T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR UZAY EĞRİSİNİN EŞLENİK EĞRİLERİ ÜZERİNE

SELDA YORULMAZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Doç. Dr. Osman KEÇİLİOĞLU

KIRIKKALE-2022

T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR UZAY EĞRİSİNİN EŞLENİK EĞRİLERİ ÜZERİNE

SELDA YORULMAZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Doç. Dr. Osman KEÇİLİOĞLU

KIRIKKALE-2022

Selda YORULMAZ tarafından hazırlanan "BİR UZAY EĞRİSİNİN EŞLENİK EĞRİLERİ ÜZERİNE" adlı tez çalışması, aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Osman KEÇİLİOĞLU İmza
Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Başkan: Prof. Dr. Kazım İLARSLAN İmza
Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Ümit TOKEŞER İmza
Matematik Anabilim Dalı, Kastamonu Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.
Tez Savunma Tarihi:26.07.2022

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. Recep ÇALIN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYANI

Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Selda YORULMAZ
26.07.2022

ÖZET

BİR UZAY EĞRİSİNİN EŞLENİK EĞRİLERİ ÜZERİNE

YORULMAZ, Selda
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. Osman KEÇİLİOĞLU
Temmuz 2022, 59 sayfa

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır. İkinci bölümde tezde kullanılacak olan kavramlar ele alınmıştır. Üçüncü bölümde öncelikle Bir Frenet eğrisinin asli yön ve asli donör eğrileri tanıtılarak bu eğrilerin eğrilikleri ve burulmaları arasındaki ilişkiler ele alınmıştır. Daha sonra üç boyutlu Öklid uzayında eşlenik eğriler tanıtılarak bazı sonuçlar elde edilmiştir. Son olarak, küresel olmayan bir eğrinin küresel eşleniği tanımlanarak bazı özel eğrilerin küresel eşlenikleri elde edilmiştir. Dördüncü bölüm ise tartışma ve sonuç için ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Eşlenik eğri, küresel eğri, helis, slant helis.

ABSTRACT

ON ASSOCIATED CURVES OF SPACE CURVES

YORULMAZ, Selda
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, Master's Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Osman KEÇİLİOĞLU
July 2022, 59 pages

This thesis consist of four chapter. The first chapter is reserved for introduction. The second chapter contains concepts and definitions which are needed throughout the thesis. In the third chapter, firstly some results were obtained by introducing associated curves in three-dimensional Euclidean space Then, the principal direction and principal donor curves of a Frenet curve are introduced and the relationships between the curvatures and torsions of these curves are discussed. Finally, by defining the associated spherical curve of a non-spherical curves, the associated spherical curves of some special curves are obtained.The fourth chapter is reserved for discussion and conclusion.

Key Words: Associated curve, spherical curve, helix, slant helix.

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması esnasında, benden hiçbir yardımı esirgemeyen, destek olan ve yol gösteren danışman hocam Sayın Doç. Dr. Osman KEÇİLİOĞLU'na ve üzerimde emeği olan başta Prof. Dr. Kazım İLARSLAN olmak üzere Matematik Anabilim dalındaki bütün hocalarıma sonsuz teşekkür ediyorum.

Tüm öğrenim hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen hep yanımda olan başta annem ve eşime, en güzel vakitlerini çaldığım canım kızıma, beni cesaretlendiren arkadaşım Fatma'ya sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel vektör uzayı
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu standart reel vektör uzayı
$\mathbb{E}^3$	3-boyutlu Öklid uzayı
I	$\mathbb{R}$ nin açık alt aralığı
T	α eğrisinin teğet vektör alanı
N	α eğrisinin asli vektör alanı
B	α eğrisinin binormal vektör alanı

1 . GİRİŞ

Diferansiyel geometride eğriler teorisi önemli bir çalışma alanıdır. Eğriler, başta Öklid uzayı olmak üzere, bir çok farklı uzayda çalışılmış ve çalışılmaya devam edilmektedir. Eğrinin Frenet denklemleri, eğriliği κ, burulması τ yardımıyla eğrinin geometrik özellikleri incelenmektedir.

Örneğin, bir eğrinin $\kappa \neq 0$ bir sabit, $\tau = 0$ ise eğri bir çember, κ ve τ sıfırdan farklı sabitler ise eğri bir dairesel helis, $\frac{\tau}{\kappa}$ sabit ise genel helis ve

$$\frac{\kappa^2}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = c$$

sabit ise eğri slant helisdir.

$\mathbb{E}^3$, 3 boyutlu Öklid uzayında verilen iki eğri α ve β olsun. α ve β nın Frenet vektörleri yardımıyla eğriler karakterize edilir.

α nın Frenet denklemleri $\{T,\ N,\ B\}$ ve β nın Frenet denklemleri $\left\{T_\beta,\ N_{\beta,}\ B_\beta\right\}$ olmak üzere N ile $N_{\beta,}$ vektörleri lineer bağımlı ise α ve β bir Bertrand eğri çifti, N ile B_β ile lineer bağımlı ise α ve β Manheim eğri çifti oluşturur.

Y.H.Kim (2012) α nın normal vektörü ile β nın teget vektörü için $N = T_\beta$ olduğunu söyleyerek eğrilere yeni bir karakterizasyon kazandırmıştır. Bu eğrilere PD rektifiyan eğriler adını vermiştir.

H.Liu (2019) 3 boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin küresel eşlenik eğrilerinden bahsetmiştir. Eğrilerde K_g küresel eğri fonksiyonu , f radyal küresel fonksiyonları tanımlamıştır.

Tezimizin içeriğinde bir α eğrisinin eşlenik eğrileri, ana yön eğrisi, slant helis ve küresel eşlenik eğrilerinden bahsedilmiştir.

Bu tez çalışmamızda temel kavramlar için Hacısalihoğlu (2000) nun "Diferansiyel Geometri" kitabı, Sabuncuoğlu (2004) nun "Diferansiyel Geometri" kitabından yararlanılmıştır.

Jin Ho.Choi , Young Ho Kim (2012) tarafından yayınlanan makale ana referansımızı oluşturmuştur. $\mathbb{E}^3$, Öklid uzayında asli binormal doğrultulu ana donör eğri ve ikinci ana donör eğri kavramlarını tanıttılar.
Bu kavramları kullanarak genel helis ve slant helisler arasındaki ilişkiler ele alınarak bazı karakterizasyonlar elde edilmiştir. Düzlemsel eğriler ve genel helislerinden doğal gösteriminden genel helisler ve slant helislerin doğal gösterimlerini elde ettiler.
Tezimizin son bölümü Huili Liu, Seoung Dal Jung (2019) tarafından yayınlalan makale ana referansımızı oluşturmuştur. Bu makalede Huili Liu ve Seoung Dal Jung bir eğrinin eşlenik eğrisinin küresel bir eğri olabileceginden bahsedilmiştir. Radyal fonksiyon ve küresel radyal fonksiyon tanımı yapılarak bu eğrilerin Frenet denklemlerinden yararlanılarak aralarındaki ilişkiler elde edilmiştir. Bir eğrinin bulunduğu pozisyon vektörünün değişmesine baglı olarak küresel eşlenik eğrisinin eğrilik ve burulmasındaki değişikliklerden bahsedilmiştir.

1.1. Tezin amacı

Bu tez çalışmasında 3 boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin , doğal eşlenik eğrileri, ana yön eğrisi ve eğri arasındaki ilişki incelenmiş ve bir eğrinin doğal eşlenik eğrisinin küresel eğri olabileceği gösterilmiştir. Bu sonuçların detaylı bir şekilde sunulmasıyla, ileriki çalışmalara güzel bir taban oluşturması tezimizin bir diğer amacını oluşturur.

2 . MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. $\mathbb{R}$,reel sayılar cismini göstermek üzere

$$\mathbb{R}^n = \{(p_1, p_2, p_3 ......p_n) \,|1 \leq i \leq n, p_i \in \mathbb{R}\}$$

eşitliğiyle belirli $\mathbb{R}^n$ kümesinde toplama işlemi

$$(p_1, p_2, p_3 .....p_n) + (q_1, q_2, ...q_n) = (p_1 + q_1, p_2 + q_2 ....p_n + q_n)$$

eşitliğiyle tanımlanır. Skalerle çarpma işlemi ,

$$\lambda \in \mathbb{R}\text{ve}\,(p_1, p_2, p_3 ......p_n) \in \mathbb{R}^n$$

için

$$\lambda\,(p_1, p_2, p_3 ......p_n) = (\lambda p_1, \lambda p_2 ......\lambda p_n)$$

eşitliği tanımlanır. Bu işlemlere göre $\mathbb{R}^n$ kümesi $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olur. $\mathbb{R}^n$ vektör uzayında

$$p = (p_1, p_2, p_3 ......p_n)\,\text{ve}\;q = (q_1, q_2, ...q_n)$$

olmak üzere

$$\langle p, q\rangle = \sum_{i=1}^{n} p_i qi$$

eşitliğiyle tanımlanan

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (p, q) \to \langle p, q\rangle$$

fonksiyonu ,$\mathbb{R}^n$ uzayında bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma, $\mathbb{R}^n$ uzayının doğal iç çarpımı veya öklid iç çarpımı denir.[19]

$$p \in \mathbb{R}^n$$

olmak üzere

$$\left\| \sqrt{\langle p, q \rangle} \right\|$$

diyelim.

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ p \to \|p\|$$

fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir normdur. Buna göre $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı, normlu vektör uzayıdır.

$$d\,(p,q) = \|p - q\|$$

biçiminde tanımlanan

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu $\mathbb{R}^n$uzayında bir metriktir. Dolayısıyla $\mathbb{R}^n$ bir metrik uzaydır. Bu metrikle birlikte $\mathbb{R}^n$ uzayına öklid uzayı denir. Bu uzay E^n ile gösterilir. $n = 3$ için uzayımız 3 boyutlu öklid uzayı olur.[19]

Tanım 2.1.2. I, $\mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olmak üzere

$$\alpha : I \to \mathbb{E}^n$$

biçiminde düzgün bir α dönüşümüne, $\mathbb{E}^n$ uzayı içinde bir eğri denir.[19]

Tanım 2.1.3. $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ eğrisi verilsin. Her $s \in I$ için

$$\alpha'(s) \neq 0$$

ise α eğrisine regüler bir eğri denir.[19]

Tanım 2.1.4. $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ eğrisi verilsin. Her $s \in I$ için $\alpha'(s) \neq 0$ ise α eğrisine regüler bir eğri denir. Eğer $\left\| \alpha'(s) \right\| = 1$ ise α eğrisine birim hızlı eğri denir.[19]

Tanım 2.1.5. $\mathbb{E}^3$ uzayında birim hızlı

$$\alpha : I \to \mathbb{E}^3$$

eğrisi için

$$T = \alpha'(s)$$

eşitliğiyle birlikte $T(s)$ vektörüne α eğrisinin birim teğet vektörü denir. T, I aralığının her bir s noktasına, $\alpha(s)$, noktasındaki $T(s)$ teğet vektörüne karşılık getiren bir fonksiyondur. Buna göre T, α eğrisi üstünde bir vektör alanıdır. Bu vektör alanına α eğrisinin birim teğet vektör alanı denir. Kısaca

$$\alpha' = T$$

ile gösterilir[19].

Tanım 2.1.6. $\mathbb{E}^3$ uzayında birim hızlı

$$\alpha : I \to \mathbb{E}^3$$

eğrisi için

$$\begin{aligned} \kappa &: I \to \mathbb{R} \\ \kappa(s) &= \left\| T'(s) \right\| \end{aligned}$$

fonksiyonuna, α eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa(s)$ sayısına $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir.

Tanım 2.1.7. $\mathbb{E}^3$ uzayındaki birim hızlı

$$\alpha : I \to \mathbb{R}^3$$

eğrisi için

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T'(s)$$

eşitliğiyle belirli $N(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki asli normali denir. N

vektör alanına , α eğrisinin asli normal vektör alanı denir.

Tanım 2.1.8. $\mathbb{E}^3$ uzayındaki birim hızlı

$$\alpha : I \to \mathbb{R}^3$$

eğrisi için

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

eşitliğiyle tanımlı $B(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki binormali denir. B vektör alanına , α eğrisinin binormal vektör alanı denir.

Tanım 2.1.9.

$$T(s), N(s), B(s)$$

vektörlerine ,

$$\alpha : I \to \mathbb{E}^3$$

eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki frenet vektörleri denir.

$$\{T(s), N(s), B(s)\}$$

kümesine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki frenet çatısı denir. T, N, B vektör alanlarına , α eğrisi üstünde frenet vektör alanları denir.

Tanım 2.1.10. Üç boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ de α eğrisi, $I \subset \mathbb{R}$ açık aralığında tanımlansın. Bu durumda a, $b \in I$ olmak üzere ,

$$\int_a^b \|\alpha'(s)\| \, ds$$

reel sayısına, $s = a$ ile $s = b$ noktaları arasında α eğrisinin yay uzunluğu denir.

Teorem 2.1. Birim hızlı , $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisinin frenet vektör alanları T, N, B ise

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N \\ N' &= -\kappa T + \tau B \\ B' &= -\tau N \end{aligned}$$

dir.

Teorem 2.2. $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisinin frenet vektör alanları T, N, B ile ,eğrilik ve burulması κ ve τ ile gösterildiğine göre

$$\begin{aligned} T &= \frac{\alpha}{\|\alpha'\|} \\ B &= \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \\ N &= B \times T \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \\ \tau &= \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} \end{aligned}$$

yazılır.

Teorem 2.3. $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ yay parametreli bir eğri ve

$$\kappa \neq 0$$

$$\tau \neq 0$$

eğrinin eğrilikleri olmak üzere α eğrisi r yarıçaplı S^2 küresi üzerindedir ancak ve ancak

$$\frac{\tau}{\kappa} + \left[\left(\frac{1}{\kappa} \right)' \frac{1}{\tau} \right]' = 0$$

dır.

Tanım 2.1.11. Bir

$$\alpha : I \to \mathbb{E}^3$$

eğrisi verilsin. $\forall s \in I$ için $\alpha'(s)$ hız vektörü , bir u sabit vektörü ile sabit açı yapıyorsa , α eğrisine bir helis denir.

Tanım 2.1.12. Bir

$$\alpha : I \to \mathbb{E}^3$$

regüler bir eğri olsun. α nın asli birim normal vektörü N olmak üzere

$$\langle N, v \rangle$$

sabit olacak şekilde sabit bir $v \neq 0$ vektörü varsa, α ya slant helis denir.

