T.C.

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN FARKLARI ÜZERİNE

SAHEED OLAOSEBİKAN AREMU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Ali OLGUN

KIRIKKALE-2022

Saheed Olaosebikan AREMU tarafından hazırlanan "LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN FARKLARI ÜZERİNE" adlı tez çalışması, aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Ali OLGUN

imza……………..

Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Başkan: Prof. Dr. Gülen BAŞCANBAZ-TUNCA

imza……………..

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Doç. Dr. Başar YILMAZ

imza……………..

Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Tez Savunma Tarihi: 18.02.2022

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. Recep ÇALIN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYANI

Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Saheed Olaosebikan AREMU

22.02.2022

ÖZET

LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN FARKLARI ÜZERİNE

AREMU , Saheed Olaosebikan

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Ali OLGUN

Şubat 2022 , 50 sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm Giriş olarak ayrılmış ve yaklaşımlar teorisi hakında genel açıklamalar yapılmıştır. İkinci bölümde yaklaşımlar teorisinde kullanılan temel tanımlar verilmiştir. Üçüncü bölümde tek değişkenli fonksiyonlar için tanımlanan lineer pozitif operatörlerin farklarının sağladığı çeşitli eşitsizlikler elde edilmiştir. Dördüncü bölümde ise üçüncü bölümde verilen tek değişkenli operatörlerin iki değişkenli hali tanımlanarak, üçüncü bölümde verilen teorem ve lemmaların benzerleri iki değişkenli operatörler için verilmiştir. Beşinci bölüm tartışma ve sonuç kısmına ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Lineer pozitif Operatör, Ağırlıklı Uzaylar, Chebyshev Fonksiyoneli, Süreklilik Mödülü, Lineer Pozitif Operatörlerin Farkları.

ABSTRACT

ON DIFFERENCES OF LINEAR POSITIVE OPERATORS

AREMU , Saheed Olaosebikan

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, Master Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Ali OLGUN

February 2022 , 50 pages

This thesis consist of five chapters. The general introduction of approximation theory is given in the first chapter. The basic terms and definitions of approximation theory was given in the second chapter. In the third chapter, various inequalities related to univariate differences of linear positive operators are given. The fourth chapter is devoted to establishing the bivariate form of various inequalities, theorems and lemmas for operators given in the third chapters. The results and discussion are given in the fifth chapter.

Key Words: Linear positive operator, Weighted space, Chebyshev Function, Modulus of Continuity, Difference of Linear Operators.

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması esnasında salgın olmasına rağmen hiçbir desteğini esirgemeyen ve biz yabancı genç ara¸stırmacılara büyük destek olan, bilimsel deney imkanlarını sonuna kadar bizlerin hizmetine veren, değerli hocam, Sayın Prof. Dr. Ali Olgun'a, tez konuda seçmeyi teşvik eden ve temelini öğreten değerli hocam, Sayın Prof. Dr. Ali Aral'a, yine bu çalışmamda emeği geçen Kırıkkale Üniversitesi Matematik Bölümünün değerli hocalarına, maddi olarak ve bu okumak fırsat veren Türkiye burslarına ve Hüdayı vakfına, bana birçok konuda olduğu gibi, yüksek lısans öğrenimim boyunca da yardımı esirgemeyen aileme ve arkadaşlarıma(değerli annem, Hajıa Suebat Abdulhameed ba¸sta olmak üzere, e¸sim, Nimotallahi Olaosebikan ve Lawal Abdulhafıs), bana yol gösteren ve birçok konuda olduğu gibi, yüksek lısans öğrenimim boyunca da yardımı esirgemeyen manevi hocam, Sayın Şeyh Usman Giwa'ya ve son olarak, yüksek lısans öğrenimim boyunca beni yolda ya da camide tebessüm ile karşılayan ve onların tarafından yabanci çekmediğim abilere ve amcalarına kadar te¸sekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
SİMGELER DİZİNİ v
1. GİRİŞ 1
1.0.1. Kaynak Özetleri 3
1.0.2. Çalı¸smanın Amacı 4
2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER... 5
2.1. Lineer Pozitif Operatörler ile ilgili Temel Kavramlar ve Teoremler 5
2.1.1. Süreklilik Modülü ve Özellikleri 7
2.1.2. Yakınsaklık hızı 11
3. LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN FARKLARI 14
3.0.3. Ağırlıklı Süreklilik Modülü ile Kestirim 14
3.0.4. K—Fonksiyoneli ile kestirim..22
3.0.5. Chebyshev fonksiyoneli için Operatörlerin Farkları 25
3.0.6. Uygulamalar..27
4. İKİ DEĞİŞKENLİ LİNEER OPERATÖRLER 30
4.0.7. İki De˘iskenlı̆g Lineer Pozitif Operatörlerin Farkları 34
4.0.8. Operarörlerin Farkının K—Fonksiyoneli Yardımı ile kestirimi 39
4.1. Chebyshev fonksiyonelleri için operatörlerin farkı.................................43
4.2. Uygulamalar...44
5. TARTIŞMA VE SONUÇ 47
KAYNAKLAR... 48

SİMGELER DİZİNİ

$C[a,b]$	$[a,b]$ aralığında sürekli, fonksiyonlar uzayı
B_n	Bernstein operatörleri
S_n	Szász-Mirakyan operatörü
$w(f;6)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü,
$w_2(f;6)$	f fonksiyonunun 2. ikinci dereceden süreklilik modülü,
$K_s(f,t)$	s yinci mertebeden Peetrè—K fonksiyoneli
$\Vert f\Vert_p$	$p \in Æ_0$ için f fonksiyonunun normu
$▲(f;6)$	Ağırlıklı uzayda süreklilik modülü
$B_2[0,\infty)$	$[0,\infty)$ üzerinde $\vert f(x)\vert \leq M(1+x^2)$ özelliğini sağlayan fonksiyonlar uzayı
$U(f,x)$ ve $V(f,x)$	Lineer pozitif operatör
$C(Q)$	Q kümesi üzerinde tanımlı, reel değerli ve sürekli iki değişkenli fonksiyonların uzayı

1. GİRİŞ

Yakla¸sımlar teorisi 19. yüzyılın ortalarından itibaren bir çok ara¸stırmacı bilim insanı tarafından üzerinde yoğun çalışmaların yapıldığı Matematiksel Analizin temel ve güncel ara¸stırma konularından birisidir. 1859 yılında P. L. Chebyshev $[a, b]$ aralığında tanımlı, sürekli bir fonksiyona düzgün olarak yakınsayan bir $p(x)$ polinomunun varlığını göstermiştir. Daha sonraları bu teori genişletilerek araştırmacıya ilham kaynağı olmuştur.

Yakla¸sımlar teorisindeki Temel ve en önemli teoremlerden biri 1885 yılında K. Weierstrass tarafından verilen ve adını tasıyan Weierstrass teoremidir. Bu teorem $[a, b]$ kompakt aralığında tanımlı sürekli her fonksıyona düzgün olarak yakınsayan bir polinom dizisinin karşılık geldiğini ifade etmektedir. Daha açık olarak teorem;

$f \in C[a, b]$ keyfı bir fonksiyon olmak üzere, her $x > 0$ için en az bir $p(x)$ polinomu vardır, öyleki $|f(x) - p(x)| < x$, $a \leq x \leq b$ eşitsizliği sağlanır. Şeklinde ifade edilmektedir.

Weierstrass teoreminin basit bir ispatı 1912 yılında Bernstein tarafından verilmi¸stir. Bernstein teoremin ispatında toplam biçiminde bir polinom tanımlayarak Weierstrass teoreminin ispatını vermi¸stir. Daha sonra bu tip polinomları kullanarak $f \in C\,[0, 1]$ fonksiyonları için literatürde çok iyi bilinen

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0} \binom{n}{h} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{h}{n}\right)$$

Bernstein operatörlerini tanımlamı¸stır. Bu tip yakınsaklık teoremleri verildikten sonra, sınırlı aralıkta birçok Lineer pozitif operatör dizileri tanımlanmı¸stır. Tanımlanan operatörlerin düzgün yakınsaması ile ilgili çalı¸sma yapılmı¸stır. Halen çalı¸smalar yoğun olarak devam etmektedir. Weierstrass ın teorisinden sonra Lineer pozitif operatörlerin yakınsaklığı ile ilgili en önemli teorem ise bir birinden habersiz olarak Bohmann ve Popoviciu tarafından verilmi¸stir. Korovkin ise Bohmann ve Popoviciu'nun teoremlerinin integrallenebilir fonksiyonlar için de geçerli oldunu göstererek Bohmann-Korovkin teoremini vermi¸stir.

Bohmann-Korovkin teoremi sınırlı aralık üzerinde tanımlı operatörler için verilmi¸s olup, sınırsız aralıklar üzerinde tanımlı operatörler için yeterli olmamaktadır. Bu sebeple sınırsız aralıklar üzerinde tanımlı operatörlerin yakınsaklık özelliklerini incelemek için Bohmann-Korovkin teoreminin sınırsız aralıklar üzerine genelleştirilmesi A. D. Gadjiev tarafından verilmiş olup, ağırlıklı uzaylarda operatörlerin yakınsaklık özelliklerinin incelenmesine yönelik temel bilgiler ortaya konulmuştur.

Sınırsız aralıklar üzerinde tanımlanan operatörler içerisinde en bilinenlerinden ikisi

$$S_n(f;x) = e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}f\left(\frac{k}{n}\right), \quad x \in [0,\infty),\ f \in C_B[0,\infty),\ n \in \mathbb{N}$$

şeklinde tanımlanan Szász-Mirakyan operatörü ve

$$A_n(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}f\left(\frac{k}{n}\right), \quad x \in [0,\infty),\ f \in C_B[0,\infty)$$

şeklinde tanımlanan Baskakov operatörüdür.

Biz de bu tezde lüteratürde tanımlanan herhangi iki Lineer pozitif operatör dizisinin farkları ile ilgili bazı sonuçlar elde etmek için çaba gösterdik. Bu sonuçların bize şöyle bir katkısı olacaktır. Eğer operatör dizilerinden birinin yakınsaklık oranı ve yakınsaklık hızı hakkında bilgi sahibi isek, elde edilen sonuçları kullanarak diğer operatörün yakınsaklık oranlarını ya da yakınsaklık hızlarını doğrudan elde edebiliriz. Bunun için önce A. Aral, D. Inoan ve I. Raşa [1] tarafından yapılan çalışmayı baz alarak, operatörün iki değişkenli olması halindeki sonuçları vereceğiz.

1.0.1. Kaynak Özetleri

Araştırmacılar lineer pozitif operatörlerin yakınsaklık özellikleri üzerinde diğer operatörlere göre daha çok çalışmışlardır, çünkü lineer pozitif operatörler diğer operatörlere göre daha kolay olu¸sturulur ve çok daha geni¸s özelliklere sahiptir.

1995 yılında Lupaş yaptığı bir çalışmada operatörlerin farklarını incelenmeye ba¸sladı. Daha sonra bazı ara¸stırmacılar bu problemi daha da geni¸slettiler [17] . Bügüne kadar bu alanında çeşitli çalışmalar mevcuttur. Çoğu araştırmacı iki operatörün farkını incelemek için süreklilik modülü ve K—fonksiyonelinden yararlandılar. Bunu yaparken operatörlerin bilinen özelliklerini (aynı kökten üretilen ya da aynı fonksiyonel yardımıyla tanımlanma vb.) kullanılarak çalı¸smalarını yürüttüler. Bu çalı¸smalardan bir tanesi Ana Maria Acu ve Ioan Ra¸sa [2] tarafından yapılan çalışmadır. Bu çalışmada sınırlı aralıkta aynı özelliğe sahip olan iki operatörün farkı incelenmi¸stir. Daha sonrasında A. Aral, D. Inoan ve I. Ra¸sa [1] sınırsız aralıkta benzer bir çalı¸sma yapmı¸slardır. Daha sonra Ana Maria Acu , G. Ba¸scanbaz-Tunca ve I. Raşa [9] bir simplekste iki değişkenli operatörün farkını incelediler. Biz de bu tezde A. Aral, D. Inoan ve I. Ra¸sa [1] tarafından yapılan sınırsız aralıkta operatörler için "On differences of linear positive operators" isimli makaleyi baz alarak, bu çalı¸smada verilen teoremleri iki değişkenli operatörler için vereceğiz. Bunu yaparken bazı ihtiyaç duyulan makalelerden de yararlandık [3] [5] [6] [7] [8] [10] [11] [12] . Yaptığımız bu çalı¸sma orijinal olup, ”Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics” isimli dergide yayınlatmak için sunuldu.

1.0.2. Çalışmanın Amacı

Bu tezde önce tezde kullanılacak bazı tanımlar verildikten sonra, bilinen bazı operatörler ve onların yakınsaklık özellikleri incelenecek, daha sonra operatörlerin farkına bakılacak. Sınırsız aralıkta İki değişkenli operatörler ile ilgili teoremler verilecek ve bu teoremler Szász-Mirakyan ve Szász-Mirakyan Kantorovich operatörler üzerinde uygulanacak. Yapılan bu çalı¸smada amaç; bundan sonra bu konuda yapılacak olan diğer çalışmalar için bir kaynak oluşturma hedefini taşımaktadır.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

2.1. Lineer Pozitif Operatörler ile ilgili Temel Kavramlar ve Teoremler

Tezin bu kısımda Lineer pozitif operatörlerin yakınsaklık özellikleri incelenirken kullanılan bazı tanımlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1 $[a, b]$ aralşğs üzerinde olan fonksiyonlar uzays $C[a, b]$ ile gösterilmektedir.

Tanım 2.2 (Tineer Uxay): N boş olmayan bir cümle ve R, reel sayslar cismi olsun. Eğer aşağadaki şartlar sağlansyorsa N ye R üzerinde lineer uzay veya vektör uzays denir.

(i) N, $+$ işlemine göre değişmeli gruptur

(a) Her $x, y \in N$ için $x + y \in N$ dir.

(b) Her $x, y, x \in N$ için $x + (y + x) = (x + y) + x$ dir.

(c) Her $x \in N$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak ¸sekilde $\theta \in N$ vardır.

(d) Her $x \in N$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak ¸sekilde $-x \in N$ vardır.

(e) Her $x, y \in N$ için $x + y = y + x$ dır.

(ii) $x, y \in N$ ve $\ , \beta \in R$ olmak üzere aşağădaki şartlar sağlanır.

(a) $x \in N$ dır

(b) $(x + y) = \ x + \ y$ dır

(c) $(\ + \beta)x = \ x + \beta x$ dır.

(d) $1x = x$ dır. Burada 1, R nin, birim elemannıdır.

Tanım 2.3 (Norm): N, bir lineer uzay olsun. $\|\|: N \longrightarrow R$ fonksiyonu x deki de˘geri $\| x \|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için

(i) $\| x \| \geq 0$

(ii) $\| x \|= 0 \Leftarrow\Rightarrow x = 0$

(iii) $\| ax \|=| a |\| x \|$

(iv) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

şartları sağlanıyorsa$\|\|$ fonksiyonuna N üzerinde norm denir. Eğer bir lineer uzay üzerinde norm tanımlanırsa bu uzay normlu uzay denilir.

Tanım 2.4 (Tineer Operatör): X ve Y lineer normlu bir fonksiyon uzaylar ol-sun. $5 : X \longrightarrow Y$ operatörü, her $f, g \in X$ ve her ve $\beta \in R$ için

$$5(\ f + \beta g) = \ 5(f) + \beta 5(g)$$

eşitliğini sağlayan 5 operatörüne X den Y ye bir lineer operatör denir.

$$5(\ f + \beta g) = \ 5(f) + \beta 5(g)$$

eşitliğini sağlanıyorsa, 5 operatörüne X den Y ye bir lineer operatör denir.

