T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞTİRİLMİŞ SZÂSZ-SCHURER-BASKAKOV TİPİ OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

ELİF ŞÜKRÜOĞLU
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
PROF. DR. ALİ OLGUN

KIRIKKALE -2022

T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞTİRİLMİŞ SZÂSZ-SCHURER-BASKAKOV TİPİ OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

ELİF ŞÜKRÜOĞLU
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
PROF. DR. ALİ OLGUN

KIRIKKALE -2022

Elif ŞÜKRÜOĞLU tarafından hazırlanan DEĞİŞTİRİLMİŞ SZÂSZ-SCHURER-BASKAKOV TİPİ OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ adlı tez çalışması, aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Ali OLGUN İmza……..
Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi
Bu tezin kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Başkan : Prof. Dr. Ali ARAL İmza……...
Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi
Bu tezin kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye : Prof. Dr. Rabia AKTAŞ İmza……...
Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi
Bu tezin kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Tez Savunma Tarihi : ….…/….…/…….
Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. Recep ÇALIN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYANI

Kırıkkale Üniversitesi Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygunolarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etikkurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarakkaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Elif ŞÜKRÜOĞLU

06.05.2022

ÖZET

DEĞİŞTİRİLMİŞ SZÂSZ-SCHURER-BASKAKOV TİPİ OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

ŞÜKRÜOĞLU, Elif
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. Ali OLGUN
OCAK 2022, 57 sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm Giriş ve kaynak özetlerine ayrılmış olup, bazı genel bilgiler verilerek kaynaklar özetlenmiştir.

İkinci bölümde tezde kullanılacak bazı tanımlar teoremler ve lemmalar verilmiştir.

Üçüncü bölümde operatörün oluşturulması ve operatörün sağladığı bazı özellikler ve lemmalar verilmiştir.

Dördüncü bölümde operatörün türevleri ve türevler için noktasal yakınsaklık, Asimtotik açılım ve hata tahmini ile ilgili teoremler verilmiştir.

Beşinci bölümde de tezde yapılanların bir açıklaması yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Modifiye Szâsz-Schurer-Baskakov operatörü, Szâsz operatörü, Süreklilik modülü, Noktasal yakınsama, Voronovskaya tipi teorem

ABSTRACT

APPROXIMATION PROPERTIES OF MODIFIED SZÂSZ-SCHURER-BASKAKOV TYPE OPERATORS

ŞÜKRÜOĞLU, Elif
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, M. Sc. Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ali OLGUN
January 2022, 57 pages

This Thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to introduction and source summaries, some general information is given and the soyrces are summarized.

In the second part, some definitions, theorems and lemmas to be used in the thesis are given.

In the third chapter, the creation of operatör and some features and lemmas provided by the operatör are given.

In the fourth chapter, derivatives of operatör and pointvise convergence for derivatives, asymptotic expansion and error estimation theorems are given.

In the fifth chapter, an explanation of what has been done in the thesis are given.

Key Words: Modified Szâsz-Schurer-Baskakov operator, Szâsz operator, Modulus of continuity, point-wise convergence, Voronovskaya type theorem

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez konumun belirlenmesinden, tezin yazım aşamasına kadar her konuda bilgi ve desteğini esirgemeyen, tecrübe ve katkılarıyla bana her zaman yol gösteren çok değerli danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Ali OLGUN ‘a teşekkürlerimi bir borç bilirim. Ayrıca Kırıkkale Üniversitesi Matematik Bölümünde bulunan değerli hocalarıma ve beni hiçbir konuda yalnız bırakmayan sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar kümesi
$\Vert \quad \Vert$	Norm
$C[a,b]$	$[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı
$C[0,\infty)$	$[0,\infty)$ aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı
$L_n(f;x)$	Lineer pozitif operatörler dizisi
$\omega(f;\delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$\Gamma(x)$	Gama fonksiyonu
$\mathrm{B}(x,y)$	Beta fonksiyonu
$B_n(f;x)$	Bernstein operatörü
$S_n(f;x)$	Szâsz-Mirakjan operatörü
$\binom{n}{k}$	$\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$
$L_n^{(\alpha)}(x)$	Genelleştirilmiş Laguerre polinomu
$L_n(x)$	Laguerre polinomu
$(a)_n$	Pochhammer sembolü
${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)$	Hipergeometrik fonksiyon

1. GİRİŞ

Yaklaşımlar teorisi Matematik Analizin temel çalışma konularından birisi olup, son yıllarda yoğun olarak çalışmalar devam etmektedir. Bu teorinin temeli; 1859 yılında P. L. Chebyshev in [a,b] aralığı üzerinde tanımlı, reel değerli ve sürekli bir fonksiyona en iyi şekilde yakınsayan bir polinomun varlığını iddia etmesine dayanır. Esas olarak [a,b] aralığında tanımlanmış karmaşık bir fonksiyonun, aralık üzerindeki aldığı değerleri ve sağladığı bazı özellikleri incelemede ortaya çıkan sıkıntıları ya da çıkma ihtimali olan problemleri analiz edebilmek her zaman kolay olmayacağından, aynı aralık üzerinde tanımlanmış daha basit bir fonksiyonu kullanarak, karmaşık fonksiyonun özellikleri hakkında bilgi sahibi olma amaçlanır.

P. L. Chebyshev in 1859 da verdiği teoremi;1885 yılında Weierstrass, [a,b] aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli her fonksiyona düzgün yakınsayan bir polinomun bulunabilir şeklinde vererek ispatını yapmıştır. Bu teoremin verilmesinden sonra Bernstein polinomları baz alınarak, Bernstein operatörleri tanımlanmış ve Lineer pozitif operatörlerin yakınsaklık özelliklerinin incelenmesinde temel araç olmuştur.

1951 yılında Bohmann Lineer pozitif operatörler dizisinin yakınsaması için temel teoremi vermiştir. Ancak benzer teoremin daha önce kendi dilinde T. Popoviciu tarafından da verildiği bilinmektedir. Daha sonra Korovkin bu teoremi integrallenebilir fonksiyonlar için vererek daha da genişletmiştir ve Literatüre Bohmann-Korovkin teoremi olarak geçmiştir.

1962 yılında Baskakov, Korovkin teoremini gerçekleyen ve tüm reel eksen üzerinde sınırlı olan fonksiyonlar için geçerli olan düzgün yakınsaklık kriterlerinin, fonksiyonun $1 + x^2$ ile sınırlı olması durumunda da geçerli olacağını ispatlamıştır. Benzer teorem 1970 li yıllarda A. D. Gadjiev tarafından çalışılmıştır.

Yaklaşımlar teorisinde yapılan yakınsaklık incelemeleri Lineer pozitif operatör dizileri üzerinden yapılmaktadır. Bu incelemelerde operatörlerin yakınsaması kadar, düzgün olarak yakınsaması ya da noktasal olarak yakınsaması , yakınsamanın hızı, yakınsamada yapılan hataların kestirimi oldukça önemli kavramlardır. Bu kavramlar incelenirken çeşitli matematiksel metotlar la beraber, bazı önemli tanımlara ve önceden verilmiş bazı önemli teoremlere de ihtiyaç duyulmaktadır.

Şu ana kadar literatürde birçok önemli Lineer pozitif operatör dizisi tanımlanmış ve operatör dizilerinin yakınsaklık özellikleri çeşitli yazarlarca incelenmiştir. Bunlardan en bilinen bazıları; Bernstein operatörleri, Baskakov operatörleri, Szasz-Mirakjan operatörleri olarak sayılabilir. Diğer tanımlanan operatörlerin çoğu bu operatörlerin çeşitli genellemeleri ile elde edilmiştir.

Bizde bu çalışmada 1995 yılında Gupta ve Srivastava tarafından $f \in C[0,\infty)$ integrallenebilen fonksiyonları için tanımlanan Szasz-Mirakjan Baskakov operatörlerinin Schurer tipi bir genelleştirmesini tanımlayacağız. Daha sonra tanımladığımız bu operatörlerin Laguerre polinomlarından yararlanarak Hipergeometrik seriler cinsinden ifadesini vereceğiz. Ayrıca operatörlerin momentlerini hesaplayıp, operatörün sağladığı bazı özelikleri veren lemmaları vererek, süreklilik modülünden faydalanarak, operatörlerin türevlerinin yakınsaklık özeliklerini, noktasal yakınsaklığını, operatörler için bir asimtotik açılımı ve hata tahminini vereceğiz.

1.1. Kaynak Özetleri

Bu çalışmada 2015 yılında Ekta Pandey, R. K. Mishra ve S. P. Pandey tarafından yapılan ‘’Approximation Properties of Some Modified Summation-Integral Type Operator’’ isimli çalışmada tanımlanan operatörün Schurer genellemesi yapılarak, bu çalışma ve Vijay Gupta ve Gancho Tachev tarafından 2014 de yapılan ’ Approximation by Szâsz-Mirakyan Baskakov Type Operators’’ başlıklı çalışma, D. K. Verma, V. Gupta, P.N. Agrawal tarafından 2012 yılında yapılan, ‘’Some Approximation Properties of Baskakov-Durrmeyer-Stancu Operators’’ başlıklı çalışma, P.N. Agrawal, V. Gupta, A.S. Kumar tarafından yapılan ‘’ Generalized Baskakov-Durrmeyer Type Operators’’ başlıklı çalışma da yapılanlar ve verilen yakınsaklık teoremlerinin benzerleri verilmiştir. Bu teoremler verilirken referanslar kısmında yer alan diğer çalışmalarda değerlendirilerek teoremlerin ispatlarında kullanılmıştır.

2.TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Bu bölüm de tezin ilerleyen kısımlarında verilecek bazı Lemma ve Teoremlerin ispatlarında kullanılacak eşitsizlikler, tanımlar ve temel kavramlar verilerek gerekli açıklamalar yapılacaktır. Burada verilen tanımlar referanslar kısmında verilmiş çeşitli çalışmalarda da bulunmaktadır.

2.1. Lineer Pozitif Operatörler İle İlgili Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1 (Lineer Operatör) : X ve Y iki fonksiyon uzayı olsun. $L : X \to Y$ şeklinde tanımlanmış operatör göz önüne alınırsa $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ fonksiyonları X uzayından alınan herhangi iki fonksiyon ve a_1 ve a_2 ler keyfi iki reel sayı olmak üzere L operatörü

$$L(a_1 f_1 + a_2 f_2; x) = a_1 L(f_1; x) + a_2 L(f_2; x)$$

eşitliği sağlanıyor ise L operatörüne lineer operatör denir. Eğer $L(f) \geq 0$ ise L ‘ lineer pozitif operatör adı verilir[35].

Tanım 2.1.2. (Norm) : N , bir lineer uzay olsun. $\| \quad \|: N \to R$ fonksiyonunun x deki değeri $\|x\|$ ile gösterilsin. Bu fonksiyon için

i) $\|x\| \geq 0$

ii) $\|x\| \geq 0 \Leftrightarrow x = 0$

iii) $\|ax\| = |a|\|x\|$

iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyorsa $\| \quad \|$ fonksiyonuna N üzerinde norm denir. Eğer bir Lineer uzay üzerinde norm tanımlanmışsa bu uzaya normlu uzay adı verilir[30].

Tanım 2.1.3. (Cauchy-Schwarz eşitsizliği) : Sonlu sayıda hepsi sıfır olmayan (f_k), (g_k), $k \in$ N sayıları için

$$\sum_{k=1}^{n} |f_k g_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} |g_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizliğe Cauchy-Schwarz eşitsizliği adı verilir[35].

Tanım 2.1.6. (Noktasal yakınsaklık) : (f_n) dizisi A üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ ve $x \in A$ için $\exists\, n_0$ öyle ki $n \geq n_0$ için

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olmasıdır[34].

Örnek: $f_n(x) = xe^{-nx}$ fonksiyonunun $A = [0, \infty)$ kümesi üzerinde yakınsaklık durumunu inceleyelim. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $f_n(0) = 0$ olup, $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$ dır.

Şimdi 0$< x < \infty$ olsun. Verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ için, $\forall\, n \geq n_0$ için

$$|f_n(x) - f(0)| = |xe^{-nx}| < \varepsilon$$

olacağından

$$ln(xe^{-nx}) = ln\varepsilon \;\Leftrightarrow lnx + ln(e^{-nx}) = ln\varepsilon \Leftrightarrow lnx - nx = ln\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x} ln\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = n$$

olur. Bu durumda $\forall\, n > n_0(\varepsilon, x)$ için $0 < xe^{-nx} < \varepsilon$ olacağından $\forall\, x \in (0, \infty)$ için $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ olur ki bu f_n nin f ye noktasal olarak yakınsadığını gösterir.

Tanım 2.1.7. (Düzgün yakınsaklık) : (f_n) dizisi *A* üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon)$ öyle ki $n \geq n_0$ ve $\forall x \in A$ için

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olmasıdır[24].

Teorem 2.1.8 (f_n) ve f fonksiyonları $I = [a, b]$ aralığı üzerinde sürekli olsunlar. (f_n) dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$c_n = \max_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)|$$

eşitliği ile tanımlanan (c_n) dizisinin bir sıfır dizisi olmasıdır.

Örnek: $f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}$ fonksiyonunun $A = [0,1]$ kümesi üzerinde yakınsaklık durumunu inceleyelim. $\forall\, x \in [0,1]$ için $\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n+x} = x$ dır.

$$c_n = \max_{0\le x\le 1}|f_n(x) - f(x)| = \max_{0\le x\le 1}\left|\frac{nx}{1+n+x} - x\right| = \max_{0\le x\le 1}\left|-\frac{x+x^2}{1+n+x}\right| = \frac{2}{1+n}$$

olduğundan $\lim c_{n_{n\to\infty}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+n} = 0$ olur ki bu $f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}$ fonksiyon dizisinin $A = [0,1]$ kümesi üzerinde $f(x) = x$ düzgün yakınsadığını gösterir.

Tanım 2.1.7. (Taylor Serisi) : f fonksiyonu , a noktasını içeren bir aralıktaki x değerleri için

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

olsun. Bu halde ,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

olur. Buna f fonksiyonun , a noktasında Taylor serisi veya Taylor açılımı denir[25].

Tanım 2.1.8. (Leibniz Türev Kuralı) : $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları , n. mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar olduğunda $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının çarpımının n −inci mertebeden türevlenebilir ve

$$[f(x)g(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonlara Leibniz Türev Kuralı denir[24].

Tanım 2.1.9. (Szâsz-Mirakjan Operatörü) : f fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$S_n(f;x) = e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) \qquad x \in [0,\infty), f \in \mathbb{N}$$

şeklinde tanımlanan lineer pozitif operatörlere Szâsz-Mirakjan operatörleri denir[23].

Tanım 2.1.10. (Bernstein polinomları) : f, $[0,1]$ üzerinde tanımlı ve sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$B_n = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

olarak tanımlanan polinomlara f fonksiyonuna karşı gelen Bernstein polinomlar dizisi denir[32].

2.2. Süreklilik Modülü Ve Özellikleri

Yaklaşım teorisinde önemli çalışmalardan biri de yaklaşım hızını belirlemektir. Bunu belirlemek için kullanılan en önemli metotlardan birisi de süreklilik modülüdür. [35].

Tanım 2.2.1. : Kabul edelim ki f, $[a,b]$ aralığında tanımlanmış sınırlı bir fonksiyon olsun. Keyfi $\delta > 0$ için

$$\omega(f,\delta) = \sup_{\substack{|t-x|<\delta \\ t,x\in[a,b]}} |f(t) - f(x)| \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanan $\omega(f;\,\delta)$ fonksiyonuna f, fonksiyonunun $[a,b]$ aralığındaki süreklilik modülü denir.

(2.1) den görüldüğü gibi $\delta > 0$ için $\omega(f;\,\delta)$ negatif olmayan bir fonksiyondur. Ayrıca δ_1 ve δ_2 pozitif sayıları için $\delta_1 \le \delta_2$ ise $\omega(f;\,\delta_1) \le \omega(f;\,\delta_2)$ olduğu aşikardır.

Süreklilik modülü aşağıdaki önemli özellikleri sağlayan bir fonksiyondur.

Lemma 2.2.1. $m \ge 1$ bir doğal sayı olmak üzere

$$\omega(f;\,m\delta) \le m\omega(f;\,\delta)$$

dır.