Tanım 2.1.13. S^2 küresi için bir α eğrisi, $\alpha : I \to S^2$ olacak şekilde tanımlanıyorsa, α eğrisine küresel eğri denir .

Tanım 2.1.14. $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisi için κ ve τ ifadelerinin her ikisi de sabitse α eğrisine dairesel helis denir.

Teorem 2.4. $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ bir eğri ve

$$\begin{aligned} \kappa &\neq 0, \\ \tau &\neq 0 \end{aligned}$$

olmak üzere α bir helistir ancak ve ancak

$$\frac{\tau}{\kappa} = \tan \phi$$

sabittir. Eğer κ, τ eğriliklerinin her ikiside sabit ise eğri dairesel helis olarak adalandırılır.

Teorem 2.5. Üç boyutlu Öklid uzayı, E^3 de α eğrisi $I \subset \mathbb{R}$ açık aralığında tanımlı birim hızlı bir eğri olsun. O halde α nın rektifyan bir eğri olabilmesi için gerek ve yeter koşul α eğrisinin eğrilikleri oranı s yay parametresine bağlı doğrusal bir fonksiyon yani

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = as + b$$

olmasıdır. Burada $a \neq 0$ ve b sabit reel sayılardır.

Tanım 2.1.15. Birim hızlı bir α eğrisi ve aynı aralıkta tanımlı β eğrisi alalım. Bu eğrilerin frenet ayaklıları sırasıyla

$$\{T_1, N_1, B_1\}$$

ve

$$\left\{T_{2,}N_{2,}B_{2}\right\}$$

olmak üzere

$$\left\{N_{1},N_{2,}\right\}$$

lineer bagımlı ise α ve β eğrisi çifti bertrand eğri çiftidir denir.

Tanım 2.1.16. α, $\mathbb{E}^3$ uzayında

$$\{T,\ N,\ B\}$$

Frenet çatılı birim hızlı bir Frenet eğrisi ve N, α boyunca birim vektör alanı olsun. T_β birim teğet vektörü N ye eşit olan yani

$$N = T_\beta$$

olan β eğrisine α nın doğrultucu eğrisi ve α ya da β nın donör eğrisi denir.

Tanım 2.1.17. γ eğrisi, β nın ana doğrultucu eğrisi ise, β eğrisine α nın ikinci ana doğrultucu eğrisi ve α ya da γ nin ikinci asli donör eğrisi denir.

Tanım 2.1.18. V, $\mathbb{E}^3$te diferensiyellenebilir bir vektör alanı ve $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ bir eğri olsun. Her $t \in I$ için

$$\alpha'(t) = V_{\alpha(t)}$$

oluyorsa, α ya V nin bir integral eğrisi denir.

3 . ARAŞTIRMA VE BULGULAR

3.1. 3 Boyutlu Öklid Uzayında Eşlenik Eğriler

Eğriler arasında dikkat çeken ilginç eğrilerden birisi helisdir. $\mathbb{E}^3$ de herhangi bir eğrinin her noktasındaki teğet vektör alanı sabit bir vektör ile sabit açı yapıyorsa bu eğriye helis denir.E^3 de herhangi bir eğrinin her noktasındaki normal vektör alanı sabit bir vektör ile sabit bir açı yapıyorsa bu eğriye slant helis denir.
$\mathbb{E}^3$ deki bir eğri teorisinin çalışmasında bazı matematikçiler Bertnard ve arkadaşları, bir eğrinin çeşitli eşlenik eğrilerini bulmuşlardır. Bu eşlenik eğriler orijinal bir eğriyi karakterize eder ve davranışını açıklayabilir.[6, 10, 12, 14]
Bir Frenet eğrisinin bazı eşlenik eğrileri eğri boyunca Frenet çatısı tarafından oluşturulan bazı vektör alanlarının integral eğrileri olarak tanıtılacaktır .
Bu bölümde eşlenik eğrilerin uygulaması olarak , $\mathbb{E}^3$ deki genel helisleri ve slant helisleri, eşlenik eğrileri cinsinden karakterize ederek ve bunları düzlem eğrilerinden oluşturmak için kanonik bir yöntem sunulacaktır .
Ayrıca, PD rektifiyan eğri adı verilen yeni bir eğri tanıtılacaktır. PD rektifiyan eğri vasıtasıyla Bertnard eğrisinin yeni bir karakterizasyonu elde edilecektir.

Tanım 3.1.1. α eğrisinin her noktasında

$$\{T,N\}$$
$$\{T,B\}$$
$$\{N,B\}$$

ile kapsanan düzlemlerine sırasıyla oskülatör düzlem, rektifiyan düzlem, normal düzlem denir.

Bu bölümde , $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ verilen bir Frenet eğrisinin bazı eşlenik eğrileri tanımlanacaktır. α eğrisinin Frenet çatısı $\{T,N,B\}$, $u(s)\,, v(s)\,, w(s)$ I aralığında diferensiyellenebilir fonksiyonlar ve

$$u^2(s)+v^2(s)+w^2(s)=1 \tag{3.1.1}$$

olmak üzere

$$V(s)=u(s)T(s)+v(s)N(s)+w(s)B(s) \tag{3.1.2}$$

vektör alanını tanımlayalım. Bu durumda V nin I aralığındaki bir $\beta(s)$ integral eğrisi birim hızlı bir eğridir.

Tanım 3.1.2. $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ bir Frenet eğrisi ve Frenet vektörleri $\{T,N,B\}$olsun. $N(s)$ vektör alanının integral eğrisine α nın asli yön eğrisi denir.

Teorem 3.1. α, eğriliği ve burulması sıfırdan farklı sabitler olan $\mathbb{E}^3$de bir frenet eğrisi olsun, Bu durumda α nın ana yön eğrisi β sırasıyla

$$\beta=\frac{1}{\kappa(s)\tau}\alpha^{'}(s)\times\alpha^{''}(s)$$

$$\beta=\frac{1}{\kappa(s)}\alpha^{'}(s)$$

dir.

İspat. Kabul edelimki α eğrisinin normal vektörü, β nın teğet vektörüne eşit olsun.α nın frenet denklemleri $\{T,\ N,\ B\}$, ve β nın frenet denklemleri $\left\{T_\beta,\ N_\beta,\ B_\beta\right\}$ olmak üzere, κ ve τ 0 dan farklı sabitler olsun.

$$T_\beta=N$$

ve

$$T^{'}=\kappa N$$

dir. Burada her tarafmı κ ya bölelim

$$\frac{T^{'}}{\kappa}=N$$

olur. $T'=\alpha''$ eşitliğini ve $\beta'=T_\beta=N$ yazarsak

$$\frac{\alpha^{''}}{\kappa}=\beta^{'}$$

ifadesini buluruz. Her iki tarafın integrali alınırsa

$$\frac{\alpha^{'}}{\kappa} = \beta$$

bulunur. Buradan

$$\beta = \frac{1}{\kappa}\alpha'$$

dir. Şimdi

$$\tau \neq 0$$

kabul edelim

$$B^{'}(s) = -\tau N$$

olduğunu frenet denklemlerinden yazarsak ve her tarafı τ ya bölersek

$$N(s) = \frac{-B^{'}}{\tau} = \beta^{'}$$

ifadesini buluruz. Bu ifadede her iki tarafın integrali alınırsa

$$\beta = \frac{-1}{\tau}B(s)$$

eşitliğini buluruz.O halde

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{-1}{\tau}\frac{\alpha^{'} \times \alpha^{''}}{\|\alpha'\|\|\alpha''\|} \\
\beta &= \frac{-1}{\tau\kappa(s)}\alpha^{'} \times \alpha^{''}
\end{aligned}$$

dir. $\square$

Teorem 3.2. α, $\mathbb{E}^3$de bir frenet eğrisi olsun ve β 3.1.2 tarafından verilen bir integral eğrisi olsun. β nın anayön eğrisinin α ya eşit olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned}
u(s) &= 0 \qquad (3.1.3)\\
v(s) &= -\cos\left(\int \tau ds\right) \neq 0
\end{aligned}$$

ve

$$w(s)=\sin(\int \tau ds)$$

olmasıdır.

İspat. (3.1.2) de verilen

$$V(s)=u(s)T(s)+v(s)N(s)+w(s)B(s)$$

ifadesinin her tarafın türevi alınır ve Frenet formülleri kullanılırsa

$$V'(s)=(u^{'}-\kappa v)T+(\kappa u+v^{'}-w\tau)N+(\tau v+w^{'})B$$

dir. Ayrıca β, V nin bir integral eğrisi olduğundan

$$\begin{aligned}\beta^{'} &= V\\ \beta^{''} &= V'\end{aligned}$$

dir. β'' de her tarafın integrali alınırsa β' yani β nın tanjant vektörü

$$\beta^{'}=T_{\beta}$$

olup bu ifadede türev alnır ve Frenet denklemleri yerine yazıldığında

$$V^{'}=\kappa_{\beta}N_{\beta}$$

ifadesi elde edilir. Buradan

$$\frac{V^{'}}{\kappa_{\beta}}=N_{\beta}=T$$

ifadesinde V' yerine yazılırsa

$$\frac{1}{\kappa_{\beta}}\left\{(u^{'}-\kappa v)T+(\kappa u+v^{'}-w\tau)N+(\tau v+w^{'})B\right\}=T$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}(u^{'}-kv) &\neq 0 \\ (\kappa u+v^{'}-wT) &= 0 \\ (\ \tau v+w^{'}) &= 0\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

eşitlikleri sağalanır. Ayrıca (3.1.1) ifadesinin türevi alındığında

$$uu'+vv^{'}+ww^{'}=0$$

olur. (3.1.4) daki ikinci denklemin v ile çarpılması ile

$$\begin{aligned}(\kappa u+v^{'}-w\tau)v &= 0 \\ \kappa uv+vv^{'}-wv\tau &= 0 \\ \kappa uv+vv^{'}+ww^{'} &= 0\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Bu ifade de $vv^{'}+ww^{'}$ yerine $-u'u$ yazılırsa,

$$u(\kappa v-u^{'})=0$$

ve

$$(\kappa v-u^{'})\neq 0\,,\,u=0$$

olduğu görürlür. Diğer taraftan (3.1.4) daki üçüncü denklemin w ile çarpılması sonucunda

$$\begin{aligned}(\tau v+w^{'})w &= 0 \\ \tau vw+ww^{'} &= 0 \\ \tau vw &= -w^{'}w\end{aligned}$$

bulunur. $-w^{'}w$ yerine $u^{'}u+vv^{'}$ yazarsak

$$\tau vw=u^{'}u+vv^{'}$$

olur $u=0$ olduğundan

$$\begin{aligned} u^{'}-\kappa v &\neq 0 \\ -\kappa v &\neq 0 \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\kappa u+v^{'}-\tau w=0$$

$$v^{'}-\tau w=0$$

$$w^{'}+\tau v=0$$

bulunur. Yukarıdaki diferensiyel denklem sistemi çözüldüğünde

$$\begin{aligned} u &= 0 \\ v(s) &= sin(\int \tau ds)\neq 0 \\ w(s) &= cos(\int \tau ds) \end{aligned}$$

dir. □

Tanım 3.1.3. $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ bir eğri ve $\{T,N,B\}$ α nın Frenet çatısı olsun. Bu durumda

$$-cos(\int \tau ds)N(s)+sin(\int \tau ds)B(s)$$

birim vektör alanının bir integral eğrisine α nın temel donör eğrisi denir.

Temel donör eğrisi kavramından verilen Frenet eğrisinden yeni bir eğri oluşturmak için kanonik bir yöntem verildiğine dikkat edelim. Bu yöntemle basit eğrilerden bazı karmaşık eğriler inşa etmek mümkündür.

3.1.1. Ana Yön Eğrileri ve Temel Donör Eğrileri

Bu bölümde, ana yön eğrileri ve ana donör eğrileri arasındaki ilişkiyi incelenecektir.

Teorem 3.3. α, $\mathbb{E}^3$de eğriliği κ ve burulması τ olan bir frenet eğrisi ve β , α nın ana yön eğrisi olsun. Bu durumda β nın eğrilikleri κ_β ve τ_β olmak üzere

$$\kappa_\beta = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \tag{3.1.5}$$

ve

$$\tau_\beta = \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \tau^2}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \tag{3.1.6}$$

dir.

İspat. α ve β nın Frenet çatısı sırasıyla $\{T, N, B\}$ ve $\{T_\beta, N_\beta, B_\beta\}$ olmak üzere, α, β nın ana yön eğrisi olduğundan

$$\beta' = T_\beta = N$$

dır. Her tarafın türevini alıp T_β' ve N' ifadeleri

$$T_\beta' = N' = -\kappa T + \tau B$$

dir. Buradan β nın eğriliği

$$\sqrt{\left\langle \left(T_\beta', T_\beta' \right) \right\rangle}$$

olup gerekli işlemler yapıldığında

$$\begin{aligned} \kappa_\beta &= \sqrt{\langle -\kappa T + \tau B, -\kappa T + \tau B \rangle} \\ &= \sqrt{\kappa^2 \langle T, T \rangle - \kappa\tau \langle T, B \rangle - \kappa\tau \langle B, T \rangle + \tau^2 \langle B, B \rangle} \\ &= \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Asli normal vektör alanı N_β ve binormal vektör alanı B_β olmak üzere

$$\begin{aligned} N_\beta &= \frac{T_\beta^{'}}{\| T_\beta^{'} \|} \\ &= \frac{T_\beta^{'}}{\kappa_\beta} \\ &= \frac{1}{\kappa_\beta} T_\beta^{'} \\ &= \frac{1}{\kappa_\beta}(-\kappa T + \tau B) \\ &= \frac{-\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} T + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} B \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

ve

$$\begin{aligned} B_\beta &= T_\beta \times N_\beta \\ &= N \times \left(\frac{-\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} T + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} B\right) \\ &= \frac{-\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} N \times T + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} N \times B \\ &= \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} B + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} T \end{aligned}$$