Tanım 2.5 (Tineer poxitif Operatör): X bir lineer uzay olsun. E˘ger $f \geq 0$ için $5(f) \geq 0$ oluyorsa, 5 ye pozitif operatör ads verilir.

Eğer 5, lineer ve pozitif operatör ise her t için $f(t) \leq g(t)$ olur. Yani 5 operatörü monotondur.

Tanım 2.6 (Eorozkin Teoremi): $5_n(f; x)$, $C[a, b]$ den $C[a, b]$ ye giden lineer pozitif operatörler dizisi olsun. $_n(x), \beta_n(x)$ ve $r_n(x)$ $[a, b]$ de düzgün olarak ssfsra yaksnsayan diziler olmak üzere, e˘ger $6x \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned} 5_n(1; x) &= 1 + \ _n(x) \\ 5_n(t; x) &= x + \beta_n(x) \\ 5_n \ t^2; x &= x^2 + r_n(x) \end{aligned}$$

koşulları sağlanıyorsa bu durumda $5_n(f; x)$, $[a, b]$ aralığı üzerinde $f(x)$ sürekli fonksiyonuna düzgün olarak yakınsar. Yani

$$\lim_{n \to \infty} \| 5_n(f) - f \|_{C[a,b]} = \lim_{n \to \infty} \max_{a \le x \le b} | 5_n(f; x) - f(x) | = 0$$

sağlanır.

2.1.1. Süreklilik Modülü ve Özellikleri

Yaklaşımlar teoresinde operatörlerin dizisinin yakınsaklığı önemli kavramlardan biridir. Yakınsaklık kadar, yakınsama hızı da aynı anlamda önemlidir. Yakınsama hızının belirlendiği bazı yardımcı fonksiyonlar vardır. Bunlardan birisi de süreklilik modülü olup, bu fonksiyon aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

Tanım 2.7 Kabul edelim ki f, $[a, b]$ aralsğsnda tansmlanmsş ssnsrls bir fonksiyon olsun. Key bir $6 > 0$ için

$$\begin{aligned} w(f; 6) &= \sup_{|t-x| @ 6} |f(t) - f(x)| , \\ &= \sup_{|h| @ 6} |f(x + k) - f(x)| , \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki süreklilik modülü fonksiyonu denir. $w(f; 6)$ negatif olmayan bir fonksiyondur

Süreklilik modülü yakınsama hızının belirlenmesinde önemli rol oynayan özelliklere sahiptir. Bunların bazıları asağıda lemma olarak verilecektir.

Lemma 2.1 $w(f; 6)$ fonksiyonu monoton artandsr. yani $6_1 < 6_2$ iken $w(f; 6_1) < w(f; 6_2)$ dir

İspat. $0 < 6_1 \le 6_2$ olsun. Bu durumda $|x - y| \le 6_2$ koşulunu sağlayan (x, y) sayı çiftlerinin kümesi $|x - y| \le 6_1$ koşulunu sağlayan sayı çiftlerinin kümesinden daha kapsamlııdır. Kümelerdeki supremum kavramı göz önüne alınarak süreklilik modülünün tanımından dolayı

$$w(f;\delta_1) \leq w(f;\delta_2)$$

yazılabilir. ■

Lemma 2.2 $1 \leq m \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$w(f;m\delta) \leq m w(f;\delta)$$

dir

İspat. Süreklilik modolü fonksiyonunun yukarıdaki tanımı gözönüne alınırsa

$$w(f;m\delta) = \sup_{\substack{|t-x|\leq m\delta \\ x,t\in[a,b]}} |f(t) - f(x)|$$

ifadesi yazılabilir. Burada $t - x$ yerine mk yazılırsa, $t = mk + x$ olacağından sağ taraftaki, ifdenin içine bazı ekleme ve çıkarmalar yapılarak

$$\begin{aligned}
w(f;m\delta) &= \sup_{\substack{x\in[a,b] \\ |h|\leq\delta}} |f(x+mk) - f(x)| \\
&= \sup_{\substack{x\in[a,b] \\ |h|\leq\delta}} |f(x+mk) - f(x+(m-1)k) + \ldots\ldots + f(x+k) - f(x)| \\
&= \sup_{\substack{x\in[a,b] \\ |h|\leq\delta}} |f(x+mk) - f(x+(m-1)k) + \ldots\ldots + f(x+k) - f(x)| \\
&= \sup_{\substack{x\in[a,b] \\ |h|\leq\delta}} \left| \sum_{k=1}^{m} f(x+hk) - f(x+(h-1)k) \right|.
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan da

$$w(f;m\delta) \leq \sum_{k=1}^{m} \sup_{\substack{x\in[a,b] \\ |h|\leq\delta}} |f(x+hk) - f(x+(h-1)k)|$$

olur. Yukarıdaki toplamda h yerine 1 den m ye kadar değerleri yazılırsa toplamda m tane $w(f;6)$ gelir. Buradan

$$w(f;m6) \leq mw(f;6)$$

¸seklinde istenilen sonuç elde edilir. ■

Lemma 2.3 Süreklilik modülü fonksiyonu $\lambda > 0$ reel saysss için

$$w(f;\lambda 6) \leq (1+\lambda)w(f;6)$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat. Bilinmektedir ki $[|\lambda|] \leq \lambda < [|\lambda|]+1$ eşitsizliği sağlanır. Buna göre

$$\begin{aligned} w(f;\lambda 6) &\leq w(f;([|\lambda|]+1)6) && \text{(w artan olduğundan)} \\ &\leq ([|\lambda|]+1)w(f;\lambda 6) && \text{önsehi lemmadan} \\ &\leq (\lambda+1)w(f;6) \end{aligned}$$

yazılabilir. ■

Lemma 2.4 f fonksiyonu $[a,b]$ aralsğsnda sürekli bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$\lim_{6\to O} w(f;6) = 0$$

dır.

İspat. f fonksiyonu sürekli olduğundan süreklilik tanımı gereğince her $o > 0$ için bir $y > 0$ vardır öyle ki $|t-x| < y$ olduğundan $|f(t)-f(y)| < o$ dir. Süreklilik modülü tanımında $6 < y$ alıdığında $w(f;6) < o$ olur. Yani

$$\lim_{6\to O} w(f;6) = 0$$

elde edilir. ■

Lemma 2.5 $x, t \in [a, b]$ olmak üzere, $6 > 0$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{|t - x|}{6}\right) w(f; 6)$$

dır.

İspat. Süreklilik modülünün tanımından f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sınırlı ise

$6x, t \in [a, b]$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq w(f; |t - x|)$$

yazılabilir. Buna göre

$$w(f; |t - x|) = \sup_{\substack{x,t2[a,b] \\ |t-x| \leq |t-x|}} |f(t) - f(x)|$$

olup,

$$|f(t) - f(x)| \leq w\left(f; \frac{|t - x|}{6} 6\right) \quad \text{(5emma 2.3 ten)}$$

$$\leq \left(1 + \frac{|t - x|}{6}\right) w(f; 6)$$

olarak elde edilir. ■

Lemma 2.6 6_n ssfsra yaksnsayan bir dizi olmak üzere

$$C_f \; 6_n \leq w(f; 6_n)$$

eşlitsizliği sağlansr. (Burada C_f f fonksiyonuna bağls bir sabit)

İspat. Süreklilik modülünün tanımı gereğince

$$w(f; 1) = w\left(f; 1\frac{6_n}{6_n}\right)$$

$$\leq \left(1 + \frac{1}{6_n}\right) w(f; 6_n)$$

$$= \frac{6_n + 1}{6_n} w(f; 6_n)$$

yazılabilir. δ_n yakınsak olduğundan sınırlıdır. Dolayısıyla $1+\delta_n \leq C$ olacak şekilde $C > 0$ vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned} w(f;1) &\leq \frac{C}{\delta_n} w(f;\delta_n) \\ &\Rightarrow \\ \frac{\delta_n w(f;1)}{C} &\leq w(f;\ \delta_n) \\ &\Rightarrow \\ \delta_n C_f &\leq w(f;\ \delta_n) \end{aligned}$$

olur ki böylece istenilen sonuç elde edilir. ■

2.1.2. Yakınsaklık hızı

Süreklilik modülü yardımıyla Lineer pozitif operatörlerin yakınsaklık hızı hesaplanabilir, bir örnek olarak Berstein operatörleri için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.1 f, $[a,b]$ aralsğsnda tansmlanmsş sürekli bir fonksiyon olsun. Süreklilik mödülü için

$$|B_n(f(t);x) - f(x)| \leq C w(f; \frac{1}{\sqrt{n}})$$

eşitsizliği sağlansr.

İspat. Bernstein operatörü lineer pozitif bir operatör olduğundan

$$\begin{aligned} |B_n(f(t);x) - f(x)| &= |B_n(f(t);x) - f(x)B_n(1;x)| \\ &= |B_n(f(t);x) - B_n(f(x);x)| \\ &= |B_n(f(t) - f(x);x)| \\ &\leq |B_n\, |f(t) - f(x)|\, ;x)| \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Lemma 2.5 gereğince

$$|f(t) - f(x)| \leq 1 + \frac{|t-x|}{\delta} \quad w(f;\delta)$$

eşitsizliği sağlanacağından

$$|B_n(f(t);x) - f(x)| \leq B_n\left(\left(1 + \frac{|t-x|}{6}\right) w(f;6); x\right)$$

$$\leq w(f;6)\left(B_n(1;x) + \frac{1}{6} B_n(|t-x|\,;x)\right)$$

yazılabilir. Hölder Eşitsizliği kullanılırsa

$$|B_n(f(t);x) - f(x)| \leq w(f;6)\left(1 + \frac{1}{6} B_n((t-x)^2;x)^{\frac{1}{2}} \cdot B_n(1^2;x)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\leq w(f;6)\left(1 + \frac{1}{6}\left(B_n(t^2;x) - 2xB_n(t;x) + x^2 B_n(1;x)\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca, Bernstein operatörlerinin nodları $B_n(t^2;x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$, $B_n(t;x) = x$ ve $B_n(1;x) = 1$ olarak elde edildiklerinden

$$|B_n(f(t);x) - f(x)| \leq w(f;6)\left(1 + \frac{1}{6}\left(x^2 + \frac{x(1-x)}{n} - 2x^2 + x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\leq w(f;6)\left(1 + \frac{1}{6}\left(\frac{x(1-x)}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

olur. Burada $6 = \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}$ seçilirse

$$|B_n(f(t);x) - f(x)| \leq 2w\left(f;\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right)$$

olur. $\frac{x(1-x)}{n}$ ıfadesinin $[0,1]$ aralığında alacağı maksimum değeri bulmak için türevi alınıp, sıfıra e¸sitlenirse $x = \frac{1}{2}$ bulunur. Bu değer yerine yazılırsa $\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ yazılabilir. Böylece

$$|B_n(f(t);x) - f(x)| \leq 2w\left(f;\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)$$

$$\leq 2\left(1 + \frac{1}{2}\right) w\left(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\leq Cw\left(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

olarak elde edilir. ■

Tanım 2.8 (K−fonksiyonel): Süreklilik modülü dsşsnda, fonksiyonlarsn yaksn-saklsk hszlarsns belirelemek için önemli bir ölçü K−fonksiyonelidir. Bu fonksiyon

1968 yslsnda J. Peetrè tarafsndan verilmiştir. K—fonksiyoneli; $f \in C[a,b]$, $6 \geq 0$ ve $s \in Æ$ olmak üzere

$$K_s(f;t) := K(f;t;C[a,b],C^s[a,b]) := \inf\{\|f-g\| + t\,\|g^{(s)}\|, g \in C[a,b]\}$$

şeklinde tansmlansr. Bu ifadeye s yinci mertebeden Peetrè K— fonksiyoneli ads verilir.

Tanım 2.9 (Taylor Jormülü): f fonksiyonu bir a noktassns ihtiva eden bir aralskta $n+1$ inci mertebeden sürekli türevlere sahip olsun. Bu aralsktaki her x için Taylor formülü,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{h!}(x-a)^k$$

şeklindedir. $K_n(x)$ ifadesine kalan terim, fark veya hata denirse

$$K_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

olmak üzere

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{h!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

yazslabilir. Bu ifadeye kalan terimli Taylor Formülü adı verilir.

Tanım 2.10 (Ortalama Değer Teoremi): $f:[a,b] \to R$ fonksiyonu [a,b] aralsğsnda sürekli ve $6x \in (a,b)$ noktassnda türevlenebilir olsun. Bu taktirde (a,b) aralsğsnda

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

olacak şekilde en az bir x_0 noktass vardsr.

3. LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN FARKLARI

Tezin bu bölümde A. Aral, D. Inoan ve I. Ra¸sa [1] tarafından 2019 yılında yapılan, sınırsız aralıkta tanımlı operatörler için genel olarak operatörlerin farkları üzerine yapılan "On differences of linear positive operators" isimli makaleyi inceleyeceğiz. Bir sonraki bölümünde biz de bu çalışmayı iki değişkenli operatörler için vereceğiz.

3.0.3. Ağırlıklı Süreklilik Modülü ile Kestirim

Korovkin teoreminin sınırsız aralıklarda düzgün yakınsaklık için yeterli olmadığını daha önce belirtmiştik. Sınırsız aralıklar için düzgün yakınsaklığın A.D. Gadjiev tarafından verilen ve ağırlıklı uzaylar için yakınsaklık incelemelerinde kullanılan teorem yeterli sonuçları vermektedir [19] [20] .

$C[0,\infty)$, $[0,\infty)$ üzerinde tanımlı, reel değerli ve sürekli fonksiyonların kümesi, M sadece f ye bağlı bir sabit olmak üzere $B_2[0,\infty)$, $[0,\infty)$ üzerinde $|f(x)| \leq M(1+x^2)$ özelliğini sağlayan fonksiyonların kümesi ve $C_2[0,\infty)$, $B_2[0,\infty)$ deki sürekli fonksiyonların alt uzayı olsun. $C_2[0,\infty)$ deki kapalı kümeyi $C_2^{\times}[0,\infty)$ ile gösterelim öyleki bu küme üzerindeki bir f fonksiyonu için $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{1+x^2}$ limitinin var ve sonlu olsun.

$B_2[0,\infty)$ lineer normlu uzay olup, bu uzaydaki norm

$$\|f\|_2 = \sup_{x\geq 0} \frac{|f(x)|}{1+x^2}$$

¸seklinde tanımlanır.

Bu bölümde verilen teoremlerde operatörlerin yakınsaklık özellikleri incelenirken [6] de kullanılan ve $\blacktriangle(f;.)$ ile gösterilen ağırlıklı süreklilik modülü kullanılacak olup

$$\blacktriangle(f;6) = \sup_{\dagger h \dagger @6, x2[0,\infty)} \frac{|f(x+k)-f(x)|}{(1+k^2)(1+x^2)} \quad \text{her } f \in C_2[0,\infty) \text{ için}$$

¸seklinde tanımlanmaktadır.

$\blacktriangle(f;6)$ süreklilik modülü fonksiyonu asa˘ıdakġ lemmada verilen özellikleri sağlar.

Lemma 3.1 $f \in C_2^x[0,\infty)$ olsun. Bu taktirde

(i) $\blacktriangle(f;6)$fonksiyonu $6 \geq 0$ için 6 monoton artan bir fonksiyonudur.

