T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

URYSOHN-TİPİ LİNEER OLMAYAN İNTEGRAL OPERATÖRLER AİLESİNİN NOKTASAL YAKINSAKLIĞI

DAVUT KAYABAŞI
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Doç. Dr. Sevgi ESEN ALMALI

KIRIKKALE-2022

ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda Davut KAYABAŞI tarafından hazırlanan URYSOHN-TİPİ LİNEER OLMAYAN İNTEGRAL OPERATÖRLER AİLESİNİN NOKTASAL YAKINSAKLIĞI (POINTWISE CONVERGENCE OF THE FAMILY OF NONLINEAR INTEGRAL OPERATORS OF THE URYSOHN-TYPE) adlı tez çalışması, aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ / OY ÇOKLUĞU ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Sevgi ESEN ALMALI İmza:…………….

Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum.

Başkan: Prof. Dr. Gülen BAŞCANBAZ TUNCA İmza:…………….

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum.

Üye: Prof. Dr. Ali OLGUN İmza:…………….

Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum.

Üye: Doç. Dr. Sevgi ESEN ALMALI İmza:…………….

Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum.

Tez Savunma Tarihi: 29.07.2022

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. Recep ÇALIN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYANI

Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dökümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

İmza…………..

Davut KAYABAŞI

Tarih 29.07.2022

ÖZET

URYSOHN-TİPİ LİNEER OLMAYAN İNTEGRAL
OPERATÖRLER AİLESİNİN NOKTASAL YAKINSAKLIĞI

KAYABAŞI, Davut
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. Sevgi ESEN ALMALI
Temmuz 2022, 64 sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm, tezin girişine ayrılmış olup bu bölümde, Yaklaşımlar Teoerisi'nin başlangıcından günümüze kadar olan gelişim sürecine genel bir bakışta bulunulmuş; bu teorinin belli başlı çalışmalarına değinilmiş ve tezimizin asıl konusu olan lineer olmayan integral operatörlerle yaklaşımdan bahsedilmiştir. Bu tezin amacına ve çalışmada referans alınan kaynaklara ilişkin özete yine birinci bölümde yer verilmiştir.

İkinci bölümde, çalışmada ihtiyaç duyulacak temel tanım, teoerem ve lemmalar verilmiş ve Urysohn-tipi lineer olmayan integral operatörler ailesi ve çekirdeği tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde, Sevgi ESEN ALMALI'nın "On pointwise convergence of the family of Urysohn-type integral operators" isimli çalışmasındaki yakınsaklık problemleri detaylı bir şekilde ele alınmış ve devamında Urysohn-tipi lineer olmayan integral operatörler ailesinin L_p-uzayındaki yakınsaklığı ile ilgili bazı orijinal sonuçlar verilmiştir.

Dördüncü bölümde, tezde elde edilen bulgular tartışılmış, beşinci bölüm ise sonuç ve önerilere ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Urysohn-tipi integral operatörler, Hammerstein integralleri, p-Lebesgue noktasında yakınsaklık, Taylor serisi.

ABSTRACT

POINTWISE CONVERGENCE OF THE FAMILY OF NONLINEAR
INTEGRAL OPERATORS OF THE URYSOHN-TYPE
KAYABASI, Davut
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, M. Sc. Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Sevgi ESEN ALMALI
July 2022, 64 Pages

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction of the thesis, and in this chapter, an overview of the development process of the Theory of Approximation from the beginning to the present is given; the basic studies of this theory are mentioned and some explanations are made about the approximation with nonlinear integral operators, which is the main subject of our thesis. The purpose of this thesis and the summary of the sources in the study are also included in the first chapter.

In the second chapter, the basic definitions, theorems and lemmas that will be needed in the study are given and the family and kernel of Urysohn-type nonlinear integral operators are introduced.

In the third chapter, convergence problems in Sevgi ESEN ALMALI's study titled "On pointwise convergence of the family of Urysohn-type integral operators" are examined in detail and then some original results are given about the convergence of the family of Urysohn-type nonlinear integral operators in L_p.

While the findings obtained in the thesis are discussed in the fourth section, the fifth section is devoted to conclusions and recommendations.

Key Words: Urysohn-type integral operators, Hammerstein integrals, Convergence at the p-Lebesgue point, Taylor series.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim boyunca varlığıyla bana güç veren ve kendimi geliştirebilmem için bilgi ve tecrübeleriyle her an yanımda olan değerli danışman hocam Doç. Dr. Sevgi ESEN ALMALI'ya en içten saygılarımı sunar teşekkür ederim.

Gerek bu tezin hazırlanmasında gerekse diğer çalışmalarımda yardımlarını esirgemeyen ve çalışmalarımla ilgili düşünceleriyle yol almamda çok büyük pay sahibi olan Karabük Üniversitesi'nden kıymetli hocam Dr. Öğr. Üyesi Gümrah UYSAL'a teşekkür ederim.

Kırıkkale Üniversitesi'ne adım attığım ilk günden beri arkadaşça yaklaşımlarıyla desteklerini hep arkamda hissettiğim Matematik Bölümü'ndeki değerli hocalarıma ayrı ayrı teşekkür ederim.

Yoğun günlerimin farkında olup beni anlayışla karşılayan ve güzel düşünceleriyle bana moral veren sevgili arkadaşlarıma ve hayatımın her döneminde en büyük destekçim olan aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$[a,b]$	:Kapalı aralık
Λ	:Negatif olmayan reel sayıları içeren boştan farklı olan bir indis kümesi
$\mathbb{R}$	:Reel sayılar kümesi
$L_1(\mathbb{R})$	:$\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı ve mutlak değerinin 1-inci kuvveti Lebesgue anlamında integrallenebilir olan fonksiyonlar uzayı
$L_p(\mathbb{R})$	:$\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı ve mutlak değerinin p-inci kuvveti Lebesgue anlamında integrallenebilir olan fonksiyonlar uzayı
$\Vert g\Vert_{L_p(\mathbb{R})}$	:$L_p(\mathbb{R})$ uzayında norm
$B_n(f;x)$	:Bernstein operatörleri
$L_\lambda(f,x)$	:Lineer integral operatörler ailesi
$L_\lambda(u,x)$	:Urysohn-tipi lineer olmayan integral operatörler ailesinin genel formu
$T_\lambda(g,x)$	:Urysohn-tipi lineer olmayan integral operatörler ailesinin Taylor seri açılımına bağlı formu
$K_\lambda(t,x)$	:Çekirdek ailesi
$K_\lambda(x,t,g)$	:Urysohn operatörünün çekirdeği
$K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)$	:$K_\lambda(x,t,g)$'nin g'ye göre n. türevinin g_0 noktasındaki değeri
$d_t\left[K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)\right]$	:$K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)$'ın t'ye göre diferansiyeli
$D_\lambda(t,x_0)$	:$K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)$'ın majorant fonksiyonu
$(L)\int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)dt$	:$f(t)g(t)$'nin $\mathbb{R}$ üzerindeki Lebesgue integrali
$(S)\int_{\mathbb{R}} f(t)dg(t)$	:$f(t)$'nin $g(t)$'ye göre $\mathbb{R}$ üzerindeki Stieltjes integrali

1. GİRİŞ

Gerçek hayattan bilimsel bir problemi matematiksel modeller ve formüller kullanmadan anlamak ve çözüme kavuşturmak neredeyse imkansızdır. Birçok matematikçi ve bilim insanı, benzer matematiksel yaklaşımlarla matematikte, mühendislik bilimlerinde, temel bilimlerde ve diğer alanlardaki pek çok probleme ışık tutmuşlar, bu problemlerin gelişen çağın şartlarına ve ihtiyaçlarına uygun daha kullanışlı çözümleri için çalışmışlardır. 19. yüzyılın sonlarından başlayarak günümüze kadar devam eden bu çalışmaların neticesinde matematik dünyası için çok önemli bir yere sahip olan Yaklaşımlar Teorisi'nin kurulması sağlanmıştır. Diferansiyel denklemlerin çözümü, sinyal ve görüntü işleme, ses tanıma, veri gösterimi gibi birçok farklı konuda karşılaşılan problemlerin çözümünde etkin olarak kullanılması Yaklaşımlar Teorisi'nin önemini günden güne artırmıştır. Etkinliğini günümüzde de devam ettiren Yaklaşımlar Teorisi'nin amacı; ele alınan temel fonksiyonun, nitelikleri daha iyi bilinen ve daha kolay hesaplanabilen fonksiyonların limiti şeklinde bir gösterimini elde etmek ve bu yaklaşımın en iyi şekilde nasıl sağlanacağını araştırmaktır.

Yaklaşımlar Teorisi'nin temelini, 1885 yılında Alman matematikçi K. Weierstrass tarafından ispatlanan teoremler oluşturur. Weierstrass (1885), bu teoremler ile "Kapalı bir $[a, b]$ aralığında tanımlanan sürekli her f fonksiyonuna bu aralıkta düzgün yakınsayan cebirsel veya trigonometrik bir polinom dizisinin karşılık geldiğini" göstermiştir. Birçok matematikçi, Weierstrass yaklaşım teoremi olarak bilinen bu teoremlerin daha kısa ve daha kullanışlı bir kanıtı için çalışmıştır. Weierstrass teoreminin açık ve etkili bir ispatı Rus matematikçi Bernstein (1912) tarafından verilmiştir. Bernstein bu ispatı, binom dağılımını kullanarak elde ettiği ve Bernstein Polinomları adı verilen

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \qquad x \in [0,1], \qquad n \in \mathbb{N}$$

şeklinde bir lineer pozitif yaklaşım operatörü tanımlayarak yapmıştır.

Yaklaşımlar Teorisi'ne çok büyük katkılar sunan Bernstein operatörünün önemi 1950'li yıllara kadar pek anlaşılamamıştır. 1952 yılına gelindiğinde Bohman (1952), Bernstein polinomlarından yola çıkarak toplam biçimindeki lineer pozitif operatörlerin $[0,1]$ aralığında sürekli bir f fonksiyonuna düzgün yakınsaması için yalnızca üç koşulu sağlaması gerektiğini ifade ve ispat etmiştir. Korovkin (1953) ise, Bohman'ın bu teoremini integral tipli operatörler için ispatlamış ve teoriyi genelleştirerek Bohman'ın koşullarının bu genel halde de geçerli olduğunu göstermiştir. Literatüre "Korovkin Teoeremi" adıyla geçmiş olan bu teorem; kapalı sonlu aralıkta tanımlanan sürekli fonksiyonların lineer pozitif operatörler ile yaklaştırılabileceğini ifade eder (Haciyev vd., 2002). Yaklaşımlar Teorisi'ne yeni bir boyut kazandıran Korovkin teoremi sayesinde, daha kullanışlı operatörler dizisi elde etmek için Baskakov operatörü, Meyer-König-Zeller operatörü ve Bleimann-Butzer-Hahn operatörü gibi çok sayıda yeni lineer pozitif operatör tanımlanmış ve bunların yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Lineer pozitif operatörlerin oluşturulması ve özelliklerinin çalışılması lineer olmayan operatörlere göre daha kolay olduğundan ve genelde fonksiyonları yaklaştıran en basit yapılar lineer pozitif operatörler yardımıyla tanımlanabildiğinden (Hacısalihoğlu ve Haciyev, 1995), lineer pozitif operatörler ile ilgili çalışmalar 1950'li yıllardan itibaren yaklaşım teorisinde çok önemli bir yere sahip olmuştur. Literatürde oldukça geniş bir yer tutan bu çalışmaların odağında, daha iyi ve daha uygun bir yaklaşımda bulunma isteği yatar. Bu maksatla birçok matematikçi ve araştırmacı tanımlanan operatörlerin bazı modifikasyonlarını ele almışlar ve yaklaşım problemini çeşitli fonksiyon uzaylarına taşımışlardır.

Bir yaklaşım problemi integrallenebilir fonksiyonlar uzayında ele alındığında, bu uzayın bir fonksiyonuna bir integral operatörler dizisi (ailesi) ile yaklaşımda bulunmanın daha uygun olduğu görülmüştür (Özalp Güller, 2019). Bir lineer integral operatörler ailesi; boş olmayan bir Λ indis kümesi ve her $\lambda \in \Lambda$ reel sayısı için $K_\lambda(t,x)$ çekirdek ailesi göz önüne alındığında,

$$L_\lambda(f;x) = \int_D f(t)K_\lambda(t,x)dt\,, \qquad x \in D, \qquad \lambda \in \Lambda$$

formunda verilebilir. Bu türden integral operatörler üzerine yapılan çalışmalara Faddeev (1936), Tandori (1954), Taberski (1962), Mamedov (1963), Gadjiev (1963, 1968), Sikkema (1983) ve Esen (2002) örnek gösterilebilir.

Yaklaşımlar Teorisi'nin gelişmesine katkı sağlayan bir başka çalışma konusu da lineer olmayan operatörlerle yaklaşımdır. Yaklaşımlar Teorisi'ndeki çalışmalar lineer operatörler etrafında yoğunlaşmış olsa da araştırmacılar zaman zaman lineer olmayan operatörlerle ilgili dikkat çeken çalışmalar ortaya koymuşlar, son zamanlarda ise bu konuyla ilgili çalışmalara hız kazandırmışlardır. Çünkü bazı durumlarda sinyalleri ve görüntüleri (fonksiyonları) yeniden oluşturmak için lineer olmayan bir süreç kullanmak gerekir. Bu ise problemin çözümü için lineer olmayan yaklaşımı özellikle de lineer olmayan integral operatörlerin yaklaşımını önemli hale getirmiştir (Costarelli ve Vinti, 2013). Söz konusu çalışmalardan bazıları Vainberg (1953), Gadjiev (1966), Musielak (1983), Swiderski ve Wachnicki (2000), Bardaro ve Vinti (2002), Bardaro, Musielak ve Vinti (2003), Karslı ve Gupta (2008), Karslı (2008, 2013), Bardaro, Vinti ve Karslı (2011), Esen Almalı ve Gadjiev (2016), Esen Almalı (2017), Anar (2019), Özalp Güller ve Uysal (2020) ve Özalp Güller (2021) olarak sıralanabilir.

Lineer olmayan integral operatörlerle ilgili yakın zamanlı çalışmalardan biri yine Esen Almalı (2019) tarafından verilmiştir. Bu tez için bize esin kaynağı olan çalışmasında Esen Almalı, $K_\lambda(x,t,u)$ çekirdeği ile

$$L_\lambda(u,x) = \int_{\mathbb{R}} K_\lambda\big(x,t,u(t)\big)dt$$

şeklinde tanımlanan Urysohn-tipi lineer olmayan integral operatörler ailesinin genel bir formunu ele almıştır. Esen Almalı bu çalışmasında, ele alınan operatörün Taylor seri açılımına bağlı gösterimi kullanmış ve K_λ çekirdek fonksiyonunun bazı şatları sağlaması koşuluyla, $L_1(\mathbb{R})$'deki bir fonksiyonun Lebesgue noktalarında bu operatörün noktasal yakınsaklığı ile ilgili teoremler ve ispatlarını vermiştir.

Bu tez çalışmasında ise, Esen Almalı'nın söz konusu çalışması detaylı bir şekilde ele alınmış ve buradan hareketle, Urysohn-tipi lineer olmayan integral operatörler ailesinin, $L_p(\mathbb{R})$-uzayındaki bir fonksiyonun p-Lebesgue noktasındaki yakınsaklığı tarafımızdan incelenmiş ve bazı orijinal sonuçlar elde edilmiştir.

1.1. Kaynak Özetleri

Bu tezin ortaya çıkışına kaynaklık eden temel referansımız, Sevgi Esen Almalı'nın 2019 yılında verdiği "On Pointwise Convergence of the Family of Urysohn-Type Integral Operators" isimli makalesidir. Bu çalışmadan yola çıkılarak Urysohn-tipi lineer olmayan integral operatörler ailesinin, L_1 ve L_p uzaylarındaki sınırlı bir fonksiyon için, sırasıyla Lebesgue ve p-Lebesgue noktasındaki yakınsaklığı incelenmiştir.

