayrıca, her $i\in I,\ j\in J$ için A_i ve B_j kapalı kümeler olmak üzere

$$\begin{cases} \overline{C_n}=\bigcap\limits_{i\in I}A_i & , \quad C_n\subseteq A_i \\ \overline{C_{n+1}}=\bigcap\limits_{j\in J}B_j & , \quad C_{n+1}\subseteq B_j \end{cases}$$

dir. $\zeta\in\overline{C_{n+1}}$ olsun. Her $i\in I,\ j\in J$ için $B_j\subseteq A_i$ olduğundan $\zeta\in A_i$ dir. Bu durumda $\zeta\in\overline{C_n}$ ve $\overline{C_{n+1}}\subseteq\overline{C_n}$ dir. Dolayısıyla $\{\overline{C_n}\}$ dizisi azalandır.

$\varepsilon>0$ olsun. $\zeta_0\in\overline{C_0}$ olduğundan $D(\zeta_{n_0},\zeta)<\varepsilon$ olacak şekilde $n_0\geq 0$ ve $\zeta_{n_0}\in A$ vardır. Benzer şekilde $\zeta_1\in\overline{C_1}$ olduğundan $D(\zeta_{n_1},\zeta)<\varepsilon$ olacak şekilde $n_1\geq 1$ ve ζ_{n_1}vardır. Bu işleme devam ederek, $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}D(\zeta_{n_k},\zeta)=0$ olacak şekilde $\{\zeta_{n_k}\}$ dizisi elde edilmiş olur. Diğer yandan, A kümesi F- kompakt ve (M,D) Hausdorff uzay olduğundan F-kompakt alt kümesi F-kapalıdır. Dolayısıyla Teorem 3.4.6 dan $\zeta\in A$ dır.

(ii)⇒(i) $(f,\alpha)\in\Omega\times[0,\infty)$ ve (D$_3$) sağlansın. Her $r>0$ ve $\exists\{\zeta_i\}\subseteq A$ için $A\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}B(\zeta_i,r)$ olduğunu göstereceğiz. Aksini kabul edelim. $\zeta_1\in A$ bir keyfi nokta ise $A\nsubseteq B(\zeta_1,r)$ dir. Yani $\zeta_2\in A$ var öyle ki $D(\zeta_1,\zeta_2)\geq r$ dir. Benzer şekilde $A\nsubseteq B(\zeta_1,r)\cup B(\zeta_2,r)$ dir. Yani $\zeta_3\in A$ var öyle ki $D(\zeta_i,\zeta_2)\geq r$, $i=1,2$. bu şekilde devam edilerek tümevarım ile $n,m\in\mathbb{N}$, $D(\zeta_n,\zeta_m)\geq r$ olacak şekilde $\{\zeta_n\}\subseteq A$ dizisi oluşturulur. Bu durumda $\{\zeta_n\}$ F-Cauchy dizisi değil ve dolayısıyla F-yakınsak değildir. Bu (ii) koşulu ile çelişir. $\{O_i\}_{i\in I}$ M in F–açık altkümelerinin bir sınıfı olsun. Bu durumda $A\subseteq\bigcup\limits_{i\in I}O_i$ dir. Şimdi $\exists r_0>0$,her $\zeta\in A$ için $\exists i\in I$ var öyle ki $B(\zeta,r_0)\subseteq O_i$ olduğunu göstereceğiz. Aksini kabul edelim. Yani, her $r>0$ için $\zeta_r\in A$ var öyle ki her $i\in I$ için $B(\zeta_r,r)\nsubseteq O_i$ olsun. Bu durumda her $n\in\mathbb{N}$ için $\zeta_n\in A$ var öyle ki $B(\zeta_n,\frac{1}{n})\nsubseteq O_i$ dir. (ii) den $\zeta\in A$ için $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}D(\zeta_{n_k},\zeta)=0$ olacak şekilde $\{\zeta_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. Diğer yandan, bir $j\in J$ var öyle ki $\zeta\in O_j$ dir. O_j F-açık olduğundan bir $r_0>0$ var öyle ki $B(\zeta,r_0)\subseteq O_j$ dir. Her $n_k\in\mathbb{N}$ ve her $z\in B(\zeta_{n_k},\frac{1}{n_k})$ için

$$\begin{aligned} D(\zeta,z)>0 \implies f(D(\zeta,\delta)) &\leq f(D(\zeta,\zeta_{n_k})+D(\zeta_{n_k},\delta))+\alpha \\ &\leq f(D(\zeta_{n_k},\zeta)+\tfrac{1}{n_k})+\alpha. \end{aligned}$$