olup, (3.1.7) daki ifadenin ikinci denklemin türevi alınarak

$$
\begin{aligned}
B_\beta^{'} &= \frac{(\tau T+\kappa B)^{'}\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}{\kappa^2+\tau^2}-\frac{(\sqrt{\kappa^2+\tau^2})^{'}(\tau T+\kappa B)}{\kappa^2+\tau^2}\\
&= \frac{(\tau^{'}T+T^{'}\tau+\kappa^{'}B+B^{'}\kappa)\sqrt{\kappa^2+\tau^2}-\frac{1}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}(\kappa\kappa^{'}+\tau\tau^{'})(\tau T+\kappa B)}{\kappa^2+\tau^2}\\
&= \frac{(\tau^{'}T+\tau\kappa N+\kappa^{'}B-\kappa\tau N)(\kappa^2+\tau^2)-(\kappa\kappa^{'}+\tau\tau^{'})(\tau T+\kappa B)}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}\\
&= \frac{(\tau^{'}T\kappa^2+\tau^2\tau^{'}T+\kappa^3\tau N+\tau^3\kappa N+\kappa^2\kappa^{'}B+\tau^2\kappa^{'}B}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}\\
&\quad+\frac{-\kappa^3\tau N-\kappa\kappa^{'}\tau T-\kappa^2\kappa^{'}B-\tau^2\tau^{'}T-\tau\tau^{'}\kappa B)}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}\\
&= \frac{\tau^{'}T\kappa^2+\tau^2\tau^{'}T+\kappa^2\kappa^{'}B+\tau^2\kappa^{'}B-\kappa\kappa^{'}\tau T-\kappa^2\kappa^{'}B-\tau^2\tau^{'}T-\tau\tau^{'}\kappa B}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}\\
&= \frac{\kappa\tau^{'}(\kappa T-\tau B)-\kappa^{'}\tau(\kappa T-\tau B)}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}\\
&= \frac{(\kappa\tau^{'}-\kappa^{'}\tau)(\kappa T-\tau B)}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}\\
&= \frac{\kappa\tau^{'}-\kappa^{'}\tau}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}(\kappa T-\tau B)
\end{aligned}
$$

dir. $\tau_\beta=-\left\langle B_\beta^{'},N_\beta\right\rangle$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
\tau_\beta &= \left\langle \left(\frac{\kappa\tau'-\kappa^{'}\tau}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}(\kappa T-\tau B)\right),\frac{-\kappa T+\tau B}{\sqrt{\kappa^2+\tau 2}}\right\rangle\\
&= -\frac{\kappa\tau^{'}-\kappa^{'}\tau}{(\kappa^2+\tau^2)^2}(-\kappa^2\langle T,T\rangle+\kappa\tau\langle T,B\rangle+\tau\kappa\langle B,T\rangle-\tau^2\langle B,B\rangle)\\
&= \frac{(\kappa\tau^{'}-\kappa'\tau)(\kappa^2+\tau^2)}{(\kappa^2+\tau^2)^2}\\
&= \frac{\kappa\tau'-\kappa'\tau}{\kappa^2+\tau^2}=\frac{\kappa^2}{\kappa^2+\tau^2}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'
\end{aligned}
$$

bulunur. □

Teorem 3.4. α ve β eğrilikleri sırasıyla κ, τ ve κ_β, τ_β olan $\mathbb{E}^3$ de iki eğri olsun. α, β nın bir asli donör eğrisi ise

$$\kappa(s)=\kappa_\beta(s)\left|\cos\left(\int\tau_\beta(s)ds\right)\right|$$

$$\tau(s) = \kappa_\beta(s)\sin(\int \tau_\beta(s)ds) \tag{3.1.8}$$

dir.

İspat. α p-donör eğrisinin teğeti

$$T = -\cos(\int \tau ds)N_\beta(s) + \sin(\int \tau ds)B_\beta(s)$$

yazılabileceğini daha önce de belirmiştik. [10] β, α nın doğal eşleniğidir.

$$T = -\cos(\int \tau_\beta ds)N_\beta(s) + \sin(\int \tau_\beta ds)B_\beta(s)$$

ifadesinin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} T^{'} &= \sin(\int \tau_\beta ds)\tau_\beta N_\beta - \cos(\int \tau_\beta)N_\beta^{'} \\ &\quad + \cos(\int \tau_\beta ds)\tau_\beta B_\beta(s) + B_\beta^{'}\sin\int \tau_\beta ds \\ &= \sin(\int \tau_\beta ds)\tau_\beta N_\beta - \cos(\int \tau_\beta ds)(-\kappa_\beta T_\beta + \tau_\beta B_\beta) \\ &\quad + \cos(\int \tau_\beta)\tau_\beta B_\beta - \tau_\beta N \sin\int \tau_\beta ds \end{aligned}$$

dir. Kısaca T' ifadesi

$$T^{'} = \cos(\int \tau_\beta ds)\kappa_\beta T_\beta$$

bulunur. Burada eğrilik fonksiyonun

$$\begin{aligned} \kappa &= \left\| T^{'} \right\| \\ &= \left\| \cos(\tau_\beta)\kappa_\beta T_\beta \right\| \\ &= \left| \kappa_\beta \cos(\int \tau_\beta ds) \right| \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi α nın binormal vektör alanı bulalım

$$T = -\cos(\int \tau_\beta ds)N_\beta(s) + \sin(\int \tau_\beta ds)B_\beta(s)$$

$$T' = \cos\left(\int \tau_\beta ds\right)\kappa_\beta T_\beta$$

$$N = T_\beta$$

eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
B &= T \times N \\
&= (-\cos(\int \tau_\beta ds)N(s) + \sin(\int \tau_\beta ds)B_\beta(s)) \times T_\beta \\
&= \cos(\int \tau_\beta ds)B_\beta + \sin(\int \tau_\beta ds)N_\beta
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Son ifadenin her iki tarafının türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
B^{'} &= -\sin(\int \tau_\beta ds)\tau_\beta B_\beta + B_\beta^{'} \cos(\int \tau_\beta ds) \\
&\quad + \cos(\int \tau_\beta ds)\tau_\beta N_\beta + N_\beta^{'} \sin(\int \tau_\beta ds) \\
&= -\sin(\tau_\beta ds)\tau_\beta B_\beta - \tau_\beta N_\beta \cos(\int \tau_\beta ds) \\
&\quad + \cos(\int \tau_\beta ds)\tau_\beta N_\beta + (-\kappa T + \tau B)\sin(\int \tau_\beta ds) \\
&= -\sin(\int \tau_\beta ds)\tau_\beta B_\beta - \kappa_\beta T_\beta \sin(\int \tau_\beta ds) \\
&\quad + \tau_\beta B_\beta \sin(\int \tau_\beta ds) \\
&= -\kappa_\beta T_\beta \sin(\int \tau_\beta ds)
\end{aligned}$$

dir. Buradan, α nın burulma fonksiyonu

$$\begin{aligned}
\tau &= -\left\langle B^{'}, N \right\rangle \\
&= \left\langle \kappa T_\beta \sin(\int \tau_\beta ds), T_\beta \right\rangle \\
&= \kappa_\beta \sin(\int \tau_\beta ds) \left\langle T_\beta, T_\beta \right\rangle \\
&= \kappa_\beta \sin(\int \tau_\beta ds)
\end{aligned}$$

dir. □

Sonuç 1. (3.1.8) ve (3.1.6) eşitliklerinden

$$\frac{\tau(s)}{\kappa_\beta(s)} = \sin(\int \tau_\beta(s) ds)$$

dir. Buradan

$$\sin^{-1}\left(\frac{\tau(s)}{\kappa_\beta(s)}\right) = \left(\int \tau_\beta(s)ds\right) \tag{3.1.9}$$

yazılır.

Sonuç 2. $\mathbb{E}^3$ de α, eğriliği κ ve burulması τ olan bir Frenet eğrisi ve α nın ana yön eğrisi β olsun. β nın eğrilik ve burulması sırasıyla κ_β ve τ_β olmak üzere

$$\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} = \frac{\kappa^2}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \tag{3.1.10}$$

dir.

İspat. β nın eğrilik ve burulması için

$$\tau_\beta = \frac{\kappa^2}{\kappa^2+\tau^2}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'$$

$$\kappa_\beta = \sqrt{\kappa^2+\tau^2}$$

ifadelerini daha önce bulmuştuk. Bu iki ifade oranlanırsa

$$\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} = \frac{\kappa^2}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \tag{3.1.11}$$

elde edilir. □

Uyarı 1. (3.1.9) dan genel bir helis ve slant helis incelemek için yaygın olarak kullanılır.[1, 4, 7]

3.1.2. Uygulamalar

Bu bölümde, ana yön eğrisi ve ana donör eğrisi arasındaki ilişkiyle, $\mathbb{E}^3$ de bazı eğrileri karakterize edilecektir.

β, α nın ana yön eğrisi ve γ, $\mathbb{E}^3$de β nın ana yön eğrisi olsun. Bu durumda γ eğrisi α nın ikinci ana yön eğrisi ve α da γ nın ikinci ana donör eğrisi olarak adlandırılır.

Bu kısımda bir genel helisin düzlemsel bir eğrinin asli donör eğrisi olduğu elde edilecektir.

Teorem 3.5. Aşağıdaki ifadeler denktir.

a)α Frenet eğrisi $\mathbb{E}^3$de bir genel helisdir.

b)α düzlemsel bir eğrinin ana donör eğrisidir.

c)α nın ana yön eğrisi bir düzlemsel bir eğridir.

Yukarıdaki teoremin (b) şıkkı bir düzlemsel eğriden bir genel helis elde edilebileceğini ifade eder. $\gamma(s) = (x(s), y(s), 0)$ birim hızlı düzlem eğrisini ele alalım. [8] den γ eğrisi

$$\begin{aligned} x(s) &= \int_0^s \cos\left(\int_0^\sigma \kappa_\gamma dt\right) d\sigma \qquad (3.1.12) \\ y(s) &= \int_0^s \sin\left(\int_0^\sigma \kappa_\gamma\right) d\sigma \end{aligned}$$

olacak şekilde ifade edilebilir. Ayrıca γ nın eğrilik fonksiyonu

$$\kappa_\gamma = \sqrt{(x''(s)^2 + (y''(s))^2}$$

ve Frenet vektör alanları

$$T_\gamma = \left(\cos\left(\int_0^s \kappa_\gamma(t)dt\right), \sin\left(\int_0^s \kappa_\gamma(t)dt\right), 0\right)$$

$$N_\gamma = \left(-\sin\left(\int_0^s \kappa_\gamma(t)dt\right), \cos\left(\int_0^s \kappa_\gamma(t)dt\right), 0\right)$$

$$B_\gamma = (0,0,1)$$

dir. Şimdi γ nın ana donör eğrisi olan β eğrisini bulalım.

$$T_\gamma = \gamma' = (x'(s), y'(s), 0)$$

$$\gamma'' = (x''(s), y''(s), 0)$$

$$\kappa_\gamma = \sqrt{(x''(s)^2 + (y''(s))^2}$$

olup

$$T'_\gamma = (-\sin(\int\limits_0^s \kappa_\gamma(t)dt)\kappa_\gamma(s), \cos(\int\limits_0^s \kappa_\gamma(t)dt)\kappa_\gamma, 0)$$

$$\begin{aligned} N_\gamma &= \frac{T'_\gamma}{\|T'_\gamma\|} = \frac{\left(-\sin(\int\limits_0^s \kappa_\gamma(t)dt)\kappa_\gamma, \cos(\int\limits_0^s \kappa_\gamma(t)dt\kappa_\gamma(s), 0\right)}{\kappa_\gamma(s)} \\ &= \left(-\sin(\int\limits_0^s \kappa_\gamma dt), \cos(\int\limits_0^s \kappa_\gamma dt), 0\right) \end{aligned}$$

$$B_\gamma = T_\gamma \times N_\gamma = (0,0,1)$$

dir. γ nın p-donör eğrisi

$$-\cos(\int \tau_\gamma ds)N_\gamma + \sin(\int \tau_\gamma ds)B_\gamma$$

vektör alanının integral eğrisidir . γ düzlemsel olduğundan $\tau_\gamma = 0$ dır. Böylece

$$\int \tau_\gamma ds$$

sabittir.

$$\int \tau_\gamma ds = c$$

sabit olsun. O halde

$$-\mathrm{cos}c N_\gamma(s) + \mathrm{sin}c \beta_\gamma(s) = -\cos c(-\sin(\int_0^s \kappa_\gamma(t)dt), \cos(\int_0^s \kappa_\gamma dt), 0) + \sin c(0,0,1)$$

$\mathrm{cos}c = a$ ve $\mathrm{sin}c = b$ olsun. Buradan

$$(a\sin\int_0^s \kappa_\gamma dt, -a\cos(\int_0^s \kappa_\gamma dt), 0) + (0,0,b) = (a\sin\int_0^s \kappa_\gamma dt, -a\cos\int_0^s \kappa_\gamma dt, b)$$

olup

$$\begin{aligned}\beta &= (a\sin\int_0^s \kappa_\gamma dt, -a\cos\int_0^s \kappa_\gamma dt, b) \\ &= \int_0^s \gamma'(s)ds = a\int_0^s \sin(\int_0^\sigma \kappa_\gamma dt)d\sigma, -a\cos\int_0^s (\int_0^\sigma \kappa_\gamma dt)d\sigma, bs)\end{aligned} \tag{3.1.13}$$

dir. Burada $a \neq 0$ ve b sabittir $a^2+b^2=1$ dir.

Bu açıklamalardan sonra aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 3. $\gamma = (x(s), y(s), 0)$ birim hızlı düzlemsel bir eğri olsun. γ nın ana donör eğrisi

$$\beta(s) = (ay(s), -ax(s), bs)$$

olup, β nın eğrilik ve burulması sırasıyla

$$\kappa_\beta = a\sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2}$$

$$\tau_\beta = b\sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2}$$

dir. Burada $a \neq 0$ ve b reel sabitler olup $a^2+b^2=1$ dir.