Çalışmanın materyal ve yöntem bölümünde verilen tanım, teorem ve lemmalar için Natanson (1964)'un "Theory of Functions of a Real Veriable", Mamedov (1967)'un "Fonksiyonların Lineer Operatörlerle Yaklaşması", Rudin (1987)'in "Real and Complex Analysis", Hacısalihoğlu ve Haciyev (1995)'in "Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı", Balcı (1999, 2009)'nın "Matematik Analiz I" ve "Matematik Analiz II", Özer ve Eser (2000)'in "Diferansiyel Denklemler (Teori ve Uygulamalar)", Bayraktar (2017)'ın "Fonksiyonel Analiz" ve Shalit (2017)'in "A First Course in Functional Analysis" adlı kitaplarından yararlanılmıştır. Burada değinmediğimiz ancak yararlandığımız diğer kitap ve makaleler kaynaklar başlığı altında sıralanmıştır.

Çalışmanın diğer bölümlerinde yapılan açıklamalar ve ihtiyaç duyulan bilgiler için, Esen (2002) ve Özalp Güller (2019)'in doktora tezlerine başvurulmuştur. Ayrıca, Haciyev vd. (2002)'nin "Toplam Biçimindeki Doğrusal Operatörler Ailesinin Yaklaşım Özellikleri" isimli Bilimsel Araştırma Projesi Kesin Raporu çalışmamızda yararlandığımız kaynaklar arasında yer almaktadır.

1.2. Çalışmanın Amacı

Bu çalışmada amacımız; Esen Almalı (2019) makalesinde incelenen

$$L_\lambda(u,x) = \int_{\mathbb{R}} K_\lambda\big(x,t,u(t)\big)dt$$

formundaki Urysohn-tipi lineer olmayan integral operatörler ailesinin, $L_1(\mathbb{R})$-uzayındaki noktasal yakınsaklığı ile ilgili olan teoremlerin ispatını ayrıntılı olarak yapmak ve buradan hareketle aynı ailenin yakınsaklığını, $L_p(\mathbb{R})$-uzayına genişleterek incelemektir. Bu genişletme tarafımızdan yapılmış olup makale olarak da yayınlanmıştır. Burada λ, bir yığılma noktası olup sayı kümesinde değişen pozitif bir parametredir ve $\mathbb{R}$ reel ekseni göstermektedir.

2. MATERYAL ve YÖNTEM

Çalışmanın bu bölümünde, ilk olarak bilinen bazı tanım, teorem ve lemmalar verilecek, ardından da Urysohn-tipi lineer olmayan integral operatörler ailesi ve çekirdeği tanıtılacaktır.

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1. (Lineer Uzay)

X boş olmayan bir küme ve $\mathbb{F}$, reel veya kompleks sayılar cismi olsun. Eğer,

$$+: X \times X \rightarrow X \quad (\text{toplama})$$

ve

$$\bullet: \mathbb{F} \times X \rightarrow X \quad (\text{skalerle çarpma})$$

şeklinde tanımlanan işlemler için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa, X'e $\mathbb{F}$ üzerinde bir lineer uzay (vektör uzayı) denir.

(i) X, $+$ işlemine göre değişmeli gruptur. Yani, her $a, b \in \mathbb{F}$ ve $x, y, z \in X$ için;

(A1) $x + y \in X$ dir,

(A2) $x + y = y + x$ dir,

(A3) $(x + y) + z = x + (y + z)$ dir,

(A4) $x + \theta = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır,

(A5) $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$ vardır.

(ii) $a, b \in \mathbb{F}$ ve $x, y \in X$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

(B1) $a \bullet x \in X$ dir,

(B2) $a \bullet (x + y) = a \bullet x + a \bullet y$ dir,

(B3) $(a + b) \bullet x = a \bullet x + b \bullet x$ dir,

(B4) $(a \bullet b) \bullet x = a \bullet (b \bullet x)$ dir,

(B5) $1 \bullet x = x$ dir.

Eğer $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ise X'e reel lineer uzay, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ise X'e kompleks lineer uzay adı verilir (Bayraktar, 2017).

Tanım 2.1.2. (Operatör)

X ve Y iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer X uzayından alınan herhangi bir f fonksiyonuna Y uzayındaki bir g fonksiyonunu karşılık getiren bir L kuralı varsa, bu L kuralına X uzayı üzerinde bir operatördür denir ve bu operatör için,

$$g(x) = L(f;x)$$

gösterimi kullanılır.

L operatörü $L: X \to Y$ biçiminde tanımlandığından X uzayına L operatörünün tanım bölgesi denir ve $X = D(L)$ ile gösterilir. $L(f;x) = g(x)$ fonksiyonlarının kümesine ise L operatörünün değer kümesi denir ve bu da $R(L)$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu ve Haciyev, 1995).

Tanım 2.1.3. (Lineer Operatör)

X bir lineer uzayı olsun. f ve g fonksiyonları X uzayının herhangi iki fonksiyonu ve a ile b de keyfi iki reel sayı olmak üzere L operatörü;

$$L(af + bg; x) = aL(f;x) + bL(g;x)$$

koşulunu gerçekliyor ise, bu durumda L operatörüne lineer operatör denir (Hacısalihoğlu ve Haciyev, 1995).

Tanım 2.1.4. ($L_p(D)$ Uzayı)

D kümesi, $\mathbb{R}$'nin sonlu veya sonsuz bir alt aralığı ve f fonksiyonu da bu küme üzerinde tanımlı Lebesgue anlamında ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\int_D |f(t)|^p dt < \infty, \qquad 1 \leq p < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayına $L_p(D)$ uzayı denir (Stein ve Weiss, 1971).

Yani $L_p(D)$ uzayının elemanları olan ölçülebilir f fonksiyonlarının modülleri, p-inci mertebeden Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonlardır (Hacısalihoğlu ve Haciyev, 1995).

Tanım 2.1.5. ($L_p(D)$ Uzayında Norm)

$1 \leq p < \infty$ olmak üzere $L_p(D)$ uzayında norm,

$$\|f\|_{L_p(D)} = \left(\int_D |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

olarak tanımlanır (Stein ve Weiss, 1971).

Örneğin; $p = 1$ ve $D = \mathbb{R}$ için

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt = \|f\|_{L_1(\mathbb{R})}$$

olur.

Tanım 2.1.6. (Lebesgue Noktası)

$D \subset \mathbb{R}$ olmak üzere f fonksiyonu, D kümesi üzerinde Lebesgue anlamında integrallenebilir olsun. Bu durumda,

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt = 0, \qquad h > 0$$

eşitliğini sağlayan $x_0 \in D$ noktasına, f fonksiyonun Lebesgue noktası denir (Natanson, 1940).

Bu tanımda h yerine $-h$ alınırsa, f fonksiyonunun x_0 Lebesgue noktası için,

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{x_0-h}^{x_0} |f(t) - f(x_0)| dt = 0, \qquad h > 0$$

eşitliğinin sağlandığı görülür.

Tanım 2.1.7. (p-Lebesgue Noktası)

$1 < p < \infty$ ve $f \in L_p(\mathbb{R})$ olmak üzere,

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-f(x_0)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = 0, \qquad h > 0$$

eşitliğini sağlayan x_0 noktasına, f fonksiyonunun p-Lebesgue noktası denir (Mamedov, 1967).

Tanım 2.1.8. (Taylor Serisi)

Bir f fonksiyonu, x_0 noktasını içeren bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir olsun. Bu durumda,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

serisine, x_0 noktasında f fonksiyonu tarafından üretilen Taylor serisi denir (Balcı, 2009).

Her mertebeden türevlenebilen bir f fonksiyonu için kalan terimli Taylor formülü,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + K_n(x)$$

biçimindedir. Burada $n \to \infty$ için limit alındığında, Taylor serisinin $f(x)$ değerine yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\lim_{n\to\infty} K_n(x) = 0$ olmasıdır (Balcı, 2009).

Tanım 2.1.9. (Analitik Fonksiyon)

Bir $f(x)$ fonksiyonu, eğer $x = x_0$ noktasında

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \cdots$$

şeklinde Taylor serisine açılabiliyor ve x_0 noktasını içeren bir açık aralıktaki bütün x değerleri için bu Taylor açılımı $f(x)$ fonksiyonuna yakınsak ise, $f(x)$ fonksiyonuna analitik fonksiyon denir (Özer ve Eser, 2000).

Teorem 2.1.1. (Üçgen Eşitsizliği)

Her $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a + b| \leq |a| + |b|,$$

eşitsizlikleri gerçeklenir (Balcı, 1999).

Teorem 2.1.2. (Hölder'in İntegral Eşitsizliği)

p ve q iki pozitif reel sayı ve p'nin eşlenik sayısı q, yani $1 < p, q < \infty$ olmak üzere $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda $f \in L_p(\mathbb{R})$ ve $g \in L_q(\mathbb{R})$ için,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)g(t)|dt \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

veya

$$\|f.g\|_{L_1(R)} \leq \|f\|_{L_p(\mathbb{R})}. \|g\|_{L_q(\mathbb{R})}$$

eşitsizliğine Hölder eşitsizliği denir (Shalit, 2017).

Teorem 2.1.3. (Hölder'in Sonsuz Seriler Eşitsizliği)

p ve q iki pozitif reel sayı ve p'nin eşlenik sayısı q olsun, yani $1 < p, q < \infty$ olmak üzere $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda sonlu veya sonsuz (α_n) ve (β_n) dizileri için,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n \beta_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine Hölder Eşitsizliği denir (Shalit, 2017).

Lemma 2.1.1.

a ve b iki pozitif reel sayı olsun. Bu durumda, $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$(a + b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$$

eşitsizliği sağlanır (Rudin, 1987).

Teorem 2.1.4.

f fonksiyonu, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde Lebesgue anlamında integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt\,, \qquad x \in [a,b]$$

şeklinde tanımlanan $F(x)$ fonksiyonunun türevi $[a,b]$ aralığı üzerinde hemen hemen her yerde $f(x)$ fonksiyonuna eşittir (Natanson, 1964).

Tanım 2.1.10. (Stieltjes İntegrali)

f ve g fonksiyonları, $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı, sınırlı ve reel değerli foksiyonlar olsun ve $[a,b]$ aralığının bir P parçalanması

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

olarak verilsin. $k = 1,2,\ldots,n$ ve $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ olmak üzere

$$S(f,g,P) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})]$$

şeklinde oluşturulan $S(f,g,P)$ toplamı, ξ_k noktalarının seçiminden ve P parçalanma metodundan bağımsız olarak $\|P\| \to 0$ için sonlu bir I değerine yakınsıyorsa, yani

$$\lim_{\|P\|\to 0} S(f,g,P) = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] = I$$

oluyorsa, bu I değerine f fonksiyonunun g fonksiyonuna göre Stieltjes integrali denir ve

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x) \text{ veya } \int_a^b f(x)dg(x)$$

ile gösterilir (Natanson, 1964).

Bu tanımda $g(x) = x$ alınırsa Stieltjes integralinin, özel bir hali olan Riemann integraline dönüştüğü görülür.

Teorem 2.1.5.

f fonksiyonu, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ aralığı üzerinde Lebesgue integrallenebilir olsun. Eğer G fonksiyonu, $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı bir g fonksiyonunun belirsiz integrali ise,

$$(L)\int_a^b f(x)g(x)dx = (S)\int_a^b f(x)dG(x)$$

eşitliği sağlanır (Hobson, 1921).

Tanım 2.1.11. (Majorant & Minorant)

$X \subset \mathbb{R}$ olmak üzere;

(i) Her $x \in X$ için $x \leq a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{R}$ sayısı varsa X kümesi üstten sınırlıdır denir ve a sayısına ise bu kümenin bir üst sınırı (majorantı) adı verilir.

(ii) Her $x \in X$ için $a \leq x$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{R}$ sayısı varsa X kümesi alttan sınırlıdır denir ve a sayısına ise bu kümenin bir alt sınırı (minorantı) adı verilir (Zorich, 2004).

2.2. Urysohn-Tipi Lineer Olmayan İntegral Operatörler Ailesi ve Çekirdeği

Bu tezde, lineer operatörü kapsayan Urysohn operatörünün noktasal yakınsaklık problemi, bu başlık altında yapılan açıklamalar ve notasyonlar doğrultusunda ele alınmıştır. Bu yönüyle bu kesim çalışmamız için ayrı bir öneme sahiptir.

$\mathbb{R}$ reel ekseni göstermek üzere,

$$T_\lambda(g,x) = \int_{\mathbb{R}} K_\lambda\big(x,t,g(t)\big)dt \tag{2.1}$$

integral operatörler ailesi, $K_\lambda\big(x,t,g(t)\big)$ çekirdeği ile gösterilen lineer olmayan Ursyohn integral operatörünün genel bir formudur (Krasnoselsky, 1964). Burada λ, bir yığılma noktası olup sayı kümesinde değişen pozitif bir parametredir. $K_\lambda\big(x,t,g(t)\big)$ çekirdek fonksiyonu g değişkenine göre bir tam analitik fonksiyondur.

$$K_\lambda\big(x,t,g(t)\big) = H_\lambda(x,t)E\big(t,g(t)\big)$$

olması durumunda (2.1) operatörü, lineer olmayan Hammerstein integral operatörler ailesini verir (Hammerstein, 1930). Gadjiev (1966), bu ailenin 0'a yakınsadığını göstermiştir.

$$K_\lambda\big(x,t,g(t)\big) = g(t)W_\lambda(x,t) \tag{2.2}$$

olduğunda ise (2.1) operatörü, yaklaşım teorisinde birçok uygulamaya sahip $W_\lambda(x,t)$ çekirdekli lineer integral operatörler ailesine dönüşür (Butzer ve Nessel, 1971). Ayrıca, yaklaşım teorisinde lineer integral operatörlerin $W_\lambda(x,t)$ çekirdeği, x'in tüm değerleri için

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{\mathbb{R}} W_\lambda(x,t)\,dt = 1$$

eşitliğini sağlamaktadır (Esen Almalı, 2019). Bu özellik göz önünde bulundurularak (2.2)'deki $g(t)$ yerine herhangi bir $g(x_0)$ sabit değeri alınırsa,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{\mathbb{R}} K_\lambda\big(x,t,g(x_0)\big)dt = \lim_{\lambda\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g(x_0)W_\lambda(x,t)dt = g(x_0)$$

elde edilir.

Swiderski ve Wachnicki (2000), g^* fonksiyonu t'den bağımsız olmak üzere

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{\mathbb{R}} K_\lambda(x,t,g^*)dt = g^*$$

olduğunu göstermiştir. Bu formüller, $K_\lambda(x,t,g)$ çekirdeğini ve bunun $g = g(x_0)$ değerindeki kısmi türevlerini içermektedir. Bu, $g_0 = g(x_0)$ notasyonu ile gösterilecektir. Burada bir notasyon da K_λ çekirdeği için olacaktır.

Eğer $K_\lambda(x,t,g)$ çekirdeği, g değişkenin bir tam analitik fonksiyonu ise, bu çekirdek fonksiyonunun $[g(t) - g(x_0)]$'ın kuvvetlerine göre Taylor açılımı,

$$K_\lambda\big(x,t,g(t)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n K_\lambda(x,t,g)}{\partial g^n}\bigg|_{g=g(x_0)} [g(t) - g(x_0)]^n$$

şeklinde olur. Buradan itibaren,

$$K_{\lambda,g}^{(n)}(x,t,g_0)=\left.\frac{\partial^n K_\lambda(x,t,g)}{\partial g^n}\right|_{g=g(x_0)}$$

notasyonu kullanılacaktır. Bu gösterime göre K_λ çekirdeği

$$K_\lambda\big(x,t,g(t)\big)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}K_{\lambda,g}^{(n)}(x,t,g_0)[g(t)-g(x_0)]^n \tag{2.3}$$

olarak yazılabilir.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

Esen Almalı (2019)'nın verdiği teoremler, Urysohn-tipi lineer olmayan integral operatörler ailesinin, $L_1(\mathbb{R})$ uzayındaki sınırlı bir fonksiyonun Lebesgue noktasındaki yakınsaklığı üzerinedir. Tezin bu bölümünde bu teoremlere yer verilecek ve ispatları ayrıntılı bir şekilde ele alınacaktır. Bu teoremlerin incelenmesinden sonra bu çalışmayı özgün kılan kesime geçilecek ve bu kesimde aynı ailenin p-Lebesgue noktasındaki yakınsaklığı ile ilgili teoremler verilerek ve ispatları elde edilecektir.