F-metriğin ikinci koşulundan $k\in\mathbb{N}$ var öyle ki $k\geq K$,

$$f(D(\zeta_{n_k},\zeta)+\frac{1}{n_k})<f(r_0)-\alpha$$

dır. Bu durumda, $D(\zeta,\delta) > 0$ ise

$$f(D(\zeta,\delta)) < f(r_0)$$

F-metriğin birinci koşulundan $D(\zeta,\delta) < r_0$ dır. Bu durumda $B(\zeta_{n_k},\frac{1}{n_k}) \subseteq B(\zeta,r_0)$ dır. Dolayısıyla $B(\zeta_{n_k},\frac{1}{n_k}) \subseteq O_j$, $n_k \in \mathbb{N}$ dir. Bu kabulümüz ile çelişir. Bu durumda, $\exists r_0 > 0$,her $\zeta \in A$ için $B(\zeta,r_0) \subseteq O_i$ olacak şekilde $\exists i \in I$ vardır. Dahası, $(\zeta_p)_{p=1}^n \subseteq A$ var öyle ki $A \subseteq \bigcup_{p=1}^{n} B(\zeta_p,r_0)$ dır. Fakat, her $p = 1,2,3,\cdots,n$ için $i(p) \in I$ var öyle ki $B(\zeta_p,r_0) \subseteq O_{i(p)}$ dır. Bu durumda $A \subseteq \bigcup_{p=1}^{n} O_{i(p)}$ dır ve dolayısıyla A, F-kompaktır. □

Tanım 3.4.17. (M,D) bir F-metrik uzay, $A \subseteq M$ olsun. Her $\{\zeta_n\} \subseteq A$ dizisi için $\lim_{k\to\infty} D(\zeta_{n_k},\zeta) = 0$ olacak şekilde $\{\zeta_{n_k}\}$ alt dizisi ve $\zeta \in A$ varsa (M,D) uzayına F-dizisel kompakt denir.

Tanım 3.4.18. (M,D) bir F-metrik uzay, $A \subseteq M$ olsun. Her $r > 0$, $\exists(\zeta_i)_{i=1}^n \subseteq A$ için

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(\zeta_i,r)$$

ise A ya F-tam sınırlı (tamamiyle sınırlı) denir.

Sonuç 3.4.1. (M,D) bir F- metrik uzay, $A \subseteq M$ olsun.

(i) A, F-kompaktır $\Longleftrightarrow$ A, F-dizisel kompaktır.

(ii) A, F-kompakt ise A,F- tam sınırlıdır.

Teorem 3.4.19. (M,D) F-metirk uzay, $T : M \longrightarrow M$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlansın.

(i) (M,D) F-tamdır.

(ii) Her $\zeta,\eta \in M$ için

$$D(\Upsilon\zeta,\Upsilon\eta) \leq kD(\zeta,\eta)$$

olacak şekilde $k \in (0,1)$ vardır.

Bu durumda Υ bir tek sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, $\zeta_0 \in M$ için $\zeta_{n+1} = \Upsilon\zeta_n$, $n \in \mathbb{N}$ olacak şekilde tanımlanan $\{\zeta_n\}$ dizisi Υ nin sabit noktasına yakınsar.

İspat. İlk olarak Υ nin bir tek sabit noktaya sahip olduğunu gösterelim. $u \neq v$ olmak üzere $u, v \in M$, Υ'nin iki sabit noktası olsun. Bu durumda $D(u,v) > 0$ ve $\Upsilon u = u$, $\Upsilon v = v$ dir. Ayrıca, (ii) den

$$D(u,v) = D(\Upsilon u, \Upsilon v) \leq kD(u,v) < D(u,v)$$

olur ki bu bir çelişkidir. $(f, \alpha) \in \Omega \times [0, \infty)$, F-metrik'in üçüncü özelliğini sağlasın . $\varepsilon > 0$ sabit olsun. f fonksiyonunun ikinci özelliğiden $\delta > 0$ var öyle ki

$$0 < \Upsilon < \delta \Longrightarrow f(t) < f(\varepsilon) - \alpha \tag{3.4.10}$$