(ii) $\lim\limits_{6\to\infty} \blacktriangle(f;6) = 0$ dsr.

(iii) her $\lambda > 0$ için

$$\blacktriangle(f;\lambda 6) \leq 2(1+\lambda)(1+6^2)\blacktriangle(f;6) \tag{3.1}$$

eşitsizliği sağlansr [6] .

I˙leride verilecek teorem ve lemmaların ispatlarında kolaylık olması bakımından kullanılacak bazı notasyonlar aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Her $i \in Æ$ ve $x \in [0,\infty)$ için $e_i(x) = x^i$ olsun. $5 : D \to R$, $C[0,\infty)$ un $C_2[0,\infty)$ ve altıncı dereceye kadar olan polinomlarını içeren D alt kümesi üzerinde tanımlanan lineer pozitif bir fonksiyonel olsun, öyleki $5(e_0) = 1$, $b^T := 5(e_i)$ ve

$$\mu_i^T = 5(e_i - b^T e_0)^i,\ i \in Æ,\ 0 \leq i \leq 6$$

ile gösterilsin. Bu durumda $\mu_0^T = 1, \mu_1^T = 0$ ve $\mu_2^T = 5(e_2) - (b^T)^2 \geq 0$ olur.

Böylece (3.1) eşitsizliği ve $\lambda = \frac{|y-x|}{6}$ kullanılmasıyla, $6 > 0$,için

$$\begin{aligned}\blacktriangle(f;|y-x|) &= \sup_{x2[0,\infty),|y-x|@6} \frac{|f(x+y-x)-f(x)|}{(1+(y-x)^2)(1+x^2)} \\ &= \sup_{x2[0,\infty),|y-x|@6} \frac{|f(y)-f(x)|}{(1+(y-x)^2)(1+x^2)}\end{aligned}$$

olduğu göz önüne alınarak

$$
\begin{aligned}
|f(y)-f(x)| &= (1+x^2)\left(1+(y-x)^2\right)\frac{|f(y)-f(x)|}{(1+(y-x)^2)(1+x^2)} \\
&\le (1+x^2)\left(1+(y-x)^2\right)\sup_{x\in[0,\infty),|y-x|\le\delta}\frac{|f(y)-f(x)|}{(1+(y-x)^2)(1+x^2)} \\
&= (1+x^2)\left(1+(y-x)^2\right)\omega(f;|y-x|) \\
&\le 2\left(1+\frac{|y-x|}{\delta}\right)(1+\delta^2)(1+x^2)\left(1+(y-x)^2\right)\omega(f;\delta) \\
&\le \begin{cases} 4(1+\delta^2)^2(1+x^2)\omega(f;\delta), & |y-x|<\delta, \\ 4(1+\delta^2)^2(1+x^2)\omega(f;\delta)\frac{(y-x)^2}{\delta^2}, & |y-x|>\delta. \end{cases}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece

$$
|f(y)-f(x)| \le 4\left(1+\delta^2\right)^2\left(1+x^2\right)\omega(f;\delta)\left(1+\frac{(y-x)^4}{\delta^4}\right).
$$

yazılabilir.

Burada $\delta \le 1$ olarak seçilirse her $f \in C^*[[0,\infty)$, $x, y \in [0,\infty)$ ve $0 < \delta \le 1$ için

$$
|f(y)-f(x)| \le 16\left(1+x^2\right)\omega(f;\delta)\left(1+\frac{(y-x)^4}{\delta^4}\right), \tag{3.2}
$$

olarak bulunur.

f fonksiyonu ile 5 fonkiyonelinin farklarını içeren bir Lemma aşağıdaki şekilde verilebilir.

Lemma 3.2 $f \in C_2[0,\infty)$, $f'' \in C_2^*[0,\infty)$ ve $0 < \delta \le 1$ olsun. Bu durumda

$$
\left|5(f)-f(b^T)\right| \le \frac{1}{2}\left|f''\right|\left|b^T\cdot\mu_2^T\right| + 8\left(1+\left(b^T\right)^2\right)\omega(f'';\delta)\left(\mu_2^T+\frac{\mu_6^T}{\delta^4}\right)
$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $t \in [0,\infty)$, $f \in C_2[0,\infty)$ ve $f^{JJ} \in C_2^{x}[0,\infty)$ olsun. $f(x)$ fonksiyonunun ikinci basamaktan türevini içeren

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f^{J}(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f^{JJ}(x_0) + R_2(f; x_0)$$

Taylor formülünün kullanılmasıyla

$$f(t) - f\ b^T = f^{J}\ b^T\ \ t - b^T + \frac{1}{2} f^{JJ}\ b^T\ \ t - b^T\ ^2 + R_2(f; t),$$

ifadesi yazılabilir. Burada

$$R_2(f; t) := \frac{t - b^T}{2}\ \ f^{JJ}(\ ) - f^{JJ}\ b^T$$

dır.

$t <\ < b^T$, $5(e_0) = 1$ ve $5(e_1) = b^T$ oldukları göz önüne alınırsa

$$5(f) - f\ b^T\ \ 5(e_0)$$

$$= f^{J}\ b^T\ \ 5(e_1) - b^T 5(e_0) + \frac{1}{2} f^{JJ}\ b^T\ \ 5\ \ e_1 - b^T e_0\ ^2 + 5(R_2(f; .)).$$

$$= \frac{1}{2} f^{JJ}\ b^T\ \ \mu_2^T + 5(R_2(f; .)). \tag{3.3}$$

olur.

Şimdi $5(R_2(f; .))$ ifadesini hesaplayalım. (3.2) esitsizliginden

$$\cdot f^{JJ}(\ ) - f^{JJ}\ b^T \cdot \leq 16\ \ 1 + b^T\ ^2\ \ \blacktriangle(f^{JJ}; 6)\ \ 1 + \frac{t - b^T\ ^4}{6^4}\ !$$

yazılabilir. Bu ifade $5(R_2(f; .))$ de yerine yazılırsa

$$5(R_2(f; .)) \leq 8\ \ 1 + b^T\ ^2\ \ \blacktriangle(f^{JJ}; 6)\ \ \mu_2^T + \frac{\mu_6^T}{6^4}$$

olur. (3.3) eşitliği kullanılarak

$$\cdot 5(f) - f(b^T)\cdot \leq \frac{1}{2} \cdot f^{JJ}\ b^T \cdot \mu_2^T + 8\ \ 1 + b^T\ ^2\ \ \blacktriangle(f^{II}; 6)\ \ \mu_2^T + \frac{\mu_6^T}{6^4} \tag{3.4}$$

şeklinde teoremde iddia edilen eşitsizlik elde edilir. ■

Yukarıda ki sonuçlar göz önüne alınarak herhangi iki U ve V operatörleri için polinom ağırlıklı uzaylarda bazı sonuçlar verilebilr.

K negatif olmayan tam sayıların kümesi ve $p_k : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $h \in K$ fonksiyon ailesi olsun. U, V : D → $B_2\,[0, \infty)$ olmak üzere $U(f; x)$ ve $V(f; x)$ lineer pozitif operatörleri

$$U(f; x) = \sum_{k2K} 5_k(f)\, p_k(x) \ \text{ ve } \ V(f; x) = \sum_{k2K} G_k(f)\, p_k(x) \qquad (3.5)$$

¸seklinde tanımlansın. Ayrıca $5_k, G_k : D \to R$ lineer pozitif fonksyonelleri için $5_k(e_0) = 1$ ve $G_k(e_0) = 1$ olsun. Buna göre aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1 $f \in C_2[0, \infty)$, $f^{JJ} \in C_2^{x}[0, \infty)$ olsun. Bu durumda

$$|(U - V)(f; x)| \le \frac{1}{2}\|f^{JJ}\|_2\, \beta(x) + 8▲(f^{JJ}; 6_1)(1 + \beta(x)) + 16▲(f; 6_2)(r(x) + 1)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$\beta(x) = \sum_{k2K} p_k(x) \left\{ \left(1 + b^{T_h}\right)^2 \mu_2^{T_h} + \left(1 + b^{G_h}\right)^2 \mu_2^{G_h} \right\},$$

$$r(x) = \sum_{k2K} p_k(x) \left(1 + b^{T_h}\right)^2,$$

$$6_1 = \left(\sum_{k2K} p_k(x) \left\{ \left(1 + b^{T_h}\right)^2 \mu_6^{T_h} + \left(1 + b^{G_h}\right)^2 \mu_6^{G_h} \right\} \right)^{\frac{1}{4}}$$

ve

$$6_2(x) = \left(\sum_{k2K} p_k(x) \left(1 + b^{T_h}\right)^2 \left(b^{T_h} - b^{G_h}\right)^4 \right)^{\frac{1}{4}}$$

olup, $6_1 \le 1$ ve $6_2 \le 1$ olarak alınmaktadır.

İspat. Lemma 3.2 göz önüne alınarak benzer işlemler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k\in K} p_k(x)\left|5(f)-f(b^{T_h})\right| \\
&\le \frac{1}{2}\sum_{k\in K} p_k(x)\left|f''\right| \left(b^{T_h}\right)\mu_2^{T_h} \\
&\quad + 8\blacktriangle(f'';6_1)\sum_{k\in K} p_k(x)\left(1+\left(b^{T_h}\right)^2\right)\left(\mu_2^{T_h}+\frac{\mu_6^{T_h}}{6_1^4}\right) \\
&\le \frac{1}{2}\|f''\|_2 \sum_{k\in K} p_k(x)\left(1+\left(b^{T_h}\right)^2\right)\mu_2^{T_h} \\
&\quad + 8\blacktriangle(f'';6_1)\sum_{k\in K} p_k(x)\left(1+\left(b^{T_h}\right)^2\right)\left(\mu_2^{T_h}+\frac{\mu_6^{T_h}}{6_1^4}\right)
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Benzer düşünce ile

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k\in K} p_k(x)\left|G(f)-f(b^{G_h})\right| \\
&\le \frac{1}{2}\sum_{k\in K} p_k(x)\left|f''\right| \left(b^{G_h}\right)\mu_2^{G_h} \\
&\quad + 8\blacktriangle(f'';6_1)\sum_{k\in K} p_k(x)\left(1+\left(b^{G_h}\right)^2\right)\left(\mu_2^{G_h}+\frac{\mu_6^{G_h}}{6_1^4}\right) \\
&\le \frac{1}{2}\|f''\|_2 \sum_{k\in K} p_k(x)\left(1+\left(b^{G_h}\right)^2\right)\mu_2^{G_h} \\
&\quad + 8\blacktriangle(f'';6_1)\sum_{k\in K} p_k(x)\left(1+\left(b^{G_h}\right)^2\right)\left(\mu_2^{G_h}+\frac{\mu_6^{G_h}}{6_1^4}\right)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. (3.2) eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k\in K} p_k(x)\left|f\left(b^{T_h}\right)-f\left(b^{G_h}\right)\right| \\
&\le 16\blacktriangle(f;6_2)\sum_{k\in K} p_k(x)\left(1+\left(b^{T_h}\right)^2\right)\left(1+\frac{\left(b^{T_h}-b^{G_h}\right)^4}{6_2^4}\right)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Böylece U ve V operatörlerinin farkı için

$$
\begin{aligned}
&|(U-V)(f;x)| \\
&\le \sum_{k\in K} |5_k(f)-G_k(f)|\, p_k(x) \\
&\le \sum_{k\in K} p_k(x)\left\{\left|5_k(f)-f\left(b^{T_h}\right)\right| + \left|G_k(f)-f\left(b^{G_h}\right)\right| + \left|f\left(b^{T_h}\right)-f\left(b^{G_h}\right)\right|\right\}
\end{aligned}
$$

ifadesi yazılabilir. Bu ifade de yukarıda elde edilen eşitlikler kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&|(U-V)(f;x)| \\
&\leq \frac{1}{2}\|f''\|_2 \sum_{k\in K} p_k(x)\left\{\left(1+\left(b^{T_h}\right)^2\right)\mu_2^{T_h}+\left(1+\left(b^{G_h}\right)^2\right)\mu_2^{G_h}\right\} \\
&\quad +8\omega(f'';\delta_1)\sum_{k\in K} p_k(x)\left[\left(1+\left(b^{T_h}\right)^2\right)\mu_2^{T_h}+\left(1+\left(b^{G_h}\right)^2\right)\mu_2^{G_h}\right. \\
&\quad \left.+\frac{\left(1+\left(b^{T_h}\right)^2\right)\mu_6^{T_h}+\left(1+\left(b^{G_h}\right)^2\right)\mu_6^{G_h}}{\delta_1^4}\right] \\
&\quad +16\omega(f;\delta_2)\sum_{k\in K} p_k(x)\left(1+\left(b^{T_h}\right)^2\right)\left(1+\frac{\left(b^{T_h}-b^{G_h}\right)^4}{\delta_2^4}\right)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Burada da

$$\delta_1^4=\sum_{k\in K} p_k(x)\left\{\left(1+\left(b^{T_h}\right)^2\right)\mu_6^{T_h}+\left(1+\left(b^{G_h}\right)^2\right)\mu_6^{G_h}\right\}$$

ve

$$\delta_2^4=\sum_{k\in K} p_k(x)\left(1+\left(b^{T_h}\right)^2\right)\left(b^{T_h}-b^{G_h}\right)^4$$

olarak seçilirse istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 3.1 in özel bir sonucu olarak aşağıdaki teorem yazılabilir. ■

Teorem 3.2 $f\in C_2[0,\infty)$, $f''\in C_2^{*}[0,\infty)$ olsun. Eğer her h için $b^{T_h}=b^{G_h}=b_k$ eşitliği sağlanıyorsa, bu durumda

$$|(U-V)(f;x)|\leq \frac{1}{2}\|f''\|_2\,\beta(x)+8\omega(f'';\delta_3)(1+\beta(x))$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$\beta(x)=\sum_{k\in K} p_k(x)\left\{\left(1+(b_k)^2\right)\left(\mu_2^{T_h}+\mu_2^{G_h}\right)\right\}$$

ve

$$\delta_3(x)=\left(\sum_{k\in K} p_k(x)\left(1+(b_k)^2\right)\left(\mu_6^{T_h}+\mu_6^{G_h}\right)\right)^{\frac{1}{4}}$$

olup $\delta_3(x)\leq 1$ olarak kabul edilmektedir.