Bu bölümün hemen başında yer alan $K_\lambda(x,t,g)$ çekirdeğinin sağladığı koşullara burada dikkat çekiyoruz. Sonraki kesimlerde de kullanılacak olan bu koşullar çalışmamız için büyük önem arzetmektedir. Söz konusu koşulları Esen Almalı (2019) şu şekide vermiştir:

3.1. $K_\lambda(x,t,g)$ Çekirdeğinin Sağladığı Koşullar

(a) $K_\lambda(x,t,g)$ çekirdeği, her $x,t \in \mathbb{R}$ sabitleri için g değişkeninin bir tam analitik fonksiyonudur. $\lambda > 0$ bir parametre ve g_0, t'den bağımsız bir değer olmak üzere,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{\mathbb{R}} K_\lambda(x,t,g_0)dt = g_0$$

eşitliği sağlanır.

(b) Herhangi bir $x = x_0$ sabit değeri için $K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)$ ifadesi t'ye göre, $t < x_0$ olduğunda monoton artan ve $t > x_0$ olduğunda ise monoton azalandır.

(c) $K_{\lambda,g}^{(n)}(x,y,g_0)$, negatif olmayan ve herhangi x,y sabitleri için,

$$K_{\lambda,g}^{(n)}(x,y,g_0) \le a(\lambda), \qquad n = 1,2,\ldots$$

koşulunu sağlayan bir fonksiyondur. Burada $\lambda \to \infty$ için $a(\lambda) \to 0$'dır.

(d) Herhangi bir $n = 1,2,\dots$ ve $y \neq x_0$ için

$$K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, y, g_0) \leq K'_{\lambda,g}(x_0, y, g_0)$$

sağlanır.

(e)

$$\int_{\mathbb{R}} K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, t, g_0)dt = a_n \ , \ \ n = 1,2,\dots$$

sağlanır. Burada a_n, λ'dan bağımsızdır fakat x_0'a bağlı olabilir.

(f) Herhangi bir $\delta > 0$ sabiti için

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{|t-x_0|\geq\delta} K'_{\lambda,g}(x_0, t, g_0)dt = 0$$

sağlanır.

(g) Herhangi bir $y \neq x_0$ için

$$\lim_{\lambda\to\infty} K'_{\lambda,g}(x_0, y, g_0) = 0$$

sağlanır.

Uyarı 3.1.1: (d) koşulu, (e)'deki (a_n) dizisinin sınırlı olduğunu gösterir.

Esen Almalı (2019) çalışmasında, klasik Gauss-Weierstrass çekirdeğine dayanan ve yukarıdaki (a)-(g) koşullarını sağlayan bir örnek olarak; g fonksiyonu $L_1(\mathbb{R})$-uzayında sınırlı bir fonksiyon olmak üzere,

$$K_\lambda\big(x, t, g(t)\big) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}}\left[e^{\left(e^{-\lambda^2(t-x)^2}[g(t)-g_0]\right)} + e^{-\lambda^2(t-x)^2}g_0 - 1\right]$$

çekirdeğini ele almıştır.

Şimdi bu çekirdeğin yukarıda verilen koşulları sağladığını gösterelim. Öncelikle belirtelim ki, $K_\lambda\big(x, t, g(t)\big)$'nin t'den bağımsız olan $g = g(x_0)$ noktasındaki kısmi türevleri sırasıyla;

$$K'_{\lambda,g}(x,t,g_0) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2(t-x)^2}$$

$$K''_{\lambda,g}(x,t,g_0) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2(t-x)^2 2}$$

.

.

.

$$K^{(n)}_{\lambda,g}(x,t,g_0) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2(t-x)^2 n}$$

olur. Koşullara geçtiğimizde;

● (a) koşuluna göre,

$$K_\lambda\big(x,t,g(t)\big) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}}\left[e^{\left(e^{-\lambda^2(t-x)^2}[g(t)-g_0]\right)} + e^{-\lambda^2(t-x)^2} g_0 - 1\right]$$

çekirdeği için

$$\int_{\mathbb{R}} K_\lambda(x,t,g_0)dt\, 12 = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} g_0 \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda^2(t-x)^2} dt$$

yazılabilir. Eşitliğin sağ tarafındaki integralde önce $t-x=s$ sonra da $\lambda s = z$ dönüşümü yapılırsa

$$\int_{\mathbb{R}} K_\lambda(x,t,g_0)dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} g_0 \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} dz$$

olur. Buradan da, $\int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$ olduğu dikkate alınırsa, $\lambda \to \infty$ için

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{\mathbb{R}} K_\lambda(x,t,g_0)dt = g_0$$

elde edilir.

● (b) koşuluna göre,

$$\left[K^{(n)}_{\lambda,g}(x_0,t,g_0)\right]'_t = \frac{-2\lambda^3(t-x_0)n}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{e^{\lambda^2(t-x_0)^2 n}}$$

olarak bulunur. Bu ifade, $t < x_0$ için pozitif ve $t > x_0$ için negatiftir. Dolayısıyla $K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, t, g_0)$, $t < x_0$ için monoton artan ve $t > x_0$ için ise monoton azalandır.

● (c) koşuluna göre,

$$K_{\lambda,g}^{(n)}(x, y, g_0) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2 (y-x)^{2n}} > 0$$

olacağından $K_{\lambda,g}^{(n)}(x, y, g_0)$ negatif olmayan fonksiyondur. Ayrıca,

$$K_{\lambda,g}^{(n)}(x, y, g_0) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{e^{\lambda^2 (y-x)^{2n}}} \leq a(\lambda)$$

kalır. Burada dikkat edilirse, $\lambda \to \infty$ için $a(\lambda) \to 0$'dır.

● (d) koşuluna göre, herhangi bir $n = 1,2, \dots$ ve $y \neq x_0$ için $\lambda \to \infty$ iken

$$\left(\frac{1}{e^{\lambda^2 (y-x_0)^2}}\right)^n \leq \left(\frac{1}{e^{\lambda^2 (y-x_0)^2}}\right)^1$$

olacağından

$$K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, y, g_0) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2 (y-x_0)^{2n}} \leq \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2 (y-x_0)^2} = K'_{\lambda,g}(x_0, y, g_0)$$

eşitsizliği sağlanır.

● (e) koşuluna göre,

$$\int_{\mathbb{R}} K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, t, g_0) dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2 (t-x_0)^{2n}} dt$$

olur. Burada önce $t - x_0 = s$ sonra da $\lambda s \sqrt{n} = z$ dönüşümü yapılırsa

$$\int_{\mathbb{R}} K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, t, g_0) dt = \frac{1}{\sqrt{n}} = a_n \ , \ \ n = 1,2, \dots$$

elde edilir.

● (f) koşuluna göre,

$$\int\limits_{|t-x_0|\geq\delta} K'_{\lambda,g}(x_0,t,g_0)dt = \int\limits_{|t-x_0|\geq\delta} \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2(t-x_0)^2} dt$$

$$= \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x_0-\delta} e^{-\lambda^2(t-x_0)^2} dt + \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{x_0+\delta}^{\infty} e^{-\lambda^2(t-x_0)^2} dt$$

yazılabilir. $K'_{\lambda,g}(x_0,t,g_0)$ çift fonksiyon olduğundan bu eşitlik,

$$\int\limits_{|t-x_0|\geq\delta} K'_{\lambda,g}(x_0,t,g_0)dt = 2\cdot\frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{x_0+\delta}^{\infty} e^{-\lambda^2(t-x_0)^2} dt$$

şeklinde gösterilebilir. Burada $t - x_0 = s$ ve $\lambda s = z$ dönüşümleri sırasıyla uygulanır ve $\lambda \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\int\limits_{\lambda\delta}^{\infty} e^{-t^2} dt = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int\limits_{|t-x_0|\geq\delta} K'_{\lambda,g}(x_0,t,g_0)dt = 0$$

olur.

● (g) koşuluna göre, $y \neq x_0$ için

$$\lim_{\lambda\to\infty} K'_{\lambda,g}(x_0,y,g_0) = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{e^{\lambda^2(y-x_0)^2}}$$

yazılır ve L'Hospital kuralı uygulanırsa,

$$\lim_{\lambda\to\infty} K'_{\lambda,g}(x_0,y,g_0) = 0$$

sonucuna ulaşılır.

Dikkat edildiğinde (c) koşulu gösterir ki, K_λ çekirdeğinin sınırlı bir $g(x)$ fonksiyonu için Taylor serisi kesinlikle düzgün yakınsaktır, dolayısıyla söz konusu Taylor serisinin kalan terimi 0’a gider. Bu ise integral ile toplamın sırasının değiştirilmesine imkân tanır. Böylece (2.3) ifadesinde her iki tarafın integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} T_\lambda(g,x) &= \int_{\mathbb{R}} K_\lambda\big(x,t,g(t)\big)dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}} K_{\lambda,g}^{(n)}(x,t,g_0)[g(t)-g(x_0)]^n dt \end{aligned} \tag{3.1}$$

yazılabilir. Elde edilen bu ifade, (2.1)’de gösterilen $K_\lambda\big(x,t,g(t)\big)$ çekirdekli Urysohn-tipi lineer olmayan integral operatörlerinin, uygun koşullar altında Taylor seri açılımına bağlı gösterimidir.

Çalışmanın bu kısmına kadar, Urysohn-tipi lineer olmayan integral operatörler ailesinin noktasal yakınsaklığının incelenebilmesi için açıklamalar yapılmış ve bazı notasyonlar belirlenmiştir. Ayrıca, (2.1) formundaki Urysohn-tipi lineer olmayan integral operatörler ailesinin, çalışmamızda kullanacağımız (3.1) gösterimi elde edilmiştir. Söz konusu operatörün noktasal yakınsaklığı ile ilgili problemler şu andan itibaren bunların ışığında incelenecektir.

3.2. Urysohn-Tipi Lineer Olmayan İntegral Operatörler Ailesinin $L_1(\mathbb{R})$-Uzayında Noktasal Yakınsaklığı

Bu kesimde, Esen Almalı (2019)’nın verdiği Urysohn-tipi lineer olmayan integral operatörler ailesinin noktasal yakınsaklığına ilişkin teoremler incelenecek ve ispatları detaylı bir şekilde ele alınacaktır.

Teorem 3.2.1.

g fonksiyonu, $L_1(\mathbb{R})$’de sınırlı bir fonksiyon olmak üzere $K_\lambda(x,t,g)$ çekirdeği (a)-(g) koşullarını sağlasın. Bu durumda, g fonksiyonun her bir x_0 Lebesgue noktasında

$$\lim_{\lambda\to\infty} T_\lambda(g,x_0) = g(x_0)$$

yaklaşımı gerçeklenir (Esen Almalı, 2019).

İspat: (3.1) ifadesi,

$$T_\lambda(g,x)=\int\limits_{\mathbb{R}} K_\lambda(x,t,g_0)dt+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\limits_{\mathbb{R}} K_{\lambda,g}^{(n)}(x,t,g_0)[g(t)-g(x_0)]^n dt$$

şeklinde ve burdan da

$$T_\lambda(g,x_0)=\int\limits_{\mathbb{R}} K_\lambda(x_0,t,g_0)dt+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\limits_{\mathbb{R}} K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)[g(t)-g(x_0)]^n dt$$

olarak yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafından $g(x_0)$ çıkarılır ve ardından Teorem 2.1.1 ile gösterilen üçgen eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}|T_\lambda(g,x_0)-g(x_0)|\le&\left|\int\limits_{\mathbb{R}} K_\lambda(x_0,t,g_0)dt-g(x_0)\right|\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\limits_{\mathbb{R}}|g(t)-g(x_0)|^n K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)dt\end{aligned}\qquad(3.2)$$

olur. Burada bu eşitliğe tekrar döneceğimizi not ederek, ispatın bu aşamasında ilk olarak $g\in L_1(\mathbb{R})$ fonksiyonunun sınırlılığını ve sonra da x_0'ın g fonksiyonunun Lebesgue noktası olması özelliğini ele alalım.

g fonksiyonu $L_1(\mathbb{R})$'de sınırlı olsun. Bu durumda, her $t\in\mathbb{R}$ için $|g(t)|\le A$ olacak şekilde bir pozitif $A\in\mathbb{R}$ sayısı vardır. Buna göre,

$$\begin{aligned}&|g(t)-g(x_0)|^n\le(2A)^n\\&|g(t)-g(x_0)|^n\le(2A)^{n-1}|g(t)-g(x_0)|,n=1,2,\dots\end{aligned}\qquad(3.3)$$

eşitsizlikleri yazılabilir.

x_0 noktası, $g\in L_1(\mathbb{R})$ fonksiyonunun Lebesgue noktası olsun. Bu takdirde,

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int\limits_{x_0-h}^{x_0}|g(t)-g(x_0)|dt=0$$

ve

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|g(t)-g(x_0)|dt=0$$

eşitlikleri sağlanır. Dolayısıyla limitin tanımı gereği, her $\varepsilon>0$ için en az bir $\delta>0$ sayısı vardır, öyle ki $0<h\leq\delta$ olduğunda

$$\left|\frac{1}{h}\int_{x_0-h}^{x_0}|g(t)-g(x_0)|dt\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \int_{x_0-h}^{x_0}|g(t)-g(x_0)|dt<\varepsilon h \tag{3.4}$$

ve

$$\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|g(t)-g(x_0)|dt\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \int_{x_0}^{x_0+h}|g(t)-g(x_0)|dt<\varepsilon h \tag{3.5}$$

gerçeklenir. Bunların yanı sıra, (3.3) ile (3.4) eşitsizlikleri göz önüne alındığında

$$\int_{x_0-h}^{x_0}|g(t)-g(x_0)|^n dt\leq(2A)^{(n-1)}\varepsilon h \tag{3.6}$$

eşitsizliğinin, (3.3) ile (3.5) eşitsizlikleri dikkate alındığında da

$$\int_{x_0}^{x_0+h}|g(t)-g(x_0)|^n dt\leq(2A)^{(n-1)}\varepsilon h \tag{3.7}$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür.

Şimdi (3.2) eşitsizliğine geri dönülürse, bu eşitsizlik belirlenen $\delta>0$ sayısına göre,

$$|T_\lambda(g,x_0)-g(x_0)|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left\{\int_{|t-x_0|\leq\delta}|g(t)-g(x_0)|^n K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)dt\right.$$
$$\left.+\int_{|t-x_0|\geq\delta}|g(t)-g(x_0)|^n K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)dt\right\}$$

$$+\left|\int_{\mathbb{R}} K_\lambda(x_0,t,g_0)dt - g(x_0)\right|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\{I_1+I_2\} + \left|\int_{\mathbb{R}} K_\lambda(x_0,t,g_0)dt - g(x_0)\right| \tag{3.8}$$

şeklinde gösterilebilir. İspatın tamamlanması için bu eşitsizliğin sağ tarafının $\lambda \to \infty$ için 0'a yakınsadığını göstermek yeterli olacaktır. Bunun için, ilk olarak;

$$\left|\int_{\mathbb{R}} K_\lambda(x_0,t,g_0)dt - g(x_0)\right|$$

ifadesini ele alalım. (a) koşuluna göre,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{\mathbb{R}} K_\lambda(x_0,t,g_0)dt = g_0$$

olur. Dolayısıyla bu ifade $\lambda \to \infty$ için 0'a yakınsar.