Lemma 2.2.2. δ_n sıfıra yakınsayan bir dizi olmak üzere

$$\omega(f;\,\delta_n) \ge C_f\delta_n$$

dir. Buradan C_f , f ye bağlı sabit sayılardır.

Lemma 2.2.3. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(f; \delta) = 0$$

olur.

Lemma 2.2.4. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sınırlı türevi varsa

$$\omega(f; \delta) \leq C\delta$$

olacak şekilde C sayısı vardır.

2.3. Korovkin Teoremi

Korovkin teoremi 1950 yılında P.P. Korovkin tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 2.3.1. (P.P. Korovkin Teoremi) : $\{L_n(f; x)\}$ lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. $\alpha_n(x),\ \beta_n(x)\ ve\ \gamma_n(x)$ $[a, b]$ de düzgün olarak sıfıra yakınsayan diziler olmak üzere $\forall x \in [a, b]$ için

$$i)\ \ L_n(1; x) \rightrightarrows 1 + \alpha_{n(x)}$$

$$ii)\ \ L_n(t; x) \rightrightarrows x + \beta_{n(x)}$$

$$iii)\ L_n(t^2; x) \rightrightarrows x^2 + \gamma_{n(x)}$$

koşulları sağlanıyorsa bu durumda $L_n(f; x)$, $[a, b]$ üzerinde düzgün olarak $f(x)\ e$ yakınsaktır denir. Burada f , $[a, b]$ de sürekli $a'\ da$ soldan ve $b'\ de$ sağdan sürekli ve reel eksenin tamamında sınırlı bir fonksiyondur[35].

2.4. Voronovskaya Teoremi

Bernstein polinomları ve onların türevlerinin noktasal yakınsaklık için kullanılan önemli teoremlerden biride Voronovskaya teoremidir.

Teorem 2.4.1. (E.V.Voronovskaya Teoremi) : $[0,1]$ aralığında sınırlı bir f fonksiyonu $x \in [0,1]$ noktasında $f''(x)$ türevine sahipse ,

$$\lim_{n \to \infty} n[B_n(f; x) - f(x)] = \frac{1}{2} x(1 - x) f''(x)$$

eşitliği sağlanır[33].

2.5. Gama ve Beta Fonksiyonları

Özel fonksiyonlar olarak bilinen Gamma ve Beta fonksiyonları ve bu fonksiyonların özellikleri kullanılarak yeni operatörler tanımlanmış ve tanımlanan bu operatörlerin yakınsaklık özellikleri incelenmiştir. Aşağıda bu fonksiyonların tanımları ve sağladığı bazı özellikler verilecektir.

2.5.1. Gama Fonksiyonu

$\Gamma(x)$ ile gösterilen Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(\mathrm{x}) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

genelleştirilmiş integrali yardımıyla tanımlanır.

Gamma fonksiyonuna bazen genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu da denir. Yani ,

$$F(u) = \int_0^\infty e^{-ut}dt = \frac{1}{u} \qquad (2.2)$$

integrali ile tanımlanan fonksiyonu ele alalım. $c > 0$ olmak üzere bu integral her $c \leq u \leq d$ sonlu aralığında $\frac{1}{u}$ ya düzgün yakınsaktır. (2.2) den u ya göre türevler alarak devam ettiğimizde $n-$yinci türev için

$$(-1)^n F^{(n)}(u) = \int_0^\infty t^n e^{-ut}dt = \frac{n!}{u^{n+1}}$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitlikte $u = 1$ alınırsa ;

$$\int_0^\infty t^n e^{-ut}dt = n! = \int_0^\infty t^{(n+1)-1}e^{-t}dt = \Gamma(n+1)$$

olur. Burada n değerleri pozitif tam sayılar olarak alınmıştır.

Halbuki n nin $n > -1$ olan herhangi bir reel sayı olması halinde de bu genelleştirilmiş integral tanımlıdır. Yani yakınsaktır. O halde $x > -1$ olan herhangi bir x reel sayısı için ,

$$x! = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = \Gamma(x+1)$$

yazılabilir. Buradan görülüyor ki , -1 den büyük olan tüm reel sayıların faktöriyel değerlerini sonlu bir reel sayı olarak tanımlamak mümkündür. Bundan dolayı Gama fonksiyonu genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu denir.

$x = 0$ olduğu zaman faktöriyel fonksiyonun değeri ,

$$0! = \int_0^\infty e^{-t} dt = -e^{-t}\big|_0^\infty = -(0-1) = 1$$

olur. Bu sonuç 0! in neden 1 olarak tanımlanması gerektiğini açıklar.

Elemanter matematikte n faktöriyelin $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$ çarpımı ile verilir. Bu özellik , $n! = n(n-1)!$ eşitliğini içerdiğine göre ,

$x = n$ bir tamsayı ise ,

$$\Gamma(n+1) = n! = n(n-1)! = n\Gamma(n)$$

yazılabilir. Gerçekten Γ fonksiyonu ,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

eşitliği tüm $x > 0$ değerleri için gerçekler[26].

2.5.2. Beta Fonksiyonu

Beta fonksiyonu

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \qquad (Re(x) > 0, Re(y) > 0)$$

Genelleştirilmiş integrali yardımıyla tanımlanır. Bu tanıma eş değer olarak

$$B(x,y) = 2\int_0^\infty (\sin\theta)^{2x-1} (\cos\theta)^{2y-1}\, d\theta$$

ve

$$B(x,y) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du \qquad (Re(x) > 0, Re(y) > 0)$$

yazılabilir. Beta fonksiyonu ile Gama fonksiyonu cinsinden ifadesi ise

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \qquad (x, y \neq 0, -1, -2 \dots)$$

şeklindedir. Ayrıca bu eşitlikten kolaylıkla görülebilir ki

$$B(x,y) = B(y,x)$$

olup, bu eşitlik Beta fonksiyonunun simetri özelliği olarak adlandırılır[26].

Tanım 2.5.1. (Pochhammer sembolü) : α bir reel ya da kompleks bir sayı , r sıfır ya da pozitif bir tam sayı olmak üzere $(\alpha)_r$ ifadesi

$$(\alpha)_r = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+r-1) \qquad (2.3)$$

olarak tanımlanan ifadeye Pochhammer sembolü denir. Ayrıca $(1)_r = r!$ dir[26].

Lemma 2.5.1: Pochhammer sembolü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$$(\alpha)_r = \frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)} \qquad (2.4)$$

$$(\alpha)_{r+1} = \alpha(\alpha+1)_r \qquad (2.5)$$

2.6. Hipergeometrik Seri Ve Hipergeometrik Fonksiyonlar

α , β ve γ reel ya da kompleks sabitler olmak üzere

$$1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots \qquad (2.6)$$

olarak ifade edilen seri matematikte büyük bir öneme sahiptir. Bu seri

$$1 + x + x^2 + \cdots$$

geometrik serisinin bir genelleştirilmesi olduğundan Hipergeometrik seri adını alır. (2.6) dan görülmektedir ki , γ değeri sıfır ya da negatif bir tam sayı olmamalıdır. (2.6) hipergeometrik serisi $|x| < 1$ için yakınsak , $|x| > 1$ için ıraksaktır. $|x| = 1$

olduğu zaman $\gamma > \alpha + \beta$ ise seri mutlak yakınsaktır. $x = -1$ iken $\gamma > \alpha + \beta - 1$ ise seri yakınsaktır.

(2.3) gösterimi dikkate alınarak (2.6) hipergeometrik serisi

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r(\beta)_r}{(\gamma)_r}\frac{x^r}{r!} \tag{2.7}$$

şeklinde yazılabilir. (2.7) de görülen F nin altındaki 2 ve 1 alt indisleri F nin yapısında biri α ve β diğeri γ olmak üzere iki tip parametre bulunduğunu ifade eder. Hipergeometrik fonksiyonu ifade eden ${}_2F_1$ gösterimi yerine F gösterimi de kullanılır. Yani ,

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)=F(\alpha,\beta;\gamma;x)$$

olup , bu fonksiyon Hipergeometrik fonksiyon olarak adlandırılır[26].

Tanım 2.6.1. (Konfluent Hipergeometrik Fonksiyon) : α ve β reel ya da kompleks parametreler olmak üzere

$$ xy''+(\beta-x)y'-\alpha y=0 \tag{2.8}$$

olarak ifade edilen diferansiyel denkleme Kummer ya da Konfluent Hipergeometrik denklem denir. Şöyle ki , $\beta\neq 0,-1,-2,\dots$ olmak üzere konfluent hipergeometrik fonksiyonu

$$ {}_1F_1(\alpha,\beta;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{(\beta)_n}\frac{x^n}{n!} \qquad n\geq 1\,, \qquad |x|<\infty$$

şeklinde tanımlanır. Konfluent hipergeometrik fonksiyon için ${}_1F_1(\alpha,\beta;x)$ yerine $\Phi(\alpha,\beta;x)$ veya $M(\alpha,\beta;x)$ gösterimleri de kullanılır[29], [31].

2.7. Laguerre Polinomları

Laguerre polinomları adını Edmond Laguerre’den almıştır. Bu denklemin, yalnızca n negatif olmayan bir tamsayı olması durumda tekil olmayan çözümleri vardır[27], [28].

Tanım 2.7.1.:

$$ L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{x^{-\alpha}e^{x}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^{\alpha+n}e^{-x})$$

şeklinde Rodrigues formülü ile tanımlanan Laguerre polinomları $(0,\infty)$ aralığında $\omega(x) = x^{\alpha} e^{-x}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir.

Yani ,

$$\int_0^{\infty} L_m^{\alpha}(x) L_n^{\alpha}(x) x^{\alpha} e^{-x} dx = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} \delta_{mn} \quad ,$$

$$\alpha > -1 \quad m, n = 0,1,2,\dots$$

ortogonallik bağıntısını gerçekler. Ayrıca , Leibniz formülü uygularsak

$$L_n^{(\alpha)} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-\nu} \frac{(-x)^{\nu}}{\nu!} \qquad n \geq 0$$

şeklinde de yazılabilir.

Özel olarak $\alpha = 0$ olduğunda ise bu polinom Laguerre polinomu ya da basit Laguerre polinomu denir. $\alpha = 0$ olduğunda genellikle α ihmal edilir.

Yani ,

$$L_n^{(0)}(x) = L_n(x) = {}_1F_1(-n; 1; x)$$

yazılabilir. Bu polinomların ilk dördünün açık hali

$L_0^{(\alpha)}(x) = 1$

$L_1^{(\alpha)}(x) = 1 + \alpha - x$

$L_2^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{2}(1+\alpha)(2+\alpha) - (2+\alpha)x + \frac{1}{2}x^2$

$L_3^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{6}(1+\alpha)(2+\alpha)(3+\alpha) - \frac{1}{2}(2+\alpha)(3+\alpha)x + \frac{1}{2}(3+\alpha)x^2 - \frac{1}{6}x^3$

dir.

$L_n^{(\alpha)}(x)$ genelleştirilmiş Laguerre polinomları ,

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0$$

diferansiyel denklemini sağlar. Laguerre polinomları için rekürans bağlantısı ise ,

$$nL_n^{(\alpha)}(x) = (-x + 2n + \alpha - 1)L_{n-1}^{(\alpha)}(x) - (n + \alpha - 1)L_{n-2}^{(\alpha)}(x)$$

$$n = 2,3,4 \ldots$$

şeklindedir.

3. SZÂSZ-SCHURER BASKAKOV TİPİ OPERATÖRÜN OLUŞTURULMASI

Tezin bu kısmında yakınsaklık özellikleri incelenecek olan operatör tanımlaması yapılacak ve daha sonra da tanımlanan operatörün kaynaklardaki benzer operatörlerde verildiği gibi Laguerre polinomları yardımıyla tanımlaması yapılacaktır. Daha sonra da operatörün ve türevlerinin sağladığı bazı yakınsaklık özellikleri incelenecektir.

1962 yılında Schurer , iyi bilinen Bernstein operatörlerini kullanarak herhangi bir $n \in \mathbb{N}$, $f \in C[0,1+p]$, negatif olmayan p tamsayıları ve $B_{n,p} : C[0,1+p] \longrightarrow$ C[0,1] için Bernstein-Schurer operatörleri olarak adlandırılan

$$B_{n,p}(f;x) = \sum_{k=0}^{n+p} f\binom{n}{p}\binom{n+p}{k} x^k (1-x)^{n+p-k} \qquad x \in [0,1]$$

operatörleri tanımladı ve bu operatörlerin yaklaşım özelliklerini inceledi. Burada özel durum olan $p = 0$ için Klasik Bernstein operatörlerini verdiğine dikkat edilmelidir.

1965 yılında Schurer,

$$E_2 := \left\{ f \in C[0,\infty) : \frac{f(x)}{1+x^2} < \infty \ , \ x \longrightarrow \infty \right\}$$

kümesi üzerinde her $p \in \mathbb{N}_0 \, , f \in E_2 \, , x \in [0,\infty) \, , n \geq 1$ için Schurer-Szasz-Mirakjan operatörünü $M_{n,p} = E_2 \longrightarrow C[0,\infty)$ olmak üzere

$$M_{n,p}(f)(x) := exp[-(n+p)x] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(n+p)x]^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

şeklinde ve Baskakov-Schurer operatörünün $A_{n,p} = E_2 \longrightarrow C[0,\infty)$ olmak üzere ,

$$A_{n,p}(f)(x) := (1+x)^{-n-p} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+p+k-1}{k} \left(\frac{x}{1+x}\right)^k f\left(\frac{k}{n}\right)$$

şeklinde Schurer genelleştirmelerini verdi[6].

Yukarıdaki operatörlerin çeşitli genellemeleri ve yakınsama özellikleri üzerine birçok çalışma yapılmış olup, bu çalışmalar halen devam etmektedir [1], [2], [10], [11], [13], [16], [17], [20], [22].

1967 yılında J. L. Durmeyer, f, $[0,1]$ üzerinde çekirdeğe göre integrallenebilir herhangi reel değerli fonksiyon olmak üzere bir boyutlu Bernstein-Durmeyer operatörlerini

$$D_n(f,x) \;:=\; (n+1) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \int_0^1 \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k} f(u)du \;,$$

$x \in [0,1]$, $n = 1,2,\ldots,$

şeklinde tanımladı ve bu operatörlerin yaklaşım özelliklerini inceledi[8].

1995 yılında, Gupta ve Srivastava

$$M_n(f;x) = (n-1) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-nx} \frac{(nx)^k}{k!} \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} \int_0^{\infty} \frac{t^k}{(1+t)^{n+k}} f(t)dt \;;\;\; x \in [0,\infty) \tag{3.1}$$

tanımlanan Szasz-Mirakjan-Baskakov tipi operatörlerin türevlerinin yakınsama özelliklerini inceledi[21].

Daha sonra birçok araştırmacı önceden tanımlanan bir çok operatörün Durmeyer tipi uzantılarını ve ya diğer bazı modifikasyonlarını tanımladılar ve yakınsaklık özelliklerini incelediler. Bunlardan bazıları referanslarda verilmiştir [3], [9], [12], [14], [15].

2006 yılında,

$$f \in C_\gamma[0,\infty) \equiv \{f \in [0,\infty) :\; |f(t)| \le Mt^\gamma \;, M \;, \gamma > 0\}$$

olmak üzere Gupta ve arkadaşları Baskakov-Durmeyer operatörlerinin bir modifikasyonunu

$$B_n(f(t)\,;x)=\sum_{k=1}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{1}{B(n+1,k)}\int_0^{\infty}\frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+k+1}}f(t)dt$$
$$+\frac{f(0)}{(1+x)^n} \qquad (3.2)$$

şeklinde tanımladı ve bu operatörlerin türevlerinin yakınsama özelliklerini inceledi [18].

2012 yılında, Verma ve arkadaşları (3.1) tipi operatörün Baskakov Beta bazlı farklı bir modifikasyonunu tanımladı, bu operatörlerin yaklaşım özelliklerini, hata tahminini ve bazı rekürans bağlantılarını verdi [4]. 2012 yılında, Gupta ve arkadaşları ise (3.2) operatörlerinin Stancu tipli modifikasyonunun noktasal yakınsaklık özelliklerini inceledi ve Voronovskaya tipi teorem verdi[19]. 2014 yılında, Agraval ve arkadaşları (3.2) operatörlerinin farklı bir genellemesini verdi ve düzgün yakınsaklık ve nokta yakınsaklık özelliklerini inceledi [12].