İspat.

$$\beta(s) = (ay(s), -ax(s), bs)$$

$a \neq 0$ b sabit olsun

$$a^2+b^2=1$$

dir. Burada β eğriliği olan genel bir helis için eğrilik ve burulmasını daha önceki yöntemden aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz

$$\kappa_\beta = \sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2}$$

$$\tau_\beta = b\sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2}$$

dir. Daha önce yazdıgımız teorem 3.3 den

$$\kappa_\beta = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$$

$$\tau_\beta = \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \tau^2}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'$$

biliyoruz. Diğer taraftan teorem 3.4 den

$$\kappa(s) = \kappa_\beta \left|\cos(\int \tau_\beta(s)ds\right|$$

$$\tau(s) = \kappa_\beta \sin(\int \tau_\beta ds)$$

ifadelerini yeni eğrilerimiz β ve γ için kullanırsak

$$\kappa_\gamma = \sqrt{\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2} \tag{3.1.14}$$

$$\begin{aligned} \tau_\gamma &= \frac{\kappa_\beta^2}{\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2}\left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\right)' \\ \tau_\gamma &= 0 \end{aligned}$$

$$\kappa_\beta = \kappa_\gamma \left|\cos(\int \tau_\gamma ds)\right|$$

$$\tau_\beta = \kappa_\gamma \sin(\int \tau_\gamma ds)$$

olur. (3.1.14) dan

$$\begin{aligned} \kappa_\gamma &= \sqrt{\kappa_\beta^2 (1 + \left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\right)^2)} \\ \kappa_\gamma &= \kappa_\beta \sqrt{1 + c^2} \end{aligned}$$

ifadesini düzenlersek

$$\begin{aligned}\kappa_\beta &= |a|\,\kappa_\gamma \\ \kappa_\beta &= |a|\sqrt{1+c^2}(\kappa_\beta)\end{aligned}$$

yazabiliriz. Burada $|a|$ değeri aşağıdaki gibidir.

$$|a| = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}$$

$$a = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+c^2}} dir$$

□

Sonuç 4. $\mathbb{E}^3$ de $\tau_\beta = c\kappa_\beta$ şartını sağlayan bir genel helis olsun. Bu durumda, β genel helisi

$$\frac{1}{A}\left(\int_0^s \sin(|A|\int_0^\sigma \kappa_\beta dt)d\sigma, -\int_0^s \cos(|A|\int_0^\sigma \kappa_\beta dt)d\sigma, cs\right)$$

biçiminde ifade edilir. Burada

$$A = \pm\sqrt{1+c^2}$$

dir ve c sabittir. [10]

[11] Bir küresel helisin genel denklemi

$$\beta_c(s) = (\cos s\cos(ws) + \frac{1}{w}\sin s\sin(ws), -\cos s\sin(ws) + \frac{1}{w}\sin s\cos(ws), \frac{1}{cw}\sin s)$$

olup burada

$$w = \frac{\sqrt{1+c^2}}{c}, (c \neq 0)$$

dir.

Teorem 3.6. $\tau_\beta = c\kappa_\beta$ olmak üzere $\mathbb{E}^3$de β birim hızlı küresel helisin κ_β eğriliği ve konum vektörü sırasıyla

$$\kappa_\beta(s) = \frac{\kappa_0}{\sqrt{-c^2\kappa_0^2 s^2 - 2d\kappa_0^2 + 1}} \tag{3.1.15}$$

$$\beta(s) = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\left(\int \sin\kappa(s)ds, -\int \cos\kappa(s)ds, cs+b\right) \tag{3.1.16}$$

dir. Burada

$$\kappa_0 = \kappa(0), \quad \kappa(s) = \frac{\sqrt{1+c^2}}{|c|}\sin^{-1}\left(\frac{\kappa_0(c^2 s+d)}{\sqrt{c^2+d^2\kappa_0^2}}\right)$$

b ve d sabit ve

$$s \in \left(\frac{1}{c^2}\left\{-d-\sqrt{d^2+\left(\frac{c}{\kappa_0}\right)^2}\right\}, \frac{1}{c^2}\left(-d+\sqrt{d^2+\left(\frac{c}{\kappa_0}\right)^2}\right)\right)$$

dir.

İspat. $\tau_\beta = c\kappa_\beta$ olmak üzere β bir helis olsun. β nın küresel olması için gerek ve şart [8]

$$c = \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} = \left(\frac{\kappa'_\beta}{\tau\kappa^2}\right)'$$

veya buna denk olarak

$$c^2 = \left(\frac{\kappa'_\beta}{\kappa_\beta^3}\right)' \tag{3.1.17}$$

diferansiyel denklemin saglanmasıdır.

$$f(s) = \left(-\frac{1}{2\kappa_\beta^2(s)}\right)$$

denirse

$$c^2 = f''(s)$$

olur.

$$f(0) = \frac{-1}{2\kappa_\beta^2(0)}$$

başlangıc koşuluyla denklemin çözümü

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{1}{2}c^2s^2+ds-\frac{1}{2\kappa_\beta^2(0)} \\ &= -\frac{1}{2\kappa^2(s)} \end{aligned}$$

dir. d bir sabit $\kappa_0=\kappa(0)$ dır.Buradan

$$\kappa_\beta(s)=\frac{\kappa_0}{\sqrt{-c^2\kappa_0^2s^2-2\kappa_0(s)d+1}} \tag{3.1.18}$$

olarak elde edilir. ((3.1.18)) ifadesinin integrali alınırsa

$$\begin{aligned} \int \kappa_\beta(s)ds &= \int \frac{\kappa_0}{\sqrt{-c^2\kappa_0^2s^2-2\kappa_0^2sd+1}}ds \\ &= \int \frac{\kappa_0}{\sqrt{c^2\kappa_0^2(-s^2-2\frac{sd}{c^2}-\frac{d^2}{c^4}+\frac{d^2}{c^4}+\frac{1}{c^2\kappa_0^2})}}ds \\ &= \int \frac{\kappa_0}{|c|\,\kappa_0\sqrt{\frac{d^2\kappa_0^2+c^2}{c^4\kappa_0^2}-(s^2+2s\frac{d}{c^2}+\frac{d^2}{c^4})}}\,ds \\ &= \int \frac{\kappa_0}{|c|\sqrt{\frac{d^2\kappa_0^2+c^2}{c^4\kappa_0^2}-(s+\frac{d}{c^2})^2}} \\ &= \frac{1}{|c|}\arcsin\left(\frac{s+\frac{d}{c^2}}{\sqrt{\frac{d^2\kappa_0^2+c^2}{c^4\kappa_0^2}}}\right) \\ &= \frac{1}{|c|}\arcsin\left(\frac{\kappa_0\left(c^2s+d\right)}{\sqrt{c^2+d^2\kappa_0^2}}\right) \end{aligned}$$

bulunur. □

Küresel helis için aşağıdaki örneği verebiliriz.

Örnek 1. (3.1.18) de $c=\frac{1}{\sqrt{3}}, \kappa_0=1$ ve $d=0$ alınırsa o zaman

$$\kappa(s)=2\sin^{-1}\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right)$$

bulunur ve $s\in(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ dür.

$$
\begin{aligned}
\kappa(s) &= \frac{\sqrt{1+c^2}}{|c|}\sin^{-1}\left(\frac{\kappa_0\left(c^2 s+d\right)}{\sqrt{c^2+d^2\kappa_0^2}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}}{\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right|}\sin^{-1}\left(\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 s+0}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+0.1^2}}\right) \\
&= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sin^{-1}\left(\frac{\frac{1}{3}s}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right) = 2\sin^{-1}\frac{s}{\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

$s \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ dür.

$$
\begin{aligned}
\kappa(s) &= \frac{\sqrt{1+c^2}}{|c|}\sin^{-1}\left(\frac{\kappa_0\left(c^2 s+d\right)}{\sqrt{c^2+d^2\kappa_0^2}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}}{\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right|}\sin^{-1}\left(\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 s+0}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+0.1^2}}\right) \\
&= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sin^{-1}\left(\frac{\frac{1}{3}s}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right) = 2\sin^{-1}\frac{s}{\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

olur.

$$
\beta(s) = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}(\int \sin\left(\kappa(s)ds, -\int \cos\kappa(s))ds, cs+b\right)
$$

ifadesinde $\kappa(s)$ yerine

$$
\kappa(s) = 2\sin^{-1}\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right)
$$

yazılırsa

$$
\beta(s) = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\left(\int \sin(2\sin^{-1}\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right)ds, -\int \cos(2\sin^{-1}(\frac{s}{\sqrt{3}})ds, cs+b\right)
$$

$c = \frac{1}{\sqrt{3}}$olduğundan

$$\beta(s) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\int \sin(2\sin^{-1}(\frac{s}{\sqrt{3}})ds, -\int \cos(2\sin^{-1}(\frac{s}{\sqrt{3}})ds, \frac{s}{\sqrt{3}} + b\right)$$

$$\begin{aligned} \sin^{-1}(\frac{s}{\sqrt{3}}) &= a \\ \frac{s}{\sqrt{3}} &= \sin a \end{aligned}$$

eşitliğini yazabiliriz.

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

açılımından yararlanarak

$$\sin(2a) = 2\frac{s}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3-s^2}}{\sqrt{3}} = \frac{2s\sqrt{3-s^2}}{3}$$

buluruz.

$$\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$$

eşitliğinden yararlanarak aşağıdaki ifadeleri cok kolay bir şekilde yazmak mümkündür.

$$\cos(2a) = \frac{2(3-s^2)}{3} - 1 = 1 - \frac{2}{3}s^2$$

$$\sin\left(2\sin^{-1}(\frac{s}{\sqrt{3}})\right) = \frac{2s\sqrt{3-s^2}}{3}$$

$$\cos\left(2\sin^{-1}\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right)\right) = 1 - \frac{2}{3}s^2$$

olur. O halde bulduğumuz değerleri $\beta(s)$ denkleminde yerine yazarsak

$$\beta(s) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\int \frac{2}{3}s\sqrt{3-s^2}ds, -\int (1 - \frac{2}{3}s^2)ds, \frac{s}{\sqrt{3}} + b\right)$$

buluruz. Şimdi $\beta(s)$ nın birim hızlı olduğunu gösterelim.

$$\beta'(s) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2}{3}s\sqrt{3-s^2}, \frac{2}{3}s^2 - 1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\begin{aligned}\left\|\beta'(s)\right\| &= \frac{3}{4}(\frac{4}{9}s^2(3-s^2) + \frac{4}{9}s^4 - \frac{4s^2}{3} + 1 + \frac{1}{3} \\ &= \frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}s^2 - \frac{4}{9}s^4 + \frac{4}{9}s^4 - \frac{4s^2}{3} + 1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{4}\frac{4}{3} = 1\end{aligned}$$

böylece basit bir integralle küresel helisi

$$\begin{aligned}\beta(s) &= (x(s), y(s), z(s)) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}(-\frac{2}{9}(3-s^2)^{\frac{3}{2}}, \frac{2s^3}{9} - s, \frac{s}{\sqrt{3}})\end{aligned}$$

şeklinde yazarız.

3.1.3. Slant Helisler

$\mathbb{E}^3$ de bir slant helis her noktasındaki asli normal vektör alanı ile sabit bir vektör arasındaki açı sabit olan bir Frenet eğrisidir..

Ayrıca $\mathbb{E}^3$ de eğriliği κve burulması τ olan bir α slant helis

$$\frac{\kappa^2}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = c \tag{3.1.19}$$

diferensiyel denklemi ile karakterize edilir. Burada c sabittir. Teorem3.5 ve Sonuç(2) ifadeleri gözönüne alındığında aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.7. Aşağıdaki ifadeler denktir.

1. Bir frenet eğrisi α $\mathbb{E}^3$ de slant helistir.

2. α $\mathbb{E}^3$ deki genel bir helisin ana donör eğrisidir.

3. α bir düzlem eğrisinin ikinci bir ana donör eğrisidir.

4. α nın ana yönlendirme eğrisi, $\mathbb{E}^3$ de genel bir helistir.

5. α nın ikinci ana yön eğrisi bir düzlem eğrisidir.

Genel bir helis β [10] dan $\mathbb{E}^3$ de bir slant helis α inşa edilebilir. Kabul edelim ki

$$\beta(s) = (\frac{1}{A}\left(\int_0^s \sin(\frac{1}{a}(|A|\int_0^\sigma \kappa_\beta(t))dt)\right)d\sigma, -\int_0^s \cos(|A|\int_0^\sigma \kappa_\beta(t)dt)d\sigma, cs)$$

olsun. β eğrisi

$$A = \sqrt{1+c^2}$$

$$a = \frac{\mp 1}{\sqrt{1+c^2}}$$

$$a^2 + b^2 = 1$$

$$c = \frac{b}{a}$$

olmak üzere

$$\beta(s) = (\frac{1}{A}\left(\int_0^s \sin(\frac{1}{a}(|A|\int_0^\sigma \kappa_\beta(t))dt)\right)d\sigma, -\int_0^s \cos(|A|\int_0^\sigma \kappa_\beta(t)dt)d\sigma, \frac{b}{a}s) \tag{3.1.20}$$

biçiminde yazılabilir. Şimdi β eğrisinin Frenet vektör alanlarını belirleyelim. (3.1.20) ifadesinin türevi alınırsa

$$\beta'(s) = T_\beta(s) = (a\sin\frac{1}{a}\int_0^s \kappa_\beta(t)dt, -a\cos(\frac{1}{a}\int_0^s \kappa_\beta(t)dt), b)$$

dir. β eğrisinin normal vektör alanı

$$\begin{aligned} N_\beta(s) &= (a\frac{1}{a}\cos(\frac{1}{a}\int_0^s \kappa_\beta(t)dt, -a\frac{1}{a} - \sin\frac{1}{a}\int_0^s \kappa_\beta(t)dt, 0) \\ &= (\cos(\frac{1}{a}\int_0^s \kappa_\beta(t)dt, \sin\frac{1}{a}\int_0^s \kappa_\beta(t)dt, 0) \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} B_\beta(s) &= T_\beta(s) \times N_\beta(s) \\ &= (-b\sin\frac{1}{a}\int_0^s \kappa_\beta(t)dt, b\cos(\frac{1}{a}\int_0^s \kappa_\beta(t)dt), 0) \end{aligned}$$

dir. Böylece $\mathbb{E}^3$deki genel bir helisin ana yönlendirme eğrisi olarak slant bir helis inşa edilebilir.

$$
\begin{aligned}
\alpha' &= -\cos\int \tau_\beta ds N_\beta + \sin\int \tau ds B_\beta \\
&= -\cos\int \tau ds(\cos(\frac{1}{a}\int_0^s \kappa_\beta(t)dt), \cos(\frac{1}{a}\int_0^s \kappa_\beta(t)dt), 0) \\
&\quad + \sin\int \tau ds(-b\sin\frac{1}{a}\int_0^s \kappa_\beta(t)dt, b\cos(\frac{1}{a})\int_0^s \kappa_\beta(t)), a) \\
&= (-\cos\int \tau ds(\cos(\frac{1}{a}\int_0^s \kappa_\beta(t)dt) - b\sin\int \tau ds \sin\frac{1}{a}\int_0^s \kappa_\beta(t)dt \\
&\quad , -\cos\int \tau ds \sin\frac{1}{a}\int_0^s \kappa_\beta(t)dt + b\sin\int \tau ds\cos(\frac{1}{a}\int_0^s \kappa_\beta(t)dt) \\
&\quad , a\sin\int \tau ds)
\end{aligned}
$$

olup her tarafın integralini alırsak

$$
\begin{aligned}
\int \alpha'(s)ds &= \alpha(s) \\
&= (-\int_0^s \cos\int_0^\sigma \tau_B(t)dt\cos(\frac{1}{a}\int_0^s \kappa_\beta(t)dt) \\
&\quad -b\sin\int_0^\sigma \tau_B(t)dt\sin\frac{1}{a}\int_0^s \kappa_\beta(t)dt, \\
&\quad -\int_0^s \cos\int_0^\sigma \tau_B(t)dt\sin(\frac{1}{a}\int_0^s \kappa_\beta(t)dt \\
&\quad +b\sin(\int_0^\sigma \tau_B(t)dt)\cos\frac{1}{a}\int_0^\sigma \kappa_\beta(t)dt, \\
&\quad a\sin\int_0^s(\sin\int_0^\sigma \tau_B(t)dt)d\sigma)
\end{aligned}
$$

$a \neq 0 \quad b$ sabitler için $a^2 + b^2 = 1$dir.Bu açıklamalardan sonra aşağıdaki sonuç elde edilebilir.