İkinci olarak; (3.8) ifadesindeki

$$I_2 = \int_{|t-x_0|\geq\delta} |g(t)-g(x_0)|^n K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)dt$$

integralini ele alalım. Bu integral için (3.3) eşitsizliğine ve (d) koşuluna göre

$$I_2 \leq (2A)^{(n-1)} \int_{|t-x_0|\geq\delta} |g(t)-g(x_0)| K'_{\lambda,g}(x_0,t,g_0)dt$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada üçgen eşitsizliği uygulanır ve $|g(x_0)| \leq A$ olduğu dikkate alınırsa,

$$I_2 \leq (2A)^{(n-1)}\left\{\int_{|t-x_0|\geq\delta} |g(t)| K'_{\lambda,g}(x_0,t,g_0)dt + |g(x_0)|\int_{|t-x_0|\geq\delta} K'_{\lambda,g}(x_0,t,g_0)dt\right\}$$

$$I_2 \leq \frac{(2A)^n}{2A}\int_{|t-x_0|\geq\delta} |g(t)| K'_{\lambda,g}(x_0,t,g_0)dt + \frac{(2A)^n}{2}\int_{|t-x_0|\geq\delta} K'_{\lambda,g}(x_0,t,g_0)dt \tag{3.9}$$

olur. Bu eşitsizlikteki ilk integral,

$$\int\limits_{|t-x_0|\geq\delta} |g(t)|K'_{\lambda,g}(x_0,t,g_0)dt = \int\limits_{-\infty}^{x_0-\delta} |g(t)|K'_{\lambda,g}(x_0,t,g_0)dt + \int\limits_{x_0+\delta}^{\infty} |g(t)|K'_{\lambda,g}(x_0,t,g_0)dt$$

olarak yazılabilir. (b) koşuluna göre $K'_{\lambda,g}(x_0,t,g_0)$ fonksiyonu, $(-\infty, x_0-\delta]$ aralığında monoton artan $[x_0+\delta,\infty)$ aralığında ise monoton azalandır. Dolayısıyla $K'_{\lambda,g}(x_0,t,g_0)$ fonksiyonu en büyük değerini, sırasıyla bu aralıkların üst ve alt sınırlarında alır. Buna göre yukarıdaki eşitlik, normun tanımı da kullanılırsa

$$\int\limits_{|t-x_0|\geq\delta} |g(t)|K'_{\lambda,g}(x_0,t,g_0)dt \leq K'_{\lambda,g}(x_0,x_0-\delta,g_0)\int\limits_{-\infty}^{x_0-\delta} |g(t)|dt + K'_{\lambda,g}(x_0,x_0+\delta,g_0)\int\limits_{x_0+\delta}^{\infty} |g(t)|dt$$

$$\int\limits_{|t-x_0|\geq\delta} |g(t)|K'_{\lambda,g}(x_0,t,g_0)dt \leq K'_{\lambda,g}(x_0,x_0-\delta,g_0)\int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(t)|dt + K'_{\lambda,g}(x_0,x_0+\delta,g_0)\int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(t)|dt$$

$$\int\limits_{|t-x_0|\geq\delta} |g(t)|K'_{\lambda,g}(x_0,t,g_0)dt \leq \|g\|_{L_1(\mathbb{R})}\begin{pmatrix} K'_{\lambda,g}(x_0,x_0-\delta,g_0) \\ +K'_{\lambda,g}(x_0,x_0+\delta,g_0)\end{pmatrix}$$

şeklinde eşitsizliğe dönüşür. Bu eşitsizlik (3.9)'da yerine yazılırsa I_2 integrali için,

$$I_2 \leq \frac{(2A)^n}{2A}\|g\|_{L_1(\mathbb{R})}\begin{pmatrix} K'_{\lambda,g}(x_0,x_0-\delta,g_0) \\ +K'_{\lambda,g}(x_0,x_0+\delta,g_0)\end{pmatrix} + \frac{(2A)^n}{2}\int\limits_{|t-x_0|\geq\delta} K'_{\lambda,g}(x_0,t,g_0)dt$$

sonucuna ulaşılır. Bu ise, (f) ve (g) koşullarına göre, $\lambda\to\infty$ için $I_2\to 0$ olması anlamına gelir.

Son olarak; (3.8) ifadesindeki

$$I_1 = \int\limits_{|t-x_0|\leq\delta} |g(t)-g(x_0)|^n K^{(n)}_{\lambda,g}(x_0,t,g_0)dt$$

integralini ele alalım. Bu integral,

$$I_1 = \int_{x_0-\delta}^{x_0} |g(t)-g(x_0)|^n K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)dt + \int_{x_0}^{x_0+\delta} |g(t)-g(x_0)|^n K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)dt$$

$$I_1 = I_{11} + I_{12} \tag{3.10}$$

şeklinde gösterilebilir. Bu durumda I_1 integralinin 0'a yakınsadığını gösterebilmek için I_{11} ve I_{12} integrallerini ayrı ayrı hesaplamalıyız.

İlk olarak;

$$I_{11} = \int_{x_0-\delta}^{x_0} |g(t)-g(x_0)|^n K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)dt$$

integralini hesaplayalım. Bunun hesabı için (3.6) eşitsizliğinin sağlandığını göz önünde bulundurarak,

$$F(t) = \int_{t}^{x_0} |g(s)-g(x_0)|^n ds$$

şeklinde bir $F(t)$ fonksiyonu tanımlayalım. $F(t)$ için, $x_0 - t \leq \delta$ olduğunda (yani $x_0 - t = h$ iken),

$$|F(t)| \leq (2A)^{(n-1)}\varepsilon(x_0 - t) \tag{3.11}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $F(t)$ fonksiyonunun diferansiyeli,

$$dF(t) = -|g(t)-g(x_0)|^n dt$$

olur. Bu durumda Lebesgue anlamındaki I_{11} integrali, Teorem 2.1.5'e göre

$$I_{11} = (\mathrm{L}) \int_{x_0-\delta}^{x_0} |g(t)-g(x_0)|^n K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)dt = -(\mathrm{S}) \int_{x_0-\delta}^{x_0} K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)dF(t)$$

şeklinde Stieltjes integrali olarak yazılabilir. Stieltjes integraline kısmi integrasyon ve ardından üçgen eşitsizliği uygulanırsa,

$$I_{11} = -K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, t, g_0)F(t)|_{x_0-\delta}^{x_0} + \int_{x_0-\delta}^{x_0} F(t)d_t\Big[K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, t, g_0)\Big]$$

$$|I_{11}| \leq K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, x_0, g_0)|F(x_0)| + K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, x_0 - \delta, g_0)|F(x_0 - \delta)|$$

$$+ \int_{x_0-\delta}^{x_0} |F(t)|d_t\Big[K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, t, g_0)\Big]$$

olur. Bu eşitsizlik, (3.11) eşitsizliğine göre yeniden düzenlenirse,

$$|I_{11}| \leq (2A)^{(n-1)}\varepsilon\delta K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, x_0 - \delta, g_0)$$

$$+(2A)^{(n-1)}\varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} (x_0 - t)d_t\Big[K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, t, g_0)\Big]$$

olarak sağlanır. Buradaki integrale tekrar kısmi integrasyon uygulandığında ise,

$$\begin{aligned} |I_{11}| &\leq (2A)^{(n-1)}\varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, t, g_0)dt \\ &\leq (2A)^{(n-1)}\varepsilon \int_{\mathbb{R}} K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, t, g_0)dt \\ &\leq (2A)^{(n-1)}\varepsilon \int_{\mathbb{R}} K'_{\lambda,g}(x_0, t, g_0)dt \\ &= (2A)^{(n-1)}\varepsilon a_1 \end{aligned} \tag{3.12}$$

sonucuna ulaşılır.

İkinci olarak;

$$I_{12} = \int_{x_0}^{x_0+\delta} |g(t) - g(x_0)|^n K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, t, g_0)dt$$

integralini hesaplayalım. Bunun hesabı için (3.7) eşitsizliğini göz önü alarak,

$$G(t) = \int_{x_0}^{t} |g(z) - g(x_0)|^n dz$$

şeklinde bir $G(t)$ fonksiyonu tanımlayalım. $G(t)$ için, $t - x_0 \leq \delta$ olduğunda (yani $t - x_0 = h$ iken),

$$|G(t)| \leq (2A)^{(n-1)} \varepsilon (t - x_0) \tag{3.13}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $G(t)$ fonksiyonunun diferansiyeli,

$$dG(t) = |g(t) - g(x_0)|^n dt$$

dir. Bu durumda Lebesgue anlamında olan I_{12} integrali, Stieltjes integrali olarak yazılabilir, yani

$$I_{12} = (\mathrm{L}) \int_{x_0}^{x_0+\delta} |g(t) - g(x_0)|^n K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, t, g_0) dt = (\mathrm{S}) \int_{x_0}^{x_0+\delta} K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, t, g_0) dG(t)$$

olur. Buradaki Stieltjes integraline kısmi integrasyon ve ardından üçgen eşitsizliği uygulanırsa,

$$I_{12} = K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, t, g_0) G(t) \Big|_{x_0}^{x_0+\delta} - \int_{x_0}^{x_0+\delta} G(t) d_t \left[K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, t, g_0) \right]$$

$$|I_{12}| \leq K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, x_0 + \delta, g_0) |G(x_0 + \delta)| + K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, x_0, g_0) |G(x_0)|$$
$$+ \int_{x_0}^{x_0+\delta} |G(t)| d_t \left[-K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, t, g_0) \right]$$

elde edilir. (b) koşuluna göre, $K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, t, g_0)$ fonksiyonu $[x_0, x_0 + \delta]$ aralığında azalandır. Dolayısıyla $d_t \left[-K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, t, g_0) \right]$ diferansiyeli pozitif olur ki, böylece burada (3.13) eşitsizliği kullanılabilir. Söz konusu eşitsizlik kullanıldığında I_{12} integrali için,

$$|I_{12}| \leq (2A)^{(n-1)} \varepsilon \delta K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, x_0 + \delta, g_0)$$
$$+ (2A)^{(n-1)} \varepsilon \int_{x_0}^{x_0+\delta} (t - x_0) d_t \left[-K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, t, g_0) \right]$$

yazılabilir. Burada yer alan integrale tekrar kısmi integrasyon uygulandığında ise,

$$
\begin{aligned}
|I_{12}| &\leq (2A)^{(n-1)}\varepsilon \int_{x_0}^{x_0+\delta} K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)dt \\
&\leq (2A)^{(n-1)}\varepsilon \int_{\mathbb{R}} K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)dt \\
&\leq (2A)^{(n-1)}\varepsilon \int_{\mathbb{R}} K_{\lambda,g}'(x_0,t,g_0)dt \\
&= (2A)^{(n-1)}\varepsilon a_1 \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır.

O halde, (3.10)'daki I_1 integrali

$$|I_1| \leq |I_{12}| + |I_{12}|$$

şeklinde gösterilebileceğinden, (3.12) ile (3.14) sonuçları burada yerine yazılırsa

$$|I_1| \leq 2.(2A)^{(n-1)}\varepsilon a_1$$

elde edilir. Bu ise, yeterince küçük bir ε için, $\lambda \to \infty$ iken $I_1 \to 0$ olduğunu gösterir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Esen Almalı (2019), Teorem 3.2.1'in bir uygulaması olara şu örneği vermiştir:

Örnek 3.2.1.

$\Phi(t) \leq 1$ fonksiyonu negatif olmayan, $(-\infty, 0]$ aralığında monoton olarak artan, $[0,\infty)$ aralığında monoton olarak azalan ve

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(t)dt = 1 \qquad (3.15)$$

eşitliğini sağlayan bir fonksiyon olmak üzere,

$$K_\lambda(x,t,g(t)) = \lambda\left[e^{\Phi(\lambda(t-x))(g(t)-g_0)} + \Phi(\lambda(t-x))g_0 - 1\right]$$

çekirdeğini ele alalım.

$\Phi(t) \leq 1$ ise $n = 1,2, \ldots$ olmak üzere $\Phi^n(t) \leq 1$ sağlanır. Dolayısıyla her $t \in \mathbb{R}$ için $\Phi^n(t) \leq \Phi(t)$ kalır. Buna göre,

$$a_n = \int_{\mathbb{R}} \Phi^n(t)dt \leq \int_{\mathbb{R}} \Phi(t)dt = 1$$

olur. $K_\lambda(x, t, g)$ çekirdeğinin g değişkenine göre türevleri,

$$K_{\lambda,g}^{(n)}\big(x, t, g(t)\big) = \lambda\Phi^n\big(\lambda(t - x)\big)e^{\Phi(\lambda(t-x))(g(t)-g_0)}$$

$$K_{\lambda,g}^{(n)}(x, t, g_0) = \lambda\Phi^n\big(\lambda(t - x)\big), \qquad n = 1,2, \ldots \tag{3.16}$$

dir. Ayrıca $K_\lambda(x, t, g)$ çekirdeği, g değişkeninin bir tam analitik fonksiyonu olduğundan,

$$K_\lambda\big(x, t, g(t)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} K_{\lambda,g}^{(n)}(x, t, g_0)[g(t) - g(x_0)]^n$$

yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafının $\mathbb{R}$ üzerindeki integrali alınırsa

$$T_\lambda(g, x) = \int_{\mathbb{R}} K_\lambda\big(x, t, g(t)\big)dt = \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} K_{\lambda,g}^{(n)}(x, t, g_0)[g(t) - g(x_0)]^n \, dt$$

olur. (3.16) ifadesi burada yerine yazılarak gerekli düzenlemeler yapıldığında ise,

$$\begin{aligned}
T_\lambda(g, x_0) - g(x_0) &= \lambda \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} [g(t) - g(x_0)]^n \Phi^n\big(\lambda(t - x_0)\big) \, dt \\
&= \lambda \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} [g(x_0 + t) - g(x_0)]^n \Phi^n(\lambda t) \, dt \\
&= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}} [g(x_0 + t) - g(x_0)]^n \Phi^n(\lambda t) dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.15)'e göre, herhangi bir $\delta > 0$ için $\lambda \to \infty$ iken

$$\lambda \int_{\delta}^{\infty} \Phi^n(\lambda t)dt = \int_{\delta\lambda}^{\infty} \Phi^n(t)dt \leq \int_{\delta\lambda}^{\infty} \Phi(t)dt$$

ifadesinin 0'a yakınsadığı açıktır. Diğer taraftan,

$$\int_{\lambda/2}^{\lambda} \Phi(t)dt \geq \frac{\lambda}{2}\Phi(\lambda)$$

olur ki, bu da $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\Phi(\lambda) = 0$ olduğunu gösterir.

Sonuç olarak; $\Phi(t) \leq 1$ fonksiyonu, negatif olmayan, $(-\infty, 0]$ aralığında monoton artan, $[0, \infty)$ aralığında monoton azalan ve (3.15) koşulunu sağlayan bir fonksiyon olduğunda, $g \in L_1(\mathbb{R})$ sınırlı fonksiyonunun her bir x_0 Lebesgue noktası için,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda \int_{\mathbb{R}} \left[e^{\Phi(\lambda(t-x_0))(g(t)-g(x_0))} + \Phi\big(\lambda(t-x_0)\big)g(x_0) - 1\right]dt = g(x_0)$$

sağlanır.

Şimdi, Urysohn-tipi lineer olmayan integral operatörler ailesinin yakınsaklığını, $K_\lambda(x_0, t, g)$ çekirdeğinin monotonluk özelliği yerine bu çekirdek fonksiyonunun majorantı olan bir fonksiyon kullanarak inceleyelim.

Teorem 3.2.2.

$K_\lambda(x_0, t, g)$ çekirdeği (a), (c) ve (e) şartlarını sağlasın ve kabul edelim ki herhangi bir $n = 1,2, ...$ için

$$K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, t, g_0) \leq D_{\lambda,n}(t, x_0) \tag{3.17}$$

olacak şekilde mevcut olan $D_{\lambda,n}(t, x_0)$ majorant fonksiyonu, aşağıdaki koşulları gerçeklesin:

(b*) $D_{\lambda,n}(t, x_0)$ fonksiyonu, $t < x_0$ için monoton artan ve $t > x_0$ için ise monoton azalandır.

(d*)

$$\int_{\mathbb{R}} D_{\lambda,n}(t,x_0)dt \leq b < \infty$$

sağlanır. Burada b, λ'dan bağımsızdır.

(f*) Herhangi bir $\delta > 0$ sabiti için

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{|t-x_0|\geq\delta} D_{\lambda,n}(t,x_0)dt = 0$$

sağlanır.

(g*) Herhangi bir $y \neq x_0$ için

$$\lim_{\lambda\to\infty} D_{\lambda,n}(y,x_0) = 0$$

sağlanır.

Bu durumda, $g \in L_1(\mathbb{R})$ sınırlı fonksiyonunun her bir x_0 Lebesgue noktasında

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{\mathbb{R}} K_\lambda\big(x_0,t,g(t)\big)dt = g(x_0)$$

yaklaşımı gerçeklenir (Esen Almalı, 2019).