2015 yılında, Pandey ve arkadaşları (3.1) operatörlerin bir Szasz-Baskakov Stancu tipli

$$M_n(f;x)=(n-1)\sum_{k=0}^{\infty}e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}\frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}\int_0^{\infty}\frac{t^k}{(1+t)^{n+k}}f\left(\frac{nt+\alpha}{n+\beta}\right)dt$$
$$x\in[0,\infty) \qquad (3.3)$$

şeklindeki bir genellemesinin Hipergeometrik serilerle bağlantılarını verdi ve çeşitli yaklaşım özelliklerini Steklov ortalaması yardımıyla inceledi[5].

Bizde bu tezde (3.1) operatörünün Schurer genellemesini tanımlayarak Pandey ve arkadaşlarının verdiği sonuçlara benzer sonuçlar elde etmek istedik.

$f\in C[0,\infty)$ için, (3.1) de verilen Szasz-Mirakjan-Baskakov tipi operatörün Schurer tipi genellemesi

$$A_{n,\alpha,\beta_n}(f;x)=(n+a-1)\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,\beta_n,k}(x)\int_0^{\infty}q_{n,a,k}(t)f(t)dt\ ;\ \ a\in\mathbb{N}_0,x\in[0,\infty)$$
$$(3.4)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada β_n pozitif reel sayıların bir dizisidir. Öyle ki ,

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$$

(3.5) olup, kolaylık olması bakımından

$$p_{n,\beta_n,k}(x) = \frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!}\ ,\quad q_{n,a,k}(t) = \frac{(n+a+k-1)!}{k!\,(n+a-1)!}\frac{t^k}{(1+t)^{n+a+k}} \tag{3.6}$$

olarak gösterilmiştir. $x \in [0,\infty)$ için A_{n,α,β_n} operatörlerinin lineer ve pozitif olduğu açıktır.

Şimdi (3.6) operatörünün yakınsama özelliklerini incelerken yararlanacağımız bazı önemli bilgileri verelim.

Beta fonksiyonu ve Gamma fonksiyonları için iyi bilinen

$$B(x,y) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \frac{(x-1)!\,(y-1)!}{(x+y-1)!} \tag{3.7}$$

eşitlikleri sağlanır.

(3.4) tarafından tanımlanan operatörü, hipergeometrik fonksiyonlar için bilinen

$${}_1F_1(\alpha;\beta;t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\beta)_k}\frac{x^k}{k!} \tag{3.8}$$

eşitliğini kullanarak farklı bir şekilde temsil edebiliriz. Burada

$$(\alpha)_k = \alpha(a+1)(a+2)\dots(a+k-1)$$

Pochhammer sembolüdür. $A_{n,\alpha,\beta_n}(f;x)$ operatörlerinin eş değer bir tanımını

$$A_{n,\alpha,\beta_n}(f;x) = (n+a-1)\int_0^\infty \frac{e^{-(n+\beta_n)x}}{(1+t)^{n+a}} f(t)\ {}_1F_1\left(n+a;1;\frac{(n+\beta_n)xt}{1+t}\right)dt \tag{3.9}$$

şeklinde verebiliriz. Bu ifadenin ispatı tezin ilerleyen kısımlarında verilecektir.

Şimdi tanımlanan (3.4) operatörünün kendisinin ve türevlerinin yakınsaklık özelliklerini inceleyelim.

4. OPERATÖRÜN YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ

Şimdi $A_{n,a,\beta_n}(f;x)$ operatörünü yakınsaklık özelliklerini incelemek için ihtiyaç duyulan bazı Lemma ve Rekürans bağıntıları verilecektir.

Lemma 4.1. Tüm $x \in [0,\infty)$ için (3.4) ile tanımlanan A_{n,a,β_n} operatörleri aşağıdakileri eşitlikleri sağlar;

i) $A_{n,a,\beta_n}(1;x)$ (4.1)

ii) $A_{n,a,\beta_n}(t;x) = \frac{(n+\beta_n)x+1}{(n+a-2)}$ (4.2)

iii) $A_{n,a,\beta_n}(t^2;x) = \frac{[(n+\beta_n)x]^2+4[(n+\beta_n)x+2]}{(n+a-2)(n+a-3)}$ (4.3)

İspat:

(4.1) in ispatı için $A_{n,a,\beta_n}(f;x)$ de $f(t) = 1$ alınırsa

$A_{n,a,\beta_n}(1;x)$

$$= (n+a-1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!}e^{-(n+\beta_n)x}\frac{(n+a+k-1)!}{k!\,(n+a-1)!}\int_0^{\infty}\frac{t^k}{(1+t)^{n+a+k}}dt$$

$$= (n+a-1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!}e^{-(n+\beta_n)x}\frac{(n+a+k-1)!}{k!\,(n+a-1)!}\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n+a-1)}{\Gamma(n+a+k)}$$

$$= (n+a-1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!}e^{-(n+\beta_n)x}\frac{(n+a+k-1)!}{k!\,(n+a-1)!}\frac{k!\,(n+a-2)!}{(n+a+k-1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!}e^{-(n+\beta_n)x} = 1$$

$$A_{n,a,\beta_n}(1;x) = 1$$

olur.

(4.2) nin ispatı için $A_{n,a,\beta_n}(f;x)$ de $f(t) = t$ alınırsa ve gerekli işlemler yapılırsa

$A_{n,a,\beta_n}(t;x)$

$$= (n+a-1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!}e^{-(n+\beta_n)x}\frac{(n+a+k-1)!}{k!\,(n+a-1)!}\int_0^{\infty}\frac{t^{k+1}}{(1+t)^{n+a+k}}dt$$

$$= (n+a-1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!}e^{-(n+\beta_n)x}\frac{(n+a+k-1)!}{k!\,(n+a-1)!}\frac{\Gamma(k+2)\Gamma(n+a-2)}{\Gamma(n+a+k)}$$

$$= (n+a-1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!}e^{-(n+\beta_n)x}\frac{(n+a+k-1)!}{k!\,(n+a-1)!}\frac{(k+1)!\,(n+a-3)!}{(n+a+k-1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!}e^{-(n+\beta_n)x}\frac{(k+1)}{(n+a-2)}$$

$$= \sum_{\substack{k=1\\ k\to k+1}}^{\infty}\frac{[(n+\beta_n)x]^k}{(k-1)!}e^{-(n+\beta_n)x}\frac{1}{(n+a-2)}$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!}e^{-(n+\beta_n)x}\frac{1}{(n+a-2)}$$

$$= \frac{1}{(n+a-2)}\left[(n+\beta_n)x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!}e^{-(n+\beta_n)x}+1\right] = \frac{(n+\beta_n)x+1}{(n+a-2)}$$

$$A_{n,a,\beta_n}(t;x) = \frac{(n+\beta_n)x+1}{(n+a-2)}$$

olur.

(4.3) ün ispatı için $A_{n,a,\beta_n}(f;x)$ de $f(t) = t^2$ alınırsa ve gerekli işlemler yapılırsa

$A_{n,a,\beta_n}(t^2;x)$

$$= (n+a-1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!}e^{-(n+\beta_n)x}\frac{(n+a+k-1)!}{k!\,(n+a-1)!}\int_0^{\infty}\frac{t^{k+2}}{(1+t)^{n+a+k}}dt$$

$$= (n+a-1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!}e^{-(n+\beta_n)x}\frac{(n+a+k-1)!}{k!\,(n+a-1)!}\frac{\Gamma(k+3)\Gamma(n+a-3)}{\Gamma(n+a+k)}$$

$$= (n+a-1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!}e^{-(n+\beta_n)x}\frac{(n+a+k-1)!}{k!\,(n+a-1)!}\frac{(k+2)!\,(n+a-4)!}{(n+a+k-1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!}e^{-(n+\beta_n)x}\frac{(k+1)(k+2)}{(n+a-2)(n+a-3)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!}e^{-(n+\beta_n)x}\frac{(k^2+3k+2)}{(n+a-2)(n+a-3)}$$

$$= \frac{1}{(n+a-2)(n+a-3)}\left\{\sum_{\substack{\boldsymbol{k=1}\\ \boldsymbol{k\to k+1}}}^{\infty}\frac{k[(n+\beta_n)x]^k}{(k-1)!}e^{-(n+\beta_n)x}\right.$$
$$\left.+3\sum_{\substack{k=1\\ k\to k+1}}^{\infty}\frac{[(n+\beta_n)x]^k}{(k-1)!}e^{-(n+\beta_n)x}+2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!}e^{-(n+\beta_n)x}\right\}$$

$$= \frac{1}{(n+a-2)(n+a-3)}\left\{\sum_{\boldsymbol{k=0}}^{\infty}\frac{(n+\beta_n)x(k+1)[(n+\beta_n)x]^k}{k!}e^{-(n+\beta_n)x}\right.$$
$$\left.+3(n+\beta_n)x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!}e^{-(n+\beta_n)x}+2\right\}$$

$$= \frac{1}{(n+a-2)(n+a-3)}\left\{\sum_{\substack{\boldsymbol{k=1}\\ \boldsymbol{k\to k+1}}}^{\infty}\frac{(n+\beta_n)x[(n+\beta_n)x]^k}{(k-1)!}e^{-(n+\beta_n)x}\right.$$
$$\left.+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+\beta_n)x[(n+\beta_n)x]^k}{k!}e^{-(n+\beta_n)x}+3(n+\beta_n)x+2\right\}$$

$$= \frac{\left\{[(n+\beta_n)x]^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!}e^{-(n+\beta_n)x}+[(n+\beta_n)x+3(n+\beta_n)x+2]\right\}}{(n+a-2)(n+a-3)}$$

$$A_{n,a,\beta_n}(t^2;x) = \frac{[(n+\beta_n)x]^2+4[(n+\beta_n)x+2]}{(n+a-2)(n+a-3)}$$

olarak bulunur.

Lemma 4.1. in bir sonucu olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.1. $f \in C[0,\infty)$ ve $x \in [0,A)$ için

$$\lim_{n\to\infty} A_{n,a,\beta_n}(f) = f$$

olur.

Şimdi (3.4) olarak tanımlanan operatörün Hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden ifadesini verelim.

Biliyoruz ki (3.4) operatöründe seri yakınsak olduğundan toplam ile integral yer değiştirebilir. Ayrıca

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!} e^{-(n+\beta_n)x} = 1$$

olduğunda göz önüne alınarak aşağıdaki işlemler yapılabilir.

$(a)_k = a(a+1)(a+2)\ldots..(a+k-1)$ Pochhammer sembolü olmak üzere

$$(n+a)_k = \frac{(n+a-1)!}{(n+a-1)!}(n+a)(n+a+1)(n+a+2)\ldots\ldots\ldots(n+a+k-1)$$

$$= \frac{(n+a+k-1)!}{(n+a-1)!}$$

şeklinde yazılabileceği ve Pochhammer sembolünde $a = 1$ alınmasıyla

$$(1)_k = 1(1+1)(1+2)\ldots\ldots(1+k-1) = 1.2.3\ldots..k = k!$$

olduğundan Hipergeometrik fonksiyonlar için bilinen

$${}_1F_1(\alpha;\beta;t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\beta)_k}\frac{x^k}{k!}$$

gösterimi göz önüne alınarak

$$A_{n,a,\beta_n}(f;x) = (n+a-1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!}e^{-(n+\beta_n)x}\frac{(n+a+k-1)!}{k!\,(n+a-1)!}$$

$$\times\int_0^{\infty}\frac{t^k}{(1+t)^{n+a+k}}f(t)dt$$

$$= (n+a-1)\int_0^{\infty}\frac{e^{-(n+\beta_n)x}}{(1+t)^{n+a}}f(t)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+a)_k}{(1)_k}\frac{\left[\frac{(n+\beta_n)xt}{1+t}\right]^k}{k!}dt$$

$$= (n+a-1)\int_0^{\infty}\frac{e^{-(n+\beta_n)x}}{(1+t)^{n+a}}f(t)\ {}_1F_1\left(n+a;1;\frac{(n+\beta_n)xt}{1+t}\right)dt$$

şeklinde yazılabilir ki bu operatörün Hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden ifadesidir.

Lemma 4.2. : $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olsun. Eğer r yinci dereceden moment

$$\mathcal{U}_{n+\beta_n,r}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,\beta_n,k}(x)\left(\frac{k}{n+\beta_n}-x\right)^r$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!}e^{-(n+\beta_n)x}\left(\frac{k}{n+\beta_n}-x\right)^r \tag{4.4}$$

şeklinde tanımlanırsa, $\mathcal{U}_{n+\beta_n,r}(x)$ ler için

$$(n+\beta_n)u_{n+\beta_n,r+1}(x) = x\left[u'_{n+\beta_n,r}(x) + r u_{n+\beta_n,r-1}(x)\right] \tag{4.5}$$

reküransbağlantısı sağlanır.

Bu ifadenin bir sonucu olarak da aşağıdaki iddialar sağlanır.

1 . $u_{n+\beta_n,r}(x)$ ler derecesi $\leq r$ olan x in polinomlarıdır.

2. $u_{n+\beta_n,r}(x) = O\left(\frac{1}{n^{\left[\frac{r+1}{2}\right]}}\right)$; $n \longrightarrow \infty$

İspat : İspat tanım kullanılarak yapılabilir.

Bunun için (4.4) den gerekli türevler alınıp gerekli işlemler yapılırsa

$$u'_{n+\beta_n,r}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(n+\beta_n)[(n+\beta_n)x]^{k-1}}{k!} e^{-(n+\beta_n)x} \left(\frac{k}{n+\beta_n} - x\right)^r$$

$$-(n+\beta_n) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!} e^{-(n+\beta_n)x} \left(\frac{k}{n+\beta_n} - x\right)^r$$

$$-r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!} e^{-(n+\beta_n)x} \left(\frac{k}{n+\beta_n} - x\right)^{r-1}$$

$$= \left[\frac{k}{x} - (n+\beta_n)\right] u_{n+\beta_n,r}(x) - r u_{n+\beta_n,r-1}(x)$$

olur. Bu ifadenin her iki tarafı x ile çarpıldıktan sonra düzenlenirse

$$x u'_{n+\beta_n,r}(x) + x r u_{n+\beta_n,r-1}(x) = k u_{n+\beta_n,r}(x) - (n+\beta_n) x u_{n+\beta_n,r}(x)$$

elde edilir.

Diğer taraftan

$$u_{n+\beta_n,r+1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!} e^{-(n+\beta_n)x} \left(\frac{k}{n+\beta_n} - x\right)^r \left(\frac{k}{n+\beta_n} - x\right)$$

$$= \frac{k}{n+\beta_n} u_{n+\beta_n,r}(x) - x u_{n+\beta_n,r}(x)$$

$$\Rightarrow (n+\beta_n) u_{n+\beta_n,r+1}(x) + (n+\beta_n) x u_{n+\beta_n,r}(x) = k u_{n+\beta_n,r}(x)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade düzenlenip yerine yazılırsa

$$x u'_{n+\beta_n,r}(x) + x u_{n+\beta_n,r-1}(x)$$

$$= (n+\beta_n) u_{n+\beta_n,r+1}(x) + (n+\beta_n) x u_{n+\beta_n,r}(x) - (n+\beta_n) x u_{n+\beta_n,r}(x)$$

$$(n+\beta_n) u_{n+\beta_n,r+1}(x) = x\left[u'_{n+\beta_n,r}(x) + r u_{n+\beta_n,r-1}(x)\right]$$

şeklinde istenilen (4.5) eşitliği elde edilir. Şimdi Lemma da verilen 1. ifadeyi gösterelim.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!} e^{-(n+\beta_n)x} = 1$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$u_{n+\beta_n,r}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!} e^{-(n+\beta_n)x} \left(\frac{k}{n+\beta_n} - x\right)^r = \left(\frac{k}{n+\beta_n} - x\right)^r$$

şeklinde yazılabilir ki buradan $u_{n+\beta_n,r}(x)$ ler derecesi $\leq r$ olan polinom şeklindeki bir fonksiyondur.