İspat. Teorem 3.1 ispatındaki yol izlenip, $b^{T_h} = b^{G_h} = b_k$ olurarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{k2K} p_k(x)\,|5(f) - f(b_k)| \\
\leq\ & \frac{1}{2}\sum_{k2K} p_k(x)\,|f''(b_k)|\,\mu_2^{T_h} \\
&+8\blacktriangle(f'';6_1)\sum_{k2K} p_k(x)\left(1+(b_k)^2\right)\left(\mu_2^{T_h} + \frac{\mu_6^{T_h}}{6_1^4}\right) \\
\leq\ & \frac{1}{2}\|f''\|_2 \sum_{k2K} p_k(x)\left(1+(b_k)^2\right)\mu_2^{T_h} \\
&+8\blacktriangle(f'';6_1)\sum_{k2K} p_k(x)\left(1+b^{T_h}(b_k)^2\right)\left(\mu_2^{T_h} + \frac{\mu_6^{T_h}}{6_1^4}\right)
\end{aligned}$$

olur. Benzer dü¸sünceyle

$$\begin{aligned}
&\sum_{k2K} p_k(x)\,|G(f) - f(b_k))| \\
\leq\ & \frac{1}{2}\sum_{k2K} p_k(x)\,|f''(b_k)|\,\mu_2^{G_h} \\
&+8\blacktriangle(f'';6_1)\sum_{k2K} p_k(x)\left(1+(b_k)^2\right)\left(\mu_2^{G_h} + \frac{\mu_6^{G_h}}{6_1^4}\right) \\
\leq\ & \frac{1}{2}\|f''\|_2 \sum_{k2K} p_k(x)\left(1+(b_k)^2\right)\mu_2^{G_h} \\
&+8\blacktriangle(f'';6_1)\sum_{k2K} p_k(x)\left(1+(b_k)^2\right)\left(\mu_2^{G_h} + \frac{\mu_6^{G_h}}{6_1^4}\right)
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

$$\sum_{k2K} p_k(x)\,|f(b_k) - f(b_k)| = 0$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
|(U - V)(f;x)| &\leq \sum_{k2K} |5_k(f) - G_k(f)|\,p_k(x) \\
&\leq \sum_{k2K} p_k(x)\left(|5_k(f) - f(b_k)| + |G_k(f) - f(b_k)|\right\}
\end{aligned}$$

olur. Bu ifade için de yukarıda elde edilen sonuçlar kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
|(U-V)(f;x)| \leq\ & \frac{1}{2}\|f''\|_2 \sum_{k\in K} p_k(x)\left\{\left(1+b^{T_h}\right)^2 \mu_2^{T_h} + \left(1+b^{G_h}\right)^2 \mu_2^{G_h}\right\} \\
& +8\Omega(f'';\delta_3)\sum_{k\in K} p_k(x)\left(1+(b_k)^2\right)\left(\mu_2^{T_h}+\mu_2^{G_h}\right) \\
& +8\Omega(f'';\delta_3)\sum_{k\in K} p_k(x)\left(1+(b_k)^2\right)\frac{\mu_6^{T_h}+\mu_6^{G_h}}{\delta_3^4}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$$\delta_3^4(x) = \sum_{k\in K} p_k(x)\left(1+(b_k)^2\right)\left(\mu_6^{T_h}+\mu_6^{G_h}\right)$$

olarak seçilirse istenilen elde edilir. ■

3.0.4. K—Fonksiyoneli ile kestirim

Tezin bu kısımında U ve V operatörleri arasındaki farkın bir kestirimini R.A. DeVore ve G.G. Lorentz in "Constructive Approximation" isimli kitaplarında yer verdikleri K—fonksiyoneli yardımıyla vereceğiz [10] . Sözü edilen K—fonksiyoneli

$$K_2(f;\lambda) = \inf\left\{\|f-g\| + \lambda\|g''\| : g \in W^2\right\} \quad (\lambda > 0), \tag{3.6}$$

şeklinde tanımlanmakta olup, burada

$$W^2 := \{g : g, g', g'' \in C_B[0,\infty)\}$$

dır. Ayrıca bilinmektedir ki ikinci basamaktan süreklilik modülü ile Peetrè K—fonksiyoneli arasında aşağıdaki ilişki vardır.

$$K_2(f;\lambda) \leq C_0 w_2\left(f;\sqrt{\lambda}\right),$$

burada C_0 bir sabit ve

$$w_2\left(f;\sqrt{\lambda}\right) = \sup_{0<h\leq\sqrt{\lambda}}\ \sup_{0\leq x<\infty} |f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)|$$

$f \in C_B[0,\infty)$ nın ikinci düzgün süreklilik modülüdür.

Şimdi $W^2 \subset D$ kabul edelim ve aşağıdaki Lemmayı verelim.

Lemma 3.3 $f \in D \cap C_B[0,\infty)$ olsun. Bu durumda

$$\left|5(f) - f(b^T)\right| \le 2K_2\left(f; \frac{1}{4}\mu_2^T\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $g \in W^2$ fonksiyonunun Taylor açılımı ve Lemma 3.2 nin kullanılmasıyla

$$\left|g(t) - g\left(b^T\right) - g'\left(b^T\right)\left(t - b^T\right)\right| \le \frac{1}{2}\|g''\|\left(t - b^T\right)^2, \tag{3.7}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizliğin her tarafına 5 fonksiyonel uygulanırsa

$$\left|5(g) - g\left(b^T\right)5(e_0) - g'\left(b^T\right)\left(5(e_1) - b^T 5(e_0)\right)\right| \le \frac{1}{2}\|g''\| 5\left(\left(e_1 - b^T\right)^2\right)$$

olur. $5(e_1) = b^T$ olduğundan

$$\left|5(g) - g\left(b^T\right)\right| \le \frac{1}{2}\|g''\|\mu_2^T.$$

olarak elde edilir.

Şimdi $f \in D \cap C_B[0,\infty)$ ve $g \in W^2$ olsun. $5(e_0) = 1$ olduğu ve norm tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned}\left|5(f) - f\left(b^T\right)\right| &\le |5(f) - 5(g)| + \left|5(g) - g\left(b^T\right)\right| + \left|g\left(b^T\right) - f\left(b^T\right)\right| \\ &\le 2\|f - g\| + \frac{1}{2}\|g''\|\mu_2^T\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Eğer $g \in W^2$ üzerinde infimum alınırsa ispat tamlanmış olur.
■

Şimdi $K-$ fonksiyonelini içeren aşağıdaki Teorem verilebilir.

Teorem 3.3 $f \in D \cap C_B[0,\infty)$ ve $f' \in D \cap C_B[0,\infty)$ olsun. Bu durumda

$$|(U - V)(f;x)| \le 4K_2\left(f; \frac{1}{8}y(x)\right) + \|f''\|\mu(x),$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$y(x) = \sum_{k \in K} p_k(x)\left(\mu_2^{T_h} + \mu_2^{G_h}\right) \quad \text{ve} \quad \mu(x) = \sum_{k \in K} p_k(x)\left|b^{T_h} - b^{G_h}\right|.$$

dır.

İspat. Teorem 3.1 in ispatında kullanılan metod yardımıyla

$$
\begin{aligned}
&|(U-V)(f;x)| \\
&\le \sum_{k\in K} |5_k(f) - G_k(f)|\, p_k(x) \\
&\le \sum_{k\in K} p_k(x) \left\{ \left|5_k(f) - f\left(b^{T_h}\right)\right| + \left|G_k(f) - f\left(b^{G_h}\right)\right| + \left|f\left(b^{T_h}\right) - f\left(b^{G_h}\right)\right| \right\}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği yazılabilir. Ayrıca norm tanımı yardımıyla

$$\left|f\left(b^{T_h}\right) - f\left(b^{G_h}\right)\right| \le \|f'\| \left|b^{T_h} - b^{G_h}\right|$$

eşitsizliğide yazılabilir. Lemma 3.3 kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
|(U-V)(f;x)| \le\ & 2\sum_{k\in K} p_k(x) \left\{ K_2\left(f; \frac{1}{4}\mu_2^{T_h}\right) + K_2\left(f; \frac{1}{4}\mu_2^{G_h}\right) \right\} \\
&+ \sum_{k\in K} p_k(x)\, \|f'\| \left|b^{T_h} - b^{G_h}\right|.
\end{aligned}
$$

olur. (3.6) Eşitliğinin kullanmasıyla, sabit bir $g \in W^2$ için, yukarıdaki eşitsizlik

$$
\begin{aligned}
|(U-V)(f;x)| \le\ & 4\|f-g\| \sum_{k\in K} p_k(x) + \frac{1}{2}\|g''\| \sum_{k\in K} p_k(x) \left(\mu_2^{T_h} + \mu_2^{G_h}\right) \\
&+ \sum_{k\in K} p_k(x)\, \|f'\| \left|b^{T_h} - b^{G_h}\right|. \\
=\ & 4\|f-g\| + \frac{1}{2}\|g''\|\, y(x) + \|f'\|\, \mu(x)
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılabilir. $g \in W^2$ üzerinden infimum alınırsa, ispat tamlanmış olur. ■

Teorem 3.3'ün bir sonucu olarak aşağıdaki Teorem verilebilir.

Teorem 3.4 $f \in D \cap C_B[0,\infty)$ ve $f' \in D \cap C_B[0,\infty)$ olsun. Eğer her h için $b^{T_h} = b^{G_h} = b_k$ eşitliği sağlanıyorsa, bu durumda

$$|(U-V)(f;x)| \le 4K_2\left(f; \frac{1}{8} y(x)\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$y(x) = \sum_{k \in K} p_k(x) \left(\mu_2^{T_h} + \mu_2^{G_h} \right)$$

dsr.

İspat. $b^{T_h} = b^{G_h} = b_k$ olarak alıp, Teorem 3.3 ispatında yapılan ispata benzer işlemler yapılrsa

$$\begin{aligned} & |(U - V)(f; x)| \\ \leq & \sum_{k \in K} |5_k(f) - G_k(f)| \, p_k(x) \\ \leq & \sum_{k \in K} p_k(x) \left(|5_k(f) - f(b_k)| + |G_k(f) - f(b_k)| + |f(b_k) - f(b_k)| \right\} \end{aligned}$$

yazılabilir.

$$\left\| f\left(b^{T_h}\right) - f\left(b^{G_h}\right) \right\| = 0$$

olduğundan, Lemma 3.3 gereğincede

$$|(U - V)(f; x)| \leq 2 \sum_{k \in K} p_k(x) \left[K_2\left(f; \frac{1}{4}\mu_2^{T_h}\right) + K_2\left(f; \frac{1}{4}\mu_2^{G_h}\right) \right]$$

olur. (3.6) eşitliğinin kullanmasıyla, sabit bir $g \in W^2$ için, yukarıdaki eşitsizlik

$$\begin{aligned} |(U - V)(f; x)| & \leq 4 \|f - g\| \sum_{k \in K} p_k(x) + \frac{1}{2} \|g''\| \sum_{k \in K} p_k(x) \left(\mu_2^{T_h} + \mu_2^{G_h} \right) \\ & = 4 \|f - g\| + \frac{1}{2} \|g''\| \, y(x) \end{aligned}$$

olur. $g \in W^2$ üzerinden infimum alınırsa ve ispat tamlanmış olur. ■

3.0.5. Chebyshev fonksiyoneli için Operatörlerin Farkları

$f, g \in C_2[0, \infty)$ iki fonksiyon ve U, V (3.5) eşitliklerinde tanımlanan iki operator olsun. Ayrıca $fg \in C_2[0, \infty)$ olsun. U operatörünün Chebyshev fonksiyoneli

$$D^U(f, g; x) = U(fg; x) - U(f; x)\, U(g; x) \tag{3.8}$$

şeklinde tanımlansın.

Bu kısımda iki fonksiyon operatörünün çarpımı ve iki fonksiyonun çarpımlarının operatörleri arasındaki fark için bir kestirim verilecektir. [21] numaralı referansta discrete lineer pozitif operatör dizilerinin genel bir dizisi için Chebyshev-Grüss tipi bir açılım verilmiştir. Şimdi aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.5 $f, g, fg \in C_2[0,\infty)$, $f'', g'' \in C_2^{X}[0,\infty)$ ve $(fg)'' \in C_2^{X}[0,\infty)$. olsun. Eğer $b^{T_h} = b^{G_h} = b_k$, $U(1+e_2;x) \leq M(1+x^2)$ ve $V(1+e_2;x) \leq M(1+x^2)$ ifadeleri sağlansyorsa, bu durumda

$$
\begin{aligned}
\left|D^U(f,g;x) - D^V(f,g;x)\right| \leq\ & \left\|(fg)''\right\|_2 \lambda^{fg}(x) + 8\blacktriangle\left((fg)''; 6_1\right)\left(1 + 2\lambda^{fg}(x)\right) \\
& + M\left(1+x^2\right)\|f\|_2\left(\|g''\|_2 \lambda^g(x)\right. \\
& \left. + 8\blacktriangle\left(g''; 6_1\right)\left(1+2\lambda^g(x)\right)\right) \\
& + M\left(1+x^2\right)\|g\|_2\left(\|f''\|_2 \lambda^f(x)\right. \\
& \left. + 8\blacktriangle\left(f''; 6_1\right)\left(1+2\lambda^f(x)\right)\right)
\end{aligned}
$$

burada

$$
6_1(x) = \left(\sum_{k2K} p_k(x)\left(1+(b_k)^2\right)\left(\mu_6^{T_h} + \mu_6^{G_h}\right)\right)^{\frac{1}{4}}
$$

ve

$$
\lambda^f(x) = \frac{1}{2}\sum_{k2K} p_k(x)\left(1+(b_k)^2\right)\left\{\mu_2^{T_h} + \mu_2^{G_h}\right\}
$$

olup, λ^g de benzer şekilde tansmlanmaktadsr.

İspat. (3.8) eşitliği göz önüne alınrsa

$$
\begin{aligned}
& D^U(f,g;x) - D^V(f,g;x) \\
=\ & U(fg;x) - U(f;x)U(g;x) - V(fg;x) - V(f;x)V(g;x) \\
=\ & U(fg;x) - U(f;x)U(g;x) + U(f;x)V(g;x) \\
& - U(f;x)V(g;x) - V(fg;x) - V(f;x)V(g;x) \\
=\ & U(fg;x) - V(fg;x) - U(f;x)\left(U(g;x) - V(g;x)\right) \\
& - V(g;x)\left(U(f;x) - V(f;x)\right)
\end{aligned}
$$

ifadesi yazılabilir. Bu ifadenin her tarafının mutlak değeri alınırsa

$$
\begin{aligned}
&\left| D^{U}(f,g;x) - D^{V}(f,g;x) \right| \\
\leq\ & |U(fg;x) - V(fg;x)| + |U(f;x)|\,|(U(g;x) - V(g;x))| \\
&+ |V(g;x)|\,|(U(f;x) - V(f;x))|
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Teoremlerin ispatında izlenen yol izlenir ve Teorem 3.2 de elde edilen sonuçlar kulanılırsa istenilen elde edilir.■

3.0.6. Uygulamalar

Yukarıda verilen teoremlere bir uygulama olarak;

$$S_n(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{h}{n}\right) s_{n,k}(x), \quad x \in [0,\infty)$$

olarak tanımlanan Szász-Mirakyan ve

$$D_n(f;x) = n \sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x) \int_0^{\infty} f(t)\, s_{n,k}(t)\, dt$$

Szász-Mirakyan-Durrmeyer operatörlerinin dizileri incelenebilir. Burada

$$s_{n,k}(x) = e^{-nx}\frac{(nx)^k}{h!}$$

dır. Eğer

$$5_k(f) := f\left(\frac{h}{n}\right), \quad G_k(f) := n\int_0^{\infty} f(t)\, s_{n,k}(t)\, dt$$

ile gösterilirse, operatörler;

$$S_n(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} 5_k(f)\, s_{n,k}(x), \quad x \in [0,\infty)$$

ve

$$D_n(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} G_k(f)\, s_{n,k}(x), \quad x \in [0,\infty)$$

şeklinde yazılabilir.

Eğer yukarıdaki operatörler için Teorem 3.1 uygulanırsa, aşağadaki teorem verilebilir.