İspat: Bu teoremin ispatında Teorem 3.2.1'in ispatına benzer bir yol izlenecektir. Bu doğrultuda (3.1)'deki eşitlik,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} K_\lambda\big(x_0,t,g(t)\big)dt &= \int_{\mathbb{R}} K_\lambda(x_0,t,g_0)dt \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}} K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)[g(t)-g(x_0)]^n dt\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafından önce $g(x_0)$ çıkarılır sonra da üçgen eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|\int_{\mathbb{R}} K_\lambda\big(x_0,t,g(t)\big)dt - g(x_0)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{\mathbb{R}} |g(t)-g(x_0)|^n K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)dt$$
$$+\left|\int_{\mathbb{R}} K_\lambda(x_0,t,g_0)dt - g_0\right|$$

eşitsizliği elde edilir. (3.17) koşuluna göre ise,

$$\left|\int_{\mathbb{R}} K_\lambda\big(x_0,t,g(t)\big)dt - g(x_0)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{\mathbb{R}} |g(t)-g(x_0)|^n D_{\lambda,n}(t,x_0)dt$$
$$+\left|\int_{\mathbb{R}} K_\lambda(x_0,t,g_0)dt - g_0\right| \tag{3.18}$$

olur. Burada bu eşitsizliğe tekrar döneceğimizi not ederek, ispatın bu aşamasında önce $g \in L_1(\mathbb{R})$ fonksiyonunun sınırlılığını sonra da x_0'ın g fonksiyonunun Lebesgue noktası olması özelliğini ele alalım.

g fonksiyonu $L_1(\mathbb{R})$'de sınırlı ise, her $t \in \mathbb{R}$ için $|g(t)| \le A$ olacak şekilde bir pozitif $A \in \mathbb{R}$ sayısı vardır. Buna göre $n = 1,2,\ldots$ olmak üzere,

$$|g(t)-g(x_0)| \le 2A$$
$$|g(t)-g(x_0)|^n \le (2A)^{n-1}|g(t)-g(x_0)|\,, n = 1,2,\ldots \tag{3.19}$$

eşitsizlikleri yazılabilir.

x_0 noktası $g \in L_1(\mathbb{R})$ fonksiyonunun Lebesgue noktası ise, her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ sayısı vardır, öyle ki $0 < h \le \delta$ olduğunda

$$\int_{x_0-h}^{x_0} |g(t)-g(x_0)|dt < \varepsilon h \tag{3.20}$$

ve

$$\int_{x_0}^{x_0+h} |g(t)-g(x_0)|dt < \varepsilon h \tag{3.21}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bunların yanı sıra, (3.19) ve (3.20) eşitsizlikleri göz önüne alındığında

$$\int_{x_0-h}^{x_0} |g(t) - g(x_0)|^n dt \leq (2A)^{(n-1)} \varepsilon h \tag{3.22}$$

eşitsizliğinin, (3.19) ile (3.21) eşitsizlikleri dikkate alındığında ise

$$\int_{x_0}^{x_0+h} |g(t) - g(x_0)|^n dt \leq (2A)^{(n-1)} \varepsilon h \tag{3.23}$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür.

Şimdi (3.18) eşitsizliğine geri dönülürse, bu eşitsizlik belirlenen $\delta > 0$ sayısına göre,

$$\begin{aligned}\left| \int_{\mathbb{R}} K_\lambda\big(x_0, t, g(t)\big) dt - g(x_0) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \Bigg\{ & \int_{|t-x_0| \leq \delta} |g(t) - g(x_0)|^n D_{\lambda,n}(t, x_0) dt \\ & + \int_{|t-x_0| \geq \delta} |g(t) - g(x_0)|^n D_{\lambda,n}(t, x_0) dt \Bigg\} \\ & + \left| \int_{\mathbb{R}} K_\lambda(x_0, t, g_0) dt - g_0 \right| \end{aligned}$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} K_\lambda\big(x_0, t, g(t)\big) dt - g(x_0) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \{J_1 + J_2\} + \left| \int_{\mathbb{R}} K_\lambda(x_0, t, g_0) dt - g_0 \right| \tag{3.24}$$

şeklinde gösterilebilir. Gelinen bu noktada, mutlak içindeki ifade (a) koşuluna göre $\lambda \to \infty$ için 0'a yakınsar. Dolayısıyla ispatın tamamlanması için (3.24)'teki J_1 ve J_2 integrallerinin de 0'a yakınsadığını göstermek gerekir.

İlk olarak;

$$J_2 = \int_{|t-x_0| \geq \delta} |g(t) - g(x_0)|^n D_{\lambda,n}(t, x_0) dt$$

integralini ele alalım. Bu integralde önce (3.19) eşitsizliği yerine yazılır ve ardından da üçgen eşitsizliği uygulanırsa,

$$J_2 \le (2A)^{(n-1)} \int\limits_{|t-x_0|\ge\delta} |g(t) - g(x_0)| D_{\lambda,n}(t,x_0)dt$$

$$J_2 \le \frac{(2A)^n}{2A} \int\limits_{|t-x_0|\ge\delta} |g(t)| D_{\lambda,n}(t,x_0)dt + \frac{(2A)^n}{2} \int\limits_{|t-x_0|\ge\delta} D_{\lambda,n}(t,x_0)dt \qquad (3.25)$$

olur. Bu eşitsizlikteki ilk integral,

$$\int\limits_{|t-x_0|\ge\delta} |g(t)| D_{\lambda,n}(t,x_0)dt = \int\limits_{-\infty}^{x_0-\delta} |g(t)| D_{\lambda,n}(t,x_0)dt + \int\limits_{x_0+\delta}^{\infty} |g(t)| D_{\lambda,n}(t,x_0)dt$$

olarak yazılabilir. $D_{\lambda,m}(t,x_0)$ majorant fonksiyonu, (b*) koşuluna göre $(-\infty, x_0-\delta]$ aralığında monoton artan, $[x_0+\delta,\infty)$ aralığında ise monoton azalandır. Dolayısıyla en büyük değerini, sırasıyla bu aralıkların üst ve alt sınırlarında alır. Buna göre, normun tanımı da kullanılırsa, yukarıdaki eşitlik

$$\int\limits_{|t-x_0|\ge\delta} |g(t)| D_{\lambda,n}(t,x_0)dt \le \|g\|_{L_1(\mathbb{R})} \begin{pmatrix} D_{\lambda,n}(x_0-\delta,x_0) \\ +D_{\lambda,n}(x_0+\delta,x_0) \end{pmatrix}$$

şeklinde sağlanan bir eşitsizlik halini alır. Bu eşitsizlik (3.25)'teki yerine yazılırsa J_2 integrali için,

$$J_2 \le \frac{(2A)^n}{2A} \|g\|_{L_1(\mathbb{R})} \begin{pmatrix} D_{\lambda,n}(x_0-\delta,x_0) \\ +D_{\lambda,n}(x_0+\delta,x_0) \end{pmatrix} + \frac{(2A)^n}{2} \int\limits_{|t-x_0|\ge\delta} D_{\lambda,n}(t,x_0)dt$$

sonucuna ulaşılır. Bu sonuç, (f*) ve (g*) koşullarından dolayı J_2 integralinin $\lambda \to \infty$ için 0'a yakınsadığını gösterir.

Son olarak,

$$J_1 = \int\limits_{|t-x_0|\le\delta} |g(t) - g(x_0)|^n D_{\lambda,n}(t,x_0)dt$$

integralini ele alalım. Bu integral,

$$J_1 = \int_{x_0-\delta}^{x_0} |g(t)-g(x_0)|^n D_{\lambda,n}(t,x_0)dt + \int_{x_0}^{x_0+\delta} |g(t)-g(x_0)|^n D_{\lambda,n}(t,x_0)dt$$

$$J_1 = J_{11} + J_{12} \tag{3.26}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda, J_1 integralinin 0'a yakınsadığı göstermek için J_{11} ve J_{12} integrallerini ayrı ayrı hesaplamalıyız.

J_{11} integralinin hesabı için; (3.22) eşitsizliğinin sağlandığını dikkate alarak,

$$F(t) = \int_{t}^{x_0} |g(s)-g(x_0)|^n ds$$

şeklinde bir $F(t)$ fonksiyonu tanımlayalım. $F(t)$ için, $x_0 - t \le \delta$ olduğunda (yani $x_0 - t = h$ iken)

$$|F(t)| \le (2A)^{(n-1)} \varepsilon (x_0 - t) \tag{3.27}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $F(t)$ fonksiyonunun diferansiyeli,

$$dF(t) = -|g(t)-g(x_0)|^n dt$$

dir. Buna göre Lebesgue anlamındaki J_{11} integrali, Stieltjes integrali olarak yazılabilir, yani

$$J_{11} = \text{(L)} \int_{x_0-\delta}^{x_0} |g(t)-g(x)|^n D_{\lambda,n}(t,x_0)dt = -\text{(S)} \int_{x_0-\delta}^{x_0} D_{\lambda,n}(t,x_0)dF(t)$$

olur. Buradaki Stieltjes integrali, kısmi integrasyon uygulandıktan sonra üçgen eşitsizliğine ve (3.27)'ye göre yeniden düzenlenirse,

$$|J_{11}| \le (2A)^{(n-1)} \varepsilon \delta D_{\lambda,n}(x_0-\delta, x_0) + (2A)^{(n-1)} \varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} (x_0 - t) d_t \big[D_{\lambda,n}(t,x_0)\big]$$

şeklinde sağlanan eşitsizliğe dönüşür. Burada tekrar kısmi integrasyon uygulandığında J_{11} integrali için,

$$|J_{11}| \leq (2A)^{(n-1)}\varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} D_{\lambda,n}(t,x_0)dt$$

$$\leq (2A)^{(n-1)}\varepsilon \int_{\mathbb{R}} D_{\lambda,n}(t,x_0)dt$$

$$\leq (2A)^{(n-1)}\varepsilon b \tag{3.28}$$

sonucuna ulaşılır.

J_{12} integralinin hesabı için; (3.23) eşitsizliğinin sağlandığını dikkate alarak,

$$G(t) = \int_{x_0}^{t} |g(z) - g(x_0)|^n dz$$

şeklinde bir $G(t)$ fonksiyonu tanımlayalım. Bu durumda $G(t)$ için, $t - x_0 \leq \delta$ olduğunda (yani $t - x_0 = h$ iken)

$$|G(t)| \leq (2A)^{(n-1)}\varepsilon(t - x_0) \tag{3.29}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $G(t)$ fonksiyonunun diferansiyeli,

$$dG(t) = |g(t) - g(x_0)|^n dt$$

olur. Buna göre Lebesgue anlamındaki J_{12} integrali, Stieltjes integrali olarak yazılabilir, yani

$$J_{12} = \text{(L)} \int_{x_0}^{x_0+\delta} |g(t) - g(x)|^n D_{\lambda,n}(t,x_0)dt = \text{(S)} \int_{x_0}^{x_0+\delta} D_{\lambda,n}(t,x_0)dG(t)$$

olarak ifade edilebilir. Stieltjes integraline kısmi integrasyon ve ardından üçgen eşitsizliği uygulanırsa,

$$|J_{12}| \leq D_{\lambda,n}(x_0+\delta,x_0)|G(x_0+\delta)| + D_{\lambda,n}(x_0,x_0)|G(x_0)|$$

$$+ \int_{x_0}^{x_0+\delta} |G(t)| d_t\left[-D_{\lambda,n}(t,x_0)\right]$$

bulunur. $D_{\lambda,n}(t,x_0)$ majorant fonksiyonu, (b*) koşuluna göre $[x_0, x_0+\delta]$ aralığında monoton azalan olacağından, $d_t\left[-D_{\lambda,n}(t,x_0)\right]$ diferansiyeli pozitif olur. Dolayısıyla bu eşitsizlik (3.29) eşitsizliğine göre yeniden yazılırsa, J_{12} integrali için

$$|J_{12}| \leq (2A)^{(n-1)}\varepsilon\delta D_{\lambda,n}(x_0+\delta, x_0) + (2A)^{(n-1)}\varepsilon \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta} (t-x_0) d_t\left[-D_{\lambda,n}(t,x_0)\right]$$

eşitsizliği sağlanır. Burada tekrar kısmi integrasyon uygulandığında ise,

$$\begin{aligned} |J_{12}| &\leq (2A)^{(n-1)}\varepsilon \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta} D_{\lambda,n}(t,x_0)dt \\ &\leq (2A)^{(n-1)}\varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}} D_{\lambda,n}(t,x_0)dt \\ &\leq (2A)^{(n-1)}\varepsilon b \end{aligned} \tag{3.30}$$

sonucuna ulaşılır.

O halde, (3.28) ve (3.30) sonuçları (3.26) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$|J_1| \leq 2.(2A)^{(n-1)}\varepsilon b$$

elde edilir. Bu ise, yeterince küçük bir ε için, $\lambda \to \infty$ iken $J_1 \to 0$ olduğunu gösterir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Esen Almalı (2019), Teorem 3.2.2'nin bir uygulaması olarak şu örneği vermiştir:

Örnek 3.2.2.

$$\Psi_\lambda(t,x) = \left(\frac{\sin\frac{\lambda(t-x)}{2}}{\frac{\lambda(t-x)}{2}}\right)^2$$

ve

$$K_\lambda(x,t,g(t)) = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{\Psi_\lambda(t,x)[g(t)-g(x_0)]} + \Psi_\lambda(t,x)g(x_0) - 1\right] \tag{3.31}$$

olsun.

Bu durumda, $K_\lambda(x,t,g)$ çekirdeğinin g değişkenine göre türevleri,

$$K_{\lambda,g}^{(n)}(x,t,g_0)=\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}\Psi_\lambda^n(t,x),\qquad n=1,2,\ldots$$

olur. Buna göre, $K_\lambda(x,t,g)$ çekirdeğinin ve n. türevinin sırasıyla (a) ve (c) koşullarını sağladığı açıktır.

(e) koşulundaki (a_n) dizisi için

$$a_n=\int_{\mathbb{R}} K_{\lambda,g}^{(n)}(x,t,g_0)dt<\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\Psi_\lambda(t,x)dt=1,\qquad n=1,2,\ldots$$

olur ki bu, (a_n) dizisinin sınırlı olduğunu gösterir. Ayrıca, her t, x ve λ için

$$K_{\lambda,g}^{(n)}(x,t,g_0)\le\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}(1+\lambda^2(t-x)^2)^n},\qquad n=1,2,\ldots$$

eşitsizliği sağlanır. Buradaki,

$$D_{\lambda,n}(t,x)=\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}(1+\lambda^2(t-x)^2)^n}$$

fonksiyonu, (3.17)'de ifade edilen majorant fonksiyonudur. Dolayısıyla,

$$\frac{\partial}{\partial t}D_{\lambda,n}(t,x)=\frac{-2n\lambda^3(t-x)}{\sqrt{2\pi}(1+\lambda^2(t-x)^2)^{n+1}}$$

olacağından, $D_{\lambda,n}(t,x)$ majorant fonksiyonu $t<x$ için monoton artan ve $t>x$ için ise monoton azalan olur, yani (b*) koşulu sağlanır. Bunun yanı sıra açıkça görülür ki, $D_{\lambda,n}(t,x)$ majorant fonksiyonu (d*) koşulunu da sağlar.

Diğer taraftan,

$$\int_{|t-x_0|\ge\delta} D_{\lambda,n}(t,x_0)dt=\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}\left\{\int_{-\infty}^{x_0-\delta}\frac{dt}{(1+\lambda^2(t-x_0)^2)^n}+\int_{x_0+\delta}^{\infty}\frac{dt}{(1+\lambda^2(t-x_0)^2)^n}\right\}$$
$$\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\int_{-\infty}^{-\delta\lambda}\frac{dt}{1+t^2}+\int_{\delta\lambda}^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}\right\}$$

eşitsizliği yazılabilir. $\lambda \to \infty$ için bu eşitsizliğin sağ tarafı 0'a yakınsar, dolayısıyla (f*) koşulu sağlanır.

Son olarak, $y \neq x_0$ için

$$\lim_{\lambda\to\infty} D_{\lambda,n}(y,x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\lambda}{(1+\lambda^2(y-x_0)^2)^n} = 0$$

olacağından (g*) koşulu da sağlanır. Böylece, (2.1)'de verilen Urysohn-tipi lineer olmayan integral operatörler ailesinin (3.31) çekirdeği ile Teorem 3.2.2'nin tüm koşullarını sağladığı görülür.