2. ifadeyi görmek için ise

$$\left[\frac{r+1}{2}\right] = \begin{cases} \frac{r+1}{2} & ; \quad r+1 \text{ tek ise} \\ \frac{r}{2} & ; \quad r+1 \text{ çift ise} \end{cases}$$

tanımını hatırlarsak

$$u_{n+\beta_n,r}(x) = \left(\frac{k}{n+\beta_n} - x\right)^r = \frac{(k-(n+\beta_n)x)^r}{(n+\beta_n)^r}$$

$$= \frac{1}{(n+\beta_n)^r} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-(n+\beta_n)x)^{r-j} k^j$$

ifadesinden ve binom açılımından görülür ki $u_{n+\beta_n,r}(x) = O\left(\frac{1}{n^{\left[\frac{r+1}{2}\right]}}\right) \quad ; \; n \longrightarrow \infty$ dir.

Lemma 4.3. Merkez momentler

$$T_{n,a,\beta_n,r}(x) = A_{n,a,\beta_n}((t-x)^r; x)$$

$$= (n+a-1) \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,\beta_n,k}(x) \int_0^{\infty} q_{n,a,k}(t)(t-x)^r dt \tag{4.6}$$

olarak tanımlanırsa, bu durumda

$$T_{n,a,\beta_n,0}(x) = 1$$

$$T_{n,a,\beta_n,1}(x) = \frac{(\beta_n - a + 2)x + 1}{(n+a-2)}$$

$$T_{n,a,\beta_n,2}(x) = \frac{[(n-a-3)+(\beta_n-a+3)^2]x^2+(2n+4\beta_n-2a+6)x+2}{(n+a-2)(n+a-3)}$$

eşitlikleri sağlanır. Ayrıca $n > 1$ için $T_{n,a,\beta_n,r}(x)$ ler aşağıdaki rekürans bağıntısını sağlar.

$$(n+a-r-2)T_{n,a,\beta_n,r+1}(x)$$

$$= xT'_{n,a,\beta_n,r}(x) + [(2r+a-\beta_n+2)x+r+1]T_{n,a,\beta_n}(x)$$

$$+(x^2+2x)rT_{n,a,\beta_n,r-1}(x) \tag{4.7}$$

Bu rekürans bağıntısının bir sonucu olarak, $n \to \infty$ ve tüm $x \in [0,\infty)$ için $T_{n,a,\beta_n,r}(x) = O\left(\frac{1}{n^{\left[\frac{r+1}{2}\right]}}\right)$ olduğu görülür.

İspat : İspat in A_{n,a,β_n} operatörünün lineer olduğundan faydalanılacaktır. Buna göre,

$r = 0$ için;

$$T_{n,a,\beta_n,0}(x)$$

$$= (n+a-1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!}e^{-(n+\beta_n)x}\frac{(n+a+k-1)!}{k!\,(n+a-1)!}\int_0^{\infty}\frac{t^k}{(1+t)^{n+a+k}}dt$$

$= 1$

olur.

$r = 1$ için;

$$T_{n,a,\beta_n,1}(x) = A_{n,a,\beta_n}\big((t-x);x\big) = A_{n,a,\beta_n}(t;x) - A_{n,a,\beta_n}(x;x)$$

$$= A_{n,a,\beta_n}(t;x) - xA_{n,a,\beta_n}(1;x)$$

$$= \frac{(n+\beta_n)x+1}{(n+a-2)} - x = \frac{(\beta_n-a+2)x+1}{(n+a-2)}$$

olur.

$r = 2$ için;

$$T_{n,a,\beta_n,2}(x) = A_{n,a,\beta_n}((t-x)^2; x) = A_{n,a,\beta_n}(t^2 - 2tx + x^2)\; ; x)$$

$$= A_{n,a,\beta_n}(t^2; x) - 2rA_{n,a,\beta_n}(t; x) + A_{n,a,\beta_n}(x^2; x)$$

$$= \frac{[(n+\beta_n)x]^2 + 4[(n+\beta_n)x] + 2}{(n+a-2)(n+a-3)} - 2x\left[\frac{(n+\beta_n)x + 1}{(n+a-2)}\right] + x^2$$

$$= \frac{[(n+\beta_n)x]^2 + 4[(n+\beta_n)x] + 2 - 2(n+\beta_n)(n+a-3)x^2 - 2x(n+a-3)}{(n+a-2)(n+a-3)}$$

$$+ \frac{(n+a-2)(n+a-3)x^2}{(n+a-2)(n+a-3)}$$

$$= \frac{[(n-a-3) + (\beta_n - a + 3)^2]x^2 + (2n + 4\beta_n - 2a + 6)x + 2}{(n+a-2)(n+a-3)}$$

olarak elde edilirler.

Şimdi Lemma da verilen rekürans bağıntısının ispatını vermek için ihtiyaç duyulan aşağıdaki eşitliklerin sağlandığı kolayca gösterilebilir.

$$t(1+t)q'_{n,a,k}(t) = [k - (n+a)t]q_{n,a,k}(t)$$

$$xp'_{n,\beta_n,k}(x) = [k - (n+\beta_n)x]p_{n,a,k}(x)$$

$$t = t - x + x = (t-x) + x$$

$$t^2 = (t-x)^2 + 2x[(t-x) + x] - x^2$$

$$t(1+t) = (t-x)^2 + (2x+1)(t-x) + x^2 + x$$

Ayrıca (4.6) ile tanımlanan $T_{n,a,\beta_n,r}(x)$ nin tanımı göz önüne alınırsa Leibniz kuralı kullanılarak türev alınırsa

$$T'_{n,a,\beta_n,r}(x) = (n+a-1)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(n+\beta_n)[(n+\beta_n)x]^{k-1}}{k!} e^{-(n+\beta_n)x} \frac{(n+a)_k}{k!}$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{t^k (t-x)^r}{(1+t)^{n+a+k}} dt$$

$$-(n+\beta_n)(n+a-1)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!} e^{-(n+\beta_n)x} \frac{(n+a)_k}{k!} \int_0^{\infty} \frac{t^k (t-x)^r}{(1+t)^{n+a+k}} dt$$

$$-r(n+a-1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!}e^{-(n+\beta_n)x}\frac{(n+a)_k}{k!}\int_0^{\infty}\frac{t^k(t-x)^{r-1}}{(1+t)^{n+a+k}}dt$$

$$=\frac{k}{x}T_{n,a,\beta_n,r}(x)-(n+\beta_n)T_{n,a,\beta_n,r}(x)-rT_{n,a,\beta_n,r-1}(x)$$

$$\Rightarrow xT'_{n,a,\beta_n,r}(x)=[k-(n+\beta_n)x]T_{n,a,\beta_n,r}(x)-rxT_{n,a,\beta_n,r-1}(x) \quad \ldots \ (*)$$

olur.

Diğer taraftan

$$xT'_{n,a,\beta_n,r}(x)+rxT_{n,a,\beta_n,r-1}(x)$$

$$=(n+a-1)\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,\beta_n,k}(x)\int_0^{\infty}[k-(n+a)t]q_{n,a,k}(t)(t-x)^r dt$$

$$=(n+a-1)\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,\beta_n,k}(x)\int_0^{\infty}[k-(n+\beta_n)x+(n+a)t-(n+a)t-ax$$
$$+ax]q_{n,a,k}(t)(t-x)^r dt$$

$$=(n+a-1)\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,\beta_n,k}(x)\int_0^{\infty}\{[k-(n+a)t]+(n+a)(t-x)$$
$$-(\beta_n-a)x\}q_{n,a,k}(t)(t-x)^r dt$$

$$=(n+a-1)\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,\beta_n,k}(x)\int_0^{\infty}t(1+t)q'_{n,a,k}(t)(t-x)^r+(n+a)T_{n,a,\beta_n,r+1}(x)$$
$$-(\beta_n-a)xT_{n,a,\beta_n,r}(x)$$

$$=(n+a-1)\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,\beta_n,k}(x)\int_0^{\infty}q'_{n,a,k}(t)(t-x)^{r+2}dt$$

$$+(n+a-1)(2x+1)\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,\beta_n,k}(x)\int_0^{\infty}q'_{n,a,k}(t)(t-x)^{r+1}dt$$

$$+(n+a-1)(3x^2+x)\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,\beta_n,k}(x)\int_0^{\infty}q'_{n,a,k}(t)(t-x)^r dt$$

$$+(n+a)T_{n,a,\beta_n,r+1}(x)-(\beta_n-a)xT_{n,a,\beta_n,r}(x)$$

olur. Şimdi integrallere kısmi integrasyon uygularsak

$$xT'_{n,a,\beta_n,r}(x)+rT_{n,a,\beta_n,r-1}(x)$$

$$=-(n+a-1)(r+2)\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,\beta_n,k}(x)\int_0^{\infty}q_{n,a,k}(t)(t-x)^{r+1}dt$$

$$-(n+a-1)(2x+1)(r+1)\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,\beta_n,k}(x)\int_0^{\infty}q_{n,a,k}(t)(t-x)^{r}dt$$

$$-(n+a-1)(x^2+x)r\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,\beta_n,k}(x)\int_0^{\infty}q_{n,a,k}(t)(t-x)^{r-1}dt$$

$$+(n+a)T_{n,a,\beta_n,r+1}(x)-(b-a)xT_{n,a,\beta_n,r}(x)$$

$$=(n+a-r-2)T_{n,a,\beta_n,r+1}(x)-(2xr+2x+r+1-\beta_n x+ax)T_{n,a,\beta_n,r}(x)$$
$$-(x^2+x)rT_{n,a,\beta_n,r-1}(x)$$

elde edilir. Buradan (*) ifadesi de göz önüne alınarak

$$(n+a-r-2)T_{n,a,\beta_n,r+1}(x)$$

$$=xT'_{n,a,\beta_n,r}(x)+[(2r+a-\beta_n+2)x+r+1]T_{n,a,\beta_n,r}(x)$$
$$+(x^2+2x)rT_{n,a,\beta_n,r-1}(x)$$

şeklinde (4.7) eşitliği elde edilir.

Bir önceki Lemma 4.2. deki benzer düşünce yardımıyla $n\to\infty$ ve tüm $x\in[0,\infty)$ için

$$T_{n,a,\beta_n,r}(x)=O\left(n^{-\left[\frac{r+1}{2}\right]}\right)$$

olduğunu gösterir.

Lemma 4.4. Tüm $r\in\mathbb{N}_0$ için, $A_{n,a,,\beta_n}(t^r;x)$ ifadesi x in r inci dereceden bir polinomudur. Üstelik

$$A_{n,a,,\beta_n}(t^r;x)=\frac{r!\,(n+a-r-2)!}{(n+a-2)!}\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}\frac{((n+\beta_n)x)^j}{j!}$$

şeklinde yazılabilir.

İspat : Bunun için önce $A_{n,a,\beta_n}(t^r;x)$ ifadesini hesaplayalım. Bunun için $(3.4),(3.9)$ ve $\Gamma(k+r+1)=\Gamma(r+1)(r+1)_k=r!\,(r+1)_k=(1)_k$ eşitliği kullanılarak operatör üzerinde gerekli işlemler yapılırsa

$$A_{n,a,\beta_n}(t^r;x)$$

$$=(n+a-1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!}e^{-(n+\beta_n)x}\frac{(n+a+k-1)!}{k!\,(n+a-1)!}\int_0^{\infty}\frac{t^{k+r}}{(1+t)^{n+a+k}}dt$$

$$=(n+a-1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!}\,e^{-(n+\beta_n)x}\frac{(n+a+k-1)!}{k!\,(n+a-1)!}$$
$$\times B(k+r+1,n+a-r-1)$$

$$=(n+a-1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!}e^{-(n+\beta_n)x}\frac{(n+a+k-1)!}{k!\,(n+a-1)!}$$
$$\times\frac{\Gamma(k+r+1)\Gamma(n+a-r-1)}{\Gamma(n+a+k)}$$

$$=(n+a-1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!}e^{-(n+\beta_n)x}\frac{(n+a+k-1)!}{k!\,(n+a-1)!}$$
$$\times\frac{r!\,(r+1)_k(n+a-r-2)!}{(n+a+k-1)!}$$

$$=(n+a-1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!}e^{-(n+\beta_n)x}\frac{r!\,(n+a-r-2)!}{(n+a-1)!}\frac{(r+1)_k}{k!}$$

$$=e^{-(n+\beta_n)x}\frac{r!\,(n+a-r-2)!}{(n+a-2)!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!}\frac{(r+1)_k}{k!}$$

$$=\frac{r!\,(n+a-r-2)!}{(n+a-2)!}e^{-(n+\beta_n)x}\;{}_1F_1(r+1;1;(n+\beta_n)x)$$

ifadesi yazılabilir.

$$ {}_1F_1(\alpha;\beta;x) = e^x \; {}_1F_1(r+1;1;(n+\beta_n)x) $$

Kummer Transformasyonu ve

$$ {}_1F_1(1;1;x) = e^x $$

eşitliği gereğince

$$ e^{-(n+\beta_n)x} \; {}_1F_1(r+1;1;(n+\beta_n)x) = \; {}_1F_1(-r;1;-(n+\beta_n)x) $$

olur.

Böylece

$$ A_{n,a,\beta_n}(t^r;x) = \frac{r!\,(n+a-r-2)!}{(n+a-2)!} \; {}_1F_1(-r;1;-(n+\beta_n)x) $$

şeklinde yazılabilir.

Ayrıca Konfluent hipergeometrik fonksiyon, Genelleştirilmiş Laguerre polinomları ile bağlantılı olduğundan,

$$ L_n^m(x) = \binom{m+n}{n} \; {}_1F_1(-n;m+1;x) = \frac{(m+n)!}{m!\,n!} \; {}_1F_1(-n;m+1;x) $$

bağıntısını sağlamaktadır ve

$$ L_r^0(x) = L_r(x) = \; {}_1F_1(-r;1;x) \Rightarrow L_r(-(n+\beta_n)x) = \; {}_1F_1 \; (-r;1;-(n+\beta_n)x) $$

eşitliği sağlandığından

$$ A_{n,a,\beta_n}(t^r;x) = \frac{r!\,(n+a-r-2)!}{(n+a-2)!} \; {}_1F_1(-r;1;-(n+\beta_n)x) $$

$$ = \frac{r!\,(n+a-r-2)!}{(n+a-2)!} L_r(-(n+\beta_n)x) $$

şeklinde yazılabilir. Laguerre polinomları

$$ L_r(x) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{r-j} \frac{x^j}{j!} = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} \frac{x^j}{j!} $$

eşitliği sağlandığından

$$A_{n,a,\beta_n}(t^r;x) = \frac{r!\,(n+a-r-2)!}{(n+a-2)!}\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}\frac{((n+\beta_n)x)^j}{j!}$$

şeklinde yazılabilir ki bu istenilendir.

Remark : $A_{n,a,\beta_n}(t^r;x)$ ifadesi x in r inci dereceden bir polinomudur.

Gerçekten de $A_{n,a,\beta_n}(t^r;x)$ ifadesi göz önüne alınarak

$$A_{n,a,\beta_n}(t^r;x) = \frac{r!\,(n+a-r-2)!}{(n+a-2)!}\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}\frac{((n+\beta_n)x)^j}{j!}$$

$$= \frac{r!\,(n+a-r-2)!}{(n+a-2)!}\left\{\binom{r}{r}\frac{((n+\beta_n)x)^r}{r!} + \binom{r}{r-1}\frac{((n+\beta_n)x)^{r-1}}{(r-1)!}\right.$$

$$\left. + \cdots + \binom{r}{1}\frac{\left((n+\beta_n)x\right)^1}{1!} + \binom{r}{0}\right\}$$

$$= \frac{(n+\beta_n)^r(n+a-r-2)!}{(n+a-2)!}x^r + \frac{r^2(n+\beta_n)^{r-1}(n+a-r-2)!}{(n+a-2)!}x^{r-1}$$

$$+ \frac{r(r-1)(n+\beta_n)^{r-2}(n+a-r-2)!}{(n+a-2)!}x^{r-2} + O(n^{-2})$$

ifadesi yazılabilir ki bu iddia edilendir.

Lemma 4.5. n, k dan bağımsız bir $\phi_{i,j,r}(x)$ polinomu vardır. Öyle ki

$$\phi_{i,j,r+1}(x) = -(j+1)x\phi_{i-1,j+1,r+1}(x) - r\phi_{i,j,r}(x) + x\phi'_{i,j,r}(x) - k\phi_{i-1,j,r}(x)$$

eşitliğini sağlayan bir fonksiyon olmak üzere

$$x^r\frac{d^r}{dx^r}\left[e^{-(n+\beta_n)x}[(n+\beta_n)x]^k\right]$$

$$= \sum_{\substack{2i+j\le r\\ i,j\ge 0}} (n+\beta_n)^i\,[k-(n+\beta_n)x]^j\phi_{i,j,r}(x)e^{-(n+\beta_n)x}[(n+\beta_n)x]^k$$

eşitliği sağlanır [21].