Teorem 3.6 $f \in C_2[0,\infty)$, $f'' \in C_2^{\times}[0,\infty)$ ve $x \geq 0$ olsun. Bu durumda, her $n \geq 1$ için

$$6_1^4 := \frac{5}{2n^8} 3n^5x^5 + 71n^4x^4 + 3n^5 + 47n^3 \ x^3 + 44n^4 + 1064n^2 \ x^2 + 123n^3 + 651n \ x + 53n^2 + 53 ,$$

$6_1^4 < 1$ ve

$$6_2^4(x) := \frac{x(nx+1)+n}{n^5} \leq 1,$$

olmak üzere

$$|(S_n - D_n)(f;x)| \leq \frac{1}{2}\|f''\|_2 \beta(x) + 8\blacktriangle(f''; 6_1(x))(1+\beta(x)) +16\blacktriangle(f; 6_2(x)) \frac{x(nx+1)+n}{n}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$\beta(x) = \frac{n^3x^3 + 6n^2x^2 + n^3x + 7nx + n^2}{n^4}$$

dır.

İspat. Yukarıdaki tanımlamalar ve eşitsizlikler kullanılarak

$$b^{T_h} = 5_k(e_1) = \frac{h}{n}, \quad b^{G_h} = G_k(e_1) = \frac{h+1}{n}$$

ve

$$\mu_2^{T_h} := 5_k \ e_1 \_ b^{T_h} e_0 \ ^2 = 0, \quad \mu_2^{G_h} := G_k \ e_1 \_ b^{G_h} e_0 \ ^2 = \frac{h+1}{n^2}$$

$$\mu_6^{G_h} := G_k \ e_1 \_ b^{G_h} e_0 \ ^6 = \frac{5(h+1)(h(3h+32)+53)}{n^6}$$

Böylece

$$\beta(x) := \sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x) \left[\left(1 + b^{T_h}\right)^2 \mu_2^{T_h} + \left(1 + b^{G_h}\right)^2 \mu_2^{G_h} \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x) \left(1 + \frac{h+1}{n}\right)^2 \frac{h+1}{n^2}$$

$$= \frac{n^3x^3 + 6n^2x^2 + n^3x + 7nx + n^2}{n^4},$$

$$\delta_1^4(x) := \sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x) \left[\left(1 + b^{T_h}\right)^2 \mu_6^{T_h} + \left(1 + b^{G_h}\right)^2 \mu_6^{G_h} \right]$$

$$= \frac{5}{2n^8} \Big(3n^5x^5 + 71n^4x^4 + \left(3n^5 + 479n^3\right) x^3 + \left(44n^4 + 1064n^2\right) x^2$$

$$+ \left(123n^3 + 651n\right) x + 53n^2 + 53 \Big)$$

ve

$$\delta_2^4(x) = \sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x) \left(1 + b^{T_h}\right)^2 \left(b^{T_h} - b^{G_h}\right)^4$$

$$= \frac{x(nx+1) + n}{n^5}$$

olarak elde edilir. Bu da teoremde iddia edilendir. ■

4. İKİ DEĞİŞKENLİ LİNEER OPERATÖRLER

Bu bölümde önceki bölümde verilen tek değişkenli operatörler için verilen sonuçları iki değişkenli operatörler için elde etmeye çalışacağız. Öncelikle bir önceki bölümde yapılan bazı tanımlamaları iki değişkenli fonksiyonlar için yapacağız. Sonra ihtiyaç duyulan bazı sonuçları elde edeceğiz, daha sonra da bazı teoremler vereceğiz. Son olarak da bir uygulama vereceğiz.

$Q := [0, \infty) \times [0, \infty)$ olsun. $C(Q)$, Q kümesi üzerinde tanımlı, reel değerli ve sürekli iki değişkenli fonksiyonların uzayı olsun. $p = p(x, y) = (1 + x^2 + y^2)$ ve M_f sadece f ye bağlı bir sabit olmak üzere $B_p(Q)$, Q üzerinde $|f(x, y)| \leq M_f p(x, y)$ özelliğini sağlayan fonksiyonların kümesi ve $C_p(Q)$, $B_p(Q)$ deki sürekli fonksiyonların alt uzayı olsun. $\lim\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty} \frac{|f(x,y)|}{p(x,y)}$ limitinin var ve sonlu olduğu kapalı kümeyi $C_p^{\times}(Q)$ ile gösterelim öyleki $C_p^{\times}(Q) \subset C_p(Q)$ dir.

$B_p(Q)$ lineer uzayındaki norm

$$\|f\|_p = \sup_{(x,y)\in D} \frac{|f(x, y)|}{p(x, y)} \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlanır. Yine burada iki değişkenli ağırlıklı süreklilik modülü kullanılacak olup, bu fonksiyon

$$\Delta_p(f, \delta_1, \delta_2) = \sup_{(x,y)\in D, |h_1|\leq\delta_1, |h_2|\leq\delta_2} \frac{f(x + k_1, y + k_2) - f(x, y)}{(1 + x^2 + y^2)(1 + k_1^2 + k_2^2)}; \quad f \in C_p(Q) \tag{4.2}$$

şeklinde tanımlanır [5] .

Şimdi aşağıdaki lemma verilebilir.

Lemma 4.1 $f \in C_p^{\times}(Q)$ olsun. Bu taktirde

i) $\lim\limits_{\|(\delta_1,\delta_2)\|\to\infty} \Delta_p(f, \delta_1, \delta_2) = 0$ dır.

ii) Herbir $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\delta_1 > 0$ and $\delta_2 > 0$ için

$$\Delta_p(f, \lambda_1\delta_1, \lambda_2\delta_2) \leq 4(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)\Delta_p(f, \delta_1, \delta_2)$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi aşağıdaki notasyonları tanımlayalım.

$i, j \in Æ$ için, $e_{i,(}(x, y) = x^i y^{(}$, $(x, y) \in Q$ olsun. $5 : E(Q) \to R$ Q alt uzayda tanımlı lineer ve pozitif bir fonksiyonel olsun, $C_p(Q) \subset Q$ olup,

$$1 : Q \to R, \ 1(x, y) = 1, \ (x, y) \in Q \tag{4.3}$$

sabit fonksiyon $5(1) = 1$ ve

$$\theta_1^T := 5(e_{1,0}) \ , \ \theta_2^T := 5(e_{0,1}), \tag{4.4}$$

$$\mu_{i,(}^T := 5 \quad e_{1,0} - \theta_1^T 1 \ ^i \ e_{0,1} - \theta_2^T 1 \ ^{(} \quad ; i, j \in Æ. \tag{4.5}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mu_{1,0}^T &= 0, \ \mu_{2,0}^T = 5(e_{1,0})^2 - \theta_1^{T\ 2} \geq 0 \\ \mu_{0,1}^T &= 0, \ \mu_{0,2}^T = 5(e_{0,1})^2 - \theta_2^{T\ 2} \geq 0. \end{aligned} \tag{4.6}$$

e¸sitlikleri elde edilir.

Lemma 4.2 $(x, y) \in Q$, $f \in C_p^x(Q)$ ve $0 < 6_1, 6_2 \leq 1$ için

$$f(t, s) - f(x, y) \leq 256p(x, y) \quad 1 + \frac{(t - x)^4}{6_1^4} \ ! \quad 1 + \frac{(s - y)^4}{6_2^4} \ ! \quad ▲_p(f, 6_1, 6_2)$$

eşitsizlîği sağlansr.

İspat. (4.2) eşitliğinden faydalanarak $\lambda_1 = \frac{|t-x|}{6_1}$ ve $\lambda_2 = \frac{|s-y|}{6_2}$ için

$$\begin{aligned} |f(t, s) - f(x, y)| \ &\leq \ 4p(x, y) ▲_p(f, 6_1, 6_2) \quad 1 + \frac{|t - x|}{6_1} \qquad 1 + \frac{|s - y|}{6_2} \\ &\times \ 1 + (t - x)^2 \ \ 1 + (s - y)^2 \\ &< \quad 16p(x, y) \ \ 1 + 6^2 \ \ 1 + 6^2 \ \ ▲_p(f, 6_1, 6_2); \qquad |t - x| \leq 6_1, |s - y| \leq 6_2 \\ &\leq \quad 16p(x, y) \ \ 1 + 6_1 \ \ 1 + 6_2 \ \ ▲_p(f, 6_1, 6_2) \quad 6_1^4 \quad 6_2^4 \end{aligned}$$

,   2   2   1   2 $\overline{(t-x)^4}\ \overline{(s-y)^4}$; $|t-x| > 6_1, |s-y| > 6_2$.

elde edilir. Böylece

$$
\begin{aligned}
&|f(t,s)-f(x,y)| \\
&\leq 16\rho(x,y)\left(1+\delta_1^2\right)\left(1+\delta_2^2\right)\left(1+\frac{(t-x)^4}{\delta_1^4}\right)\left(1+\frac{(t-y)^4}{\delta_2^4}\right)\Omega_p\left(f,\delta_1,\delta_2\right)
\end{aligned}
$$

sağlanır.

Eğer $0<\delta_1\leq 1,\ 0<\delta_2\leq 1$ olarak seçilirse her $f\in C_p^{\times}(Q)$, $(x,y)\in Q$ için

$$
|f(t,s)-f(x,y)| \leq 256\rho(x,y)\left(1+\frac{(t-x)^4}{\delta_1^4}\right)\left(1+\frac{(s-y)^4}{\delta_2^4}\right)\Omega_p\left(f,\delta_1,\delta_2\right).
$$

olarak bulunur. ■

Lemma 4.3 $f\in C_p(Q)$, $f_{xx},f_{xy},f_{yy}\in C_p^{\times}(Q)$ ve $0<\delta_1\leq 1,\ 0<\delta_2\leq 1$ olsun. Bu durumda

$$
\left|5(f)-f\left(\theta_1^T,\theta_2^T\right)\right| \leq M_f\,\rho\left(\theta_1^T,\theta_2^T\right)\left\{\mu_{2,0}^T+2\mu_{1,1}^T+\mu_{0,2}^T\right\},
$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$
M_f := \sup_{(x,y)\in D}\left\{\|f_{xx}\|_p\,,\ \|f_{xy}\|_p\,,\ \|f_{yy}\|_p\right\}.
$$

dir.

İspat. $f\in C_p(Q)$, $f_{xx},f_{xy},f_{yy}\in C_p^{\times}(Q)$, $(t,s)\in Q$ olsun. İspat için $f(x,y)$ fonksiyonunun Taylor formülünü kullanalım

$$
\begin{aligned}
&f(t,s)-f\left(\theta_1^T,\theta_2^T\right) \\
&= f_x\left(\theta_1^T,\theta_2^T\right)\left(t-\theta_1^T\right)+f_y\left(\theta_1^T,\theta_2^T\right)\left(s-\theta_2^T\right)+\frac{1}{2}\left\{f_{xx}\left(\theta_1^T,\theta_2^T\right)\left(t-\theta_1^T\right)^2\right. \\
&\quad\left.+2f_{xy}\left(\theta_1^T,\theta_2^T\right)\left(t-\theta_1^T\right)\left(s-\theta_2^T\right)+f_{yy}\left(\theta_1^T,\theta_2^T\right)\left(s-\theta_2^T\right)^2\right\}+R_2(f;t,s)
\end{aligned}
$$

burada $0<\quad<1$ için $\left(t-\theta_1^T\right)=k_1$, $\left(s-\theta_2^T\right)=k_2$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&R_2(f;t,s) \\
&=\frac{1}{2!}\left\{f_{xx}\left(\theta_1^T+k_1,\theta_2^T+k_2\right)\left(t-\theta_1^T\right)^2+2f_{xy}\left(\theta_1^T+k_1,\theta_2^T+k_2\right)\left(t-\theta_1^T\right)\left(s-\theta_2^T\right)\right. \\
&\quad+f_{yy}\left(\theta_1^T+k_1,\theta_2^T+k_2\right)\left(s-\theta_2^T\right)^2-f_{xx}\left(\theta_1^T,\theta_2^T\right)\left(t-\theta_1^T\right)^2
\end{aligned}
$$

$$-2f_{xy}\left(\theta^T_1, \theta^T_2\right)\left(t-\theta^T_1\right)\left(s-\theta^T_2\right)-f_{yy}\left(\theta^T_1, \theta^T_2\right)\left(s-\theta^T_2\right)^2\Big\}$$

olup $5(1) = 1$ ve (4.4) kullanmasıyla

$$
\begin{aligned}
& 5(f) - f\left(\theta_1^T, \theta_2^T\right) 5(1) \\
= \; & f_x\left(\theta_1^T, \theta_2^T\right)\left(5(e_{1,0}) - \theta_1^T 5(1)\right) - f_y\left(\theta_1^T, \theta_2^T\right)\left(5(e_{0,1}) - \theta_2^T 5(1)\right) \\
& + \frac{1}{2}\left\{ f_{xx}\left(\theta_1^T, \theta_2^T\right)\mu_{2,0}^T + 2 f_{xy}\left(\theta_1^T, \theta_2^T\right)\mu_{1,1}^T + f_{yy}\left(\theta_1^T, \theta_2^T\right)\mu_{0,2}^T \right\} \\
& + R_2(f; t, s). \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

olur.

$$
\begin{aligned}
\left| f_{xx}\left(\theta_1^T, \theta_2^T\right)\right| &\leq \|f_{xx}\|_p \left(1 + \left(\theta_1^T\right)^2 + \left(\theta_2^T\right)^2\right) \\
&\leq M^f \left(1 + \left(\theta_1^T\right)^2 + \left(\theta_2^T\right)^2\right) \\
\left| f_{xy}\left(\theta_1^T, \theta_2^T\right)\right| &\leq \|f_{xy}\|_p \left(1 + \left(\theta_1^T\right)^2 + \left(\theta_2^T\right)^2\right) \\
&\leq M^f \left(1 + \left(\theta_1^T\right)^2 + \left(\theta_2^T\right)^2\right) \\
\left| f_{yy}\left(\theta_1^T, \theta_2^T\right)\right| &\leq \|f_{yy}\|_p \left(1 + \left(\theta_1^T\right)^2 + \left(\theta_2^T\right)^2\right) \\
&\leq M^f \left(1 + \left(\theta_1^T\right)^2 + \left(\theta_2^T\right)^2\right)
\end{aligned}
$$

e¸sitsizlikleri kullanılırsa ve

$$2\mu_{1,1}^T \leq \mu_{2,0}^T + \mu_{0,2}^T$$

(4.7) eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
\left| 5(f) - f\left(\theta_1^T, \theta_2^T\right)\right| \leq \; & M_f \left\{1 + \left(\theta_1^T\right)^2 + \left(\theta_2^T\right)^2\right\} \\
& \times \left(\mu_{2,0}^T + 2\mu_{1,1}^T + \mu_{0,2}^T\right) + 5\left(R_2(f; t, s)\right). \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

olur.