$\square$

$\zeta_0 \in M$ keyfi bir nokta $\zeta_1 = \Upsilon\zeta_0$, $\zeta_2 = \Upsilon\zeta_1, \cdots, \zeta_n = \Upsilon\zeta_{n-1}, \cdots$ şeklinde $\{\zeta_n\}$ dizisini tanımlayalım. Genelliği bozmaksızın $D(\zeta_0, \zeta_1) > 0$ dır. Aksi halde $\Upsilon\zeta_0 = \zeta_0$ dır. $n \in \mathbb{N}$ için büzülmeden

$$\begin{aligned} D(\zeta_n, \zeta_{n+1}) &\leq kD(\zeta_{n-1}, \zeta_n) \\ &\leq k^2 D(\zeta_{n-2}, \zeta_{n-1}) \\ &\quad \vdots \\ &\leq k^n D(\zeta_0, \zeta_1). \end{aligned}$$

dır. Ayrıca

$$\begin{aligned} \sum_{i=n}^{m-1} D(\zeta_i, \zeta_{i+1}) &= D(\zeta_n, \zeta_{n+1}) + D(\zeta_{n+1}, \zeta_{n+2}) + \cdots + D(\zeta_{m-1}, \zeta_m) \\ &\leq k^n D(\zeta_0, \zeta_1) + k^{n+1} D(\zeta_0, \zeta_1) + \cdots + k^{m-1} D(\zeta_0, \zeta_1) \\ &\leq (k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{m-1}) D(\zeta_0, \zeta_1) \\ &= \frac{k^n}{1-k} D(\zeta_0, \zeta_1). \end{aligned}$$

$\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} \frac{k^n}{1-k} D(\zeta_0, \zeta_1) = 0$ olduğundan, bir $N \in \mathbb{N}$ var öyle ki $n \geq N$ için

$$0 \leq \frac{k^n}{1-k} D(\zeta_0, \zeta_1) < \delta$$

olduğundan (3.4.10) dan ve f fonksiyonun birinci özelliğinden $m,n \in \mathbb{N}$ için

$$f\left(\sum_{i=n}^{\infty} D(\zeta_i,\zeta_{i+1})\right) \leq f\left(\frac{k^n}{1-k}D(\zeta_0,\zeta_1)\right) < f(\varepsilon)-\alpha$$

F-metriğin üçüncü koşulundan ve yukardaki eşitsizilikten $D(\zeta_n,\zeta_m)>0$

$$\begin{aligned} f(D(\zeta_n,\zeta_m)) &\leq f\left(\sum_{i=n}^{m-1} D(\zeta_i,\zeta_{i+1})\right)+\alpha \\ &\leq f(\varepsilon) \end{aligned}$$

$f\in\Omega$ olduğundan $D(\zeta_n,\zeta_m)<\varepsilon$ elde edilir. Bu durumda, $\{\zeta_n\}$ F-Cauchy dizisidir. (X,D) F-tam olduğundan $\zeta\in M$ var öyle ki $\zeta_n \longrightarrow \zeta$ dir. Kabul edelim ki ζ, Υ nin sabit noktası olmasın. Bu durumda, $D(\Upsilon\zeta,\zeta)>0$ dır. F -metriğin üçüncü özelliği ile $n\in\mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} f(D(\Upsilon\zeta,\zeta)) &\leq f(D(\Upsilon\zeta,\Upsilon\zeta_n)+D(\Upsilon\zeta_n,\zeta))+\alpha \\ &\leq f(kD(\zeta,\zeta_n)+D(\zeta_{n+1},\zeta))+\alpha \end{aligned}$$

diğer yandan, f fonksiyonun (ii) özelliğinden ve $\zeta_n \longrightarrow \zeta$ olduğundan

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} f(kD(\zeta,\zeta_n)+D(\zeta_{n+1},\zeta))+\alpha=-\infty$$

olur ki bu bir çelişkidir. Öyleyse $D(\Upsilon\zeta,\zeta)=0$ dır. Yani $\Upsilon\zeta=\zeta$

Önerme 3.4.20. (M,D) bir F-metrik uzay, $A\subseteq M$ ve $\zeta\in M$ olsun. $\zeta\in\overline{A} \Longleftrightarrow D(\zeta,A)=0$, $D(\zeta,A)=\inf_{\eta\in A} D(\zeta,\eta)$ dır.