İspat : İspat için tümevarım metodunu kullanalım ;

$r = 1 \Rightarrow$

$$x \frac{d}{dx}\left[e^{-(n+\beta_n)x}[(n+\beta_n)x]^k\right]$$

$$= \ x\left[-(n+\beta_n) + \frac{k(n+\beta_n)}{(n+\beta_n)x}\right]\left[e^{-(n+\beta_n)x}[(n+\beta_n)x]^k\right]$$

$$= [k-(n+\beta_n)x]\left[e^{-(n+\beta_n)x}[(n+\beta_n)x]^k\right]$$

$$= \sum_{\substack{2i+j\leq 1 \\ 0,1\geq 0}} (n+\beta_n)^0\,[k-(n+\beta_n)x]^1 \phi_{0,1,1}(x) e^{-(n+\beta_n)x}[(n+\beta_n)x]^k$$

ifadesinde $\phi_{0,1,1}(x) = 1$ olur. Şimdi $r = r$ için

$$x^r \frac{d^r}{dx^r}\left[e^{-(n+\beta_n)x}[(n+\beta_n)x]^k\right]$$

$$= \sum_{\substack{2i+j\leq r \\ i,j\geq 0}} (n+\beta_n)^i\,[k-(n+\beta_n)x]^j \phi_{i,j,r}(x) e^{-(n+\beta_n)x}[(n+\beta_n)x]^k$$

ya da

$$\frac{d^r}{dx^r}\left[e^{-(n+\beta_n)x}[(n+\beta_n)x]^k\right]$$

$$= \frac{1}{x^r}\sum_{\substack{2i+j\leq r \\ i,j\geq 0}} (n+\beta_n)^i\,[k-(n+\beta_n)x]^j \phi_{i,j,r}(x) e^{-(n+\beta_n)x}[(n+\beta_n)x]^k$$

eşitliği doğru olsun. $r = r+1$ için doğruluğunu gösterelim.

$$\frac{d^{r+1}}{dx^{r+1}}\left[e^{-(n+\beta_n)x}[(n+\beta_n)x]^k\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{x^r}\sum_{\substack{2i+j\leq r \\ i,j\geq 0}} (n+\beta_n)^i\,[k-(n+\beta_n)x]^j \phi_{i,j,r}(x) e^{-(n+\beta_n)x}[(n+\beta_n)x]^k\right\}$$

$$= \sum_{\substack{2i+j\le r\\ i,j\ge 0}} (n+\beta_n)^i \left\{ \frac{-j(n+\beta_n)[k-(n+\beta_n)x]^{j-1}x^r - rx^{r-1}[k-(n+\beta_n)x]^j}{x^{2r}} \right.$$

$$\times e^{-(n+\beta_n)x}[(n+\beta_n)x]^k$$

$$+ \frac{[k-(n+\beta_n)x]^j}{x^r}\phi'_{i,j,r}(x)e^{-(n+\beta_n)x}[(n+\beta_n)x]^k$$

$$- \frac{[k-(n+\beta_n)x]^j}{x^r}(n+\beta_n)\phi_{i,j,r}(x)e^{-(n+\beta_n)x}[(n+\beta_n)x]^k$$

$$\left. + \frac{k}{x^{r+1}}[k-(n+\beta_n)x]^j\phi_{i,j,r}(x)e^{-(n+\beta_n)x}[(n+\beta_n)x]^k \right\}$$

$$= \sum_{\substack{2i+j\le r+1\\ i,j\ge 0}} (n+\beta_n)^i \frac{e^{-(n+\beta_n)x}[(n+\beta_n)x]^k}{x^{r+1}}$$

$$\times [k-(n+\beta_n)x]^j\{-(j+1)x\phi_{i-1,j+1,r+1}(x) - r\phi_{i,j,r}(x)$$

$$+ x\phi'_{i,j,r}(x) - k\phi_{i-1,j,r}(x)\}$$

$$= \frac{1}{x^{r+1}} \sum_{\substack{2i+j\le r+1\\ i,j\ge 0}} (n+\beta_n)^i [k-(n+\beta_n)x]^j \phi_{i,j,r+1}(x)e^{-(n+\beta_n)x}[(n+\beta_n)x]^k$$

ifadesinden

$$x^{r+1}\frac{d^{r+1}}{dx^{r+1}}\left[e^{-(n+\beta_n)x}[(n+\beta_n)x]^k\right]$$

$$= \sum_{\substack{2i+j\le r+1\\ i,j\ge 0}} (n+\beta_n)^i [k-(n+\beta_n)x]^j \phi_{i,j,r+1}(x)e^{-(n+\beta_n)x}[(n+\beta_n)x]^k$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\phi_{i,j,r+1}(x) = -(j+1)x\phi_{i-1,j+1,r+1}(x) - r\phi_{i,j,r}(x) + x\phi'_{i,j,r}(x) - k\phi_{i-1,j,r}(x)$$

eşitliğini sağlayan bir fonksiyon olup, $2i+j\le r$, $i,j\ge 0$ şartlarının sağlanmadığı durumlarda $\phi_{i,j,r}(x)=0$ dır. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 4.6. f , $[0,\infty)$ aralığında r kere türevlenebilen bir fonksiyon ve $\alpha>0$, $n>\alpha+r$ olmak üzere $r=1,2,\ldots$ ve $t\to\infty$ için $f^{(r-1)}=O(t^{\alpha})$ olsun. O takdirde

$$A_{n,a,\beta_n}^{(r)}(f;x)$$

$$= \frac{(n+\beta_n)^r (n-r+a-1)!}{(n+a-2)!} \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,\beta_n,k}(x) \int_0^{\infty} (-1)^r q_{n-r,a,k+r}\,(t) f^{(r)}(t)dt$$

olur.

İspat : Leibniz formülü gereğince çarpımın türevinden

$$A_{n,a,\beta_n}^{(r)}(f;x)$$

$$= (n+a-1)\sum_{i=0}^{r}\sum_{k=i}^{\infty}\binom{r}{i}\frac{(-1)^{r-i}(n+\beta_n)^r\left[(n+\beta_n)x\right]^{k-i}}{(k-i)!}e^{-(n+\beta_n)x}$$

$$\times\frac{(n+a+k-1)!}{k!\,(n+a-1)!}\int_0^{\infty}\frac{t^k}{(1+t)^{n+a+k}}f(t)\,dt$$

yazılabilir. İkinci toplamda k yerine $k+i$ alınıp toplamın yeri değiştirilirse

$$A_{n,a,\beta_n}^{(r)}(f;x)$$

$$= (n+a-1)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\frac{(-1)^{r-i}(n+\beta_n)^r\left[(n+\beta_n)x\right]^{k}}{k!}e^{-(n+\beta_n)x}$$

$$\times\frac{(n+a+k+i-1)!}{(k+i)!\,(n+a-1)!}\int_0^{\infty}\frac{t^{k+i}}{(1+t)^{n+a+k+i}}f(t)\,dt$$

$$= (n+a-1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!}e^{-(n+\beta_n)x}\int_0^{\infty}(-1)^r\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}(n+\beta_n)^r(-1)^i$$

$$\times\frac{(n+a+k+i-1)!}{(k+i)!\,(n+a-1)!}\int_0^{\infty}\frac{t^{k+i}}{(1+t)^{n+a+k+i}}f(t)\,dt$$

$$= (n+a-1)\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,\beta_n,k}(x)\int_0^{\infty}(-1)^r\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}(n+\beta_n)^r(-1)^i q_{n,a,k+i}\,(t)\,f(t)dt$$

şeklinde yazılabilir.

Ayrıca

$$q_{n-r,a,k+r}(t) = \frac{(n+a+k-1)!}{(k+r)!\,(n-r+a-1)!}t^{k+r}(1+t)^{-n-a-k}$$

olarak tanımlanırsa ve $r=1$ için türev alınırsa

$$q'_{n-1,a,k+1}(t) \; = \frac{(n+a+k-1)!}{(k+1)!\,(n+a-2)!}$$
$$\times\left[(k+1)t^{-1}-(n+a+k)(1+t)\right] t^{k+1}(1+t)^{-n-a-k}$$

$$=\frac{(n+a+k-1)!}{(k+1)!\,(n+a-2)!}\left[(k+1)\frac{t^k}{(1+t)^{n+a+k}}-(n+a+k)\frac{t^{k+1}}{(1+t)^{n+a+k+1}}\right]$$

$$=\frac{(n+a-1)!}{(n+a-2)!}\frac{(n+a+k-1)!}{k!\,(n+a-1)!}\frac{t^k}{(1+t)^{n+a+k}}$$

$$-\frac{(n+a-1)!}{(n+a-2)!}\frac{(n+a+k)!}{(k+1)!\,(n+a-1)!}\frac{t^{k+1}}{(1+t)^{n+a+k+1}}$$

$$=\frac{(n+a-1)!}{(n+a-2)!}\left[\frac{(n+a+k-1)!}{k!\,(n+a-1)!}\frac{t^k}{(1+t)^{n+a+k}}\right.$$
$$\left.-\frac{(n+a+k)!}{(k+1)!\,(n+a-1)!}\frac{t^{k+1}}{(1+t)^{n+a+k+1}}\right]$$

$$=\frac{(n+a-1)!}{(n+a-2)!}\left[q_{n,a,k}(t)-q_{n,a,k+1}(t)\right]$$

eşitliği elde edilir. Bu ifadenin Leibniz kuralı yardımı ile t ye göre r kere türevi alınırsa

$$q^{(r)}_{n-r,a,k+r}(t)=\frac{(n+a-1)!}{(n-r+a-1)!}\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}(-1)^i q_{n,a,k+i}(t)$$

eşitliğinin sağlandığı tümevarım yöntemi ile ispatlanabilir. Bu ifadede

$$\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}(-1)^i q_{n,a,k+i}(t)=\frac{(n-r+a-1)!}{(n+a-1)!}q^{(r)}_{n-r,a,k+r}(t)$$

şeklinde yazılabilir. Bu değer $A^{(r)}_{n,a,\beta_n}(f;x)$ de yerine yazılır ve temel işlemler yapılırsa

$$A^{(r)}_{n,a,\beta_n}(f;x)$$

$$=(n+a-1)\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,\beta_n,k}(x)\int_0^{\infty}(n+\beta_n)^r(-1)^r\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}(-1)^i q_{n,a,k+i}\;(t)\,f(t)dt$$

$$= (n+a-1)\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,\beta_n,k}(x)\int_0^{\infty}\left(n+\beta_n\right)^r(-1)^r\frac{(n-r+a-1)!}{(n+a-1)!}q_{n-r,a,k+r}^{(r)}(t)f(t)dt$$

$$= \frac{(n+\beta_n)^r(n-r+a-1)!}{(n+a-2)!}\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,\beta_n,k}(x)\int_0^{\infty}(-1)^r q_{n-r,a,k+r}^{(r)}(t)f(t)dt$$

eşitliği elde edilir. Bu son ifadeye $u = f(t) \Rightarrow du = f'(t)dt$, $dv = q_{n-r,a,k+r}^{(r)}(t) \Rightarrow v = B(n+k-1, n+a-r-1)$ ifadeleri kullanılarak r kere kısmi integrasyon uygulanırsa

$$A_{n,a,\beta_n}^{(r)}(f;x) = \frac{\left(n+\beta_n\right)^r(n-r+a-1)!}{(n+a-2)!}\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,\beta_n,k}(x)\int_0^{\infty}(-1)^r q_{n-r,a,k+r}^{(r)}(t)f^{(r)}(t)dt \tag{4.8}$$

şeklinde istenilen elde edilir.

Remark : (4.8) in basit bir sonucu olarak,

$$A_{n,a,\beta_n}^{(r)}(t^r;x) = \frac{\left(n+\beta_n\right)^r(n-r+a-1)!}{(n+a-2)!}\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,\beta_n,k}(x)\int_0^{\infty} q_{n-r,a,k+r}(t)r!\,dt$$

$$= \frac{r!\,(n+\beta_n)^r(n-r+a-1)!}{(n+a-2)!}\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,\beta_n,k}(x)\frac{(n+a+k-1)!}{(k+r)!\,(n-r+a-1)!}\int_0^{\infty}\frac{t^{k+r}}{(1+t)^{n+a+k}}dt$$

$$= \frac{r!\left(n+\beta_n\right)^r(n-r+a-1)!}{(n+a-2)!}\frac{(n+a+k-1)!}{(k+r)!\,(n-r+a-1)!}\frac{(k+r)!\,(n-r+a-2)!}{(n+a+k-1)!}$$

$$= \frac{r!\left(n+\beta_n\right)^r(n-r+a-2)!}{(n+a-2)!}$$

$$A_{n,a,\beta_n}^{(r)}(t^r;x) = \frac{r!\left(n+\beta_n\right)^r(n-r+a-2)!}{(n+a-2)!} \tag{4.9}$$

eşitliği yazılabilir.

Şimdi ileride vereceğimiz teoremin ispatında kullanacağımız bazı rekürans bağıntılarını verelim.

Lemma 4.7. Eğer $\lambda_r(n)$

$$\lambda_r(n) = \frac{\prod_{j=0}^{r}(n+\beta_n)^j(n+a-2-j)}{(n+a-2)!} = \frac{(n+\beta_n)^r(n+a-2-r)}{(n+a-2)!} \tag{4.10}$$

şeklinde tanımlanırsa aşağıdaki rekürans bağıntıları elde edilir.

i) $$[\lambda_{r+1}(n)-\lambda_r(n)]x + \frac{r+1}{n+\beta_n}\lambda_{r+1}(n) = \lambda_r(n)\left[\frac{(\beta_n-a+2+r)x+(r+1)}{n+a-2-r}\right] \tag{4.11}$$

ii) $$\lambda_r(n) - 2\lambda_{r+1}(n) + \lambda_{r+2}(n) = \lambda_r(n)\left[\frac{(r-a)^2+(r+\beta_n)^2-r^2+5(r-a)+6(1+\beta_n)-2a\beta_n+n}{(n+a-2-r)(n+a-3-r)}\right] \tag{4.12}$$

iii) $$\frac{r+2}{n+\beta_n}\lambda_{r+1}(n) - \frac{r+1}{n+\beta_n}\lambda_{r+2}(n) = \frac{r(a-\beta_n)-r^2-5r-6+2a+\beta_n+n}{(n+a-2-r)(n+a-3-r)}\lambda_r(n) \tag{4.13}$$

İspat:

i) Gerçekten de

$$\big(n+a-2-(r+1)\big)! = \frac{(n+a-2-r)!}{n+a-2-r}$$

eşitliği sağlandığından

$$\lambda_{r+1}(n) = \frac{\prod_{j=0}^{r+1}(n+\beta_n)^j(n+a-2-j)}{(n+a-2)!} = \frac{(n+\beta_n)^{r+1}\big(n+a-2-(r+1)\big)!}{(n+a-2)!}$$

$$= \frac{(n+\beta_n)^{r+1}}{(n+a-2)!}\left[\frac{(n+a-2-r)!}{n+a-2-r}\right] = \frac{n+\beta_n}{n+a-2-r}\lambda_r(n)$$

şeklinde yazılabilir.