Şimdi $5(R_2(f; t, s))$ için bir üst sınır bulalım. Lemma 4.2 den kolaylıkla

$$
\begin{aligned}
& \left| f_{xx}\left(\theta_1^T + k_1, \theta_2^T + k_2\right) - f_{xx}\left(\theta_1^T, \theta_2^T\right)\right| \\
\leq \; & 256 p\left(\theta_1^T, \theta_2^T\right)\left(1 + \frac{\left(t - \theta_1^T\right)^4}{6_1^4}\right)\left(1 + \frac{\left(s - \theta_2^T\right)^4}{6_2^4}\right) \blacktriangle_p\left(f_{xx}, 6_1, 6_2\right) \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \left| f_{xy}\left(\theta_1^T + k_1, \theta_2^T\right) - f_{xy}\left(\theta_1^T, \theta_2^T\right)\right| \\
\leq \; & 256 p\left(\theta_1^T, \theta_2^T\right)\left(1 + \frac{\left(t - \theta_1^T\right)^4}{6_1^4}\right)
\end{aligned}
$$

$$\blacktriangle_{p} \left(f_{xy}, 6_1, 6_2\right) \qquad (4.10)$$

ve

$$
\begin{aligned}
&\left|f_{yy}\left(\theta_1^T + k_1, \theta_2^T + k_2\right) - f_{yy}\left(\theta_1^T, \theta_2^T\right)\right| \\
&\le 256 p\left(\theta_1^T, \theta_2^T\right)\left(1+\frac{\left(t-\theta_1^T\right)^4}{6_1^4}\right)\left(1+\frac{\left(s-\theta_2^T\right)^4}{6_2^4}\right)\blacktriangle_p\left(f_{yy}, 6_1, 6_2\right) \qquad (4.11)
\end{aligned}
$$

ve eşitsizliklerini yazabiliriz. Böylece (4.9), (4.10) ve (4.11) den

$$
\begin{aligned}
&5\left(R_2(f;t,s)\right) \\
&\le \frac{256}{2} p\left(\theta_1^T, \theta_2^T\right)\Bigg\{\left(t-\theta_1^T\right)^2\left(1+\frac{\left(t-\theta_1^T\right)^4}{6_1^4}\right)\left(1+\frac{\left(s-\theta_2^T\right)^4}{6_2^4}\right)\blacktriangle_p\left(f_{xx}, 6_1, 6_2\right) \\
&\quad +2\left(t-\theta_1^T\right)\left(s-\theta_2^T\right)\left(1+\frac{\left(t-\theta_1^T\right)^4}{6_1^4}\right)\left(1+\frac{\left(s-\theta_2^T\right)^4}{6_2^4}\right)\blacktriangle_p\left(f_{xy}, 6_1, 6_2\right) \\
&\quad +\left(s-\theta_2^T\right)^2\left(1+\frac{\left(t-\theta_1^T\right)^4}{6_1^4}\right)\left(1+\frac{\left(s-\theta_2^T\right)^4}{6_2^4}\right)\blacktriangle_p\left(f_{yy}, 6_1, 6_2\right)\Bigg\}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&5\left(R_2(f;t,s)\right) \\
&\le \frac{256}{2} p\left(\theta_1^T, \theta_2^T\right)\left(1+\frac{\left(t-\theta_1^T\right)^4}{6_1^4}\right)\left(1+\frac{\left(s-\theta_2^T\right)^4}{6_2^4}\right)\Bigg\{\left(t-\theta_1^T\right)^2\blacktriangle_p\left(f_{xx}, 6_1, 6_2\right) \\
&\quad +2\left(\left(t-\theta_1^T\right)^2+\left(s-\theta_2^T\right)^2\right)\blacktriangle_p\left(f_{xy}, 6_1, 6_2\right) \\
&\quad +\left(s-\theta_2^T\right)^2\blacktriangle_p\left(f_{yy}, 6_1, 6_2\right)\Bigg\}
\end{aligned}
$$

elde edilir. böylece (4.8) den ispat tamamlanır. ■

4.0.7. İki Değişkenli Lineer Pozitif Operatörlerin Farkları

Şimdi ağırlıklı uzaylarada iki değişkenli operatörlerin farkları ile ilgili bir Teorem verelim.

9 negatif olmayan tam sayıların kümesi $h, l \in 9$ ve $p_{k,l} \in C_p(Q)$, $p_{k,l} \ge 0$, $\sum_{k,l \in 9} p_{k,l} = 1$, $p_{k,l} : [0,\infty) \to [0,\infty)$, özellikleri sağlayan bir fonksiyon ailesi olsun. Ayrıca $5_{k,l}, G_{k,l} : Q \to R$, $5_{k,l}(1) = 1$, $G_{k,l}(1) = 1$, eşitliklerini sağlayan lineer pozitif fonksiyonel ailesi olsun. Şimdi U ve V operatörlerini $U, V : Q \to B_p(Q)$ olmak üzere

$$
U(f;x,y) = \sum_{k,l \in 9} 5_{k,l}(f)\, p_{k,l}(x,y), \quad V(f;x,y) = \sum_{k,l \in 9} G_{k,l}(f)\, p_{k,l}(x,y)
$$

şeklinde tanımlayalım.

Buna göre aşağıdaki Teoremler verilebilir.

Teorem 4.1 $f \in C_p(Q)$, $\{f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}\} \in C_p^{\times}(Q)$ olsun. Bu durumda

$$|(U-V)(f;x,y)| \le 6_1 + 6_2 + 2\,{}^{8}\blacktriangle_p(f, 6_3, 6_4)\left(1 + \sum_{k,l2H} p_{k,l}(x,y)\, p\left(\theta_1^{T_{h,l}}, \theta_2^{T_{h,l}}\right)\right),$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$6_1 = M_f \sum_{k,l2H} p_{k,l}(x,y)\, p\left(\theta_1^{T_{h,l}}, \theta_2^{T_{h,l}}\right)\left[\mu_{2,0}^{T_{h,l}} + 2\mu_{1,1}^{T_{h,l}} + \mu_{0,2}^{T_{h,l}}\right]$$

$$6_2 = M_f \sum_{k,l2H} p_{k,l}(x,y)\, p\left(\theta_1^{G_{h,l}}, \theta_2^{G_{h,l}}\right)\left[\mu_{2,0}^{G_{h,l}} + 2\mu_{1,1}^{G_{h,l}} + \mu_{0,2}^{G_{h,l}}\right]$$

$$6_3^4 = \sum_{k,l2H} p_{k,l}(x,y)\, p\left(\theta_1^{T_{h,l}}, \theta_2^{T_{h,l}}\right)\left(\theta_1^{T_{h,l}} - \theta_1^{G_{h,l}}\right)^4$$

ve

$$6_4^4 = \sum_{k,l2H} p_{k,l}(x,y)\, p\left(\theta_1^{T_{h,l}}, \theta_2^{T_{h,l}}\right)\left(\theta_2^{T_{h,l}} - \theta_2^{G_{h,l}}\right)^4$$

dır.

İspat. U ve V operatörlerinin farkı alınırsa

$$\begin{aligned}
(U-V)(f;x,y) &= \sum_{k,l2H} 5_{k,l}(f)\, p_{k,l}(x,y) - \sum_{k,l2H} G_{k,l}(f)\, p_{k,l}(x,y) \\
&= \sum_{k,l2H} \left[5_{k,l}(f) - G_{k,l}(f)\right] p_{k,l}(x,y) \\
&= \sum_{k,l2H} \Big\{ 5_{k,l}(f) - G_{k,l}(f) - f\left(\theta_1^{T_{h,l}}, \theta_2^{T_{h,l}}\right) + f\left(\theta_1^{T_{h,l}}, \theta_2^{T_{h,l}}\right) \\
&\quad - f\left(\theta_1^{G_{h,l}}, \theta_2^{G_{h,l}}\right) + f\left(\theta_1^{G_{h,l}}, \theta_2^{G_{h,l}}\right) \Big\}\, p_{k,l}(x,y)
\end{aligned}$$

eşitliği yazabilir. Bu eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alındıktan sonra üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$|(U-V)(f;x,y)| = \left|\sum_{k,l\in H}\left\{\Phi_{k,l}(f)-G_{k,l}(f)-f\left(\theta_1^{T_{h,l}},\theta_2^{T_{h,l}}\right)+f\left(\theta_1^{T_{h,l}},\theta_2^{T_{h,l}}\right)-f\left(\theta_1^{G_{h,l}},\theta_2^{G_{h,l}}\right)+f\left(\theta_1^{G_{h,l}},\theta_2^{G_{h,l}}\right)\right\}p_{k,l}(x,y)\right|$$

$$\le \sum_{k,l\in H} p_{k,l}(x,y)\left\{\left|\Phi_{k,l}(f)-f\left(\theta_1^{T_{h,l}},\theta_2^{T_{h,l}}\right)\right|+\left|G_{k,l}(f)-f\left(\theta_1^{G_{h,l}},\theta_2^{G_{h,l}}\right)\right|+\left|f\left(\theta_1^{T_{h,l}},\theta_2^{T_{h,l}}\right)-f\left(\theta_1^{G_{h,l}},\theta_2^{G_{h,l}}\right)\right|\right\}$$

olur. Lemma 4.3 , (4.4), (4.5), ve (4.6) eşitlikleri kullanmasıyla

$$\left|\Phi(f)-f\left(\theta_1^{T_{h,l}},\theta_2^{T_{h,l}}\right)\right| \le M_f\, p\left(\theta_1^{T_{h,l}},\theta_2^{T_{h,l}}\right)\left\{\mu_{2,0}^{T_{h,l}}+2\mu_{1,1}^{T_{h,l}}+\mu_{0,2}^{T_{h,l}}\right\}$$

ve

$$\sum_{k,l\in H} p_{k,l}(x,y)\left|\Phi_{k,l}(f)-f\left(\theta_1^{T_{h,l}},\theta_2^{T_{h,l}}\right)\right| \le M_f\sum_{k,l\in H} p_{k,l}(x,y)\left[p\left(\theta_1^{T_{h,l}},\theta_2^{T_{h,l}}\right)\left\{\mu_{2,0}^{T_{h,l}}+2\mu_{1,1}^{T_{h,l}}+\mu_{0,2}^{T_{h,l}}\right\}\right]$$

elde edilir. Benzer düşünce ile

$$\sum_{k,l\in H} p_{k,l}(x,y)\left|G_{k,l}(f)-f\left(\theta_1^{G_{h,l}},\theta_2^{G_{h,l}}\right)\right| \le M_f\sum_{k,l\in H} p_{k,l}(x,y)\left\{p\left(\theta_1^{G_{h,l}},\theta_2^{G_{h,l}}\right)\left\{\mu_{2,0}^{G_{h,l}}+2\mu_{1,1}^{G_{h,l}}+\mu_{0,2}^{G_{h,l}}\right\}\right\}.$$

$$\left|f\left(\theta_1^{T_{h,l}},\theta_2^{T_{h,l}}\right)-f\left(\theta_1^{G_{h,l}},\theta_2^{G_{h,l}}\right)\right|$$

$$\le 2^8 p\left(\theta_1^{T_{h,l}},\theta_2^{T_{h,l}}\right)\Omega_p(f,\delta_3,\delta_4)\times\left(1+\frac{\left(\theta_1^{T_{h,l}}-\theta_1^{G_{h,l}}\right)^4}{\delta_3^4}\right)\left(1+\frac{\left(\theta_2^{T_{h,l}}-\theta_2^{G_{h,l}}\right)^4}{\delta_4^4}\right)$$

$$\le 2^8\Omega_p(f,\delta_3,\delta_4)\left\{p\left(\theta_1^{T_{h,l}},\theta_2^{T_{h,l}}\right)+p\left(\theta_1^{T_{h,l}},\theta_2^{T_{h,l}}\right)\frac{\left(\theta_1^{T_{h,l}}-\theta_1^{G_{h,l}}\right)^4}{\delta_3^4}+p\left(\theta_1^{T_{h,l}},\theta_2^{T_{h,l}}\right)\frac{\left(\theta_2^{T_{h,l}}-\theta_2^{G_{h,l}}\right)^4}{\delta_4^4}+p\left(\theta_1^{T_{h,l}},\theta_2^{T_{h,l}}\right)\frac{\left(\theta_1^{T_{h,l}}-\theta_1^{G_{h,l}}\right)^4}{\delta_3^4}\frac{\left(\theta_2^{T_{h,l}}-\theta_2^{G_{h,l}}\right)^4}{\delta_4^4}\right\}$$

olur.

$$\sum_{k,l2H} p_{k,l}(x,y) . f\left(\theta_1^{T_{h,l}}, \theta_2^{T_{h,l}}\right) - f\left(\theta_1^{G_{h,l}}, \theta_2^{G_{h,l}}\right) .$$

$$\leq 2\, \blacktriangle_p (f, 6_3, 6_4) \left(\sum_{k,l2H} p_{k,l}(x,y)\, p\left(\theta_1^{T_{h,l}}, \theta_2^{T_{h,l}}\right) \right.$$

$$+ \sum_{k,l2H} p_{k,l}(x,y)\, p\left(\theta_1^{T_{h,l}}, \theta_2^{T_{h,l}}\right) \frac{\theta_1^{T_{h,l}} - \theta_1^{G_{h,l}}}{6_3}^4$$

$$+ \sum_{k,l2H} p_{k,l}(x,y)\, p\left(\theta_1^{T_{h,l}}, \theta_2^{T_{h,l}}\right) \frac{\theta_2^{T_{h,l}} - \theta_2^{G_{h,l}}}{6_4}^4$$

$$+ \sum_{k,l2H} p_{k,l}(x,y)\, p\left(\theta_1^{T_{h,l}}, \theta_2^{T_{h,l}}\right) \frac{\theta_1^{T_{h,l}} - \theta_1^{G_{h,l}}}{6_3^4}^4 \frac{\theta_2^{T_{h,l}} - \theta_2^{G_{h,l}}}{6_4^4}^4$$

$k,l2H^4 \quad k,l2H \quad 2$

■

k,l 1 2 2 —

1 2 1 2 1 2

$$= \quad 2^8 \blacktriangle_p (f, 6_3, 6_4) (A_1 + A_2 + A_3 + A_4\} .$$

1 f k,l 1 2 2,0 1,1 0,2

yazabiliriz. Eğer

$$6^4 = \sum p$$

$\theta^{G_{h,l}}$ 4

(x, y) p $\theta^{T_{h,l}}, \theta^{T_{h,l}}$ $\theta^{T_{h,l}}$

k,l2H

2 ƒ

k,l2H

$$6^4 = \sum p \quad (x, y)\, p \quad \theta^{T_{h,l}}, \theta^{T_{h,l}} \quad \theta^{T_{h,l}} \quad \theta^{G_{h,l}} \quad ^4,$$

k,l 1 2 2,0 1,1 0,2

olarak seçilirse ve elde edilen ifadeler yerlerine yazılırsa ispat tamamlanır.

$\theta^{T_{h,l}}, \theta^{T_{h,l}} = \theta^{G_{h,l}}, \theta^{G_{h,l}} = (\theta, \theta)$ eşitliği sağlansyorsa, bu durumda

$$6 = M \sum p\,(x,y)^{h}\, p\,(\theta,\theta)\; \mu^{T_{h,l}}_{G_{h,l}} + 2\mu^{T_{h,l}}_{G_{h,l}} + \mu^{T_{h,l}}_{G_{h,l}}$$

dır.