Sonuç 5. $\gamma(s) = (x(s), y(s), 0)$ bir birim hızlı düzlem eğrisi olsun.γ nın ikinci ana donör eğrisi $\alpha(s)$ tarafından verilen

$$
\begin{aligned}
\alpha(s) &= (-\textstyle\int_0^s \cos(\int_0^\sigma b\kappa_\beta(t)dt)x'(t) - b\sin\int_0^\sigma b\kappa_\beta(t)dt y'(t)d\sigma), \\
&\quad -\textstyle\int_0^s \cos(\int_0^\sigma b\kappa_\beta(t)dt)y'(t) + b\sin(\int_0^\sigma b\kappa_\beta(t)dt)x'(t)d\sigma, \\
&\quad a\textstyle\int_0^s(\sin\int_0^\sigma b\kappa_\beta(t)dt)d\sigma)
\end{aligned} \tag{3.1.21}
$$

buradan

$$\kappa_\beta(s) = \sqrt{[x''(s)]^2 + [y''(s)]^2}$$

$a \neq 0 \quad b$ sabitiyle birlikte $a^2+b^2=1$ α bir slant helis ve eğriliği

$$\kappa = a\kappa_\beta \left|\cos(b\int \kappa_\beta ds)\right|$$

ve burulması

$$\tau = a\kappa_\beta \sin(b\kappa_\beta ds)$$

olur. Burada slant helis ifadesine buluyoruz. [1]Teorem (3.3) ve sonuc (2) den aşağıdaki sonuç ifade edilebilir.

Sonuç 6. β, eğriliği κ ve burulması τ olan ve

$$\frac{\kappa^2}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = c$$

şartını sağlayan bir slant helis olmak üzere β eğrisi

$$\begin{aligned}
&(\int_0^s \frac{|\tau|}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\cos\left(|A|\int_0^\sigma \sqrt{\kappa^2+\tau^2}\right) - \frac{c\kappa}{A\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\sin\left(|A|\int_0^\sigma \sqrt{\kappa^2+\tau^2}\right)d\sigma,\\
&\int_0^s \frac{|\tau|}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\sin\left(|A|\int_0^\sigma \sqrt{\kappa^2+\tau^2}\right) + \frac{c\kappa}{A\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\cos\left(|A|\int_0^\sigma \sqrt{\kappa^2+\tau^2}\right)d\sigma,\\
&\frac{1}{A}\int_0^s \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}d\sigma)
\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Burada $A = \mp\sqrt{1+c^2}$ dır.

Uyarı 2. Sonuç(6) düzlemsel bir eğirden bir slant helis elde etme yöntemidir. E^3de dairesel helis yarıçapı r olan bir $\gamma(s) = (r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}, 0)$ birim çemberinden elde edilebilir. γ nın eğriliği

$$\begin{aligned}
\kappa_\gamma(s) &= \|\gamma''\|\\
&= \sqrt{\frac{1}{r^2}\cos^2\frac{s}{r} + \frac{1}{r^2}\sin^2\frac{s}{r}}\\
&= \frac{1}{r}
\end{aligned}$$

ve

$$x'(s) = -\sin\frac{s}{r}$$
$$y'(s) = \cos\frac{s}{r}$$

olup (3.1.21) yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= (-\textstyle\int_0^s \cos(\int_0^\sigma \frac{b}{r}dt) - \sin\frac{s}{r} - b\sin(\int_0^\sigma \frac{b}{r}dt)\cos\frac{s}{r}d\sigma, \\ &\quad -\textstyle\int_0^s \cos(\int_0^\sigma \frac{b}{r}dt)\cos\frac{s}{r} + b\sin(\int_0^\sigma \frac{b}{r}dt), \\ &\quad -\sin\frac{s}{r}d\sigma, a\textstyle\int_0^s \sin(\int_0^\sigma \frac{b}{r}dt)d\sigma) \end{aligned} \tag{3.1.22}$$

elde edilir. (3.1.22) ifadesindeki integraller alınıp gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= (-r(1+2c^2)\cos\frac{s}{r}\cos\frac{cs}{r\sqrt{1+c^2}} - 2rc\sqrt{1+c^2}\sin\frac{c}{r}\sin\frac{cs}{r\sqrt{1+c^2}}, \\ &\quad -r(1+2c^2)\sin\frac{s}{r}\cos\frac{cs}{r\sqrt{1+c^2}} + 2rc\sqrt{1+c^2}\cos\frac{s}{r}\sin\frac{cs}{r\sqrt{1+c^2}}, \\ &\quad \frac{r}{c}\cos\frac{cs}{r\sqrt{1+c^2}}) \end{aligned} \tag{3.1.23}$$

biçiminde elde edilir. Burada $c = \frac{b}{a}$ dir. (3.1.23) ile elde edilen dairesel slant helisin eğrilik ve burulması sırasıyla

$$\kappa(s) = \frac{1}{r\sqrt{1+c^2}}\cos(\frac{\sigma}{r\sqrt{1(+c^2}})$$

ve

$$\tau(s) = \frac{1}{r\sqrt{1+c^2}}\sin(\frac{\sigma}{r\sqrt{1(+c^2}})$$

dir.

Yukarıdaki açıklamalardan aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 7. $r > 0$ ve c birer sabit olmak üzere E^3 de herhangi dairesel slant helis (3.1.23) ifadesi ile elde edilebilir.

Sonuç 8. $\mathbb{E}^3$ te (3.1.23) ifadesi ile elde edilen bir dairesel slant helisin kapalı olması için gerek ve yeter şart $\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$ ifadesinin rasyonel olmasıdır.

Örnek 2. $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ve $r = 1$ alınarak elde edilen dairesel slant helis $\alpha_1$olsun.O halde α bir çemberin ikinci ana donör eğrisidir.Çünkü $(\cos s, \sin s)$ kapalı bir eğridir .

$r=1$ ve $c=\frac{1}{\sqrt{3}}$ (3.1.23) da yerine yazalım.

$$
\begin{aligned}
\alpha_1(s) &= (-1\left(1+\tfrac{2}{3}\right)\cos s\cos\tfrac{1}{\sqrt{3}}\tfrac{s}{\sqrt{1+\frac{1}{3}}}-2\tfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1+\tfrac{1}{3}}\sin s\sin\tfrac{1}{\sqrt{3}}\tfrac{s}{\sqrt{1+\frac{1}{3}}}, \\
&\quad -1\left(1+\tfrac{2}{3}\right)\sin s\cos\tfrac{1}{\sqrt{3}}\tfrac{s}{\sqrt{1+\frac{1}{3}}}+\tfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{1+\tfrac{1}{3}}\cos s\sin\tfrac{1}{\sqrt{3}}\tfrac{s}{\sqrt{1+\frac{1}{3}}}, \\
&\quad \sqrt{3}\cos\tfrac{1}{\sqrt{3}}\tfrac{s}{\sqrt{1+\frac{1}{3}}}) \\
&\quad -\tfrac{5}{3}\cos s\cos\tfrac{s}{2}-\tfrac{4}{3}\sin s\sin\tfrac{s}{2}, \\
&= -\tfrac{5}{3}\sin s\cos\tfrac{s}{2}+\tfrac{4}{3}\cos s\sin\tfrac{s}{2}, \\
&\quad \sqrt{3}\cos\tfrac{s}{2} \\
&= \left(\begin{array}{c} -\frac{5}{6}(\cos\frac{3s}{2}+\cos\frac{s}{2})-\frac{4}{6}(\cos\frac{s}{2}-\cos\frac{3s}{2}), \\ -\frac{5}{6}(\sin\frac{3s}{2}+\sin\frac{s}{2})+\frac{4}{6}(\sin\frac{3s}{2}-\sin\frac{s}{2}), \\ \sqrt{3}\cos\frac{s}{2} \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c} -\frac{5}{6}\cos\frac{3s}{2}-\frac{5}{6}\cos\frac{s}{2}-\frac{4}{6}\cos\frac{s}{2}+\frac{4}{6}\cos\frac{3s}{2}, \\ -\frac{5}{6}\sin\frac{3s}{2}-\frac{5}{6}\sin\frac{s}{2}+\frac{4}{6}\sin\frac{3s}{2}-\frac{4}{6}\sin\frac{s}{2}, \sqrt{3}\cos\frac{s}{2} \end{array}\right) \\
&= \left(-\tfrac{1}{6}\cos\tfrac{3s}{2}-\tfrac{9}{6}\cos\tfrac{s}{2}, -\tfrac{1}{6}\sin\tfrac{3s}{2}-\tfrac{9}{6}\sin\tfrac{s}{2}, \sqrt{3}\cos\tfrac{s}{2}\right) \\
&= -(\tfrac{1}{6}\cos\tfrac{3s}{2}+\tfrac{3}{2}\cos\tfrac{s}{2}, \tfrac{1}{6}\sin\tfrac{3s}{2}+\tfrac{3}{2}\sin\tfrac{s}{2}, -\sqrt{3}\cos\tfrac{s}{2})
\end{aligned}
$$

benzer şekilde $c=1$ ve $r=2$ için kapalı olmayan dairesel slant helis örneği verilebilir. $c=1$ ve $r=2$ yazılırsa (4.9) da

$$
\begin{aligned}
\alpha_2(s) &= \Big(-2(1+2)\cos\tfrac{s}{2}\cos\tfrac{s}{2\sqrt{2}}-4\sqrt{2}\sin\tfrac{s}{2}\cos\tfrac{s}{2\sqrt{2}}, \\
&\quad -2(1+2)\sin\tfrac{s}{2}\cos\tfrac{s}{2\sqrt{2}}4\sqrt{2}\cos\tfrac{s}{2}\sin\tfrac{s}{2\sqrt{2}}, 2\cos\tfrac{s}{2\sqrt{2}}\Big) \\
&\quad \Big(-2(3\cos\tfrac{s}{2}\cos\tfrac{s}{2\sqrt{2}}+2\sqrt{2}\sin\tfrac{s}{2}\cos\tfrac{s}{2\sqrt{2}}, \\
&= 3\sin\tfrac{s}{2}\cos\tfrac{s}{2\sqrt{2}}-2\sqrt{2}\cos\tfrac{s}{2}\sin\tfrac{s}{2\sqrt{2}}, -\cos\tfrac{s}{2\sqrt{2}}\Big)
\end{aligned}
$$

bulunur.

3.1.4. PD-Rektifiyan Eğriler ve Bertrand Eğrileri

Bu bölümde, $\mathbb{E}^3$ de PD-Rektifiyan eğrileri tanımlanarak bu eğriler Bertrand eğrisinin ana yön eğrisi ile karakterize edilecektir. B-Y Chen, $\mathbb{E}^3$ de bir eğrinin her noktasındaki konum vektörü rektifiyan düzlemde yatıyorsa bu eğriler rektifiyan eğriler olarak tanımlamış ve bu eğrilerin bazı özelliklerini incelemiştir. [2, 3]

$\mathbb{E}^3$de burulması sıfırdan farklı bir α eğrisi için α nın Bertrand eşleniği, α ile aynı normal vektör alanına sahip bir eğridir. α eğrisine de bir Bertrand eğrisi denir. Ayrıca α nın bir Bertrand eğrisi olabilmesi için gerek ve yeter şart a ve b sıfırdan farklı reel sabitler olmak üzere

$$a\kappa + b\tau = 1$$

olmasıdır.

$\beta, \mathbb{E}^3$de bir Frenet eğrisi ve α, β nın bir PD eğrisi olsun.$\mathbb{E}^3$ de burulması sıfırdan farklı bir β eğrisinin konum vektörü α PD eğrisinin rektifiyan düzleminde yatıyorsa, β ye PD rektifiyan eğri adı verilir.