Yine

$$\big(n+a-2-(r+2)\big)! = \frac{(n+a-2-(r+1))!}{n+a-2-(r+1)}$$

$$= \frac{(n+a-2-r)!}{(n+a-2-r)(n+a-2-(r+1))}$$

olduğundan

$$\lambda_{r+2}(n) = \frac{(n+\beta_n)^{r+2}\big(n+a-2-(r+2)\big)!}{(n+a-2)!}$$

$$= \frac{(n+\beta_n)^{r+2}}{(n+a-2)!}\left[\frac{(n+a-2-r)!}{(n+a-2-r)(n+a-2-(r+1))}\right]$$

$$= \frac{(n+\beta_n)^2}{(n+a-2-r)(n+a-2-(r+1))}\lambda_r(n)$$

olur. Buna göre,

$$[\lambda_{r+1}(n)-\lambda_r(n)]x + \frac{r+1}{n+\beta_n}\lambda_{r+1}(n)$$

$$= \frac{(n+\beta_n)^{r+1}}{(n+a-2)!}\left[\frac{(n+a-2-r)!}{n+a-2-r}\right] - \frac{(n+\beta_n)^r(n+a-2-r)!}{(n+a-2)!} + \frac{r+1}{n+\beta_n}$$

$$+ \frac{n+\beta_n}{n+a-2-r}\lambda_r(n)$$

$$= \frac{(n+\beta_n)^r(n+a-2-r)!}{(n+a-2)!}\left[\frac{n+\beta_n}{n+a-2-r} - 1 + \frac{r+1}{n+a-2-r}\right]$$

$$= \lambda_r(n)\left[\frac{(\beta_n - a + 2 + r)x + (r+1)}{n+a-2-r}\right]$$

olarak istenilen elde edilir.

ii) $\lambda_r(n)$ nin yukarıdaki tanımı kullanılarak

$$\lambda_r(n) - 2\lambda_{r+1}(n) + \lambda_{r+2}(n)$$

$$= \frac{(n+\beta_n)^r(n+a-2-r)!}{(n+a-2)!} - 2\frac{(n+\beta_n)^{r+1}}{(n+a-2)!}\left[\frac{(n+a-2-r)!}{n+a-2-r}\right]$$

$$+ \frac{(n+\beta_n)^{r+2}}{(n+a-2)!}\left[\frac{(n+a-2-r)!}{(n+a-2-r)\big(n+a-2-(r+1)\big)}\right]$$

$$= \frac{(n+\beta_n)^r(n+a-2-r)!}{(n+a-2)!}\left[1 - 2\frac{(n+\beta_n)}{n+a-2-r}\right.$$

$$\left. + \frac{(n+\beta_n)^2}{(n+a-2-r)(n+a-3-r)}\right]$$

$$= \lambda_r(n)\left[\frac{(r-a)^2 + (r+\beta_n)^2 - r^2 + 5(r-a) + 6(1+\beta_n) - 2a\beta_n + n}{(n+a-2-r)(n+a-3-r)}\right]$$

iii) Yine $\lambda_r(n)$ nin tanımı yardımıyla

$$\frac{r+2}{n+\beta_n}\lambda_{r+1}(n)-\frac{r+1}{n+\beta_n}\lambda_{r+2}(n)=\frac{r+2}{n+\beta_n}\frac{n+\beta_n}{n+a-2-r}\lambda_r(n)$$

$$-\frac{r+1}{n+\beta_n}\frac{(n+\beta_n)^2}{(n+a-2-r)\big(n+a-2-(r+1)\big)}\lambda_r(n)$$

$$=\frac{r(a-\beta_n)-r^2-5r-6+2a+\beta_n+n}{(n+a-2-r)(n+a-3-r)}\lambda_r(n)$$

şeklinde istenilen sonuçlar elde edilir.

Tezin bu kısmında yukarıda tanımlanan $A_{n,a,\beta_n}(t^r;x)$ operatörünün $A^{(r)}_{n,a,\beta_n}(t^r;x)$ türevlerinin yakınsaklık özellikleri incelemek için ihtiyaç duyulan bazı tanımları verelim.

Tanım 4.1. $[a,b]$ aralığında sürekli bir f fonksiyonunun m inci mertebeden süreklilik modülü

$$\omega_m(f\,:\,\delta:[a,b]\,)=sup\,\{|\Delta_h^m f(x)|:|h|<\delta;x\;\;x+h\in[a,b]\} \tag{4.14}$$

şeklinde tanımlanır[19].

Tanım 4.2.: $C_\gamma[0,\infty)=\{\,f\in[0,\infty);\;|f(t)|\leq Mt^\gamma\,,\gamma>0\,\}$

olsun. $C_\gamma[0,\infty)$ kümesi üzerindeki norm $(\|.\|)$;

$$\|f\|_\gamma=sup|f(t)|t^{-\gamma} \tag{4.15}$$

şeklinde tanımlanır. Üstelik yeteri kadar küçük $\eta>0\,,0<a<a_1<b_1<b<\infty$ için $t\in[a,b]$ ve $f\,\in\,C_\gamma[a,b]$ ye karşılık gelen 2. mertebeden $f_{\eta,2}$ Steklov ortalaması

$$f_{\eta,2}(t)=\eta^{-2}\int_{\frac{-\eta}{2}}^{\frac{\eta}{2}}\int_{\frac{-\eta}{2}}^{\frac{\eta}{2}}[f(t)-\Delta_h^2 f(t)]dt_1dt_2 \tag{4.16}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $h=\frac{t_1+t_2}{2}$ ve Δ_h^2 ; h birimlik ikinci dereceden ileri fark operatörüdür.

$f\;\in\;C_\gamma[a,b]$ için $f_{\eta,2}$ Steklov ortalaması aşağıdaki özellikleri sağlar.

1. $f_{\eta,2}$, $[a_1,b_1]$ aralığı üzerinde 2. mertebeden sürekli türevlere sahiptir.

2. $\|f_{\eta,2}\|_{C[a_1,b_1]} \leq \kappa\omega_r\ (f\ ;\ \eta : [a,b])$ dir.

3. $\|f - f_{\eta,2}\|_{C[a_1,b_1]} \leq \kappa\omega_2\ (f\ ;\ \eta : [a,b])$ dir.

4. $\|f_{\eta,2}\|_{C[a_1,b_1]} \leq \kappa\eta^{-2}\ \|f\|_{C[a,b]}$ dir.

5. $\|f_{\eta,2}\|_{C[a_1,b_1]} \leq \kappa\eta^{-2}\ \|f\|_{\gamma}$ dir.

Burada κ; f ve η den bağımsız olup, her şık için farklı değer alabilir[5].

4.1. Yakınsaklık Teoremleri

Bu kısımda $A^{(r)}_{n,a,\beta_n}(t^r;x)$ operatörlerinin yakınsaklığı ile ilgili teorem, Asimtotik açılım ve hata tahmini ile ilgili teoremler verilecektir.

Teorem 4.1.1. (Noktasal yakınsaklık) : $a, b \in \mathbb{N}_0$, $x \in [0,\infty)$ olsun. Eğer $\gamma > 0$, $r \in \mathbb{N}_0$, $f \in C_\gamma[0,\infty)$ ve , $x \in (0,\infty)$ için $f^{(r)}$ mevcut ise, o taktirde

$$\lim_{n\to\infty}\left|A^{(r)}_{n,a,\beta_n}(f;x)\right| = f^{(r)}(x)$$

dir.

İspat : İspat için f nin Taylor açılımından faydalanılacaktır. f nin Taylor açılımın

$$f(t) = \sum_{i=0}^{r}\frac{f^{(i)}(x)}{i!}(t-x)^i + \varepsilon(t,x)(t-x)^r$$

olduğu bilinmektedir. Ayrıca burada $t \longrightarrow x$ için $\varepsilon(t,x) \longrightarrow 0$ dır. Bu ifadeye

$A_{n,a,\beta_n}(f;.)$ operatörü uygulanırsa

$$A_{n,a,\beta_n}(f;w) = \sum_{i=0}^{r}\frac{f^{(i)}(x)}{i!}\left[A_{n,a,\beta_n}((t-x)^i;w)\right] + A_{n,a,\beta_n}(\varepsilon(t,x)(t-x)^r;w$$

olur. Bu ifadenin w ya göre r kere türevi alındıktan sonra w yerine x yazılırsa

$$\frac{d^r}{dw^r}\left[A_{n,a,\beta_n}(f;w)\right]_{w=x}$$

$$= \sum_{i=0}^{r}\frac{f^{(i)}(x)}{i!}\left[A^{(r)}_{n,a,\beta_n}\left((t-x)^i;x\right)\right]_{w=x} + A^{(r)}_{n,a,\beta_n}[\varepsilon(t,x)(t-x)^r;x]_{w=x}$$

$= \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2$

olur.

Şimdi I_1 ve I_2 hesaplayalım.

Bunun için önce

$$(t-x)^i = (t+(-x))^i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-x)^{i-j} t^j$$

ve

$$A_{n,a,\beta_n}^{(r)}(t^r;x) = \frac{r!\,(n+\beta_n)^r (n-r+a-2)!}{(n+a-2)!}$$

ifadelerini yerine yazalım ve gerekli düzenlemeleri yapalım.

$$I_1 = \sum_{i=0}^{r} \frac{f^{(i)}(x)}{i!} \left[A_{n,a,\beta_n}^{(r)}\left((t-x)^i;x\right)\right]_{w=x}$$

$$= \sum_{i=0}^{r} \frac{f^{(i)}(x)}{i!} \left\{A_{n,a,\beta_n}^{(r)}\left(\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-x)^{i-j} t^j; w\right) \uparrow_{w=x}\right\}$$

$$= \sum_{i=0}^{r} \frac{f^{(i)}(x)}{i!} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-x)^{i-j}\, A_{n,a,\beta_n}^{(r)}(t^i;w) \uparrow_{w=x}$$

$$= \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(x)}{i!} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-x)^{i-j}\, A_{n,a,\beta_n}^{(r)}(t^i;w) \uparrow_{w=x}$$

$$+ \frac{f^{(r)}(x)}{r!} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-x)^{r-j} A_{n,a,\beta_n}^{(r)}\left(t^j;w\right) \uparrow_{w=x}$$

$$= \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(x)}{i!} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-x)^{i-j}\; \frac{i!\,(n+\beta_n)^i (n-i+a-2)!}{(n+a-2)!}$$

$$+ \frac{f^{(r)}(x)}{r!} \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r}{j} (-x)^{r-j} A_{n,a,\beta_n}^{(r)}\left(t^j;w\right) \uparrow_{w=x} + \frac{f^{(r)}(x)}{r!} A_{n,a,\beta_n}^{(r)}(t^r;w) \uparrow_{w=x}$$

$= I_3 + I_4 + I_5$

şeklinde yazılabilir.

Bu son ifadede $I_3 = O\left(\frac{1}{n}\right), I_4 = O\left(\frac{1}{n}\right)\ olup\ I_5 = \frac{f^{(r)}(x)}{r!} A_{n,a,\beta_n}^{(r)}(t^r;x)$ olacağından

$$I_1 = \frac{f^{(r)}(x)}{r!} A_{n,a,\beta_n}^{(r)}(t^r;x) = \frac{r!\,(n+\beta_n)^r (n-r+a-2)!}{(n+a-2)!} \frac{f^{(r)}(x)}{r!}$$

$$= \frac{(n+\beta_n)^r (n-r+a-2)!}{(n+a-2)!} f^{(r)}(x)$$

olarak elde edilir. Bu ifade de $n \to \infty\ için\ \ f^{(r)}(x)$ değerine yaklaşır.

Şimdi Lemma 4.6. yı kullanarak I_2 için bir üst sınır belirleyelim. I_2 değerini açık yazarsak ve Lemma 4.6. yı kullanırsak

$$I_2 = A_{n,a,\beta_n}^{(r)}[\varepsilon(t,x)(t-x)^r;x] \uparrow_{w=x}$$

$$= \frac{d^r}{dx^r} \left\{ \begin{array}{l} (n+a-1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!} e^{-(n+\beta_n)x} \frac{(n+a+k-1)!}{k!\,(n+a-1)!} \\ \qquad \times \int_0^{\infty} \varepsilon(t,x) \frac{t^k (t-x)^r}{(1+t)^{n+a+k}} dt \end{array} \right\}$$

$$= (n+a-1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^r}{dx^r} \left[\frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!} e^{-(n+\beta_n)x} \frac{(n+a+k-1)!}{k!\,(n+a-1)!} \right.$$
$$\left. \times \int_0^{\infty} \varepsilon(t,x) \frac{t^k (t-x)^r}{(1+t)^{n+a+k}} dt \right]$$

$$= (n+a-1) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{2i+j \le r \\ i,j \ge 0}} \frac{(n+\beta_n)^i}{x^r} \phi_{i,j,r}(x) [k-(n+\beta_n)x]^j \frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!}$$
$$\times e^{-(n+\beta_n)x} \frac{(n+a+k-1)!}{k!\,(n+a-1)!} \int_0^{\infty} \varepsilon(t,x) \frac{t^k (t-x)^r}{(1+t)^{n+a+k}} dt$$

$$= (n+a-1) \sum_{\substack{2i+j \le r \\ i,j \ge 0}} \frac{(n+\beta_n)^i}{x^r} \phi_{i,j,r}(x) \sum_{k=0}^{\infty} [k-(n+\beta_n)x]^j \frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!}$$
$$\times e^{-(n+\beta_n)x} \frac{(n+a+k-1)!}{k!\,(n+a-1)!} \int_0^{\infty} \varepsilon(t,x) \frac{t^k (t-x)^r}{(1+t)^{n+a+k}} dt$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi her iki tarafın mutlak değeri alınır ve düzenlenirse

$$|I_2| = \left|(n+a-1)\sum_{\substack{2i+j\leq r\\ i,j\geq 0}}\frac{(n+\beta_n)^i}{x^r}\phi_{i,j,r}(x)\frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!}e^{-(n+\beta_n)x}\right.$$

$$\left.\times\sum_{k=0}^{\infty}[k-(n+\beta_n)x]^j\frac{(n+a+k-1)!}{k!\,(n+a-1)!}\int_0^{\infty}\varepsilon(t,x)\frac{t^k(t-x)^r}{(1+t)^{n+a+k}}dt\right|$$

$$\leq (n+a-1)\sum_{\substack{2i+j\leq r\\ i,j\geq 0}}\frac{(n+\beta_n)^i}{x^r}|\phi_{i,j,r}(x)|\sum_{k=0}^{\infty}\left|[k-(n+\beta_n)x]^j\right|$$

$$\times\frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!}e^{-(n+\beta_n)x}\frac{(n+a+k-1)!}{k!\,(n+a-1)!}\int_0^{\infty}|\varepsilon(t,x)|\frac{t^k|t-x|^r}{(1+t)^{n+a+k}}dt$$