İspat. Teoremin ispatı önceki teoreme benzer şekilde yapılacaktır.

$$\begin{aligned}(U-V)(f;x,y) &= \sum_{k,l2H} 5_{k,l}(f)\,p_{k,l}(x,y) - \sum_{k,l2H} G_{k,l}(f)\,p_{k,l}(x,y)\\ &= \sum_{k,l2H} [5_{k,l}(f) - G_{k,l}(f)]\,p_{k,l}(x,y)\\ &= \sum_{k,l2H} (5_{k,l}(f) - G_{k,l}(f) - f(\theta_1,\theta_2) + f(\theta_1,\theta_2)\\ &\quad -f(\theta_1,\theta_2) + f(\theta_1,\theta_2)\}\,p_{k,l}(x,y)\end{aligned}$$

eşitliği yazabilir. Bu eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alındıktan sonra üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}|(U-V)(f;x,y)| &= \Big|\sum_{k,l2H} (5_{k,l}(f) - G_{k,l}(f) - f(\theta_1,\theta_2) + f(\theta_1,\theta_2)\\ &\quad -f(\theta_1,\theta_2) + f(\theta_1,\theta_2)\}\,p_{k,l}(x,y)\Big|\\ &\le \sum_{k,l2H} p_{k,l}(x,y)\,(|5_{k,l}(f) - f(\theta_1,\theta_2)| + |G_{k,l}(f) - f(\theta_1,\theta_2)|\\ &\quad + |f(\theta_1,\theta_2) - f(\theta_1,\theta_2)|\}\end{aligned}$$

olur. Lemma 4.3 ve (4.4), (4.5), (4.6) e¸sitliklerinin kullanılmasıyla

$$|5(f) - f(\theta_1,\theta_2)| \le M_f\, p(\theta_1,\theta_2)\,\Big\{\mu_{2,0}^{T_{h,l}} + 2\mu_{1,1}^{T_{h,l}} + \mu_{0,2}^{T_{h,l}}\Big\}$$

ve

$$\begin{aligned}&\sum_{k,l2H} p_{k,l}(x,y)\,|5_{k,l}(f) - f(\theta_1,\theta_2)|\\ &\le M_f \sum_{k,l2H} p_{k,l}(x,y)\,\Big\{p(\theta_1,\theta_2)\,\{\mu_{2,0} + 2\mu_{1,1} + \mu_{0,2}\}\Big\}.\end{aligned}$$

olur. Benzer dü¸sünceyle

$$\begin{aligned}&\sum_{k,l2H} p_{k,l}(x,y)\,|G_{k,l}(f) - f(\theta_1,\theta_2)|\\ &\le M_f \sum_{k,l2H} p_{k,l}(x,y)\,\Big\{p(\theta_1,\theta_2)\,\Big\{\mu_{2,0}^{G_{h,l}} + 2\mu_{1,1}^{G_{h,l}} + \mu_{0,2}^{G_{h,l}}\Big\}\Big\}.\end{aligned}$$

olarak bulunur. $\theta_1^{T_{h,l}}, \theta_2^{T_{h,l}} = \theta_1^{G_{h,l}}, \theta_2^{G_{h,l}} = (\theta_1, \theta_2)$ gere˘ginceg

$$|f(\theta_1,\theta_2) - f(\theta_1,\theta_2)| = 0$$

olup istenilen sonuç elde edilir. ■

4.0.8. Operarörlerin Farkının K—Fonksiyoneli Yardımı ile kestirimi

$C_B^2(Q) = \{ f \in C_B(Q); f^{(p,q)} \in C_B(Q), 1 \leq p, q \leq 2 \}$

Bunun için önce bazı tanımlamalar yapalım.

$C_B^2(Q) = \{ f \in C_B(Q); f^{(p,q)} \in C_B(Q), 1 \leq p, q \leq 2 \}$ olsun, burada $f^{(p,q)}$, f nin x ve y ye göre (p, q) yinci mertebeden kısmi türevlerini göstermektedir. Bu küme üzerindeki norm

$$\|f\|_{C_B^2(D)} = \|f\|_{C_B(D)} + \sum_{i=1}^{2} \left\| \frac{\partial^i f}{\partial x^i} \right\|_{C_B(D)} + \sum_{i=1}^{2} \left\| \frac{\partial^i f}{\partial y^i} \right\|_{C_B(D)}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. $f \in C_B(Q)$ fonksiyonunun Peetré K—fonksiyoneli aşağıdaki gibi tanımlanır

$$K(f;\delta) = \inf_{g \in C_B^2(D)} \left\{ \|f - g\|_{C_B(D)} + \delta \|g\|_{C_B^2(D)}, \delta > 0 \right\}.$$

Yine her $\delta > 0$ için ikinci mertebeden süreklilik mödülü ile Peetré K—fonksiyoneli arasında

$$K(f;\delta) \leq C_0 \left\{ w_2\left(f; \sqrt{\delta}\right) + \min(1,\delta) \|f\|_{C_B(D)} \right\}. \qquad (4.12)$$

ilişkisi vardır([7] ve [8]) .

Şimdi aşağıdaki Lemma verilebilir.

Lemma 4.4 $f \in Q \cap C_B(Q)$ olsun. Bu durumda

$$\left| S(f) - f\left(\theta_1^T, \theta_2^T\right) \right| \leq 2K_2(f;\lambda_T)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $g(x,y) \in C_B^2(Q)$ ve $(t,s) \in Q$ olsun. İki değişkenli fonksiyonlar için Taylor formülünün kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} g(t,s) - g(x,y) &= \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}(t-x) + \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}(s-y) \\ &+ \int_x^t (t-u)\frac{\partial^2 g(u,y)}{\partial u^2}du + \int_y^s (s-v)\frac{\partial^2 g(x,v)}{\partial v^2}dv. \end{aligned}$$

olur, buradan da

$$\cdot 5\,(g) - g\left(\theta_1^T, \theta_2^T\right) 5\,(1) \cdot$$

$$\leq \ \cdot g_x\left(\theta_1^T, \theta_2^T\right)\left(5\,(e_{1,0}) - \theta_1^T 5\,(1)\right) \cdot + \cdot g_y\left(\theta_1^T, \theta_2^T\right)\left(5\,(e_{0,1}) - \theta_2^T 5\,(1)\right) \cdot$$

$$5\left(\vdots \int_x^t (t-u)\,\frac{6^2 g\,(u,y)}{6u^2} \vdots\, du; x, y\right) + 5\left(\vdots \int_y^s (s-v)\,\frac{6^2 g\,(x,v)}{6v^2}\, dv \vdots\,; x, y\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\|g_{xx}\|_{C_B(Đ)}\, 5\,(e_{1,0}) - \theta_1^T 5\,(1)^2 + \|g_{yy}\|_{C_B(Đ)}\, 5\,(e_{0,1}) - \theta_2^T 5\,(1)^2\right\}.$$

yazılabilir. $5\,(1) = 1$,(4.h), (4.4),ve (4.5) eşitlikleri gereğince

$$\cdot 5\,(g) - g\left(\theta_1^T, \theta_2^T\right) \cdot \leq \frac{1}{2}\left\{\|g_{xx}\|_{C_B(Đ)}\, \mu_{2,0}^T + \|g_{xx}\|_{C_B(Đ)}\, \mu_{0,2}^T\right\}.$$

olur. Şimdi, $f\,(x,y) \in C_p^2(Q)$ ve $(t,s) \in Q$ olsun,bu durumda

$$\cdot 5\,(f; x, y) - f\left(\theta_1^T, \theta_2^T\right) 5\,(1) \cdot$$

$$= \ \cdot 5\,(f - g + g; x, y) - f\left(\theta_1^T, \theta_2^T\right) 5\,(1) + g\left(\theta_1^T, \theta_2^T\right) 5\,(1) - g\left(\theta_1^T, \theta_2^T\right) 5\,(1) \cdot$$

$$= \ \cdot 5\,(f - g; x, y) + 5\,(g; x, y) - g\left(\theta_1^T, \theta_2^T\right) 5\,(1)$$

$$-f\left(\theta_1^T, \theta_2^T\right) 5\,(1) + g\left(\theta_1^T, \theta_2^T\right) 5\,(1) \cdot$$

$$\leq \ |5\,(f - g; x, y)| + \cdot 5\,(g; x, y) - g\left(\theta_1^T, \theta_2^T\right) 5\,(1) \cdot$$

$$+ \cdot f\left(\theta_1^T, \theta_2^T\right) 5\,(1) - g\left(\theta_1^T, \theta_2^T\right) 5\,(1) \cdot$$

$$\leq \ 2\,\|f - g\|_{C_B(Đ)} + \frac{1}{2}\left\{\|g_{xx}\|_{C_B(Đ)}\, \mu_{2,0}^T + \|g_{xx}\|_{C_B(Đ)}\, \mu_{0,2}^T\right\}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\cdot g_{xx}\left(\theta_1^T, \theta_2^T\right) \cdot \ \leq \ M_g\left(1 + \left(\theta_1^T\right)^2 + \left(\theta_2^T\right)^2\right)$$

$$\cdot g_{yy}\left(\theta_1^T, \theta_2^T\right) \cdot \ \leq \ M_g\left(1 + \left(\theta_1^T\right)^2 + \left(\theta_2^T\right)^2\right)$$

eşitsizlikleri sağlanır, buradan

$$\cdot 5\,(g) - g\left(\theta_1^T, \theta_2^T\right) \cdot \ \leq \ \frac{1}{2}\left\{\|g_{xx}\|_{C_B(Đ)}\, \mu_{2,0}^T + \|g_{yy}\|_{C_B(Đ)}\, \mu_{0,2}^T\right\}$$

$$\leq \ \lambda_T\, \|g\|_{C_B^2(Đ)},$$

yazılabilir. Burada

$$\lambda_T = M_g\left(1 + \left(\theta_1^T\right)^2 + \left(\theta_2^T\right)^2\right)\left(\mu_{2,0}^T + \mu_{0,2}^T\right) > 0$$

dır. Yukarıdaki ifadenin sağ tarafında $g \in C_B^2(D)$ üzerinde infimum alınırsa

$$\begin{aligned}
\left|\cdot 5(f;x,y) - f\left(\theta_1^T, \theta_2^T\right)\right| &\le 2\|f-g\|_{C_B(D)} + \lambda_T \|g\|_{C_B(D)} \\
&\le \inf_{g \in C_B^2(D)} \left(2\|f-g\|_{C_B(D)} + \frac{\lambda_T}{2}\|g\|_{C_B(D)}\right) \\
&= 2K(f;\lambda_T)
\end{aligned}$$

istenilen sonuç elde edilir. ■

Şimdi aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.3 $f \in D \cap C_B(Q)$ fonksiyonunun birinci basamaktan bütün kısmi türevleri de $C_B(Q)$ kümesine ait olsun. Bu taktirde

$$|(U-V)(f;x,y)| \le 4K\left(f,\frac{1}{8}\gamma(x,y)\right) + M_f' \, \mu(x,y)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$M_f' := \max\left\{\|f_x\|_{C_B(D)}, \|f_y\|_{C_B(D)}\right\},$$

$$\gamma(x,y) := \sum_{k,l \in \mathbb{N}} p_{k,l}(x,y)\left(\lambda_{T_{h,l}} + \lambda_{G_{h,l}}\right),$$

$$\lambda_{T_{h,l}} := \mu_{2,0}^{T_{h,l}} + \mu_{0,2}^{T_{h,l}}, \quad \lambda_{G_{h,l}} := \mu_{2,0}^{G_{h,l}} + \mu_{0,2}^{G_{h,l}}$$

ve

$$\mu(x,y) = \sum_{k,l \in \mathbb{N}} p_{k,l}(x,y)\left\{\left|\theta_1^{T_{h,l}} - \theta_1^{G_{h,l}}\right| + \left|\theta_2^{T_{h,l}} - \theta_2^{G_{h,l}}\right|\right\}$$

dir.

İspat. Teoremin hipotezi gereğince f fonksiyonu $\left(\theta_1^{T_{h,l}}, \theta_2^{T_{h,l}}\right)$ ve $\left(\theta_1^{G_{h,l}}, \theta_2^{G_{h,l}}\right)$ noktalarında türevlenebilen bir fonksiyon olup, iki değişkenli fonksiyonlar için ortalama değer teoremi gereğince bir (s_1, s_2) noktası vardır [10], öyleki

$$f\left(\theta_1^{T_{h,l}}, \theta_2^{T_{h,l}}\right) - f\left(\theta_1^{G_{h,l}}, \theta_2^{G_{h,l}}\right) = f_x(s_1,s_2)\left(\theta_1^{T_{h,l}} - \theta_1^{G_{h,l}}\right) + f_y(s_1,s_2)\left(\theta_2^{T_{h,l}} - \theta_2^{G_{h,l}}\right)$$

eşitliği sağlanır. $f \in D \cap C_B(Q)$ için Lemma 4.4 ve yukarıdaki eşitlik kullanılarak

$$\begin{aligned}
&|(U-V)(f;x,y)| \\
\le\ & \sum_{k,l29} p_{k,l}(x,y)\,|5_{k,l}(f)-G_{k,l}(f)| \\
\le\ & \sum_{k,l29} p_{k,l}(x,y)\Big\{\big|5_{k,l}(f)-f\big(\theta_1^{T_{h,l}},\theta_2^{T_{h,l}}\big)\big|+\big|G_{k,l}(f)-f\big(\theta_1^{G_{h,l}},\theta_2^{G_{h,l}}\big)\big| \\
&+\big|f_x(s_1,s_2)\big(\theta_1^{T_{h,l}}-\theta_1^{G_{h,l}}\big)+f_y(s_1,s_2)\big(\theta_2^{T_{h,l}}-\theta_2^{G_{h,l}}\big)\big|\Big\} \\
\le\ & 2\sum_{k,l29} p_{k,l}(x,y)\Big\{K\Big(f;\frac{1}{4}\Big[\mu_{2,0}^{T_{h,l}}+\mu_{0,2}^{T_{h,l}}\Big]\Big)+K\Big(f;\frac{1}{4}\Big[\mu_{2,0}^{G_{h,l}}+\mu_{0,2}^{G_{h,l}}\Big]\Big)\Big\} \\
&+\sum_{k,l29} p_{k,l}(x,y)\Big\{\|f_x\|_{C_B(Đ)}\big|\theta_1^{T_{h,l}}-\theta_1^{G_{h,l}}\big|+\|f_y\|_{C_B(Đ)}\big|\theta_2^{T_{h,l}}-\theta_2^{G_{h,l}}\big|\Big\} \\
=\ & 2\sum_{k,l29} p_{k,l}(x,y)\Big\{K\Big(f;\frac{1}{4}\lambda_{T_{h,l}}\Big)+K\Big(f;\frac{1}{4}\lambda_{G_{h,l}}\Big)\Big\} \\
&+M_f^{J}\sum_{k,l29} p_{k,l}(x,y)\Big\{\big|\theta_1^{T_{h,l}}-\theta_1^{G_{h,l}}\big|+\big|\theta_2^{T_{h,l}}-\theta_2^{G_{h,l}}\big|\Big\},
\end{aligned}$$

ifadesi yazılabilir. Burada kolaylık olması bakımından

$$\lambda_{T_{h,l}} := \mu_{2,0}^{T_{h,l}}+\mu_{0,2}^{T_{h,l}},\quad \lambda_{G_{h,l}} := \mu_{2,0}^{G_{h,l}}+\mu_{0,2}^{G_{h,l}}$$

$$M_f^{J} := \max\Big\{\|f_x\|_{C_B(Đ)},\|f_y\|_{C_B(Đ)}\Big\}.$$

ile gösterilmektedir. Bir $g \in C_B^2(Q)$ için K-fonksiyonelinin tanımı kullanılarak yukarıdaki ifade

$$\begin{aligned}
|(U-V)(f;x,y)| \le\ & 4\|f-g\|_{C(Đ)}\sum_{k,l29} p_{k,l}(x,y) \\
&+\frac{1}{2}\|g\|_{C^2(Đ)}\sum_{k,l29} p_{k,l}(x,y)\big(\lambda_{T_{h,l}}+\lambda_{G_{h,l}}\big) \\
&+M_f^{J}\sum_{k,l29} p_{k,l}(x,y)\Big\{\big|\theta_1^{T_{h,l}}-\theta_1^{G_{h,l}}\big|+\big|\theta_2^{T_{h,l}}-\theta_2^{G_{h,l}}\big|\Big\} \\
=\ & 4K\Big(f,\frac{1}{8}y(x,y)\Big)+M_f^{J}\mu(x,y),
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada yine kolaylık için

$$y(x,y) := \sum_{k,l29} p_{k,l}(x,y)\big(\lambda_{T_{h,l}}+\lambda_{G_{h,l}}\big)$$

$$\mu(x,y) = \sum_{k,l29} p_{k,l}(x,y)\Big\{\big|\theta_1^{T_{h,l}}-\theta_1^{G_{h,l}}\big|+\big|\theta_2^{T_{h,l}}-\theta_2^{G_{h,l}}\big|\Big\}$$

gösterimleri kullanılmaktadır. Yukarıdaki Teorem ve (4.12) kullanılarak

$$|(U - V)(f; x, y)| \leq C_0 \left(w_2 \left(f; \sqrt{\frac{1}{8}\gamma(x, y)} \right) + \min(1, \lambda) \|f\|_{C_B(D)} \right) + M_f \mu(x, y)$$

ifadesi elde edilir. Bu da istenilendir. ■

4.1. Chebyshev fonksiyonelleri için operatörlerin farkı

f, $g \in C_p(Q)$ olmak üzere bir önceki kısımda tanımlanan U ve V lineer pozitif operatörlerini gözönüne alalım ve kabul edelim ki f, g, $fg \in C_p(Q)$ olsunlar. U operatörünün Chebyshev fonksiyonelini $T^U(f, g) := T(fg) - T(f)T(g)$ şeklinde tanımlayalım. Benzer şekilde V operatörünün Chebyshev fonksiyoneli de $T^V(f, g) := T(fg) - T(f)T(g)$ şeklinde tanımlanabilir. Bu kısımda $T^U(f, g) - T^V(f, g)$ farkı için bir üst sınır belirleyeceğiz.