3.3. Urysohn-Tipi Lineer Olmayan İntegral Operatörler Ailesinin $L_p(\mathbb{R})$-Uzayında Noktasal Yakınsaklığı

Bu başlık altında, $1 < p < \infty$ ve $g \in L_p(\mathbb{R})$ sınırlı bir fonksiyon olmak üzere

$$T_\lambda(g,x) = \int_{\mathbb{R}} K_\lambda\big(x,t,g(t)\big)dt$$

genel formuna sahip Urysohn-tipi lineer olmayan integral operatörler ailesinin p-Lebesgue noktasındaki yakınsaklığını ifade eden teoremler verilecek ve ispatları elde edilecektir. Burada, $K_\lambda(x,t,g)$ çekirdeğinin 3. bölümün ilk kesiminde verilen (a)-(g) koşullarını sağladığını hatırlatıyoruz.

Teorem 3.3.1.

g fonksiyonu, $L_p(\mathbb{R})$'de sınırlı bir fonksiyon olmak üzere $K_\lambda(x,t,g)$ çekirdeği (a)-(g) şartlarını sağlasın. Bu durumda, g fonksiyonun her bir x_0 p-Lebesgue noktasında

$$\lim_{\lambda\to\infty} T_\lambda(g,x_0) = g(x_0)$$

yaklaşımı gerçeklenir.

İspat: (3.1)'teki eşitlik,

$$T_\lambda(g,x_0) = \int_{\mathbb{R}} K_\lambda(x_0,t,g_0)dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}} K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)[g(t)-g(x_0)]^n dt$$

olarak yazılabilir. Bu ifadenin her iki taraftan önce $g(x_0)$ çıkarılır sonra da üçgen eşitsizliği uygulanırsa,

$$|T_\lambda(g,x_0)-g(x_0)| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{\mathbb{R}}|g(t)-g(x_0)|^n K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)dt + \left|\int_{\mathbb{R}} K_\lambda(x_0,t,g_0)dt-g(x_0)\right|$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğe, Teorem 2.1.2'de verilen Hölder'in integral için olan eşitsizliği uygulandığında,

$$\begin{aligned}
&|T_\lambda(g,x_0)-g(x_0)| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{\mathbb{R}}|g(t)-g(x_0)|^n\left[K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)\right]^{\frac{1}{p}}\left[K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)\right]^{\frac{1}{q}}dt \\
&+\left|\int_{\mathbb{R}} K_\lambda(x_0,t,g_0)dt-g(x_0)\right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\int_{\mathbb{R}}|g(t)-g(x_0)|^{np}K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)dt\right)^{\frac{1}{p}}\times\left(\int_{\mathbb{R}} K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left|\int_{\mathbb{R}} K_\lambda(x_0,t,g_0)dt-g(x_0)\right|
\end{aligned}$$

olur. Bu eşitsizlik, Lemma 2.1.1'e göre yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
&|T_\lambda(g,x_0)-g(x_0)|^p \\
&\leq 2^p\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\int_{\mathbb{R}}|g(t)-g(x_0)|^{np}K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)dt\right)^{\frac{1}{p}}\times\left(\int_{\mathbb{R}} K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]^p \\
&+2^p\left[\left|\int_{\mathbb{R}} K_\lambda(x_0,t,g_0)dt-g(x_0)\right|\right]^p
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradaki sonsuz toplama, Teorem 2.1.3'te verilen Hölder'in sonsuz seriler için olan eşitsizliği uygulandığında ise,

$$|T_\lambda(g,x_0)-g(x_0)|^p \le 2^p\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n!}\left(\int_{\mathbb{R}}|g(t)-g(x_0)|^{np}K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)dt\right)^{\frac{1}{p}}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right.$$

$$\left.\times\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(\int_{\mathbb{R}}K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]^p$$

$$+2^p\left|\int_{\mathbb{R}}K_\lambda(x_0,t,g_0)dt-g(x_0)\right|^p$$

$$|T_\lambda(g,x_0)-g(x_0)|^p \le 2^p\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\right)^p\int_{\mathbb{R}}|g(t)-g(x_0)|^{np}K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)dt$$

$$\times\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)dt\right)^{\frac{p}{q}}+2^p\left|\int_{\mathbb{R}}K_\lambda(x_0,t,g_0)dt-g(x_0)\right|^p \qquad (3.32)$$

elde edilir. İspatın bu aşamasında, önce g fonksiyonunun sınırlılığını, sonra da x_0'ın g fonksiyonunun p-Lebesgue noktası olması özelliğini ele alalım.

g fonksiyonu $L_p(\mathbb{R})$'de sınırlı ise, her $t\in\mathbb{R}$ için $|g(t)|\le A$ olacak şekilde bir pozitif $A\in\mathbb{R}$ sayısı vardır. Buna göre,

$$|g(t)-g(x_0)|\le 2A$$
$$|g(t)-g(x_0)|^n\le (2A)^{n-1}|g(t)-g(x_0)|\,, n=1,2,\dots$$
$$|g(t)-g(x_0)|^{np}\le (2A)^{(n-1)p}|g(t)-g(x_0)|^p\,, 1<p<\infty \qquad (3.33)$$

eşitsizlikleri yazılabilir.

x_0 noktası, $1<p<\infty$ için $g\in L_p(\mathbb{R})$ fonksiyonunun p-Lebesgue noktası ise,

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\int_{x_0-h}^{x_0}|g(t)-g(x_0)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}=0$$

ve

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|g(t)-g(x_0)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}=0$$

eşitlikleri sağlanır. Dolayısıyla her $\varepsilon > 0$ için, en az bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki, $0 < h \leq \delta$ olduğunda

$$\int_{x_0-h}^{x_0}|g(t)-g(x_0)|^p dt < \varepsilon^p h \tag{3.34}$$

ve

$$\int_{x_0}^{x_0+h}|g(t)-g(x_0)|^p dt < \varepsilon^p h \tag{3.35}$$

kalır. Bunların yanı sıra, (3.33) ile (3.34) eşitsizlikleri göz önüne alındığında

$$\int_{x_0-h}^{x_0}|g(t)-g(x_0)|^{np} dt \leq (2A)^{(n-1)p}\varepsilon^p h \tag{3.36}$$

eşitsizliğinin, ve (3.33) ile (3.35) eşitsizlikleri dikkate alındığında da

$$\int_{x_0}^{x_0+h}|g(t)-g(x_0)|^{np} dt \leq (2A)^{(n-1)p}\varepsilon^p h \tag{3.37}$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür.

Şimdi (3.32) eşitsizliğine geri dönülürse, bu eşitsizlik belirlenen $\delta > 0$ sayısına göre,

$$|T_\lambda(g,x_0)-g(x_0)|^p$$
$$\leq 2^p\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\right)^p\left\{\int\limits_{|t-x_0|\leq\delta}|g(t)-g(x_0)|^{np}K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)dt\right.$$
$$\left.+\int\limits_{|t-x_0|\geq\delta}|g(t)-g(x_0)|^{np}K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)dt\right\}$$
$$\times\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}}K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)dt\right)^{\frac{p}{q}}+2^p\left|\int\limits_{\mathbb{R}}K_\lambda(x_0,t,g_0)dt-g(x_0)\right|^p$$

$$|T_\lambda(g,x_0)-g(x_0)|^p\leq 2^p\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\right)^p\{I_1+I_2\}\times\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}}K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)dt\right)^{\frac{p}{q}}$$
$$+2^p\left|\int\limits_{\mathbb{R}}K_\lambda(x_0,t,g_0)dt-g(x_0)\right|^p \tag{3.38}$$

şeklinde gösterilebilir. Gelinen bu noktada, son eşitsizlikteki

$$\int\limits_{\mathbb{R}}K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)dt$$

integrali, (e) şartına göre sınırlıdır ve

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}}K_\lambda(x_0,t,g_0)dt-g(x_0)\right|$$

ifadesi ise, (a) şartından dolayı $\lambda\to\infty$ için 0'a gider. Dolayısıyla ispatın tamamlanması için geriye (3.38)'deki I_1 ve I_2 integrallerinin incelenmesi kalır.

İlk olarak;

$$I_2=\int\limits_{|t-x_0|\geq\delta}|g(t)-g(x_0)|^{np}K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)dt$$

integralini ele alalım. (3.33) eşitsizliği bu integralde yerine yazılır ve (d) şartı göz önüne alınırsa,

$$I_2 \leq \int\limits_{|t-x_0|\geq\delta} (2A)^{(n-1)p} |g(t) - g(x_0)|^p K'_{\lambda,g}(x_0, t, g_0)dt$$

olur. Elde edilen bu eşitsizlik, önce üçgen eşitsizliğine sonra da Lemma 2.1.1'e göre yeniden düzenlenirse,

$$I_2 \leq (2A)^{(n-1)p} 2^p \left\{ \int\limits_{|t-x_0|\geq\delta} |g(t)|^p K'_{\lambda,g}(x_0, t, g_0)dt \right.$$

$$\left. + \int\limits_{|t-x_0|\geq\delta} |g(x_0)|^p K'_{\lambda,g}(x_0, t, g_0)dt \right\}$$

$$I_2 \leq \frac{(2A)^{np}}{A^p} \int\limits_{|t-x_0|\geq\delta} |g(t)|^p K'_{\lambda,g}(x_0, t, g_0)dt + (2A)^{np} \int\limits_{|t-x_0|\geq\delta} K'_{\lambda,g}(x_0, t, g_0)dt$$

olacak şekilde sağlanır. Bu eşitsizliğin sağında yer alan ilk integral,

$$\int\limits_{|t-x_0|\geq\delta} |g(t)|^p K'_{\lambda,g}(x_0, t, g_0)dt = \int\limits_{-\infty}^{x_0-\delta} |g(t)|^p K'_{\lambda,g}(x_0, t, g_0)dt$$

$$+ \int\limits_{x_0+\delta}^{\infty} |g(t)|^p K'_{\lambda,g}(x_0, t, g_0)dt$$

olarak yazılabilir. (b) şartına göre $K'_{\lambda,g}(x_0, t, g_0)$ fonksiyonu, $(-\infty, x_0 - \delta]$ aralığında monoton artan ve $[x_0 + \delta, \infty)$ aralığında ise monoton azalandır. Dolayısıyla en büyük değerini, sırasıyla bu aralıkların üst ve alt sınırlarında alır. Buna göre eşitlik, normun tanımı da kullanılırsa,

$$\int\limits_{|t-x_0|\geq\delta} |g(t)|^p K'_{\lambda,g}(x_0, t, g_0)dt$$

$$\leq K'_{\lambda,g}(x_0, x_0 - \delta, g_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^p dt + K'_{\lambda,g}(x_0, x_0 + \delta, g_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^p dt$$

$$= \|g\|^p_{L_p(\mathbb{R})} \left(K'_{\lambda,g}(x_0, x_0 - \delta, g_0) + K'_{\lambda,g}(x_0, x_0 + \delta, g_0) \right)$$

şeklinde eşitsizliğe dönüşür. Bu eşitsizlik yukarıda yerine yazılırsa, I_2 integrali için

$$I_2 \leq \frac{(2A)^{np}}{A^p} \|g\|_{L_p(\mathbb{R})}^p \begin{pmatrix} K'_{\lambda,g}(x_0, x_0 - \delta, g_0) \\ +K'_{\lambda,g}(x_0, x_0 + \delta, g_0) \end{pmatrix} + (2A)^{np} \int\limits_{|t-x_0|\geq\delta} K'_{\lambda,g}(x_0, t, g_0)dt$$

sonucuna ulaşılır. Bu da, (f) ve (g) şartları göz önüne alındığında $\lambda \to \infty$ için $I_2 \to 0$ olması anlamına gelir.

Şimdi de;

$$I_1 = \int\limits_{|t-x_0|\leq\delta} |g(t) - g(x_0)|^{np} K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, t, g_0)dt$$

integralini ele alalım. Bu integral,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} |g(t) - g(x_0)|^{np} K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, t, g_0)dt \\ &+ \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta} |g(t) - g(x_0)|^{np} K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, t, g_0)dt \\ I_1 &= I_{11} + I_{12} \end{aligned} \tag{3.39}$$

şeklinde ifade edilebilir. Dolayısıyla, I_1 integralinin 0'a yakınsadığı göstermek için, I_{11} ve I_{12} integrallerinin ayrı ayrı hesaplanması gerekir.

İlk olarak (3.39)'daki,

$$I_{11} = \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} |g(t) - g(x_0)|^{np} K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, t, g_0)dt$$

integralini hesaplayalım. Bunun hesabı için, (3.36) eşitsizliğinin sağlandığını göz önüne alarak

$$F(t) = \int\limits_{t}^{x_0} |g(s) - g(x_0)|^{np} ds$$

şeklinde bir $F(t)$ fonksiyonu tanımlayalım. Bu durumda $F(t)$ için, $x_0 - t \leq \delta$ olduğunda (yani $x_0 - t = h$ iken),

$$|F(t)| \leq (2A)^{(n-1)p} \varepsilon^p (x_0 - t) \tag{3.40}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $F(t)$ fonksiyonunun diferansiyeli,

$$dF(t) = -|g(t) - g(x_0)|^{np} dt$$

olur. Buna göre I_{11} integrali, Lebesgue integralinin Stieltjes integraline dönüşümünü ifade eden Teorem 2.1.5'e göre,

$$I_{11} = (\mathrm{L}) \int_{x_0-\delta}^{x_0} |g(t) - g(x_0)|^{np} K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, t, g_0) dt = -(\mathrm{S}) \int_{x_0-\delta}^{x_0} K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, t, g_0) dF(t)$$

şeklinde yazılabilir. Kısmi integrasyon ve üçgen eşitsizliği sırasıyla uygulanırsa,

$$|I_{11}| = \left| K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, t, g_0) F(t) \Big|_{x_0-\delta}^{x_0} - \int_{x_0-\delta}^{x_0} F(t) d_t \left[K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, t, g_0) \right] \right|$$

$$|I_{11}| \leq K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, x_0, g_0) |F(x_0)| + K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, x_0 - \delta, g_0) |F(x_0 - \delta)|$$
$$+ \int_{x_0-\delta}^{x_0} |F(t)| d_t \left[K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, t, g_0) \right]$$

eşitsizliği elde edilir. (3.40) eşitsizliği göz önüne alındığında ise I_{11} integrali için,

$$|I_{11}| \leq (2A)^{(n-1)p} \varepsilon^p \delta K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, x_0 - \delta, g_0)$$
$$+ (2A)^{(n-1)p} \varepsilon^p \int_{x_0-\delta}^{x_0} (x_0 - t) d_t \left[K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, t, g_0) \right] \tag{3.41}$$

sağlanır. Burada yer alan integrale tekrar kısmi integrasyon uygulandığında,

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0} (x_0 - t) d_t \left[K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, t, g_0) \right] = -\delta K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, x_0 - \delta, g_0) + \int_{x_0-\delta}^{x_0} K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, t, g_0) dt$$

olacağından, bu ifade (3.41)'de yerine yazılarak eşitsizlik yeniden düzenlenirse,

$$
\begin{aligned}
|I_{11}| &\leq (2A)^{(n-1)p}\varepsilon^p \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)dt \\
&\leq (2A)^{(n-1)p}\varepsilon^p \int\limits_{\mathbb{R}} K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)dt \\
&\leq (2A)^{(n-1)p}\varepsilon^p \int\limits_{\mathbb{R}} K_{\lambda,g}'(x_0,t,g_0)dt \\
&= (2A)^{(n-1)p}\varepsilon^p a_1
\end{aligned} \tag{3.42}
$$

sonucuna ulaşılır.