β PD rektifiyan eğrisi için α eğrisi λ ve μ sıfırdan farklı fonksiyonlar olmak üzere

$$\beta(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)B(s) \tag{3.1.24}$$

biçiminde yazılabilir. Burada $\{T, N, B\}$, α nın Frenet çatısıdır.

$$T = -\cos(\int \tau_\beta ds)N_\beta + \sin(\int \tau_\beta ds)B_\beta$$

ve

$$B = \sin(\int \tau_\beta ds)N_\beta + \cos(\int \tau_\beta ds)B_\beta$$

ifadeleri (3.1.24) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \beta(s) &= \lambda(s)(-\cos(\tau_\beta ds)N_\beta + \sin(\int \tau_\beta ds)B_\beta + \mu(s)(\sin(\tau_\beta ds)N_\beta + \cos(\int \tau_\beta ds)B_\beta \quad (3.1.25) \\ &= \left[-\lambda(s)\cos(\tau_\beta ds) + \mu(s)(\sin(\tau_\beta ds)\right] N_\beta + \left[\lambda(s)\sin(\int \tau_\beta ds) + \mu(s)\cos(\int \tau_\beta ds)\right] B_\beta \end{aligned}$$

dir. (3.1.25) ifadesinin türevi alınıp ve β nın Frenet denklemleri kullanılarak

$$
\begin{aligned}
T_\beta &= \left[-\lambda'(\cos\int\tau_\beta ds)+\lambda\sin(\int\tau_\beta ds)\tau+\mu'(s)\sin(\int\tau_\beta ds)+\mu s)\tau\right]N_\beta \\
&+\left[-\lambda(\cos\int\tau_\beta ds)+\mu\sin(\int\tau_\beta ds)(-\kappa_\beta T_\beta+\tau_\beta B_\beta)\right] \\
&+\left[\lambda'\sin(\int\tau_\beta+\lambda\cos(\int\tau_\beta ds)\tau+\mu'(s)\cos\int\tau_\beta ds-\mu\sin(\int\tau_\beta ds)\tau\right]B_\beta \\
&+\left[\lambda\sin(\int\tau_\beta ds)+\mu\cos(\int\tau_\beta ds)\right]-\tau_\beta N_\beta \\
&= \kappa_\beta(\mu\cos(\int\tau_\beta ds)-\lambda\sin(\int\tau_\beta ds))T_\beta \\
&+(-\mu'\cos(\int\tau_\beta ds)+\lambda'\sin(\int\tau_\beta ds))N_\beta \\
&+(\mu'\sin(\int\tau_\beta ds)+\lambda'\cos(\int\tau_\beta ds))B_\beta
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan

$$\lambda'(s)=\mu'(s)=0 \tag{3.1.26}$$

ve

$$\kappa_\beta(\mu\cos(\int\tau_\beta ds)-\lambda\sin(\int\tau_\beta ds))=1 \tag{3.1.27}$$

olduğu açıktır. (3.1.26) ifadesinden λ ve μ sıfırdan farklı sabitlerdir.

$$\tan\theta=\frac{\mu}{\lambda} \tag{3.1.28}$$

olsun. (3.1.27) eşitliğinden

$$\lambda\cos(\int\tau_\beta ds)-\mu\sin(\int\tau_\beta ds)=\frac{1}{\kappa_\beta}$$

olup son ifadenin her tarafı $\sqrt{\lambda^2+\mu^2}$ bölünürse

$$\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\cos(\int\tau_\beta ds)-\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\sin(\int\tau_\beta ds)=\frac{1}{\kappa_\beta\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} \tag{3.1.29}$$

bulunur. (3.1.28) eşitliğinden

$$\cos\theta=\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}$$

ve

$$\sin\theta = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}$$

olup bu ifadeler (3.1.29) de yerine yazılarak

$$\sin\theta\cos(\int \tau_\beta ds) - \cos\theta\sin(\int \tau_\beta ds) = \frac{1}{\kappa_\beta\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}$$

eşitliği elde edilir. Trigonometri toplam fark formüllerinden

$$\sin(\theta - \int \tau_\beta ds)) = \frac{1}{\kappa_\beta\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}$$

ifadesini buluruz. Buradan

$$\arcsin\frac{1}{\kappa_\beta\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} = \theta - \int \tau_\beta ds \tag{3.1.30}$$

eşitliğini buluruz.Şimdi (3.1.30) ifade her tarafın türevi alınır ve $a=\mu^2+\lambda^2$ denirse

$$\tau_\beta = \frac{\kappa'_\beta(s)}{\kappa_\beta\sqrt{a\kappa_\beta^2-1}} \tag{3.1.31}$$

olarak elde edilir. Ayrıca Teorem(3.4) ve (3.1.31) dan $\varepsilon = sgn\left(\cos(\int \tau_\beta ds)\right)$ olmak üzere

$$\varepsilon\mu\kappa(s) - \lambda\tau(s) = 1$$

dir.

Şimdi $\mathbb{E}^3$ de PD-rektifiyan eğrileri karakterize eden aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

Teorem 3.8. β, $\mathbb{E}^3$ de bir Frenet eğrisi ve .α, β nın ana donör eğrisi olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

1. β bir PD-rektifiyan eğridir.

2. β eğriliği ve burulması sıfırdan farklı olan ve bir a pozitif sabiti için (3.1.31) eşitliğini sağlayan bir Frenet eğrisidir.

3. β nın konum vektörü her zaman normal düzlemde bulunur.

4. α bir Bertrand eğrisidir ve β küresel eğridir.

İspat. (3.1.24) ve (3.1.31) ten 1 2 ve 4 ifadeleri birbirine denktir. Bu nedenle teoremin ispatını tamamlamak için 3 ile 2 nin denk olduğunu göstermek yeterlidir. β nın konum vektörü her zaman normal düzlemde yatan bir eğri olmak üzere sıfırdan farklı $\mu(s)$ ve $\lambda(s)$ fonksiyonları için β eğrisi aşağıdaki gibi yazılır.

$$\beta(s) = \lambda(s)N_\beta + \mu(s)B_\beta(s)$$

Buradan

$$\begin{aligned} T_\beta(s) &= \beta'(s) \\ &= \lambda'(s)N_\beta + \lambda(s)N'_\beta + \mu'(s)B_\beta(s) + \mu(s)B'_\beta(s) \\ &= -\kappa_\beta\lambda(s)T_\beta(s) + (\lambda'(s) - \tau\mu(s))N_\beta + (\lambda(s)\tau_\beta(s) + \mu'(s))B_\beta \end{aligned}$$

olup buradan

$$\begin{cases} \kappa_\beta\lambda(s) = -1 \\ \lambda' - \mu\tau = 0 \\ \lambda(s)\tau_\beta + \mu' = 0 \end{cases} \tag{3.1.32}$$

denklemleri eide edilir. (3.1.32) ifadesinde 2. ve 3. denklemler sırasıyla λ ve μ ile çarpılarak

$$\lambda\lambda' - \lambda\mu\tau_\beta = 0 \tag{3.1.33}$$

ve

$$\mu\lambda\tau_\beta + \mu\mu' = 0 \tag{3.1.34}$$

ifadeleri bulunur. (3.1.33) ve (3.1.34) ifadeleri taraf tarafa toplanırsa

$$\lambda\lambda' + \mu\mu' = 0$$

elde edilir. Bu ifadenin de integrali alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\mu^2}{2} &= \frac{c}{2} \\ \lambda^2 + \mu^2 &= c \end{aligned}$$

$c > 0$ elde edilir. Böylece

$$\kappa_\beta = -\frac{1}{\lambda(s)}$$

eğriliği ve

$$\tau_\beta = \frac{\lambda'(s)}{\mu(s)}$$

burulmasıdır. κ_β ve τ_β (3.2.48) kullanarak $\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} = \left(\frac{\kappa'}{\kappa_\beta^{-2}\tau_\beta}\right)'$ olur. Bu da β nın küresel olduğu anlamına gelir. □

3.2. Küresel Eğriler ve Eşlenik Eğrileri

Bu bölümde üç boyutlu Öklid uzayında küresel olmayan bir eğrinin küresel eşleniği, radyal fonksiyonu ve küresel radyal fonksiyonları tanıtılacaktır. Bu kavramlar yardımıyla bazı özel eğriler ve onların küresel eşlenikleri arasındaki ilişkiler incelenecektir. Bir $\alpha(s)$ eğrisinin s yay uzunluğu parametresine göre Frenet çatısı

$$\{T(s), N(s), B(s)\}$$

olmak üzere α nın genelleştirilmiş eşleniği

$$\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s) + v(s)B(s) \tag{3.2.1}$$

dir.(3.2.1) ifadesinin türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha}'(s) &= \alpha'(s) + \lambda'(s)T(s) + T'(s)\lambda(s) + \mu'(s)N + \mu(s)N'(s) + v'(s)B(s) + v(s)B'(s) \\
&= T + \lambda'(s)T(s) + \kappa N\lambda(s) + \mu'(s)N + \mu(s)(-\kappa T + \tau B) + v'(s)B(s) - v(s)\tau B \\
&= (1 + \lambda'(s) - \kappa\mu(s))T + (\kappa\lambda(s) + \mu'(s) - v(s)\tau)N + (\mu(s)\tau + v'(s))B
\end{aligned}$$

dir. Buradan α nın $\bar{\alpha}$ eşlenik eğrisinin sabit nokta olması için gerek ve yeter şart

$$\lambda'(s) = \kappa\mu(s) - 1$$

$$\mu'(s) = -\kappa\lambda(s) + v(s)\tau \tag{3.2.2}$$

$$v'(s) = -\mu(s)\tau$$

olmasıdır. Burada $\kappa(s)$ eğrilik fonksiyonu ve $\tau(s)$, $\alpha(s)$ nin burulma fonksiyonudur.[15, 18]

Tanım 3.2.1. $\alpha(s)$, $\mathbb{E}^3$ de bir eğri olmak üzere

$$\bar{\alpha}(s) = \frac{1}{\sqrt{\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle}} \alpha''(s) = N(s) \tag{3.2.3}$$

küresel eğrisine α nın eşlenik eğirisi denir.

3.2.1. 3 Boyutlu Öklid Uzayında Küresel Eğriler

$\alpha(s) = x(s)$, $\mathbb{E}^3$ de bir küresel eğri olmak üzere $\mathbb{E}^3$ de bir öteleme yardımıyla

$$\langle x(s), x(s) \rangle = \langle x, x \rangle = a^2$$

yazılabilir. Burada $a > 0$ sabit ve $\langle , \rangle$ $\mathbb{E}^3$ de standart iç çarpımı ifade etmektedir. $a = 1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x(s)$ eğrisi birim küre üzerinde bir eğridir.

$$\alpha_0(s) = x'(s)$$

ve

$$y(s) = \alpha_0(s) \times x(s)$$

denirse $\alpha_0(s), x(s), y(s), \mathbb{E}^3$ de $x(s)$ eğrisi boyunca ortonormal bir çatı oluşturur ve $\{\alpha_0(s), x(s), y(s)\}$ çatısına $x(s)$ küresel eğrisinin Frenet çatısı denir. $\kappa_g(s)$, $x(s)$ eğrisinin küresel eğrilik fonksiyonu olmak üzere

$$\begin{aligned} \alpha_0'(s) &= -x(s) + \kappa_g(s)\, y(s) \\ x'(s) &= \alpha_0(s) \\ y'(s) &= -\,\kappa_g(s)\, \alpha_0(s) \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

dir.[16]

Teorem 3.9. $x(s)$, $\mathbb{E}^3$ de bir küresel eğri ve bu eğrinin küresel eğriliği, eğriliği ve burulması sırasıyla $\kappa_g(s), \kappa(s)$ ve $\tau(s)$ olmak üzere

$$\kappa(s) = \sqrt{1+\kappa_g^2(s)}$$

ve

$$\tau(s) = \frac{\pm\kappa_g'(s)}{1+\kappa_g^2(s)}$$

dir.

Bundan sonra birim küresel eğriye sadece küresel eğri diyecegiz. Ayrıca (3.2.4) den

$$y(s) = \frac{1}{\sqrt{\langle x''(s), x''(s)\rangle - 1}}\left[x(s) + x''(s)\right] \tag{3.2.5}$$

dir. [13].

Tanım 3.2.2. $x(s)$ bir küresel eğri olsun. Bu durumda

$$y(s) = \frac{1}{\sqrt{\langle x''(s), x''(s)\rangle - 1}}\left[x(s) + x''(s)\right]$$

küresel eğrisine $x(s)$ küresel eğrisinin eşlenik eğrisi denir.

Uyarı 3. $\mathbb{E}^3$ de bir $x(s)$ küresel eğrisinin κ_g küresel eğriliği ile bu eğrinin geodezik eğriliği eşittir.

3.2.2. 3 Boyutlu Öklid Uzayında Rektifiyan Eğriler

Aşağıda [2] de B.Y Chen tarafından verilen rektifiyan eğri ve bazı özellikleri verilmiştir.

Tanım 3.2.3. $\alpha(\bar{s}) : I \to \mathbb{E}^3$, $\bar{s}$ yay uzunluğu parametresiyle birlikte verilen bir regüler uzay eğrisi olsun. $\alpha(\bar{s})$ nin konum vektörü, rektifiyan düzlemde yatıyorsa $\alpha(\bar{s})$ eğrisine rektifiyan bir eğri denir.

$\alpha(\bar{s})$ bir rektifiyan eğrisi, Frenet ayaklıları

$$\{T(\bar{s}), N(\bar{s}), B(\bar{s})\},$$

$\lambda(\bar{s})$ ve $v(\bar{s})$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$\alpha(\bar{s}) = \lambda(\bar{s})T(\bar{s}) + v(\bar{s})B(\bar{s})$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 3.10. $\alpha(\bar{s})$, $\bar{s}$ yay uzunluğu parametresi ile verilen ve eğriliği $\kappa(\bar{s})$ ve burulması $\tau(\bar{s})$ olan bir rektifiyan eğri olsun. Bu durumda $a \neq 0$ ve b reel sabitler olmak üzere

$$\frac{\tau(v)}{\kappa(\bar{s})} = a\bar{s} + b$$

dir.

İspat. $\alpha(\bar{s})$ bir rektifiyan eğri olduğundan $\lambda(\bar{s})$ ve $\mu(\bar{s})$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$\alpha(\bar{s}) = \lambda(\bar{s})T(\bar{s}) + v(\bar{s})B(\bar{s}) \tag{3.2.6}$$

biçiminde yazılabilir. (3.2.6) ifadesinde türev alınırsa

$$T(\bar{s}) = \lambda'(\bar{s})T(\bar{s}) + (\lambda(\bar{s})\kappa(\bar{s}) - v(\bar{s})\tau(\bar{s}))N(\bar{s}) + v'(\bar{s})B(\bar{s})$$

bulunur. Buradan

$$\lambda'(\bar{s}) = 1 \tag{3.2.7}$$

$$\lambda(\bar{s})\kappa(\bar{s}) - v(\bar{s})\tau(\bar{s}) = 0 \tag{3.2.8}$$

$$v'(\bar{s}) = 0 \tag{3.2.9}$$

dir. (3.2.7) ve (3.2.9) ifadelerinin integralleri alındığında $\frac{b}{a}$ ve $\frac{1}{a}$ birer sabit olmak üzere $(a \neq 0)$

$$\lambda(\bar{s}) = \bar{s} + \frac{b}{a}$$

$$v(\bar{s}) = \frac{1}{a}$$

olarak elde edilir. Bu ifadeler (3.2.8) te yerine yazıldığında

$$\left(\bar{s} + \frac{b}{a}\right)\kappa = \frac{1}{a}\tau$$

eşitliği elde edilir. Son ifade düzenlenirse

$$\frac{\tau(\bar{s})}{\kappa(\bar{s})} = a\bar{s} + b$$

dir. $\square$

3.2.3. Uzay Eğrilerinin Küresel Eşlenikleri

Tanım 3.2.4. $\alpha(\bar{s}) : I \to \mathbb{E}^3$ s yay uzunluğu parametrizasyonu ile verilen bir regüler eğrisi olsun.

$$f(\bar{s}) = \sqrt{\langle \alpha(\bar{s}), \alpha(\bar{s}) \rangle}$$

$$\alpha(\bar{s}) = f(s)x(s) \tag{3.2.10}$$

eşitliklerini sağlayan $x(s)$ birim hızlı küresel eğrisine $\alpha(s)$ eğrisinin küresel eşlenik eğirisi, $f(s)$ fonksiyonuna da $\alpha(s)$eğrisinin radyal fonksiyonu denir. Ayrıca $x(s)$ küresel eğrisinin κ_g küresel eğrilik fpnksiyonuna da $\alpha(s)$ eğrisinin küresel radyal fonksiyonu denir.