şeklinde yazılabilir. Biliyoruz ki verilen $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Öyle ki $t \longrightarrow x$ için $\varepsilon(t,x) \longrightarrow 0$ olur. Üstelik değer $\lambda \geq max\{\gamma, r\}$ olan bir tamsayı ise $|t-x| < \delta$ olduğu her zaman $|\varepsilon(t,x)|$ sayısı vardır, o taktirde $K > 0$ sayısı bulunabilir. Öyle ki , $|\varepsilon(t,x)||t-x|^r \leq K|t-x|^\gamma$ olarak yazılabilir. Böylece

$$C_1 = \sup_{\substack{2i+j\leq r\\ i,j\geq 0}}\frac{|\phi_{i,j,r}(x)|}{x^r} > 0$$

olmak üzere

$$|I_2| \leq (n+a-1)C_1\sum_{\substack{2i+j\leq r\\ i,j\geq 0}}(n+\beta_n)^i\sum_{k=0}^{\infty}\left|[k-(n+\beta_n)x]^j\right|\frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!}$$

$$\times e^{-(n+\beta_n)x}\times\left\{\frac{(n+a+k-1)!}{k!\,(n+a-1)!}\int_{|t-x|<\delta}|\varepsilon(t,x)|\frac{t^k|t-x|^r}{(1+t)^{n+a+k}}dt\right.$$

$$\left.+\frac{(n+a+k-1)!}{k!\,(n+a-1)!}\int_{|t-x|\geq\delta}K\frac{t^k|t-x|^r}{(1+t)^{n+a+k}}dt\right\}$$

$$= \; I_6 + I_7$$

şeklinde yazılabilir. Burada K, C_1 den bağımsız bir sabittir. I_6 yı hesaplamak için önce integral ve sonra toplam için Schwarz eşitsizliği kullanılırsa

$$I_6 \leq (n+a-1)\varepsilon C_1 \sum_{\substack{2i+j\leq r \\ i,j\geq 0}} (n+\beta_n)^i \sum_{k=0}^{\infty} \left|[k-(n+\beta_n)x]^j\right| \frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!} e^{-(n+\beta_n)x}$$

$$\times \left[\frac{(n+a+k-1)!}{k!\,(n+a-1)!} \int_0^{\infty} \frac{t^k}{(1+t)^{n+a+k}} dt\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{(n+a+k-1)!}{k!\,(n+a-1)!} \int_0^{\infty} \frac{(t-x)^{2r}}{(1+t)^{n+a+k}} dt\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \varepsilon C_1 \sum_{\substack{2i+j\leq r \\ i,j\geq 0}} (n+\beta_n)^i \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left|[k-(n+\beta_n)x]^{2j}\right| \frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!} e^{-(n+\beta_n)x}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \left[(n+a-1) \sum_{k=0}^{\infty} [k-(n+\beta_n)x]^{2j} \frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!} e^{-(n+\beta_n)x}\right.$$

$$\left. \times \frac{(n+a+k-1)!}{k!\,(n+a-1)!} \int_0^{\infty} \frac{(t-x)^{2r}}{(1+t)^{n+a+k}} dt\right]^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca

$$\int_0^{\infty} q_{n,a,k}(t) dt = \frac{(n+a+k-1)!}{k!\,(n+a-1)!} \int_0^{\infty} \frac{t^k}{(1+t)^{n+a+k}} dt$$

$$= \frac{(n+a+k-1)!}{k!\,(n+a-1)!} B(k+1, n+a-1)$$

$$= \frac{(n+a+k-1)!}{k!\,(n+a-1)!} \frac{k!\,(n+a-2)!}{(n+a+k-1)!} = \frac{1}{n+a-1}$$

ve Lemma 4.2. yi kullanırsak

$$\sum_{k=0}^{\infty} [k-(n+\beta_n)x]^{2j} \frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!} e^{-(n+\beta_n)x}$$

$$= \; (n+\beta_n)^{2j} \sum_{k=0}^{\infty} \left|\left[\frac{k}{(n+\beta_n)} - x\right]^{2j}\right| \frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!} e^{-(n+\beta_n)x}$$

$$= (n+\beta_n)^{2j}\left[O\left((n+\beta_n)^{-j}\right)\right] = O\left((n+\beta_n)^{j}\right)$$

olup,

Lemma 4.2. den dolayı

$$\left[(n+a-1)\sum_{k=0}^{\infty}[k-(n+\beta_n)x]^{2j}\frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!}e^{-(n+\beta_n)x}\frac{(n+a+k-1)!}{k!\,(n+a-1)!}\right.$$

$$\left.\times\int_0^{\infty}\frac{t^k(t-x)^{2r}}{(1+t)^{n+a+k}}dt\right]^{\frac{1}{2}} = O((n+\beta_n)^{-r})$$

olduğundan, bu ifadeler kullanılırsa

$$I_6 \le \varepsilon C_1 \sum_{\substack{2i+j\le r\\ i,j\ge 0}}(n+\beta_n)^i O\left((n+\beta_n)^{\frac{j}{2}}\right) O\left(\left((n+\beta_n)^{\frac{-r}{2}}\right)\right) = \varepsilon O(1)$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde yine Cauchy-Schwarz eşitsizliğini ve Lemma 4.2. yi kullanarak

$$I_7 = (n+a-1)C_1\sum_{\substack{2i+j\le r\\ i,j\ge 0}}(n+\beta_n)^i\sum_{k=0}^{\infty}\left|[k-(n+\beta_n)x]^{2j}\right|\frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!}e^{-(n+\beta_n)x}$$

$$\times\frac{(n+a+k-1)!}{k!\,(n+k-1)!}\int_{|t-x|\ge\delta}K\frac{t^k|t-x|^r}{(1+t)^{n+a+k}}dt$$

$$\le (n+a-1)C_2\sum_{\substack{2i+j\le r\\ i,j\ge 0}}(n+\beta_n)^i\sum_{k=0}^{\infty}\left|[k-(n+\beta_n)x]^{2j}\right|\frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!}e^{-(n+\beta_n)x}$$

$$\times\left[\frac{(n+a+k-1)!}{k!\,(n+a-1)!}\int_{|t-x|\ge\delta}\frac{t^k}{(1+t)^{n+a+k}}dt\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{(n+a+k-1)!}{k!\,(n+a-1)!}\int_{|t-x|\ge\delta}\frac{(t-x)^{2r}}{(1+t)^{n+a+k}}dt\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\le C_2\sum_{\substack{2i+j\le r\\ i,j\ge 0}}(n+\beta_n)^i\left[\sum_{k=0}^{\infty}[k-(n+\beta_n)x]^{2j}\frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!}e^{-(n+\beta_n)x}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(n+\beta_n)x]^k}{k!} e^{-(n+\beta_n)x} \frac{(n+a+k-1)!}{k!\,(n+a-1)!} \int_{|t-x|\geq\delta} \frac{t^k (t-x)^{2r}}{(1+t)^{n+a+k}} dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sum_{\substack{2i+j\leq r \\ i,j\geq 0}} (n+\beta_n)^i O\left((n+\beta_n)^{\frac{j}{2}}\right) O\left(\left((n+\beta_n)^{\frac{-r}{2}}\right)\right) = O(1)$$

olarak bulunur. Böylece I_1 ve I_2 için elde edilen sonuçlar kullanıldığında teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.1.2. (Asimtotik Açılım) : $f \in C_\gamma[0,\infty)$ fonksiyonu $(0,\infty)$ aralığında

$(r+2)$ basamaktan türevlenebilir , $[0,\infty)$ aralığının her bir alt aralığında sonlu ve sınırlı , ayrıca $f(t) = O\,(t^\gamma)$; $(\gamma > 0)$ olsun. O takdirde

$$\lim_{n\to\infty}(n)\left[A_{n,a\beta_n}^{(r)}(f;w)\uparrow_{w=x} - f^{(r)}(x)\right]$$

$$= [(\beta_n - a + 2 + r)x + (r+1)]f^{(r+1)}(x) + \left(x + \frac{x^2}{2}\right) f^{(r+2)}(x)$$

eşitliği sağlanır.

İspat : f in Taylor açılımı gereğince

$$f(t) = \sum_{i=0}^{r+2} \frac{f^{(i)}(x)}{i!} (t-x)^i + \varepsilon(t,x)(t-x)^{r+2}$$

şeklinde yazılabilir. f in Taylor açılımına $A_{n,a,\beta_n}^{(r)}$ operatörü uygulanırsa

$$A_{n,a,\beta_n}^{(r)}(f;w)\uparrow_{w=x}$$

$$= \sum_{i=0}^{r+2} \frac{f^{(i)}(x)}{i!} \left[A_{n,a,\beta_n}^{(r)}\left((t-x)^i; w\right)\uparrow_{w=x}\right] + A_{n,a,\beta_n}^{(r)}[\varepsilon(t,x)(t-x)^{r+2}, w]\ \uparrow_{w=x}$$

elde edilir. Bu ifade de

$$A_{n,a,\beta_n}^{(r)}(f;w)\uparrow_{w=x}$$

$$= \left\{\sum_{i=0}^{r+2} \frac{f^{(i)}(x)}{i!} \left[A_{n,a,\beta_n}^{(r)}\left((t-x)^i; x\right)\right]\right\} + A_{n,a,\beta_n}^{(r)}[\varepsilon(t,x)(t-x)^{r+2}; x]$$

$$= I_1 + I_2$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi I_1 ifadesini hesaplayalım.

Bunun için Lemma 4.7. kullanılarak,

$$I_1 = \left\{ \sum_{i=0}^{r+2} \frac{f^{(i)}(x)}{i!} \left[A_{n,a,\beta_n}^{(r)}\left((t-x)^i; x\right) \right] \right\}$$

$$= \sum_{i=0}^{r+2} \frac{f^{(i)}(x)}{i!} \left\{ A_{n,a,\beta_n}^{(r)} \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-x)^{i-j}\, t^i; x \right) \right\}$$

$$= \sum_{i=0}^{r+2} \frac{f^{(i)}(x)}{i!} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-x)^{i-j} A_{n,a,\beta_n}^{(r)}(t^i; x)$$

$$= \left\{ \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(x)}{i!} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-x)^{i-j} \left[A_{n,a,\beta_n}^{(r)}(t^r; x) \right] \right.$$

$$+ \sum_{i=0}^{r} \frac{f^{(i)}(x)}{i!} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-x)^{i-j} \left[A_{n,a,\beta_n}^{(r)}(t^r; x) \right]$$

$$+ \frac{f^{(r+1)}(x)}{(r+1)!} \sum_{j=0}^{r+1} \binom{r+1}{j} (-x)^{r+1-j} \left[A_{n,a,\beta_n}^{(r)}(t^r; x) \right]$$

$$\left. + \frac{f^{(r+2)}(x)}{(r+2)!} \sum_{j=0}^{r+2} \binom{r+2}{j} (-x)^{r+2-j} \left[A_{n,a,\beta_n}^{(r)}(t^r; x) \right] \right\}$$

$$= \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(x)}{i!} O\left(\frac{1}{n}\right) + \left\{ \frac{f^{(r)}(x)}{r!} A_{n,a,\beta_n}^{(r)}(t^r; x) + \frac{f^{(r+1)}(x)}{(r+1)!} \right.$$

$$\times \left[(r+1)(-x) A_{n,a,\beta_n}^{(r)}(t^r; x) + A_{n,a,\beta_n}^{(r)}(t^{r+1}; x) \right] + \frac{f^{(r+2)}(x)}{(r+2)!} \left[\frac{(r+2)(r+1)}{2} \right.$$

$$\left. \left. \times\, x^2 A_{n,a,\beta_n}^{(r)}(t^r; x) + (r+2)(-x) A_{n,a,\beta_n}^{(r)}(t^{r+1}; x) + A_{n,a,\beta_n}^{(r)}(t^{r+2}; x) \right] \right\}$$

$$= \frac{f^{(r)}(x)}{r!} \frac{(n+\beta_n)^r (n+a-r-2)!}{(n+a-2)!} \mathrm{r}! + \mathrm{O}((n)^{-1})$$

$$+\frac{f^{(r+1)}(x)}{(r+1)!}\Bigg\{(r+1)(-x)\frac{(n+\beta_n)^r(n+a-r-3)!}{(n+a-2)!}\mathrm{r}!$$

$$+\frac{(n+\beta_n)^{r+1}(n+a-r-3)!}{(n+a-2)!}(\mathrm{r}+1)!\,x+(r+1)^2\frac{(n+\beta_n)^r(n+a-r-3)!}{(n+a-2)!}\mathrm{r}!$$

$$+\mathrm{O}((n)^{-1})\}+\frac{f^{(r+2)}(x)}{(r+2)!}\Bigg\{\frac{(r+2)(r+1)}{2}x^2\frac{(n+\beta_n)^r(n+a-r-2)!}{(n+a-2)!}\mathrm{r}!$$

$$+(\mathrm{r}+2)(-x)\Bigg[\frac{(n+\beta_n)^{r+1}(n+a-r-3)!}{(n+a-2)!}(\mathrm{r}+1)!\,x$$

$$+(r+1)^2\frac{(n+\beta_n)^r(n+a-r-3)!}{(n+a-2)!}\mathrm{r}!\Bigg]$$

$$+(r+2)^2\frac{(n+\beta_n)^{r+1}(n+a-r-4)!}{(n+a-2)!}(\mathrm{r}+1)!\,x$$

$$+(\mathrm{r}+2)(\mathrm{r}+1)\frac{(n+\beta_n)^r(n+a-r-4)!}{(n+a-2)!}\mathrm{r}!+\mathrm{O}((n)^{-1})\Bigg\}$$

elde edilir.

Burada (4.10), (4.11), (4.12) ve (4.13) kullanılırsa

$$I_1=\frac{f^{(r)}}{r!}\left[\lambda_r(n)r!+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]+\frac{f^{(r+1)}}{(r+1)!}[(r+1)(-x)\lambda_r(n)r!+\lambda_{r+1}(n)(r+1)!\,x$$

$$+\frac{r+1}{n+\beta_n}\lambda_{r+1}(n)(r+1)+O\left(\frac{1}{n}\right)]$$

$$+\frac{f^{(r+2)}}{(r+2)!}\Bigg[(r+2)!\frac{x^2}{2}\lambda_r(n)-(r+2)!\,x^2\lambda_{r+1}(n)$$

$$+\left(\frac{r+2}{n+\beta_n}\lambda_{r+1}(n)-\frac{r+1}{n+\beta_n}\lambda_{r+2}(n)\right)x+\frac{1}{(n+\beta_n)^2}\lambda_{r+2}(n)+O\left(\frac{1}{n}\right)\Bigg]$$

$$=f^{(r)}(x)[\lambda_r(n)]+\left\{f^{(r+1)}(x)\left[(\lambda_{r+1}(n)-\lambda_r(n))x+\frac{r+1}{n+\beta_n}\lambda_{r+1}(n)\right]\right\}$$

$$+f^{(r+2)}(x)\Bigg\{[\lambda_r(n)-2\lambda_{r+1}(n)+\lambda_{r+2}(n)]\frac{x^2}{2}$$

$$+\left[\frac{r+2}{n+\beta_n}\lambda_{r+1}(n)-\frac{r+1}{n+\beta_n}\lambda_{r+2}(n)\right]x+\frac{1}{(n+\beta_n)^2}\lambda_{r+2}(n)\Bigg\}+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$=f^{(r)}(x)\lambda_r(n)+f^{(r+1)}\left\{\lambda_r(n)\left[\frac{(\beta_n-a+2+r)x+(r+1)}{n+a-2-r}\right]\right\}$$

$$+f^{(r+2)}(x)\left\{\lambda_r(n)\left[\frac{(r-a)^2+(r+\beta_n)^2-r^2+5(r-a)+6(1+\beta_n)-2a\beta_n+n}{(n+a-2-r)(n+a-3-r)}\right]\frac{x^2}{2}\right.$$

$$+\lambda_r(n)\left[\frac{r(a-\beta_n)-r^2-5r-6+2a+\beta_n+n}{(n+a-2-r)(n+a-3-r)}\right]x$$

$$\left.+\frac{1}{(n+a-2-r)(n+a-2-(r+1))}\lambda_r(n)\right\}+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

olarak bulunur. Bu durumda $n\longrightarrow\infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}(n)\left[A_{n,a,\beta_n}^{(r)}(f;w)\uparrow_{w=x}-f^{(r)}(x)\right]$$

$$=\ [(\beta_n-a+2+r)x+(r+1)]f^{(r+1)}(x)+\left(x+\frac{x^2}{2}\right)f^{(r+2)}(x)$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.1.3. (Hata tahmini) : $\gamma>0$ ve $0<a<a_1<b_1<b<\infty$ için $f\in C_\gamma[0,\infty), f^{(r)}\in\ C_\gamma[0,\infty)$ olsun. Bu durumda yeteri kadar büyük n ler için

$$\left\|A_{n,a,\beta_n}^{(r)}(f;.)-f^{(r)}\right\|_{C_{[a_1,b_1]}}\leq C_1\omega_2\left(f^{(r)},n^{-\frac{1}{2}},[a,b]\right)+C_2n^{-1}\|f\|_\gamma$$

eşitsizliği sağlanır.

Burada

$$C_1=C_1(r)\qquad ve\qquad C_2=C_2(r,f)$$

dir.

İspat : Bir $f(t)$ fonksiyonu uygun cebirsel işlemlerle (4.16) ifadesi de dikkate alınarak

$$f(t)=f^{(r)}(x)+f(t)-f_{\eta,2}(t)+f_{\eta,2}(t)-f_{\eta,2}^{(r)}(x)+f_{\eta,2}^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)$$

$$f(t)-f^{(r)}(x)=f(t)-f_{\eta,2}(t)+f_{\eta,2}(t)-f_{\eta,2}^{(r)}(x)+f_{\eta,2}^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğin her tarafına $A_{n,a,\beta_n}^{(r)}$ operatörü uygulanırsa ve operatörün lineerliği kullanılırsa

$$A^{(r)}_{n,a,\beta_n}(f;.) - f^{(r)}(x)A^{(r)}_{n,a,\beta_n}(1;.)$$

$$= A^{(r)}_{n,a,\beta_n}\left(f - f_{\eta,2};.\right) + A^{(r)}_{n,a,\beta_n}\left(f_{\eta,2};.\right) - f^{(r)}_{\eta,2}(x)A^{(r)}_{n,a,\beta_n}(1;.) + f^{(r)}_{\eta,2}(x)$$

$$-f^{(r)}(x)A^{(r)}_{n,a,\beta_n}(1;.)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafının $C[a_1,b_1]$ üzerinde önce mutlak değeri sonra supremumu alınırsa

$$\left\|A^{(r)}_{n,a,\beta_n}(f;.) - f^{(r)}\right\|_{C[a_1,b_1]} \le \left\|A^{(r)}_{n,a,\beta_n}\left(f - f_{\eta,2};.\right)\right\|_{C[a_1,b_1]}$$

$$+\left\|A^{(r)}_{n,a,\beta_n}\left(f_{\eta,2};.\right) - f^{(r)}_{\eta,2}\right\|_{C[a_1,b_1]} + \left\|f^{(r)} - f^{(r)}_{\eta,2}\right\|_{C[a_1,b_1]}$$

$$= H_1 + H_2 + H_3$$

şeklinde yazılabilir.