Son olarak (3.39)'daki,

$$I_{12} = \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta} |g(t)-g(x_0)|^{np} K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)dt$$

integralini hesaplayalım. Bunun hesabı için, (3.37)'nin sağlandığını göz önüne alarak

$$G(t) = \int\limits_{x_0}^{t} |g(z)-g(x_0)|^{np} dz$$

şeklinde bir $G(t)$ fonksiyonu tanımlayalım. Bu durumda $G(t)$ için, $t-x_0 \leq \delta$ olduğunda (yani $t-x_0 = h$ iken)

$$|G(t)| \leq (2A)^{(n-1)p}\varepsilon^p (t-x_0) \tag{3.43}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $G(t)$ fonksiyonunun diferansiyeli,

$$dG(t) = |g(t)-g(x_0)|^{np} dt$$

olur. Buna göre, Lebesgue anlamında olan I_{12} integrali Stieltjes integrali olarak, yani

$$I_{12} = (\mathrm{L}) \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta} |g(t)-g(x_0)|^{np} K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)dt = (\mathrm{S}) \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta} K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)dG(t)$$

şeklinde yazılabilir. Stieltjes integralinin kısmi integrasyonu,

$$
\begin{aligned}
I_{12} &= K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)G(t)\Big|_{x_0}^{x_0+\delta} - \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta} G(t)d_t\left[K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)\right] \\
&= K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,x_0+\delta,g_0)G(x_0+\delta) - K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,x_0,g_0)G(x_0) \\
&+ \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta} G(t)d_t\left[-K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)\right]
\end{aligned}
$$

olur. Buradan, üçgen eşitsizliği uygulandığında ise,

$$
\begin{aligned}
|I_{12}| &\le K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,x_0+\delta,g_0)|G(x_0+\delta)| + K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,x_0,g_0)|G(x_0)| \\
&+ \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta} |G(t)|d_t\left[-K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikteki $K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)$ ifadesi (b) koşuluna göre azalandır, dolayısıyla $d_t\left[-K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)\right]$ diferansiyeli pozitif olur. Böylece burada (3.43) eşitsizliği kullanılabilir. Söz konusu eşitsizlik kullanıldığında I_{12} integrali için,

$$
\begin{aligned}
|I_{12}| &\le (2A)^{(n-1)p}\varepsilon^p \delta K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,x_0+\delta,g_0) \\
&+(2A)^{(n-1)p}\varepsilon^p \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta} (t-x_0)d_t\left[-K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)\right] \qquad (3.44)
\end{aligned}
$$

sağlanır. Buradaki integrale tekrar kısmi integrasyon uygulandığında,

$$
\int\limits_{x_0}^{x_0+\delta} (t-x_0)d_t\left[-K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)\right] = -\delta K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,x_0+\delta,g_0) + \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta} K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)dt
$$

olacağından, bunun (3.44)'te yerine yazılmasıyla da,

$$
\begin{aligned}
|I_{12}| &\le (2A)^{(n-1)p}\varepsilon^p \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta} K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)dt \\
&\le (2A)^{(n-1)p}\varepsilon^p \int\limits_{\mathbb{R}} K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0,t,g_0)dt
\end{aligned}
$$

$$\leq (2A)^{(n-1)p}\varepsilon^p \int_{\mathbb{R}} K'_{\lambda,g}(x_0,t,g_0)dt$$

$$= (2A)^{(n-1)p}\varepsilon^p a_1 \tag{3.45}$$

sonucuna ulaşılır.

O halde, (3.39)'daki I_1 integrali

$$|I_1| \leq |I_{12}| + |I_{12}|$$

şeklinde yazılabileceğinden, (3.42) ile (3.45) sonuçları burada yerine koyulursa,

$$|I_1| \leq 2.(2A)^{(n-1)p}\varepsilon^p a_1$$

olarak bulunur. Bu ise, yeterince küçük ε için, $\lambda \to \infty$ iken $I_1 \to 0$ olduğunu gösterir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi, Urysohn-tipi lineer olmayan integral operatörler ailesinin yakınsaklığını, $K_\lambda(x_0,t,g)$ çekirdek fonksiyonunun majorantı olan bir fonksiyonu kullanarak inceleyelim.

Teorem 3.3.2.

$K_\lambda(x_0,t,g)$ çekirdeği, (a), (c) ve (e) şartlarını sağlasın ve kabul edelim ki herhangi bir $n = 1,2, \ldots$ için

$$K^{(n)}_{\lambda,g}(x_0,t,g_0) \leq D_{\lambda,n}(t,x_0) \tag{3.46}$$

olacak şekilde mevcut olan $D_{\lambda,n}(t,x_0)$ majorant fonksiyonu, aşağıdaki koşulları gerçeklesin:

(b*) $D_{\lambda,n}(t,x_0)$ fonksiyonu, $t < x_0$ için monoton artan ve $t > x_0$ için ise monoton azalandır.

(d*)

$$\int_{\mathbb{R}} D_{\lambda,n}(t,x_0)dt \leq b < \infty$$

sağlanır. Burada b, λ'dan bağımsızdır.

(f*) Herhangi bir $\delta > 0$ sabiti için

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int\limits_{|t-x_0| \geq \delta} D_{\lambda,n}(t, x_0)dt = 0$$

sağlanır.

(g*) Herhangi bir $y \neq x_0$ için

$$\lim_{\lambda \to \infty} D_{\lambda,n}(y, x_0) = 0$$

sağlanır.

Bu durumda, $g \in L_p(\mathbb{R})$ sınırlı fonksiyonunun her bir x_0 p-Lebesgue noktasında

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int\limits_{\mathbb{R}} K_\lambda\big(x_0, t, g(t)\big)dt = g(x_0)$$

yaklaşımı gerçeklenir.

İspat: Bu teoremin ispatında Teorem 3.3.1'in ispatına benzer bir yol izlenecektir. Bu doğrultuda (3.1)'deki eşitlik,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} K_\lambda\big(x_0, t, g(t)\big)dt = \int\limits_{\mathbb{R}} K_\lambda(x_0, t, g_0)dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_{\mathbb{R}} K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, t, g_0)[g(t) - g(x_0)]^n dt$$

şeklinde yazılabilir. Eşitliğin her iki tarafından önce $g(x_0)$ çıkarılır sonra da üçgen eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}} K_\lambda\big(x_0, t, g(t)\big)dt - g(x_0) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_{\mathbb{R}} |g(t) - g(x_0)|^n K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, t, g_0)dt + \left| \int\limits_{\mathbb{R}} K_\lambda(x_0, t, g_0)dt - g_0 \right|$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik, (3.46)'daki $K_{\lambda,g}^{(n)}(x_0, t, g_0) \leq D_{\lambda,n}(t, x_0)$ koşulundan dolayı,

$$\left|\int_{\mathbb{R}} K_\lambda\big(x_0,t,g(t)\big)dt-g(x_0)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{\mathbb{R}}|g(t)-g(x_0)|^n D_{\lambda,n}(t,x_0)dt$$
$$+\left|\int_{\mathbb{R}} K_\lambda(x_0,t,g_0)dt-g_0\right|$$

olarak yazılabilir. Burada Hölder'in integral eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|\int_{\mathbb{R}} K_\lambda\big(x_0,t,g(t)\big)dt-g(x_0)\right|$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{\mathbb{R}}|g(t)-g(x_0)|^n\,\big[D_{\lambda,n}(t,x_0)\big]^{\frac{1}{p}}\big[D_{\lambda,n}(t,x_0)\big]^{\frac{1}{q}}dt+\left|\int_{\mathbb{R}} K_\lambda(x_0,t,g_0)dt-g_0\right|$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[\left(\int_{\mathbb{R}}|g(t)-g(x_0)|^{np}D_{\lambda,n}(t,x_0)dt\right)^{\frac{1}{p}}\times\left(\int_{\mathbb{R}}D_{\lambda,n}(t,x_0)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$
$$+\left|\int_{\mathbb{R}} K_\lambda(x_0,t,g_0)dt-g_0\right|$$

olur. Bu ifade, Lemma 2.1.1'e göre yeniden düzenlenirse,

$$\left|\int_{\mathbb{R}} K_\lambda\big(x_0,t,g(t)\big)dt-g(x_0)\right|^p$$
$$\leq 2^p\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\int_{\mathbb{R}}|g(t)-g(x_0)|^{np}D_{\lambda,n}(t,x_0)dt\right)^{\frac{1}{p}}\times\left(\int_{\mathbb{R}}D_{\lambda,n}(t,x_0)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]^p$$
$$+2^p\left[\left|\int_{\mathbb{R}} K_\lambda(x_0,t,g_0)dt-g_0\right|\right]^p$$

sağlanır. Sonsuz toplama, Teorem 2.1.3'te verilen Hölder'in sonsuz seriler için olan eşitsizliği uygulandığında ise,

$$\left|\int_{\mathbb{R}} K_\lambda\big(x_0,t,g(t)\big)dt-g(x_0)\right|^p \leq 2^p\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\right)^p\int_{\mathbb{R}}|g(t)-g(x_0)|^{np}D_{\lambda,n}(t,x_0)dt$$
$$\times\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}D_{\lambda,n}(t,x_0)dt\right)^{\frac{p}{q}}+2^p\left|\int_{\mathbb{R}} K_\lambda(x_0,t,g_0)dt-g_0\right|^p \tag{3.47}$$

elde edilir. Burada bu eşitsizliğe tekrar dönüleceğini not ederek, ispatın bu aşamasında önce g fonksiyonunun sınırlılığını, sonra da x_0'ın g fonksiyonunun p-Lebesgue noktası olması özelliğini ele alalım.

g fonksiyonu $L_p(\mathbb{R})$'de sınırlı ise, her $t \in \mathbb{R}$ için $|g(t)| \leq A$ olacak şekilde bir pozitif $A \in \mathbb{R}$ sayısı vardır. Buna göre $n = 1,2, \ldots$ olmak üzere,

$$|g(t) - g(x_0)| \leq 2A$$
$$|g(t) - g(x_0)|^{np} \leq (2A)^{(n-1)p} |g(t) - g(x_0)|^p \,, 1 < p < \infty \qquad (3.48)$$

eşitsizlikleri yazılabilir.

x_0 noktası, $1 < p < \infty$ için $g \in L_p(\mathbb{R})$ fonksiyonunun p-Lebesgue noktası ise,

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{h} \int_{x_0 - h}^{x_0} |g(t) - g(x_0)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

ve

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0 + h} |g(t) - g(x_0)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

eşitlikleri sağlanır. Dolayısıyla her $\varepsilon > 0$ için, en az bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki, $0 < h \leq \delta$ olduğunda

$$\int_{x_0 - h}^{x_0} |g(t) - g(x_0)|^p dt < \varepsilon^p h \qquad (3.49)$$

ve

$$\int_{x_0}^{x_0 + h} |g(t) - g(x_0)|^p dt < \varepsilon^p h \qquad (3.50)$$

kalır. Bunların yanı sıra, (3.48) ile (3.49) eşitsizlikleri göz önüne alındığında,

$$\int_{x_0-h}^{x_0} |g(t)-g(x_0)|^{np}dt \leq (2A)^{(n-1)p}\varepsilon^p h \tag{3.51}$$

eşitsizliğinin, (3.48) ile (3.50) eşitsizlikleri dikkate alındığında da

$$\int_{x_0}^{x_0+h} |g(t)-g(x_0)|^{np}dt \leq (2A)^{(n-1)p}\varepsilon^p h \tag{3.52}$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür.

Şimdi (3.47) eşitsizliğine geri dönülürse, bu eşitsizlik belirlenen $\delta > 0$ sayısına göre,

$$\left|\int_{\mathbb{R}} K_\lambda\big(x_0,t,g(t)\big)dt - g(x_0)\right|^p$$
$$\leq 2^p \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\right)^p \left\{ \int_{|t-x_0|\leq\delta} |g(t)-g(x_0)|^{np} D_{\lambda,n}(t,x_0)dt \right.$$
$$\left. + \int_{|t-x_0|\geq\delta} |g(t)-g(x_0)|^{np} D_{\lambda,n}(t,x_0)dt \right\}$$
$$\times\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}} D_{\lambda,n}(t,x_0)dt\right)^{\frac{p}{q}} + 2^p\left|\int_{\mathbb{R}} K_\lambda(x_0,t,g_0)dt - g_0\right|^p$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}} K_\lambda\big(x_0,t,g(t)\big)dt - g(x_0)\right|^p \leq 2^p \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\right)^p \{J_1+J_2\} \times \left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}} D_{\lambda,n}(t,x_0)dt\right)^{\frac{p}{q}}$$
$$+2^p\left|\int_{\mathbb{R}} K_\lambda(x_0,t,g_0)dt - g_0\right|^p \tag{3.53}$$

şeklinde gösterilebilir. Gelinen bu noktada, son eşitsizlikteki

$$\int_{\mathbb{R}} D_{\lambda,n}(t,x_0)dt$$

integrali (d*) şartına göre sınırlıdır.

$$\left|\int_{\mathbb{R}} K_\lambda(x_0,t,g_0)dt - g_0\right|$$

ifadesi ise, (a) şartından dolayı $\lambda \to \infty$ için 0'a gider. Dolayısıyla ispatın tamamlanması için geriye (3.53)'teki J_1 ve J_2 integrallerinin incelenmesi kalır.

İlk olarak;

$$J_2 = \int_{|t-x_0|\geq\delta} |g(t)-g(x_0)|^{np} D_{\lambda,n}(t,x_0)dt$$

integralini ele alalım. (3.48) eşitsizliği bu integralde yerine yazılırsa,

$$J_2 \leq \int_{|t-x_0|\geq\delta} (2A)^{(n-1)p}|g(t)-g(x_0)|^p D_{\lambda,n}(t,x_0)dt$$

olur. Bu eşitsizlik, üçgen eşitsizliğine ve Lemma 2.1.1'e göre yeniden düzenlenirse,

$$J_2 \leq \frac{(2A)^{np}}{A^p} \int_{|t-x_0|\geq\delta} |g(t)|^p D_{\lambda,n}(t,x_0)dt + (2A)^{np} \int_{|t-x_0|\geq\delta} D_{\lambda,n}(t,x_0)dt \quad (3.54)$$

olarak sağlanır. Eşitsizliğin sağında yer alan ilk integral,

$$\int_{|t-x_0|\geq\delta} |g(t)|^p D_{\lambda,n}(t,x_0)dt = \int_{-\infty}^{x_0-\delta} |g(t)|^p D_{\lambda,n}(t,x_0)dt + \int_{x_0+\delta}^{\infty} |g(t)|^p D_{\lambda,n}(t,x_0)dt$$

şeklinde yazılabilir. (b*) şartına göre $D_{\lambda,n}(t,x_0)$ majorant fonksiyonu, $(-\infty, x_0-\delta]$ aralığında monoton artan, $[x_0+\delta,\infty)$ aralığında ise monoton azalandır. Buna göre yukarıdaki eşitlik, normun tanımı da kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\int_{|t-x_0|\geq\delta} |g(t)|^p D_{\lambda,n}(t,x_0)dt &\leq D_{\lambda,n}(x_0-\delta,x_0)\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|^p dt\\ &\quad + D_{\lambda,n}(x_0+\delta,x_0)\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|^p dt\\ &= \|g\|^p_{L_p(\mathbb{R})}\big(D_{\lambda,n}(x_0-\delta,x_0)+D_{\lambda,n}(x_0+\delta,x_0)\big)\end{aligned}$$

şeklinde sağlanan bir eşitsizlik halini alır. Bu eşitsizlik (3.54)'te yerine yazılırsa,

$$J_2 \leq \frac{(2A)^{np}}{A^p} \|g\|_{L_p(\mathbb{R})}^p \begin{pmatrix} D_{\lambda,n}(x_0-\delta, x_0) \\ +D_{\lambda,n}(x_0+\delta, x_0) \end{pmatrix} + (2A)^{np} \int\limits_{|t-x_0|\geq\delta} D_{\lambda,n}(t, x_0)dt$$

elde edilir. Bu ise, (f*) ve (g*) koşullarına göre $\lambda \to \infty$ için $J_2 \to 0$ sonucunu verir.

Şimdi de;

$$J_1 = \int\limits_{|t-x_0|\leq\delta} |g(t)-g(x_0)|^{np} D_{\lambda,n}(t, x_0)dt$$

integralini ele alalım. Bu integral,

$$J_1 = \int_{x_0-\delta}^{x_0} |g(t)-g(x)|^{np} D_{\lambda,n}(t, x_0)dt + \int_{x_0}^{x_0+\delta} |g(t)-g(x)|^{np} D_{\lambda,n}(t, x_0)dt$$

$$J_1 = J_{11} + J_{12} \tag{3.55}$$

şeklinde ifade edilebilir. Buna göre, J_1 integralinin 0'a yakınsadığı göstermek için J_{11} ve J_{12} integrallerini ayrı ayrı hesaplayabiliriz.