İspat. Her $r>0$ için

$$\begin{aligned} \zeta\in\overline{A} &\Longleftrightarrow B(\zeta,r)\cap A\neq\varnothing \\ &\Longleftrightarrow D(\zeta,\zeta_r)<r \\ &\Longleftrightarrow \inf\{D(\zeta,\eta);\eta\in A\}=0 \\ &\Longleftrightarrow D(\zeta,A)=0 \end{aligned}$$

□

Tanım 3.4.21. (M,D) bir F-metrik uzay $\Upsilon : M \to M$ bir dönüşüm olsun. Her $\zeta, \eta \in M$ için

$$D(\Upsilon\zeta, \Upsilon\eta) \leq k[D(\zeta,\eta) + |D(\zeta,\Upsilon\zeta) - D(\eta,\Upsilon\eta)|]$$

özelliği sağlanırsa Υ dönüşümüne F-metrikte bir P-büzülme denir.

Teorem 3.4.22. (M,p) bir F-metrik uzay $\Upsilon : M \to M$ bir P- büzülme dönüşümü olsun Bu durumda Υ bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. $\zeta_0 \in M$ bir keyfi nokta ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\zeta_{n+1} = T\zeta_n$ şeklinde tanımlı bir dizi olsun. Eğer $\zeta_{n_0} = \zeta_{n_0+1}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ noktası varsa ζ_{n_0} Υ nin bir sabit noktası olur. Kabul edelim ki her $n \in \mathbb{N}$ için $\zeta_n \neq \zeta_{n+1}$ olsun. Dolayısıyla $D(\zeta_n, \zeta_{n+1})$ > 0 dır. Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} D(\zeta_{n+1},\zeta_{n+2}) &= D(\Upsilon\zeta_n, \Upsilon\zeta_{n+1}) \\ &\leq k[D(\zeta_n,\zeta_{n+1}) + |D(\zeta_n, T\zeta_n) - D(\zeta_{n+1}, T\zeta_{n+1})|] \\ &= k[D(\zeta_n,\zeta_{n+1}) + |D(\zeta_n,\zeta_{n+1}) - D(\zeta_{n+1},\zeta_{n+2})|]. \quad (3.4.11) \end{aligned}$$

Eğer bazı $n \in \mathbb{N}$ için, $D(\zeta_n,\zeta_{n+1}) \leq D(\zeta_{n+1},\zeta_{n+2})$ ise (3.4.11) den

$$\begin{aligned} D(\zeta_{n+1},\zeta_{n+2}) &\leq k[D(\zeta_n,\zeta_{n+1}) + |D(\zeta_n,\zeta_{n+1}) - D(\zeta_{n+1},\zeta_{n+2})|] \\ &\leq k[D(\zeta_n,\zeta_{n+1}) + D(\zeta_{n+1},\zeta_{n+2}) - D(\zeta_n,\zeta_{n+1})] \\ &= kD(\zeta_{n+1},\zeta_{n+2}) \end{aligned}$$

olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ için $D(\zeta_n,\zeta_{n+1}) > D(\zeta_{n+1},\zeta_{n+2})$ ve (3.4.11) den

$$\begin{aligned} D(\zeta_{n+1},\zeta_{n+2}) &\leq k[D(\zeta_n,\zeta_{n+1}) + |D(\zeta_n,\zeta_{n+1}) - D(\zeta_{n+1},\zeta_{n+2})|] \\ &\leq k[D(\zeta_n,\zeta_{n+1}) + D(\zeta_n,\zeta_{n+1}) - D(\zeta_{n+1},\zeta_{n+2})] \\ &= 2kD(\zeta_n,\zeta_{n+1}) - kD(\zeta_{n+1},\zeta_{n+2}) \\ &\leq \frac{2k}{1+k} D(\zeta_n,\zeta_{n+1}) \end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{2k}{1+k} = \lambda$ olarak aldığımızda $0 < \lambda < 1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} D(\zeta_{n+1}, \zeta_{n+2}) &\leq \lambda D(\zeta_n, \zeta_{n+1}) \\ &\leq \lambda^2 D(\zeta_{n-1}, \zeta_n) \\ &\ \ \vdots \\ &\leq \lambda^{n+1} D(\zeta_0, \zeta_1) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ için

$$\begin{aligned} \sum_{i=n}^{m-1} D(\zeta_i, \zeta_{i+1}) &\leq \sum_{i=n}^{m-1} \lambda^i D(\zeta_0, \zeta_1) \\ &\leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} D(\zeta_0, \zeta_1). \end{aligned}$$