Uyarı 4. $a(\bar{s})$ bir küresel olmayan eğri olmak üzere, $x(s)$, $\alpha(\bar{s})$ nin s parametresine bağlı küresel eşlenik eğrisi olsun. $\alpha(\bar{s})$ eğrisi küresel olmadığından $f(s)$ radyal fonksiyonu sabit değildir. Bu durumda (3.2.10) den

$$T(\bar{s})\frac{d\bar{s}}{ds} = f(s)\alpha_0(s) + f'(s)x(s)$$

dir. Ayrıca

$$f'(s) = \frac{df(s)}{ds}$$

dir. Bu ifadeyi (3.2.11) de yerine yazarsak

$$\begin{aligned} T(\bar{s})\frac{d\bar{s}}{ds} &= f(s)x'(s) + \frac{df(s)}{ds}x(s) \\ &= f(s)\alpha_0(s) + \frac{df(s)}{ds}x(s) \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

den

$$T(s) = \alpha_0(s)\cos v + x\sin v \tag{3.2.12}$$

elde edilir. $\alpha(\bar{s})$ küresel eğri olmadığı için $f(s) \not\equiv 0$ ve $f'(s) \not\equiv 0$ dir.Yani

$$\begin{aligned} v &\neq 0, \operatorname{mod}\pi \\ v &\neq \frac{\pi}{2}, \operatorname{mod}\pi \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

dir. (3.2.11) ve (3.2.12) kulanırsak

$$\frac{d\bar{s}}{ds} = \frac{f}{\cos v} = \frac{f'}{\sin v} = \sqrt{f^2 + f'^2} \tag{3.2.14}$$

elde edilir. $\tan v$ açılımını yaparsak $\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}$ ifadesinden

$$\tan v = \frac{f'}{f} \tag{3.2.15}$$

bulunur. Buradan

$$v = \arctan \frac{f'}{f}$$

dir. Son ifadenin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} v' &= \frac{1}{1+\left(\frac{f'}{f}\right)^2} \frac{f''f - f'f'}{f^2} \\ &= \frac{f^2}{f^2+f'^2} \frac{f''f - f'f'}{f^2} \\ &= \frac{f''f - f'^2}{f^2+f'^2} \end{aligned} \tag{3.2.16}$$

bulunur. (3.2.12) ifadesinin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} T' &= \alpha_0' \cos v - \alpha_0 \sin(v) v' + x' \sin v + x \cos(v) v' \\ &= \left(v' - 1\right)\left(-\alpha_0 \sin(v) + x\cos(v)\right) + \alpha_0' \cos v + x' \sin v \end{aligned}$$

olup, bu ifadede α_0' yerine

$$-x(s) + \kappa_g(s) y(s)$$

ve $x'(s)$ yerine $\alpha_0(s)$ yazılırsa

$$T' = \left(v' - 1\right)\left(-\alpha_0 \sin(v) + x\cos(v) + \kappa_g(s) y(s) \cos v \right. \tag{3.2.17}$$

elde edilir. Böylece

$$\kappa N \frac{d\bar{s}}{ds} = \left(v' - 1\right)\left(-\alpha_0 \sin(v) + x\cos(v)\right) + \kappa_g(s) y(s) \cos v$$

eşitliğinde κ eğrilik fonksiyonunu yerine yazıldığında

$$\sqrt{1+\kappa_g(s)^2} N = (v'-1)(-\alpha_0 \sin(v) + x\cos(v)) + \kappa_g(s) y(s) \cos v$$

dir. Bu ifade düzenlenirse

$$N = \frac{(v'-1)}{\sqrt{1+\kappa_g(s)^2}}(-\alpha_0 \sin(v) + x\cos(v) + \frac{\kappa_g(s)}{\sqrt{1+\kappa_g(s)^2}} y(s) \cos v$$

eşitliği bulunur.Burada

$$\frac{(v'-1)}{\sqrt{1+\kappa_g(s)^2}} = \cos\varphi \tag{3.2.18}$$

ve

$$\frac{\kappa_g(s)}{\sqrt{1+\kappa_g(s)^2}} \cos v = \sin\varphi \tag{3.2.19}$$

denirse

$$\begin{aligned} N &= (-\alpha_0 \sin(v) + x\cos(v) \cos\varphi + y(s) \sin\varphi \qquad (3.2.20) \\ &= -(\sin v \cos\varphi)\alpha_0 + (\cos v \cos\varphi) x + y \sin\varphi \end{aligned}$$

bulunur.(3.2.18) ve (3.2.19) ifadeleri düzenlenirse

$$\frac{(v'-1)}{\cos\varphi} = \sqrt{1+\kappa_g(s)^2}$$

ve

$$\frac{\kappa_g(s)\cos v}{\sin\varphi} = \sqrt{1+\kappa_g(s)^2}$$

eşitlikleri bulunur. Böylece

$$\kappa \frac{d\bar{s}}{ds} = \frac{(v'-1)}{\cos\varphi} = \frac{\kappa_g(s)\cos v}{\sin\varphi} \tag{3.2.21}$$

elde edilir. (3.2.21) de oranları sırasıyla $\cos\varphi$ ve $\sin\varphi$ ile çarpıp böldüğümüzde orantımız değişmez

$$\kappa\frac{d\bar{s}}{ds} = \frac{(v'-1)\cos\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{\kappa_g(s)\cos v\sin\varphi}{\sin^2\varphi} \tag{3.2.22}$$
$$= (v'-1)\cos\varphi + \kappa_g(s)\cos v\sin\varphi$$

elde edilir.

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\kappa_g(s)\cos v}{(v'-1)}$$

eşitliğinden yararlanırsak

$$\tan\varphi = \frac{\kappa_g(s)\cos v}{(v'-1)} \tag{3.2.23}$$

elde edilir.

Eğer $(v'-1)\equiv 0$ ise (3.2.20) den $\varphi = \frac{\pi}{2} \mod \pi$, alırsak bu durum φ nin sabit olmasının özel halidir.(3.2.12) ve (3.2.20) dan

$$B = T\times N = (\alpha_0\sin v - x\cos v)\sin\varphi + y\cos\varphi \tag{3.2.24}$$

dir. (3.2.20) ifadesinden türev alınırsa

$$\begin{aligned}(-\kappa N+\tau B)\frac{d\bar{s}}{ds} &= -(\sin v\cos\varphi)'\,\alpha_0 + (\cos v\cos\varphi)'\,x + (\sin\varphi)'\,y \\ &\quad -(\sin v\cos\varphi)\,\alpha_0' + (\cos v\cos\varphi)\,x' + \sin\varphi y'\end{aligned}$$

(3.2.4) den α_0', x', y' yerine yazarsak

$$\begin{aligned}(-\kappa\alpha+\tau\gamma)\frac{d\bar{s}}{ds} &= -(\sin v\cos\varphi)'\alpha_0 + (\cos v\cos\varphi)'x + (\sin\varphi)'y \\ &\quad -(\sin v\cos\varphi)(-x+\kappa_g y) + (\cos v\cos\varphi)\alpha_0 \\ &\quad +\sin\varphi(-\kappa_g\alpha_0) \\ &= \alpha_0\left((\sin v\cos\varphi)' + (\cos v\cos\varphi) - \kappa_g\sin\varphi\right) \\ &\quad +x\left((\cos v\cos\varphi)' + (\sin v\cos\varphi)\right) \\ &\quad +y\left((\sin\varphi)' - \sin v\cos\varphi\kappa_g\right)\end{aligned}$$

elde edilir .Buradan

$$\begin{aligned} -\kappa\frac{d\bar{s}}{ds} &= \cos v\left[-(\sin v\cos\varphi)'+(\cos v\cos\varphi)-\kappa_g\sin\varphi\right] \\ &\quad +\sin v\left[(\cos v\cos\varphi)'+(\sin v\cos\varphi)\right] \\ -\kappa\frac{d\bar{s}}{ds} &= \left(1-v'\right)\cos\varphi-\kappa_g\cos v\sin\varphi \end{aligned} \tag{3.2.25}$$

dir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \tau\frac{d\bar{s}}{ds} &= \sin v\sin\varphi\left[-(\sin v\cos\varphi)'+(\cos v\cos\varphi)-\kappa_g\sin\varphi\right] \\ &\quad -\cos v\sin\varphi\left[(\cos v\cos\varphi)'+(\sin v\cos\varphi)\right] \\ &\quad +\cos\varphi\left[(\sin\varphi)'-\kappa_g(\sin v\cos\varphi)\right] \\ \tau\frac{d\bar{s}}{ds} &= \varphi'-\kappa_g\sin v \end{aligned} \tag{3.2.26}$$

bulunur. (3.2.14) ,(3.2.25) ve (3.2.26) te yerine yazılırsa

$$\kappa=\frac{(v'-1)\cos\varphi+\kappa_g\cos v\sin\varphi}{\sqrt{f^2+f'^2}}$$

$$\tau=\frac{\varphi'-\kappa_g\sin v}{\sqrt{f^2+f'^2}}$$

bulunur. (3.2.20) ve (3.2.24) den

$$N=-(\sin v\cos\varphi)\alpha_0+(\cos v\cos\varphi)x+\sin\varphi y$$

$$B=T\times N=(\alpha_0\sin v-x\cos v)\sin\varphi$$

$$N\cos\varphi-B\sin\varphi=-\alpha_0\sin v+x\cos v \tag{3.2.27}$$

$$N\sin\gamma+B\cos\varphi=y \tag{3.2.28}$$

olup (3.2.12) ve (3.2.27) deki ifadeleri kullanırsak α_0 ve x i aşağıdaki gibi yazabiliriz. Böylece

$$\alpha_0=T\cos v-\sin v\,(Nco\varphi-B\sin\varphi) \tag{3.2.29}$$

$$x = T\sin v + \cos v\,(N\cos\varphi - B\sin\varphi) \tag{3.2.30}$$

olarak elde edilir .

Yukarıdaki ifadelerden sonra aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.11. $\alpha(s) : I \to \mathbb{E}^3$ 3 boyutlu Öklid uzayında s parametresine bağlı regüler bir uzay eğri ve frenet çatısı $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ve , $\alpha(s)$ nin $x(s)$ küresel eşleniğinin Frenet ayaklıları $\{x(s), \alpha_0(s), y(s)\}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{cases} T(s) = \alpha_0(s)\cos v + x\sin v \\ N(s) = (-\alpha_0\sin v + x\cos v)\cos\varphi + y\sin\varphi \\ B(s) = (\alpha_0\sin v - x\cos v)\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_0(s) = T\cos v - \sin v\,(N\cos\varphi - B\sin\varphi) \\ x(s) = T\sin v + \cos v\,(N\cos\varphi - B\sin\varphi) \\ y = N\sin\varphi + B\cos\varphi \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} \frac{d\bar{s}}{ds} = \frac{f}{\cos v} = \frac{f'}{\sin v} = \sqrt{f^2 + f'^2}, \\ \tan v = \frac{f'}{f}, \\ \tan\varphi = \frac{\kappa_g(s)\cos v}{(v'-1)} \\ \kappa = \frac{(v'-1)\cos\varphi + \kappa_g\cos v\sin\varphi}{\sqrt{f^2+f'^2}} = \frac{(v'-1)}{\sqrt{f^2+f'^2}\cos\varphi} = \frac{\kappa_g\cos v}{\sqrt{f^2+f'^2}\sin\varphi} \\ \tau = \frac{\varphi' - \kappa_g\sin v}{\sqrt{f^2+f'^2}} \end{cases} \tag{3.2.31}$$

dir.

Uyarı 5. Eğer $\varphi = 0 \bmod \pi$, alırsak (3.1.15) ve (3.2.23) den $\kappa_g = 0$ buluruz.Buradan $B = y$ sabit vektör olur.Bu durumda $\alpha(s)$ eğrisi düzlemsel bir eğridir.

3.2.4. Bazı Özel Eğrilerin Küresel Eşlenikleri

Bu bölümde bazı özel eğrilerin küresel partner eğrilerinden ve onların karakterizasyonları ele alınacaktır.

Teorem 3.12. Bir $\alpha(s)$ eğrisinin yay uzunluğu ile küresel eşleniğinin yay uzunluğu aynı ise, eğri .

$$\alpha(s) = \sin(s+b)x(s) \tag{3.2.32}$$

biçiminde yazılabilir. Burada b sabit ve $x(s)$, $\alpha(s)$ nin küresel eşleniğidir. Ayrıca $\alpha(s)$ nin eğrilik fonksiyonu $\kappa(s)$,burulma fonksiyonu $\tau(s)$ ve radyal küresel fonksiyonu $\kappa_g(s)$ için

$$\begin{aligned} \kappa_g^2(s) &= \kappa^2(s) + \left(\tau - \varphi'\right)^2 - 4 \\ \varphi' &= \frac{-2\kappa'}{\kappa\sqrt{\kappa^2 - 4}} \end{aligned} \qquad (3.2.33)$$

dir.