J_{11} integralinin hesabı için; (3.51) eşitsizliğinin sağlandığını göz önüne alarak

$$F(t) = \int_{t}^{x_0} |g(s)-g(x_0)|^{np} ds$$

şeklinde bir $F(t)$ fonksiyonu tanımlayalım. Bu durumda $F(t)$ için, $x_0 - t \leq \delta$ olduğunda (yani $x_0 - t = h$ iken)

$$|F(t)| \leq (2A)^{(n-1)p} \varepsilon^p (x_0 - t) \tag{3.56}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $F(t)$ fonksiyonunun diferansiyeli,

$$dF(t) = -|g(t)-g(x_0)|^{np} dt$$

olur. Buna göre Lebesgue anlamında olan J_{11} integrali,

$$J_{11} = (\mathrm{L}) \int_{x_0-\delta}^{x_0} |g(t) - g(x)|^{np} D_{\lambda,n}(t, x_0)dt = -(\mathrm{S}) \int_{x_0-\delta}^{x_0} D_{\lambda,n}(t, x_0)dF(t)$$

şeklinde Stieltjes integrali olarak yazılabilir. Buradaki Stieltjes integraline, kısmi integrasyondan sonra üçgen eşitsizliği ve (3.56) eşitsizliği sırasıyla uygulanırsa,

$$|J_{11}| = \left| D_{\lambda,n}(t, x_0)F(t)\Big|_{x_0-\delta}^{x_0} - \int_{x_0-\delta}^{x_0} F(t)d_t\left[D_{\lambda,n}(t, x_0)\right] \right|$$

$$|J_{11}| \leq D_{\lambda,n}(x_0, x_0)|F(x_0)| + D_{\lambda,n}(x_0 - \delta, x_0)|F(x_0 - \delta)|$$

$$+ \int_{x_0-\delta}^{x_0} |F(t)|d_t\left[D_{\lambda,n}(t, x_0)\right]$$

$$|J_{11}| \leq (2A)^{(n-1)p}\varepsilon^p \delta D_{\lambda,n}(x_0 - \delta, x_0) + (2A)^{(n-1)p}\varepsilon^p \int_{x_0-\delta}^{x_0} (x_0 - t)d_t\left[D_{\lambda,n}(t, x_0)\right]$$

elde edilir. Buradaki integrale tekrar kısmi integrasyon uygulandığında ise,

$$\begin{aligned} |J_{11}| &\leq (2A)^{(n-1)p}\varepsilon^p \int_{x_0-\delta}^{x_0} D_{\lambda,n}(t, x_0)dt \\ &\leq (2A)^{(n-1)p}\varepsilon^p \int_{\mathbb{R}} D_{\lambda,n}(t, x_0)dt \\ &\leq (2A)^{(n-1)p}\varepsilon^p b \qquad (3.57) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

J_{12} integralinin hesabı için; (3.52) eşitsizliğinin sağlandığını göz önüne alarak

$$G(t) = \int_{x_0}^{t} |g(z) - g(x_0)|^{np} dz$$

şeklinde bir $G(t)$ fonksiyonu tanımlayalım. Bu durumda $G(t)$ için, $t - x_0 \leq \delta$ olduğunda (yani $t - x_0 = h$ iken),

$$|G(t)| \leq (2A)^{(n-1)p}\varepsilon^p (t - x_0) \qquad (3.58)$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $G(t)$ fonksiyonunun diferansiyeli,

$$dG(t) = |g(t) - g(x_0)|^{np} dt$$

dir. Buna göre Lebesgue anlamında olan J_{12} integrali, Stieltjes integrali olarak yazılabilir, yani

$$J_{12} = (\mathrm{L}) \int_{x_0}^{x_0+\delta} |g(t) - g(x)|^{np} D_{\lambda,n}(t, x_0) dt = (\mathrm{S}) \int_{x_0}^{x_0+\delta} D_{\lambda,n}(t, x_0) dG(t)$$

olur. Stieltjes integraline kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$J_{12} = D_{\lambda,n}(t, x_0) G(t)\Big|_{x_0}^{x_0+\delta} - \int_{x_0}^{x_0+\delta} G(t) d_t\big[D_{\lambda,n}(t, x_0)\big]$$

$$J_{12} = D_{\lambda,n}(x_0 + \delta, x_0) G(x_0 + \delta) - D_{\lambda,n}(x_0, x_0) G(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+\delta} G(t) d_t\big[-D_{\lambda,n}(t, x_0)\big]$$

elde edilir. (b*) şartına göre, $D_{\lambda,n}(t, x_0)$ majorant fonksiyonu $t > x_0$ için azalandır, dolayısıyla $d_t\big[-D_{\lambda,n}(t, x_0)\big]$ diferansiyeli pozitif olur. Böylece burada (3.58) eşitsizliği kullanılabilir. Söz konusu eşitsizlik kullanıldığında J_{12} integrali için,

$$\begin{aligned} |J_{12}| &\leq (2A)^{(n-1)p} \varepsilon^p \delta D_{\lambda,n}(x_0 + \delta, x_0) \\ &+ (2A)^{(n-1)p} \varepsilon^p \int_{x_0}^{x_0+\delta} (t - x_0) d_t\big[-D_{\lambda,n}(t, x_0)\big] \end{aligned}$$

sağlanır. Burada yer alan integrale tekrar kısmi integrasyon uygulandığında ise,

$$\begin{aligned} |J_{12}| &\leq (2A)^{(n-1)p} \varepsilon^p \int_{x_0}^{x_0+\delta} D_{\lambda,n}(t, x_0) dt \\ &\leq (2A)^{(n-1)p} \varepsilon^p \int_{\mathbb{R}} D_{\lambda,n}(t, x_0) dt \\ &\leq (2A)^{(n-1)p} \varepsilon^p b \end{aligned} \tag{3.59}$$

sonucuna ulaşılır.

O halde, (3.55)'teki J_1 integrali

$$|J_1| \leq |J_{12}| + |J_{12}|$$

şeklinde gösterilebileceğinden, (3.57) ile (3.59) sonuçları burada yerine yazılırsa,

$$|J_1| \leq 2.(2A)^{(n-1)p} \varepsilon^p b$$

elde edilir. Bu ise, yeterince küçük bir ε için, $\lambda \to \infty$ iken $J_1 \to 0$ olduğunu gösterir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

4. TARTIŞMA

Bu tezin ortaya çıkışında, Esen Almalı'nın "On pointwise convergence of the family of Urysohn-type integral operators" isimli çalışması bize esin kaynağı olmuştur. Çalışmaya başlarken Yaklaşımlar Teorisi'ne genel bir bakışta bulunulmuş, çalışmanın kendi özelinde ise,

$$T_\lambda(g,x) = \int_{\mathbb{R}} K_\lambda\big(x,t,g(t)\big)dt$$

genel formuna sahip Urysohn-tipi lineer olmayan integral operatörler ailesinin noktasal yakınsaklığı, sınırlı bir g fonksiyonu için, önce $L_1(\mathbb{R})$ uzayında sonra da $L_p(\mathbb{R})$ $(1 < p < \infty)$ uzaylarında araştırılmıştır. Bu araştırma, Urysohn-tipi lineer olmayan integral operatörler ailesinin

$$T_\lambda(g,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}} K_{\lambda,g}^{(n)}(x,t,g_0)[g(t) - g(x_0)]^n dt$$

şeklinde ifade ettiğimiz Taylor seri açılımına bağlı gösterimi ile yapılmıştır. Bu gösterimdeki $K_\lambda(x,t,g)$ çekirdek fonksiyonu, önceden belirlenmiş bazı koşulları sağlayan bir fonksiyondur.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu tezde, Esen Almalı (2019)'nın verdiği Urysohn-tipi lineer olmayan integral operatörler ailesinin $L_1(\mathbb{R})$ uzayındaki bir fonksiyonun Lebesgue noktasındaki yakınsaklığına ilişkin teoremlerin ispatları ayrıntılı bir şekilde yapılmış ve buradan hareketle, aynı ailenin $L_p(\mathbb{R})$ uzayındaki bir fonksiyona olan yakınsaklığı ile ilgili bazı orijinal sonuçlar elde edilmiştir.

Birçok matematikçi ve araştırmacı, Yaklaşımlar Teorisi'nin başlangıcından bu yana daha iyi bir yaklaşımda bulunma amacıyla yeni yeni operatörler tanımlamışlar ve bunların çeşitli genelleştirmeleri üzerine çalışmışlardır. Bu teorinin, matematik başta olmak üzere farklı alanlardaki birçok problemi çözüme kavuşturması ve etkinliğini günümüzde de devam ettirmesi araştırmacıların bu teoriye olan ilgisini canlı tutmuştur. Özellikle son yıllarda lineer olmayan integral operatörlerle ilgili çalışmalar dikkat çekmektedir. Çünkü bazı durumlarda sinyalleri ve görüntüleri (fonksiyonları) yeniden oluşturmak için lineer olmayan bir süreç kullanmak gerekir. Bu ise problemin çözümü için lineer olmayan yaklaşımı özellikle de lineer olmayan integral operatörlerin yaklaşımını önemli hale getirmiştir. Bu bağlamda bizim çalışmamızın da bu alanda yapılacak çalışmalara katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

Anar, H. (2019). Approximation of the integral funnel of the Urysohn type integral operator. *Applied Mathematics and Computation*, *341*, 277-287.

Balcı, M. (1999). *Matematik Analiz I* (6. Baskı). Ankara: Balcı Yayınları.

Balcı, M. (2009). *Matematik Analiz II* (6. Baskı). Ankara: Balcı Yayınları.

Bardaro, C. ve Vinti, G. (2002). Urysohn integral operators with homogeneous kernel: approximation properties in modular spaces. *Comment. Math. Prace Mat.*, 42(2), 145-182.

Bardaro, C., Musielak, J. ve Vinti, G. (2003). *Nonlinear Integral Operators and Applications*. Berlin, New York: Walter de Gruyter.

Bardaro, C., Vinti, G. ve Karsli, H. (2011). Nonlinear integral operators with homogeneous kernels: pointwise approximation theorems. *Applicable Analysis*, 90(3-4), 463-474.

Bayraktar, M. (2017). *Fonksiyonel Analiz* (5. Baskı). Ankara: Korza Yayıncılık Basım San. ve Tic. A. Ş.

Bernstein, S. N. (1912). Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur la calcul des probabilités. *Commun. Soc. Math. Charkow*, 13(1), 1-2.

Bohman, H. (1952). On approximation of continuous and of analytic functions. *Arkiv för Matematik*, 2(1), 43-56.

Butzer, P. L. ve Nessel, R. J. (1971). *Fourier Analysis and Approximation*. New York and London: Academic Press.

Costarelli, D. ve Vinti, G. (2013). Approximation by nonlinear multivariate sampling Kantorovich type operators and applications to image processing. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 34(8), 819-844.

Esen, S. (2002). Konvolüsyon Tipinde Olmayan İntegral Operatörler Ailesinin Karakteristik Noktalarda Yakınsaklığı ve Yakınsaklık Hızı. Doktora Tezi. *Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara.

Esen Almalı, S. ve Gadjiev, A. D. (2016). On approximation properties of certain multidimensional nonlinear integrals. *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 9(5), 3090-3097.

Esen Almalı, S. (2017). Approximation of a class of non-linear integral operators. *Celal Bayar University Journal of Science*, 13(2), 407-411.

Esen Almalı, S. (2019). On pointwise convergence of the family Urysohn-type integral operators. *Math. Methods Appl. Sci.*, 42(16), 5346-5353.

Faddeev, D. K. (1936). On the Representation of Summable Functions by means of Singular İntegrals at Lebesgue Points. *Math. Sbornik*, 1(43), 351-368.

Gadjiev, A. D. (1963). On the speed of convergence of a class of singular integrals. *Izv. Akad. Nauk Azerbaıdžan. SSR Ser. Fiz.-Mat. Tehn. Nauk*, 6, 27-31.

Gadjiev, A. D. (1966). On the closeness to zero of family of nonlinear integral operators of Hammerstein. *Izvestiya Akad. Nauk Azerbaijan SSR.*, 2, 32-34.

Gadjiev, A. D. (1968). The order of convergence of singular integrals which depend on two parameters, Special Problems of Functional Analysis and Their Applications to the Theory of Differential Equations and the Theory of Functions. *Izdat. Akad. Nauk Azerbaĭdžan. SSR.*, 40-44.

Hacısalihoğlu, H. H. ve Haciyev, A. D. (1995). *Lineer Pozitif Operatörler Dizilerinin Yakınsaklığı*. Ankara: A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletme Yayınları.

Haciyev, A., vd. (2002). Toplam Biçiminde Doğrusal Operatörler Ailesinin Yaklaşım Özellikleri. *Bilimsel Araştırma Projesi Kesin Raporu*, Proje No:9905-02-01.

Hammerstein, A. (1930). Nichtlineare integralgleichungen nebst anwendungen. *Acta mathematica*, *54*, 117-176.

Hobson, E. W. (1921). *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fouriers Series*. England: Cambridge University Press.

Karslı, H. (2008). On the approximation properties of a class of convolution type nonlinear singular integral operators. *Georgian Math. J.*, 15(1), 77-86.

Karslı, H. ve Gupta, V. (2008). Rate of convergence of nonlinear integral operators for functions of bounded variation. *Calcolo*, 45(2), 87-98.

Karslı, H. (2013). Some convergence results for nonlinear singular integral operators. *Demonstratio Mathematica*, 46(4), 729-740.

Korovkin, P. P. (1953). On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.).*, 90, 961-964.

Krasnoselsky, M. A. (1964). *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*. New York: Pergamon Press.

Mamedov, R. G. (1963). On the order of convergence of m-singular integrals at generalized Lebesgue points and in the space $\mathrm{L_p}(-\infty,\infty)$. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Math.*, 27(2), 287-304.

Mamedov, R. G. (1967). *Fonksiyonların Lineer Operatörlerle Yaklaşması*. Bakü: Azerbaycan Devlet Neşriyatı.

Musielak, J. (1983). On some approximation problems in modular spaces. In: Constructive Function Theory 1981, (Proc. Int. Conf., Varna, June 1-5, 1981). *Publ. House Bulgarian Acad. Sci.*, 455-461.

Natanson, I. P. (1940). Sur on precédé de sommation des intégrales de Fourier. *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, 7(49), 313-320.

Natanson, I. P. (1964). *Theory of Functions of a Real Variable* (Vol. 1). Translated from the Russian by Leo F. Boron. New York: Frederick Ungar Publishing Co.

Özalp Güller, Ö. (2019). Lineer Olmayan İntegral Operatör Ailesinin Yakınsaklığı. Doktora Tezi. *Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara.

Özalp Güller, Ö. ve Uysal, G. (2020). On certain multidimensional nonlinear integrals. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 69(2), 1356-1367.

Özalp Güller, Ö. (2021). On Pointwise Convergence of Nonlinear Integrals in L_p Spaces $(1 < p < \infty)$. *Palestine Polytechnic University-PPU*, 10(2), 443-451.

Özer, M. N. ve Eser, D. (2000). *Diferansiyel Denklemler (Teori ve Uygulamalar)* (2. Baskı). Eskişehir.

Rudin, W. (1987). *Real and Complex Analysis* (Third Edition). New York: McGraw-Hill Book Co.

Shalit, O. M. (2017). *A first course in functional analysis*. Boca Raton, FL, USA: Chapman and Hall/CRC.

Sikkema, P. C. (1983). Approximation with convolution operators depending on two parameters. *Approximation Theory IV (College Station, Texas), Academic Press, New York,* 679-684.

Stein, E. M. ve Weiss, G. (1971). *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces,* New Jersey: Princeton University Press.

Swiderski, T. ve Wachnicki, E. (2000). Nonlinear Singular İntegrals Depending on Two Parameters. *Comment. Math. Prace Mat.,* 40, 181-189.

Taberski, R. (1962). Singular Integrals Depending on Two Parameters. *Prace Matematyczne,* 7, 173-179.

Tandori, K. (1954). Über die Konvergenz Singularer Integrale. *Acta Sci. Math. XV, Szeged*, 223-230.

Vainberg, M. M. (1953). The existence of characteristic functions for nonlinear integral operators with nonpositive kernels and for the product of self-adjoint and potential operators. *Mat. Sbornik N.S.*, 32(74), 665-680.

Weierstrass, K. (1885). Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, *2,* 633-639.

Zorich. V. A. (2004). *Mathematical Analysis I*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı

Doğum Yılı

Yabancı Dil

Eğitim Durumu

Lisans

Yüksek Lisans

Çalıştığı Kurumlar ve Yıllar

Yayınları

Araştırma Alanları