$0 < \lambda < 1$ olduğu için her $\delta > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n \geq n_0$ için

$$0 < \frac{\lambda^n}{1-\lambda} D(\zeta_0, \zeta_1) < \delta$$

dır. Şimdi $(f, \alpha) \in \Omega \times [0, \infty)$ ve $\varepsilon > 0$ bir sabit olsun. Öyleyse f fonksiyonunun ikinci özelliğinden

$$0 < t < \eta \Rightarrow f(t) < f(\eta) - \alpha$$

olacak şekilde $\eta > 0$ vardır. η olarak δ alırsak

$$f\left(\frac{\lambda^n}{1-\lambda} D(\zeta_0, \zeta_1)\right) < f(\varepsilon) - \alpha$$

elde edilir. f fonksiyonunun birinci özelliğinden her $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n \geq n_0$ için

$$f\left(\sum_{i=n}^{m-1} D(\zeta_i, \zeta_{i+1}\right) \leq f\left(\frac{\lambda^n}{1-\lambda} D(\zeta_0, \zeta_1)\right) < f(\varepsilon) - \alpha$$

dır. Buradan

$$D(\zeta_n, \zeta_m) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(D(\zeta_n, \zeta_m)) \quad \leq \quad \left(\sum_{i=n}^{m-1} D(\zeta_i, \zeta_{i+1}\right) + \alpha \quad < \quad f(\varepsilon)$$

$D(\zeta_n, \zeta_m) < \varepsilon$ elde edilir. (M, D) F-tam olduğundan $\mu \in M$ var öyle ki $(\zeta_n) \to \mu$ dir.

Υ sürekli olduğundan ve süreklilik dizisel sürekliliğe denk olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} D(\Upsilon\zeta_n, \Upsilon\mu) = \lim_{n\to\infty} D(\zeta_{n+1}, \Upsilon\mu) = 0$$

elde edilir. Limitin tekiliğinden $\Upsilon\mu = \mu$. Şimdi kabul edelim ki ς, Υ nin bir başka sabit noktası olsun. Bu durumda $\varsigma = \Upsilon\varsigma$ ve $D(\varsigma,\mu) > 0$ dır. Dolaysıyla,

$$\begin{aligned} D(\varsigma,\mu) &= D(\Upsilon\varsigma, \Upsilon\mu) \\ &\leq k[D(\varsigma,\mu) + |D(\varsigma,\Upsilon\varsigma) - D(\mu,\Upsilon\mu)|] \\ &= kD(\varsigma,\mu) \end{aligned}$$

olur ki bu bir çelişkidir. Bu durumda Υ nin sabit noktası tektir.

□

Şimdi Feng-Lui Sabit nokta teoreminin F-metrik uzaydaki versiyonunu vereceğiz.

Teorem 3.4.23. (M,D) bir F-tam F-metrik uzay, $\Upsilon : M \to P_C(M)$ bir küme değerli dönüşüm olsun. Her $\zeta \in M$ için

$$D(\eta, \Upsilon\eta) \leq cD(\zeta,\eta)$$

olacak şekilde $\eta \in I_b^{\zeta}$ var ve $c < b$ ve $f(\zeta) = D(\zeta, \Upsilon\zeta)$ alttan yarı sürekli olması durumunda Υ bit tek sabit noktaya sahiptir.