İspat. $\alpha(s)$ ile küresel eşleniği $x(s)$ eğrilerinin yay uzunlukları eşit olduğundan (3.2.31) den

$$f^2 + f'^2 = 1$$

dir. Buradan

$$f(s) = \sin(s+b) \qquad (3.2.34)$$

yazılabilir. (3.2.34) ifadesi (3.2.10) de kullanılırsa

$$\alpha(s) = \sin(s+b)x(s)$$

dir. (3.2.16) ifadesinde (3.2.34) kullanılırsa

$$\begin{aligned} v' &= \frac{ff'' - f'^2}{f^2 + f'^2} \\ &= \frac{-\sin(s+b)\sin(s+b) - \cos^2(s+b)}{1} \\ &= -\sin^2(s+b) - \cos^2(s+b) \\ v' &= -1 \end{aligned} \qquad (3.2.35)$$

bulunur. Buradan (3.2.34) ve (3.2.35) ifadeleri (3.2.31) de kullanılırsa

$$\begin{cases} \kappa = -2\cos\varphi + \kappa_g \cos v \sin\varphi = \frac{-2}{\cos\varphi} = \frac{\kappa_g \cos v}{\sin\varphi} \\ \tau = \varphi' - \kappa_g \sin v \end{cases} \qquad (3.2.36)$$

ifadeleri bulunur.

$$\kappa = \frac{-2}{\cos\varphi} = \frac{\kappa_g \cos v}{\sin\varphi}$$

ifadesinin karesini alırsak

$$\kappa^2 = \frac{4}{\cos^2\varphi} = \frac{\kappa_g^2\cos^2 v}{\sin^2\varphi}$$

orantının sabit kalması ilkesinden oranları toplanırsa

$$\kappa^2 = 4 + \kappa_g^2\cos^2 v \tag{3.2.37}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\tau - \varphi' = -\kappa_g \sin v$$

ifadesinin karesi alındığında

$$\left(\tau - \varphi'\right)^2 = \kappa_g^2\sin^2 v \tag{3.2.38}$$

dir. (3.2.37) ve (3.2.38) ifadeleri taraf tarafa toplanır ve düzenlenirse

$$\kappa_g^2 = \kappa^2 + \left(\tau - \varphi'\right)^2 - 4$$

dir. Benzer şekilde

$$\varphi' = \frac{-2\kappa'}{\kappa\sqrt{\kappa^2-4}} \tag{3.2.39}$$

bulunur. □

Teorem 3.13. 3 boyutlu Öklid uzayında $\bar{s}$ yay uzunluğu parametresiyle verilen $\alpha(\bar{s})$ eğrisinin tanjant vektör alanı, $\alpha(\bar{s})$ nin küresel eşleniği olan $x(s)$ nin tanjant vektörü ile sabit açı yapıyorsa $\alpha(\bar{s})$

$$\alpha(\bar{s}) = a\bar{s}x(\bar{s}) = e^{bs}x(s) \tag{3.2.40}$$

biçiminde yazılabilir. Burada a ve b sabitleri için $a\sqrt{1+b^2} = b$ dir. Ayrıca $\alpha(s)$ nin eğrilik fonksiyonu $\kappa(s)$, burulma fonksiyonu $\tau(s)$ ve radyal küresel fonksiyonu $\kappa_g(s)$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
K_g^2 &= (1+b^2)e^{2b(s+c)}\kappa^2 + \left(b\sqrt{(1+b^2)\kappa^2 e^{2b(s+c)}-1}\right)^2 - 1 \qquad (3.2.41)\\
\tau &= \frac{\varphi'}{\sqrt{1+b^2}e^{b(s+c)}} + \frac{-b\sqrt{(1+b^2)\kappa^2 e^{2b(s+c)}-1}}{\sqrt{1+b^2}e^{b(s+c)}}\\
\varphi' &= \frac{-\kappa' - b\kappa}{\kappa\sqrt{(1+b^2)\kappa^2 e^{2b(s+c)}-1}}
\end{aligned}
$$

dir.

İspat. (3.2.12) de tanımlanan v sabit olduğundan ve (3.2.15) dan dolayı $f(s) = e^{b(s+c)}$ yazabiliyoruz.

$$\tan v = \frac{f'}{f} = \frac{e^{b(s+c)}b}{e^{b(s+c)}}$$

(3.2.15) da yerine yazarsak

$$\tan v = b$$

sabit buluruz. Ayrıca (3.2.14) ifadesinin her tarafın integrali alınırsa

$$\bar{s} = \frac{e^{b(s+c_1)}}{b\cos v} + c_2$$

bulunur. Burada c_1 ve c_2 reel sabitlerdir. $a = b\cos v$ denirse $a\sqrt{1+b^2} = b$ olur. (3.2.31) de buldugumuz değerleri yerine yazalırsa

$$
\left\{
\begin{aligned}
\kappa &= \frac{-\cos\varphi + \kappa_g \cos v \sin\varphi}{\sqrt{1+b^2}e^{b(s+c)}}\\
&= \frac{-1}{\sqrt{1+b^2}e^{b(s+c)}\cos\varphi}\\
&= \frac{\kappa_g \cos v}{\sqrt{1+b^2}e^{b(s+c)}\sin\varphi}\\
\tau &= \frac{\varphi' - \kappa_g \sin v}{\sqrt{1+b^2}e^{b(s+c)}}
\end{aligned}
\right. \qquad (3.2.42)
$$

elde edilir. Ayrıca (3.2.42) ifadesinden

$$\kappa_g^2 = \left(1+b^2\right)e^{2b(s+c)}\kappa^2 + \left(1+b^2\right)e^{2b(s+c)}\left(\tau - \frac{\varphi'}{\sqrt{1+b^2}e^{b(s+c)}}\right)^2 - 1$$

$$\tau = \frac{\varphi'}{\sqrt{1+b^2}e^{b(s+c)}} + \frac{-b\sqrt{(1+b^2)\kappa^2 e^{2b(s+c)}-1}}{\sqrt{(1+b^2)}e^{b(s+c)}} \qquad (3.2.43)$$

$$\varphi' = \frac{-\kappa' - b\kappa}{\kappa\sqrt{(1+b^2)\,\kappa^2 e^{2b(s+c)} - 1}}$$

elde edilir. $\square$

Teorem 3.14. $\alpha(\bar{s}) : I \to E^3$ regüler bir eğri ve $x(s)$, $\alpha(\bar{s})$ nin küresel eşleniği olsun. $\alpha(\bar{s})$ nin N vektör alanı ile $x(s)$ nin y vektör alanı arasındaki açının sabit bir φ açısı olması için gerek ve yeter şart $\alpha(\bar{s})$ nin eğrilik fonksiyonu κ , burulma fonksiyonu τ, radyal fonksiyonu f ve küresel radyal fonksiyonu κ_g olmak üzere

$$\frac{\tau}{\kappa} = -\sin\varphi \frac{f'}{f} \tag{3.2.44}$$

veya

$$\kappa_g^2 = \left(f^2 + f'^2\right)\left(\kappa^2 \sin^2\varphi + \tau^2\right) \tag{3.2.45}$$

dir.

İspat.

$$r = \tau - \frac{\varphi'}{\sqrt{(f^2 + f'^2)}}$$

denirse (3.2.31) den

$$\begin{cases} \kappa = \frac{(v'-1)\cos\varphi + \kappa_g \cos v \sin\varphi}{\sqrt{\left(f^2+f'^2\right)}} = \frac{(v'-1)}{\sqrt{\left(f^2+f'^2\right)}\cos\varphi} = \frac{\kappa_g \cos v}{\sqrt{\left(f^2+f'^2\right)}\sin\varphi} \\ r = \frac{-\kappa_g \sin v}{\sqrt{\left(f^2+f'^2\right)}} \end{cases} \tag{3.2.46}$$

elde edilir. (3.2.46) ve (3.2.15) daki hesaplamayla birlikte

$$\begin{aligned} \frac{r}{\kappa} &= \frac{\frac{-K_g \sin v}{\sqrt{\left(f^2+f'^2\right)}}}{\frac{K_g \cos v}{\sqrt{\left(f^2+f'^2\right)}\sin\varphi}} = -\sin\varphi \frac{\sin v}{\cos v} \\ &= -\sin\varphi \tan v = -\sin\varphi \frac{f'}{f} \end{aligned} \tag{3.2.47}$$

bulunur.(3.2.46) den κ ve r karelerini alıp düzenlenirse

$$\kappa^2 = \frac{\kappa_g^2 \cos^2 v}{(f^2 + f'^2)\sin^2\varphi}$$

$$r^2 = \frac{\kappa_g^2 \sin^2 v}{(f^2 + f'^2)}$$

bulunur. Buradan

$$\kappa^2 \sin^2 \varphi + r^2 = \frac{\kappa_g^2}{f^2 + f'^2}$$

$$\kappa_g^2 = \left(f^2 + f'^2\right)\left(\kappa^2 \sin^2 \varphi + r^2\right) \tag{3.2.48}$$

dir. $\square$

Teorem 3.15. $\alpha(\bar{s}) : I \to \mathbb{E}^3$ $\bar{s}$ yay uzunluğu parametresiyle verilen regüler eğrisini Frenet çatısı $\{T(\bar{s}), N(\bar{s}), B(\bar{s})\}$ ve $\alpha(\bar{s})$ nin küresel eşleniği olan birim hızlı $x(s)$ eğrisinin Frenet çatısı da $\{x(s), \alpha_0(s), y(s)\}$ olsun. Eğer $N(\bar{s})$ ile $y(s)$ birbirine paralel ise $\alpha(\bar{s})$ eğrisi

$$\alpha(\bar{s}) = \frac{1}{a\cos(s+c)} x(s)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca $\alpha(\bar{s})$ nin eğrilik fonksiyonu $\kappa(\bar{s})$, burulma fonksiyonu $\tau(\bar{s})$ ve radyal fonksiyon κ_g olmak üzere

$$\begin{cases} a^2 \kappa^4 \kappa_g^2 = \left(\kappa^2 + \tau^2\right)^3 \\ \frac{\tau(\bar{s})}{\kappa(\bar{s})} = a\bar{s} + b = \tan(s+c) \end{cases} \tag{3.2.49}$$

dir. Burada $a \neq 0$ ve c sabittir.

İspat. Eğer N, y ile paralel ise (3.2.17) de elde ettiğimiz $v' - 1 = 0$ ve $\varphi = \frac{\pi}{2}$den $v' = 1$ olur ve her tarafın integralini alırsak $v = s + c$ olur.Burada c integral sabitidir.(3.2.15) dan

$$\tan v = \frac{f}{f'} = \frac{\sin(s+c)}{\cos(s+c)}$$

elde edilir.Her tarafın integralini alırsak

$$f(s) = \frac{1}{a\cos(s+c)}$$

eşitliğini buluruz.

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{s}}{ds} &= \sqrt{f^2+f'^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{a^2\cos^2(s+c)}+\frac{\sin^2(s+c)}{a^2\cos^4(s+c)}} \\
&= \sqrt{\frac{\cos^2(s+c)+\sin^2(s+c)}{a^2\cos^4(s+c)}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{a^2\cos^4(s+c)}} \\
&= \frac{1}{a\cos^2(s+c)}
\end{aligned}$$

buluruz ve buradan her tarafın integrali alınırsa

$$as+b=\tan(s+c)$$

bulunur.b integral sabitidir.Bu durumda (3.2.31) de yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
\kappa &= \frac{\kappa_g}{a^{-1}\cos^{-2}(s+c)} \\
\tau &= \frac{-\kappa_g\sin v}{a^{-1}\cos^{-2}(s+c)}
\end{aligned} \tag{3.2.50}$$

elde ederiz.(3.2.49) de parametre değişimi $s+c$ yerine $-s-c$ alınabilir. □

4 . TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, öncelikle üç boyutlu Öklid uzayında yeni özel eğriler,ana donör eğri kavramları elde edilir. $T_\beta = N$ eşitliğinden (α, β) doğal eğri çiftinin olduğu gösterildi. Bu eğri çiftinden yararlanırlarak ikinci ana donör eğrisi tanımlandı β, α nın birinci ana donör eğrisi iken γ, α nın ikinci ana donör eğrisi olarak tanımlandı . Bu eğriler arasında Frenet denklemleri ile geçişler elde edildi. Düzlem eğrilerinin ana donör eğrisinin genel bir helis olduğu anlatıldı,bazı özel eğriler helislerin doğal eşleniğinin slant helisler olduğundan bahsedildi. Küresel fonksiyon ve radyal küresel fonksiyon tanımlarıyla bir eğrinin küresel doğal eşleniklerinden bahsedildi.E^3 de bir uzay eğrisi ve ilişkili küresel eğrisi için yeni karakterizasyonlar verildi.
Bu çalışma farklı uzaylarda da çalışılabilir. Bu farklı uzaylardaki çalışmalardan da diğer doğal eğri çiftlerinin karakterizasyonu ve eğriler arası geçiş elde edilebilir.
Sonuç olarak bu tez çalışması bir çok matematikçiye farklı çalışma konuları sunacak ve ışık tutacaktır.

KAYNAKLAR

[1] Ahmad, A. T. (2012). Position vektörs of slant helices in Euclidien 3 space J. Egyptian Math. Soc. 20 no. (1), 1-6.

[2] Chen, B. Y. (2003). When does the position vectör of a space curve always lie in its rectifying plane, Amer Math. Monthly (110), 147-152.

[3] Chen, B. Y. ve Dillen, F. (2005). Rectifying curves as cetrodes and extremal curves, Bull.Inst. Math. Aca. Sinica. (33), 77-90.

[4] İzimuya, S. ve Takeuchi, N. (2002). Genetic properties of helices and Bertarnd curves, J. Geom. (74), 97-109.

[5] İzimuya, S. ve Takeuchi, N. (2004). New special curves and developable surfaces, Turk. J. Math. (28), 531-537.

[6] Kula, L., Ekmekçi N., Yaylı, Y. ve K. İlarslan, (2009). characterizations of slant helices in Euclidiean $3-$space, Turk. J. Math. (33), 1-13.

[7] Kula, L. ve Yaylı, Y. (2005). On slant helix and its spherical indicatrix, Appl. Math. Comput. (169) 600-607.

[8] Kühnel, W. (2002). Differential Geometry, Curves-Surfaces-Manifolds, American Mathematical Society.

[9] Liu, H. ve Wang, F. (2008). Manheim partner curves in 3- space, J. Geom. (88), 120-126.

[10] Millman, R. S. ve Parker, G. D. (2007). Elements of Differential Geometry, Prentice Hall, Korea.

[11] Monterde, J. (2007). Curves with constant curvatare ratios Bull. Maxican Math. Soc. (13), 177-186.

[12] Neill, B. O. (2006). Elementary differential geometry, reivsed second ed. Academy Press.

[13] Struik, D. J. (1988). Lectures on Classial Differenial Geometry, Dover, New-York.

[14] Yılmaz, S., Özyılmaz, E. ve Turgut, M. (2010). New spherical indicatrices and their characerizations, An. Şt. Univ. Ovidius Constanta 18 (2), 337-354.

[15] Carmo, M.P. (1976). Diferential Geometry of Curves and Surfaces.Pearson Education.

[16] Liu, H. (2014).Curves in affine and Semi-Euclidien spaces, Results Math. (65), 235-249.

[17] Liu, H. (2014). Curves in three dimensional Riemann space forms, Results Math. (66), 469-480.

[18] Su, B., Hua, X. ve Xin, Y. (1986). Introduction to Functional Differential Geometry, Science Press.

[19] Sabuncuoğlu, A. (2004). Diferansiyel Geometri, Nobel yayın dağıtım, Ankara.