3. özellik gereğince

$$H_3 \le \kappa\omega_2(f : \eta : [a,b])$$

yazılabilir.

H_2 yi hesaplamak için bir önceki teorem kullanılırsa

$$H_2 \le K_1\eta^{-1}\sum_{j=r}^{r+2}\left\|f^{(j)}_{\eta,2}\right\|_{C[a,b]}$$

yazılabilir. [16] Buradan Goldberg ve Meir in yaptığı şekilde interpolasyon yardımıyla

$$H_2 \le K_1\eta^{-1}\left\{\left\|f_{\eta,2}\right\|_{C[a,b]} + \left\|f^{(r+2)}_{\eta,2}\right\|_{C[a,b]}\right\}$$

şeklinde yazılabilir. Steklov ortalaması için 2. ve 4. özelliği kullanılırsa

$$H_2 \le K_2\eta^{-1}\left\{\eta^{-2}\left\|f_{\eta,2}\right\|_{C[a,b]} + \eta^{-2}\omega_r\left(f^{(r)};\eta;[a,b]\right)\right\}$$

$$\le K_3\eta^{-1}\left\{\|f\|_\gamma + \eta^{-2}\omega_r\left(f^{(r)};\eta;[a,b]\right)\right\}$$

şeklinde yazılabilir.

Son olarak H_1 ifadesini hesaplayalım. Bunun için $0 < a < a^* < a_1 < b_1 < b^* < b < \infty$ eşitsizliği sağlanacak şekilde a^*, b^* sayılarını seçelim. Şimdi kabul edelim ki χ(t) fonksiyonu $[a^*, b^*]$ aralığında karakteristik fonksiyonu göstersin. Böylece operatörün lineerliğini de kullanarak

$$H_1 \leq \left\| A_{n,a,\beta_n}^{(r)}\big(\chi(t)(f - f_{\eta,2};.)\big) \right\|_{C[a_1,b_1]} + \left\| A_{n,a,\beta_n}^{(r)}\big(1 - \chi(t)(f - f_{\eta,2};.)\big) \right\|_{C[a_1,b_1]}$$

$$:= H_4 + H_5$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi H_4 ifadesini hesaplamak için

$$A_{n,a,\beta_n}^{(r)}(f;x) = \frac{(n+\beta_n)^r (n-r+a-1)!}{(n+a-2)!} \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,\beta_n,k}(x) \int_0^{\infty} q_{n-r,a,k+r}(t) f^{(r)} dt$$

ifadesinden yararlanılabilir.

Bu durumda

$$A_{n,a,\beta_n}^{(r)}\big(\chi(t)(f(t)) - f_{\eta,2}(t)) \,;\, x\big)$$

$$= \frac{(n+\beta_n)^r (n-r+a-1)!}{(n+a-2)!} \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,\beta_n,k}(x) \int_0^{\infty} q_{n-r,a,k+r}(t)$$
$$\times \left(\chi(t)(f^{(r)} - f_{\eta,2}^{(r)}(t) \,;\, x\right) dt$$

ifadesi yazılabilir. Buradan norma geçilirse

$$H_4 \leq K_4 \left\| f^{(r)} - f_{\eta,2}^{(r)}(t) \right\|_{C[a^*,b^*]}$$

olarak bulunur.

H_5 ifadesini hesaplamak için $x \in [a_1, b_1]$ ve $t \in [0,\infty) \setminus [a^*, b^*]$, $|t| > \delta_1$

olacak şekilde bir $\delta_1 > 0$ sayısını seçilir ve

$$x^r \frac{d^r}{dx^r}\left[e^{-(n+\beta_n)x}[(n+\beta_n)x]^k\right]$$

$$= \sum_{\substack{2i+j \leq r \\ i,j \geq 0}} (n+\beta_n)^i [k - (n+\beta_n)x]^j \phi_{i,j,r}(x) e^{-(n+\beta_n)x} [(n+\beta_n)x]^k$$

ifadesinden yararlanılırsa,

$$\left|\frac{d^r}{dx^r} A_{n,a,\beta_n}\big((1-\chi(t))(f(t)-f_{\eta,2}(t);\ w\big)\right|_{w=x}$$

$$\leq (n+a-1)\sum_{\substack{2i+j\leq r\\ i,j\geq 0}} (n+\beta_n)^i \frac{\phi_{i,j,r}(x)}{x^r} \times \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(n+\beta_n)x}[(n+\beta_n)x]^k$$

$$\times [k-(n+\beta_n)x]^j \int_0^{\infty} q_{n,a,k}(t)(1-\chi(t))\big|f(t)-f_{\eta,2}(t)\big|dt$$

$$\leq K_5\|f\|_{\gamma}(n+a-1)\sum_{\substack{2i+j\leq r\\ i,j\geq 0}} (n+\beta_n)^i \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(n+\beta_n)x}[(n+\beta_n)x]^k[k-(n+\beta_n)x]^j$$

$$\times \int_{|t-x|\geq\delta_1} q_{n,a,k}(t)dt$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizliğe Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|\frac{d^r}{dx^r} A_{n,a,\beta_n}\big((1-\chi(t))(f(t)-f_{\eta,2}(t)\,;\ w\big)\right|_{w=x}$$

$$\leq \frac{K_5}{\delta^{2l}}\|f\|_{\gamma}(n+a-1)\sum_{\substack{2i+j\leq r\\ i,j\geq 0}} (n+\beta_n)^i$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(n+\beta_n)x}[(n+\beta_n)x]^k[k-(n+\beta_n)x]^j$$

$$\times \left\{\int_0^{\infty} q_{n,a,k}(t)dt\right\}^{\frac{1}{2}} \times \left\{\int_0^{\infty} q_{n,a,k}(t)(t-x)^{4l}dt\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \frac{K_5}{\delta^{2l}}\|f\|_{\gamma}\sum_{\substack{2i+j\leq r\\ i,j\geq 0}} (n+\beta_n)^i \left\{\sum_{k=0}^{\infty} e^{-(n+\beta_n)x}[(n+\beta_n)x]^k[k-(n+\beta_n)x]^j\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \left\{(n+a-1)\sum_{k=0}^{\infty} e^{-(n+\beta_n)x}[(n+\beta_n)x]^k \int_0^{\infty} q_{n,a,k}(t)(t-x)^{4l}dt\right\}^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir.

Burada da Lemma 4.1. ve Lemma 4.2. de elde edilen sonuçlar kullanılırsa

$$H_5 \leq K_6 \|f\|_\gamma \sum (n+\beta_n)^{\left(i+\frac{j}{2}-1\right)}$$

yazılabilir. Eğer $v = \left(l - \frac{r}{2}\right)$ seçip $v > 1$ için $\eta > 0$ olarak alırsak

$$H_5 \leq K_6 \|f\|_\gamma (n+\beta_n)^{(-v)}$$

$$\leq K_6 \|f\|_\gamma (n+\beta_n)^{-1}$$

olur.

Steklov ortalamasının 3. özelliği gereğince de

$$H_1 \leq K_7 \left\| f^{(r)} - f_{\eta,2}^{(r)}(t) \right\|_{C[a^*,b^*]} + K_6 \|f\|_\gamma (n+\beta_n)^{-1}$$

$$\leq K_8 \omega_2(f : \eta : [a,b]) + K_6 \|f\|_\gamma (n+\beta_n)^{-1}$$

olur. $\eta = (n+\beta_n)^{\frac{-1}{2}}$ alınırsa teorem ispatlanmış olur.

Sonuç olarak, (3.4) ile tanımlanan operatörler için elde edilen sonuçlar, (3.1) operatörü için verilen sonuçlarla karşılaştırıldığında, yakınsama özelliklerinin korunduğu ve hata oranının β_n ‘e göre değişerek azaldığı görülmektedir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde iyi bilinen Szâsz-Baskakov operatörlerinin bir Schurer genelleştirilmesi verilerek bazı yakınsaklık özellikleri incelenmiştir. Sonuçlar elde edilirken yaklaşım teorisinde kullanılan temel tanım ve teoremler olabildiği kadar okuyucuların rahatça anlayabileceği şekilde sunulmuştur.

Sonuç olarak tez genelleştirilmiş Szâsz-Schurer-Baskakov operatörünün yaklaşım özellikleriyle ilgili olup genelleştirilen operatörlerinin Laguerre polinomları kullanılarak Hipergeometrik seriler cinsinden ifadesi verilmiş. Ayrıca operatörün türevlerinin noktasal yakınsaması, Türevler için asimptotik bir açılım ve hata tahmini içeren bazı sonuçları verilmiştir.

Verilen bu teoremler orijinal olup, elde edilen sonuçlar Dergipark üyesi "Eurasian Journal of Science Engineering an Technology" isimli derginin 2021 yılı cilt 2, sayı 2 sayfa 083-096 yayınlanmıştır.

KAYNAKLAR

[1] A. Aral , D. Inoan , I. Raşa , ‘’On the Generalized Szâsz-Mirakjan Operators.’’ Result Math. 65(3-4), 441-452 (2014).

[2] A. Erencin , G. Bascanbaz-Tunca , ‘’Approximation Properties of a Class of Linear Positive Operators in Weighted Spaces’’ C.R. Acad. Bulg. Sci. 63(10) , 1397-1404, (2010).

[3] A. Erencin , ‘’DurrmeyerType Modification of Generalized Baskakov Operators.’’ Appl. Math. Comp. 218 (3), 4384-4390(2011).

[4] D. K. Verma , V. Gupta , P.N. Agrawal , ‘’Some Approximation Properties of Baskakov-Durrmeyer-Stancu Operators’’ Appl. Math. and Comp. 218, 6549-6556, (2012).

[5] E. Pandey , R. K. Mishra , S, P. Pandey, ‘’Approximation Properties of Some Modified Summation-Integral Type Operator’’ Inter. Jour. of Soft Comp. and Eng.(IJSCE) ISSN:2231-2307, Volume-5, Issue-1, (2015).

[6] F. Altomare, M. Campiti, “ Karovkin-type Approximation Theory and its Applications” Walter de Gruyter, Berlin. New York (1994).

[7] F. Schurer , ‘’ Linear Positive Operators in Approximation Theory’’ Math. Inst. Techn. Univ. Delfht. report. (1962).

[8] J.L. Durrmeyer, Une formule díinversion de la transform~e de Laplace: Applications ~la th~orie des moments. Th~se de 3e cycle, Paris, (1967).

[9] Kumar, S., Acar, T.’’ Approximation by Generalized Bakakov-Durrmeyer-Stancu Type Operators’’ , Rend.Circ.Mat. Palermo , 65(3), 2016.(E-SCI).

[10] N. Ispir, ‘’Rate of Convergence of Generalized Rational Type Baskakov Operators’’ Math. Comp. Model 46, 625-631 (2007).

[11] O. Gürel Yılmaz, M. Bodur, A. Aral, ‘’On Approximation Properties of Baskakov-Schurer-Szâsz Operators Preserving Exponantial Functions’’ Filomat, 32:15 5433-5440 (2018).

[12] P.N. Agrawal, V. Gupta, A.S. Kumar, ‘’ Generalized Baskakov-Durrmeyer Type Operators’’ Rend. Circ. Mat. Palermo, 63:193-209 (2014).

[13] R. Aktaş, B. Çekim, F. Taşdelen, ‘’ A Kantorovich-Stancu Type Generalization of Szâsz Operators Including Brenke-Type Polynomials’’ , Journal of Function Spaces and Applications, (2013), 9 sayfa

[14] R. Aktaş, D. Söylemez, F. Taşdelen, ‘’Stancu Type Generalization of Szâsz-Durrmeyer operators involving Brenke-type polynomials’’, Filomat, 33 (3) , 855-868 (2019).

[15] S. Arpaguş, A. Olgun ‘’ Approximation properties of Modified Baskakov Gamma Operators’’ Facta Universitatis Mathematics and Informatics, (2020) (in press)

[16] S. Goldberg and V. Popov, ‘’ On Approximation by Spline Functions’’ Proc. London Math. Soc., 23, 1-15, (1971).

[17] T. Acar, V. Gupta , A. Aral, ‘’ Rate of Convergence for Generalized Szâsz Type Operators’’ Bull. Math. Sci. 1(1), 99-113 (2011).

[18] V. Gupta, M.A. Noor, M.S. Beniwal and M.K. Gupta ‘’ On Simultaneous Approximation for Certain Baskakov Durrmeyer Type Operators’’ Jour. of Ineq. in Pure and Appl. Math Volum 7 Issue 4 Article 125 (2006).

[19] V. Gupta, D.K. Verma, P.N. Agrawal, ‘’Simultaneous Approximation by Certain Baskakov-Durrmeyer-Stancu Operators’’ , Jour. of the Egyp. Math. Soc. 20-183-187 (2012).

[20] V. N. Mishra, P. Sharma, ‘’ On Approximation Properties of Baskakov-Szâsz Operators’’ , Appl. Math. and Comp. V. 281 , pp; 381-393 (2016)

[21] V. Gupta and G. S. Srivastava, ‘’ On the Convergence of Derivative by Szâsz-Mirakyan Baskakov Type Operators’’ , The Math. Student64(1-49, 195-205) (1995)

[22] V. Gupta and G. Tachev ,’’ Approximation by Szâsz-Mirakyan Baskakov Type Operators’’ , J. Appl. Funct. Anal., 9(3-4) , 308-319 (2014)

[23] Szâsz , O., Generalization of S. Bernstein’s polynomials to the infinite interval, J. Research Nat. Bur. Standards Sect. 45 , 239-245 (1950).

[24] Balcı, M. Matematik Analiz-1. Palme Yayınları, Ankara, 362 s. (2021).

[25] Dönmez, A. Matematik Analiz 1/2., Doğuş Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, İstanbul, 1154 s.(2005).

[26] Altın, A. Uygulamalı Matematik, Gazi Kitabevi, Ankara, (2011).

[27] Rainville, E.D. Special Functions , The Macmillan Company, 365 p., New York, (1965).

[28] Szegö, G., Orthogonal Polynomials. American Mathematical Society, 405 p., New York, (1939).

[29] Srivastava, H.M. and Manocha, H. L. A Treatise on Generating Functions. Halsted Press , Ellis Horwood Limited, John Wiley and Sons, 569 p., New York, (1984).

[30] Kreyszig, E., Introductory Functional Analysis with Applications. John Wiley and Sons, New York, (1978).

[31] Andrews, G.E., Askey, R. and Roy, R., Special functions. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. 71. Cambridge University Press, 664 p., Cambridge, United Kingdom,(1999).

[32] Acar, T. Genelleştirilmiş Gadjiev Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri, Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Tezi, 64s., Ocak (2015).

[33] Voronovskaya, E. , Détermination de la forme asymtotique d’approximation des fonctions parles polynômes d M. Bernstein, C.R.Acad. Sci URSS (1932), 79-85.

[34] Balcı, M. Matematik Çözümlü Analiz Problemleri 2 , Palme yayıncılık , 548 s.

[35] Hacıyev, A. ve Hacısalihoglu, H. H., Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı, 1-71 p., Ankara, (1995).

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Elif ŞÜKRÜOĞLU

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl) :

Lise : Fatih Sultan Mehmet Lisesi (2013)

Lisans : Kırıkkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (2018)

Yüksek lisans : Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (2022)

Çalıştığı Kurum / Kurumlar ve Yıl :

Akdeniz Üniversitesi (2022-)

Yayın :

Elif ŞÜKRÜOĞLU, Ali OLGUN, "Approximation properties of Modified Szasz-Schurer-Baskakov Type Operators" Eurasian Journal of Science Engineering an Technology, cilt 2, sayı 2, sayfa 083-096, (2021).