İspat. Her $\zeta \in M$ için $\Upsilon\zeta \in P_C(M)$ olduğundan

$$bD(\zeta,\eta) \leq D(\zeta,\Upsilon\zeta)$$

özelliğini sağlayan $\eta \in \Upsilon\zeta$ vardır. Dolayısıyla, $I_b^{\zeta} \neq \varnothing$. Başlangıç noktası $\zeta_0 \in M$ için

$$D(\zeta_1, \Upsilon\zeta_1) \leq cD(\zeta_0, \zeta_1)$$

özelliğini sağlayan $\zeta_1 \in I_b^{\zeta_0}$ vardır. Benzer şekilde, $\zeta_1 \in M$ için

$$D(\zeta_2, \Upsilon\zeta_2) \leq cD(\zeta_1, \zeta_2).$$

özelliğini sağlayan $\zeta_2 \in I_b^{\zeta_1}$ vardır. Böyle devam ederek, her $n \in \mathbb{N}$, $\zeta_{n+1} \in T\zeta_n$ için

$$D(\zeta_{n+1}, \Upsilon\zeta_{n+1}) \leq cD(\zeta_n, \zeta_{n+1}) \text{ ve } bD(\zeta_n, \zeta_{n+1}) \leq D(\zeta_n, \Upsilon\zeta_n) \tag{3.4.12}$$

olacak şekilde M de $\{\zeta_n\}$ dizisi oluşturulur. (3.4.12) den her $n \in \mathbb{N}$ için

$$D(\zeta_{n+1}, \Upsilon\zeta_{n+1}) \leq \frac{c}{b} D(\zeta_n, \Upsilon\zeta_n)$$

elde edilir. Diğer yandan $\{\zeta_n\}$ dizisi tanımı yardımıyla her $n \in \mathbb{N}$ için

$$D(\zeta_n, \zeta_{n+1}) \leq \frac{c}{b} D(\zeta_{n-1}, \zeta_n) \tag{3.4.13}$$

elde edilir. Bu durumda (3.4.12) ve (3.4.13) den

$$\begin{aligned} D(\zeta_n, \zeta_{n+1}) &\leq \tfrac{c^n}{b^n} D(\zeta_0, \zeta_1) \quad n = 0, 1, 2, 3, \cdots \\ D(\zeta_n, \Upsilon\zeta_n) &\leq \tfrac{c^n}{b^n} D(\zeta_0, \Upsilon\zeta_0) \quad n = 0, 1, 2, 3, \cdots \end{aligned}$$

elde ederiz. Her $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$ için

$$\begin{aligned} \sum_{i=n}^{m-1} D(\zeta_i, \zeta_{i+1}) &= D(\zeta_n, \zeta_{n+1}) + D(\zeta_{n+1}, \zeta_{n+2}) + \cdots + D(\zeta_{m-1}, \zeta_m) \\ &\leq \frac{c^n}{b^n} D(\zeta_0, \zeta_1) + \frac{c^{n+1}}{b^{n+1}} D(\zeta_0, \zeta_1) + \cdots + \frac{c^{m-1}}{b^{m-1}} D(\zeta_0, \zeta_1) \\ &= a^n (1 + a + a^2 + \cdots + a^{m-n-1}) D(\zeta_0, \zeta_1) \\ &\leq \frac{a^n}{1-a} D(\zeta_0, \zeta_1) \end{aligned}$$

dır. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{1-a} D(\zeta_0, \zeta_1) = 0$ olduğundan, her $\delta > 0$ için

$$0 < \frac{a^n}{1-a} D(\zeta_0, \zeta_1) < \delta, \; n \geq N \tag{3.4.14}$$

olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ vardır. Şimdi, $(f, \alpha) \in \Omega \times [0, \infty)$ ve $\varepsilon > 0$ sabit olsun. $f \in \Omega$ olduğundan

$$0 < t < \delta \Rightarrow f(t) < f(\varepsilon) - \alpha \tag{3.4.15}$$

olacak şekilde $\delta > 0$ vardır. Dolayısıyla (3.4.15) ve (i) ile $m > n \geq N$ için

$$f\left(\sum_{i=1}^{m-1} D(\zeta_i, \zeta_{i+1})\right) \leq f\left(\frac{a^n}{1-a} D(\zeta_0, \zeta_1)\right) < f(\varepsilon) - \alpha \tag{3.4.16}$$

F-metriğin üçüncü koşulu ve (3.4.16) ten $m > n \geq N$ için,

$$D(\zeta_n, \zeta_m) > 0 \Rightarrow f(D(\zeta_n, \zeta_m)) < f(\varepsilon)$$

dır ve buradan $D(\zeta_n, \zeta_m) < \varepsilon$ elde edilir. Dolayısıyla, $\{\zeta_n\}$ bir F-Cauchy dizisidir. (M, D) F-tam olduğundan $\zeta \in M$ var ve $\lim\limits_{n\to\infty} D(\zeta_n, \zeta) = 0$ dır. $f(\zeta) = D(\zeta, \Upsilon\zeta)$ alttan yarı sürekli ve $\zeta_n \to \zeta$ olduğundan (3.4.13) den

$$0 \leq D(\zeta, \Upsilon\zeta) = f(\zeta) \leq \lim_{n\to\infty} \inf f(\zeta_n) = \lim_{n\to\infty} \inf D(\zeta_n, \Upsilon\zeta_n) = 0$$

Dolaysıyla $D(\zeta, \Upsilon\zeta) = 0$ dır. $\Upsilon\zeta$ kapalı olduğundan $\zeta \in \Upsilon\zeta$ dır. $\square$

4 . TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında Mizoguchi-Takahashi fonksiyonu yardımıyla küme değerli P-büzül- me kavramının lineer olmayan versiyonu ile Klim ve Wardowski nin sonuçlarının yeni bir versiyonu ifade ve ispat edilmiştir. Ayrıca P- büzülme kavramının noneself versiyonu metriksel konveks metrik uzaylarda ispat edilmiştir. Bu teorem yardımıyla ünlü Edelstein teoreminin nonself versiyonu ifade edilmiştir. Son olarak yeni bir uzay olan F-metrik uzayda P-büzülmenin Feng Lui versiyonu ifade ve ispat edilmiştir. Yeni bir büzülme olan P-büzülmenin yeni tip versiyonları sabit nokta teoremi çalışmalarında kullanılabilir. Ayrıca elde edilen sonuçlarla diferansiyel denklemlerdeki problemlerin varlık ve teklik sonuçları için kulllanılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Altun, I., Durmaz, G. and Olgun, M., *P*-contractive mappings on metric spaces, J. Nonlinear Funct. Anal., 2018 (2018), Article ID 43, pp. 1-7

[2] Hançer, H. A., On multivalued *P*-contractive mappings that belongs to class of weakly Picard operators, Fixed Point Theory (Cluj). Accepted.

[3] Popescu, O., A new type of contractive mappings in metric spaces, Filomat, Accepted

[4] Klim, D. and Wardowski, D., Fixed point theorems for set-valued contractions in complete metric spaces, J. Math.Anal. Appl., 334 (2007), 132–139

[5] Mizoguchi, N. and Takahashi, W., Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces, J. Math. Anal. Appl., 141 (1989), 177–188

[6] Feng, Y. and Liu, S., Fixed point theorems for multivalued contractive mappings and multivalued Caristi type mappings, J. Math. Anal. Appl., 317 (2006), 103–112

[7] N. A. Assad and W. A. Kirk, Fixed point theorems for set-valued mappings of con tractive type, Pacific, J. Math., 43 (1972), 553-562.

[8] M. Imdad and L. Khan, Some common fixed point theorems for a family of mappings in metrically convex spaces, Nonlinear Anal., 67 (9) (2007), 2717-2726.

[9] L. Khan and M. Imdad, Rhoades type fixed point theorems for two hybrid pairs of mappings in metrically convex spaces, Appl. Math. Comput., 218 (17) (2012), 8861-8868.

[10] M. S. Khan, H. K. Pathak and M. D. Khan, Some fixed point theorems in metrically convex metric spaces, Georgian J. Math., 7 (3) (2000), 523-530.

[11] Mathews S. G., Partial metric topology. In Proceedings of the 8th Summer Conference on General Topology and Applications. Annals of the Newyork Academy of Science, vol 728, pp 183-197 (1994).

[12] A. George and P. Veeramani, “On some results in fuzzy metric spaces,” Fuzzy Sets and Systems, vol. 64, no. 3, pp. 395–399, 1994.

[13] Jleli M., Samet B., A generalized metric space and related Fixed point theorems, Fixed Point Theory Appl. 2015, 14 (2015).

[14] Jleli M., Samet B., On a new generalization of metric spaces,J. Fixed Point Theory Appl. 2018, 20:128 (2018).

[15] Dhage , B.C., (2000) : Generalized metric spaces and topological structure I, Analene Stint, Univ. “A1.I, cuza “lasi 45, 3-24.

[16] I. A. Bakhtin, The contraction mapping principle in quasi metric spaces, Funct. Anal. Unianowsk Gos. Ped.Inst. 30 (1989) 26–37.

[17] Kannan, R: Some results on fixed points. Bull Calcutta Math Soc. 60, 71–76 (1968).

[18] Ciric, L.B., A generalization of Banach’s contraction principle,Proc.Amer.Math.Soc. 45 (1974),267-273

[19] V. Berinde, Approximating fixed points of weak contractions using the Picard iteration, Nonlinear Anal. Forum 9 (1) (2004) 43–53.

[20] Wardowski, D: Fixed point theory of a new type of contractive mappings in complete metric spaces. Fixed Point Theory Appl. 2012, Article ID 94 (2012)

[21] Suzuki, T., A generelized Banach contraction principle that characterizes metric completeness, Proc. Amer. Math. Soc., 136, 1861-1869, 2008

[22] Nadler, S. B., Multi-valued contraction mappings, Pacific J. Math., 30 (1969), 475–488

[23] Popescu, O., Fixed point theorem in metric spaces, Bull. of Transilvania Univ., 1 (2008), 479–482

[24] Reich, S., Fixed points of contractive functions, Boll. Un. Mat. Ital., 4 (1972), No. 5, 26–42

[25] S. Banach, Sur les opėrations dans les ensembles abstraits et leur application aux ėquations intėgrales, Fund. Math., 3, 133-181 (1922).

[26] M. Edelstein, On Fixed and periodic points under contractive mappings, J. London Math. Soc., 37, 74-79 (1962).

[27] W. A. Kirk: Caristi's fixed point theorem and metric convexity. Colloq. Math., 36 (1976), 81–86

[28] Berinde, V. and Pacurar, M., The role of the Pompeiu-Hausdorff metric in fixed point theory, Creat. Math. Inform., 22 (2013), No. 2, 35–42

[29] Fulga, A. and Proca, A., A new generalization of Wardowski fixed point theorem in complete metric spaces, Ad vances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Applications, 1 (2017), No. 1, 57–63

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ali ERDURAN

Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise **:** Kırıkkale Anadolu Lisesi, Haziran 2004

Lisans **:** Kırıkkale Üniversitesi, Matematik Bölümü, Haziran 2009

Yüksek Lisans **:** Kırıkkale Üniversitesi, FBE, Ekim 2012

Çalıştığı Kurum ve Yıllar :

Emniyet Genel Müdürlüğü , Polis Memuru (2011 -)

Yayınları :

1.) ALTUN, Ishak; ERDURAN, Ali. Fixed point theorems for monotone mappings on partial metric spaces. Fixed Point Theory and Applications, 2011, 2011: 1-10.

2.) ALTUN, Ishak; ERDURAN, Ali. A Suzuki type fixed-point theorem. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2011, 2011.

3.) ERDURAN, Ali; IMDAD, Mohammad. Coupled fixed point theorems for generalized Meir-Keeler contractions in ordered partial metric spaces, J. Nonlinear Anal. Appl, 2012, 2012: 00169.

4.) ERDURAN, Ali. Common fixed point of g-approximative multivalued mapping in ordered partial metric space. Fixed Point Theory and Applications, 2013, 2013.1: 1-14.

5.) IMDAD, Mohammad; ERDURAN, Ali. Suzuki-type generalization of Chatterjea contraction mappings on complete partial metric spaces. Journal of Operators, 2013, 2013.

6.) ABBAS, M., ERDURAN, A. Common fixed point of g-approximative multivalued mapping in partially ordered metric space. Filomat, (2013). 27(7), 1173-1182.

7.) IMDAD, M., SHARMA, A., ERDURAN, A. (2014). Generalized Meir-Keeler type n-tupled fixed point theorems in ordered partial metric spaces. Fixed Point Theory and Applications, 2014(1), 1-24.

8.) ERDURAN, A., KADELBURG, Z., NASHİNE, H., VETRO, C. A fixed point theorem for (θ, L) - weak contraction mappings on a partial metric space, (2014).

9.) ERDURAN, Ali; ABBAS, Mujahid. Fixed point theory for Suzuki type (θ, L)- weak multivalued operators. Fixed Point Theory, Volume 16, No. 2, 2015.

Araştırma Alanları : Sabit Nokta Teori