Lemma 4.4 ve Teorem 4.1 gözönüne alınarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.4 f, g ve fg fonksiyonları $C_p^X(Q)$ kümesinin elemanı olsunlar. Ayrıca bu fonksiyonların 2. basamağa kadar olan bütün kısmi türevleri de $C_p(Q)$ kümesine ait olsun, eğer

$$\theta_1^{T_{h,l}} = \theta_1^{G_{h,l}} = \theta_1, \quad \theta_2^{T_{h,l}} = \theta_2^{G_{h,l}} = \theta_2,$$

$$U\left(1 + (e_{1,0})^2 + (e_{0,1})^2; x, y\right) \leq Mp(x, y)$$

ve

$$V\left(1 + (e_{1,0})^2 + (e_{0,1})^2; x, y\right) \leq M\, p(x, y),$$

ifadeleri sağlanıyorsa, bu durumda

$$\left|T^U(f, g; x, y) - T^V(f, g; x, y)\right| \leq (\delta_1 + \delta_2)\left(1 + Mp(x, y)\right)\left[\|f\|_p + \|g\|_p\right] + 2^8 [1 + q_{k,l}(x, y)]$$
$$\times \left\{ \Delta_p(fg, \delta_3, \delta_4) + Mp(x, y) \left(\|f\|_p \Delta_p(g, \delta_3, \delta_4) + \|g\|_p \Delta_p(f, \delta_3, \delta_4) \right) \right\}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada δ_1 ve δ_2 Teorem 4.1 de tanımlanan ifadelerdir. Ayrıca

$$q_{k,l}(x, y) = \sum_{k,l \in \mathbb{N}} p_{k,l}(x, y)\, p\left(\theta_1^{T_{h,l}}, \theta_2^{T_{h,l}}\right)$$

dır.

İspat. Chebyshev fonksiyonelinin tanımı gereğince

$$
\begin{aligned}
& T^{U}(f, g; x, y) - T^{V}(f, g; x, y) \\
= \; & U(fg; x, y) - U(f; x, y) U(g; x, y) - U(f; x, y) V(g; x, y) + U(f; x, y) V(g; x, y) \\
& - V(fg; x, y) + V(f; x, y) V(g; x, y) \\
= \; & U(fg; x, y) - V(fg; x, y) - U(f; x, y)[U(g; x, y) - V(g; x, y)] \\
& - V(g; x, y)[U(f; x, y) - V(f; x, y)].
\end{aligned}
$$

eşitliğini yazabiliriz. Her iki tarafın mutlak değerinin alımasıyla

$$
\begin{aligned}
& \cdot T^{U}(f, g; x, y) - T^{V}(f, g; x, y) \cdot \\
\leq \; & |U(fg; x, y) - V(fg; x, y)| + |U(f; x, y)| \, |U(g; x, y) - V(g; x, y)| \\
& + |V(g; x, y)| \, |U(f; x, y) - V(f; x, y)|.
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Teorem 4.1 kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
& |U(fg; x, y) - V(fg; x, y)| \\
\leq \; & \sum_{k,l29} p_{k,l}(x, y) \, |5_{k,l}(fg; x, y) - G_{k,l}(fg; x, y)| \\
\leq \; & 6_1 + 6_2 + 2^8 \blacktriangle_p (fg, 6_3, 6_4)(1 + q_{k,l}(x, y))
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
& |U(f; x, y)| \, |U(g; x, y) - V(g; x, y)| \\
\leq \; & Mp(x, y) \, \|f\|_p \;\; 6_1 + 6_2 + 2_8 \blacktriangle_p (g, 6_3, 6_4)(1 + q_{k,l}(x, y))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& |V(g; x, y)| \, [U(f; x, y) - V(f; x, y)] \\
\leq \; & Mp(x, y) \, \|g\|_p \;\; 6_1 + 6_2 + 2_8 \blacktriangle_p (f, 6_3, 6_4)(1 + q_{k,l}(x, y)) \;\; .
\end{aligned}
$$

e¸sitsizlikeri yazılabilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır. ■

4.2. Uygulamalar

Bu kısımda yukarıda Teoremler ile iddia edilen e¸sitsizlikler için bir uygulama olarak U operatörünü iyi bilinen iki değişkenli Szász-Mirakyan operatörü

$$U_{n,m}(f;x,y)=\sum_{k,l}^{\infty}e^{-nx-my}\frac{(nx)^k}{h!}\frac{(my)^l}{l!}f\left(\frac{h}{n},\frac{l}{m}\right)$$

ve V operatörünüde yine iki değişkenli Szász-Mirakyan-Kantorovich operatörü olarak alınırsa

$$V_{n,m}(f;x,y)=\sum_{k,l}e^{-nx-my}\frac{(nx)^k}{h!}\frac{(my)^l}{l!}nm\int_{\frac{h}{n}}^{\frac{h+1}{n}}\int_{\frac{l}{m}}^{\frac{l+1}{m}}f(t,s)\,dsdt.$$

aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.5 f,g ve fg fonksiyonlars $C_p^{\chi}(Q)$ kümesinin elemans olsunlar.Ayrsca bu fonksiyonlarsn 2.basamağa kadar olan bütün kssmi türevleri de $C_p(Q)$ kümesine ait olsun, bu taktirde

$$|(U-V)(f;x,y)|\leq 6_2+2^8\,\blacktriangle_p(f,6_3,6_4)\,\$(x,y),$$

eşitsizliği sağlansr. Burada

$$6_2(x,y)=\quad 1+\frac{(1+8nx+4nx^2)}{4n^2}+\frac{(1+8my+4my^2)}{4m^2}\quad\frac{1}{3n^2}+\frac{1}{3m^2},$$

$$6_3^4(x,y)=\frac{1}{16n^2}+\frac{nx+4nx^2}{16n^4}+\frac{my+4my^2}{16n^2m^2},$$

$$6_4^4(x,y)=\frac{1}{16m^2}+\frac{nx+4nx^2}{16n^2m^2}+\frac{my+4my^2}{16m^4}$$

ve

$$\$(x,y)=2+x^2+y^2+\frac{x}{n}+\frac{y}{m}$$

dir.

İspat. Yukarıda tanımlanan U ve V operatörleri için basit hesaplamalarla

$$5_{k,l}(f)=f\left(\frac{h}{n},\frac{l}{m}\right),$$

$$\theta_1^T=5_{k,l}(e_{1,0})=\frac{h}{n},\quad \theta_2^T=\frac{l}{m},$$

$$G_{k,l}(f)=nm\int_{\frac{h}{n}}^{\frac{h+1}{n}}\int_{\frac{l}{m}}^{\frac{l+1}{m}}f(t,s)\,dsdt,$$

$$\theta_1^G=G_{k,l}(e_{1,0})=\frac{1}{2n}(2h+1),\quad \theta_2^T=\frac{1}{2m}(2l+1),$$

$$\mu^T_{2,0} = 5_{k,l}\left(e_{1,0} - \frac{h}{n}\right)^2 = 0, \quad \mu^T_{0,2} = 5_{k,l}\left(e_{0,1} - \frac{l}{m}\right)^2 = 0,$$

$$\mu^G_{2,0} = G_{k,l}\left(e_{1,0} - \frac{h}{n}\right)^2 = \frac{1}{3n^2}, \quad \mu^G_{0,2} = G_{k,l}\left(e_{0,1} - \frac{l}{m}\right)^2 = \frac{1}{3m^2},$$

e¸sitlikleri elde edilir. Buradanda

$$6_1(x,y) = 0,$$

$$6_2(x,y) = \sum_{k,l} e^{-nx-my}\frac{(nx)^k}{h!}\frac{(my)^l}{l!} \times \left(1 + \frac{(2h+1)^2}{4n^2} + \frac{(2l+1)^2}{4m^2}\right)\left(\frac{1}{3n^2} + \frac{1}{4mn} + \frac{1}{3m^2}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{(1 + 8nx + 4nx^2)}{4n^2} + \frac{(1 + 8my + 4my^2)}{4m^2}\right)\left(\frac{1}{3n^2} + \frac{1}{4mn} + \frac{1}{3m^2}\right),$$

$$6^4_3 = \sum_{k,l29} e^{-nx-my}\frac{(nx)^k}{h!}\frac{(my)^l}{l!} p\left(\theta_1^{T_{h,l}}, \theta_2^{T_{h,l}}\right)\left(\theta_1^{T_{h,l}} - \theta_1^{G_{h,l}}\right)^4$$

$$= \sum_{k,l29} e^{-nx-my}\frac{(nx)^k}{h!}\frac{(my)^l}{l!} p\left(\frac{h}{n}, \frac{l}{m}\right)\left(\frac{h}{n} - \frac{1}{2n}(2h+1)\right)^4$$

$$= \sum_{k,l29} e^{-nx-my}\frac{(nx)^k}{h!}\frac{(my)^l}{l!}\left(1 + \frac{h^2}{n^2} + \frac{l^2}{m^2}\right)\left(\frac{1}{2n}\right)^4$$

$$= \frac{1}{16n^2} + \frac{nx + 4nx^2}{16n^4} + \frac{my + 4my^2}{16n^2m^2},$$

$$6^4_4 = \sum_{k,l29} p_{k,l}(x,y)\, p\left(\theta_1^{T_{h,l}}, \theta_2^{T_{h,l}}\right)\left(\theta_2^{T_{h,l}} - \theta_2^{G_{h,l}}\right)^4$$

$$= \sum_{k,l29} e^{-nx-my}\frac{(nx)^k}{h!}\frac{(my)^l}{l!}\left(1 + \frac{h^2}{n^2} + \frac{l^2}{m^2}\right)\left(\frac{1}{2m}\right)^4$$

$$= \frac{1}{16m^2} + \frac{nx + 4nx^2}{16n^2m^2} + \frac{my + 4my^2}{16m^4}$$

ve

$$\$(x,y) = 1 + \sum_{k,l29} e^{-nx-my}\frac{(nx)^k}{h!}\frac{(my)^l}{l!} p\left(\frac{h}{n}, \frac{l}{m}\right)$$

$$= 1 + \sum_{k,l29} e^{-nx-my}\frac{(nx)^k}{h!}\frac{(my)^l}{l!}\left(1 + \frac{h^2}{n^2} + \frac{l^2}{m^2}\right)$$

$$= 2 + x^2 + y^2 + \frac{x}{n} + \frac{y}{m},$$

olarak bulunurlar ki bu ispatı tamamlar. ■

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Yakla¸sımlar teorisinde son zamanlarda yapılan çalı¸smalarda lineer pozitif operatörlerin farklarının ortaya koyduğu sonuçların katkıları üzerinedir. Bu sebeple biz de bu tezde A. Aral, D. Inoan ve I. Rasa [1] tarafından yapılan sınırsız aralıkta tanımlanan lineer pozitif operatörler için "On differences of linear positive operators" isimli çalışmalarını baz alıp ve operatörlerin iki değişkenli olması halindeki sonuçları elde ettik. Elde edilen sonuçlar bir uygulama olarak; Ağırlıklı uzaylarda bilinen iki değişkenli Szász-Mirakyan ve Szász-Mirakyan-Kantorovich operatörleri üzerine uygulandı ve iddia edilen hipotezlerle uyumlu sonuçlar elde edildi. Bu tezin dördüncü bölümü orijinal bir çalı¸sma olup, yayın için sunuldu. Yapılan bu çalı¸sma daha çok değişkenli fonksiyonlara da genişletilebilir. Bu yönüyle bu tez bu konuda çalı¸san genç ara¸stırmacılara bir kaynak olacak durumdadır.

KAYNAKLAR

[1] A. Aral, D. Inoan, and I. Rasa, On differences of linear positive operators, Analysis and Mathematical Physics. 9, 1227-1239, 2019.

[2] A. M. Acu and I. Rasa, New estimates for the differences ofpositive linear operators, Numerical Algorithms. 73, 775-789, 2016.

[3] A. M. Acu and I. Rasa, Estimates for the differences of positive linear operators and their derivatives, Numerical Algorithms. 85, 191-208, 2020.

[4] H. Kurtoğlu, Modifiye Gamma Operatörlerinin yaklaşım Özellikleri, Kırıkkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lısans Tezi, 2017.

[5] N. İspir, and Ç. Atakut, Approximation by modified Szasz-Mirakjan operators on weighted spaces. Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 112, 571-578, 2002.

[6] N Ispir, On modified Szasz baskakov operators on weighted spaces. Turk. J. Math. 26, 355-365, 2001.

[7] P. L. Butzer, H. Berens, Semi-groups of operators and approximation, Springer, New York, 1967.

[8] S. Begen and H. G. Ince-Ilarslan. Degree of Approximation for BivariateSzázs-Kantorovich Type Based on Brenke Type Polynomials. Honam Mathematical J. 2, 251-268, 2020.

[9] A.M. Acu, G. Ba¸scanbaz-Tunca and I. Ra¸sa, Differences of Positive Linear Operators on Simplices. Hindawi Journal of Function Spaces. Vol.11 2021, Article ID 5531577.

[10] R.A. DeVore ve G.G. Lorentz, Constructive Approximation. Springer , Berlin 1993

[11] A. Aral,and H.Erbay, A Note on the Difference of Positive Operators and Numerical Aspects. Mediterr. J. Math. 17, 2020, no. 2, 2020.

[12] A. M. Acu, S. Hodis, and I. Rasa, A survey on estimates for the differences of positive linear operators, Constructive Mathematical Analysis, vol. 1, no. 2, pp. 113–127, 2018.

[13] H. Gonska, P. Pitul and I. Ra¸sa, On Differences of Positive Linear Operators. Carpathian Journal of Mathematics, vol. 22, no.1-2, pp 65-78, 2006.

[14] H. Johnen and K. Scherer, On the Equivalence of the K-functional and the Moduli of Contuninuity and Some Applications, I˙n ConstructiveTheory of Functions of Several Variables. Lecture Notes in Maths, vol 571, pp. 119-140, Springer-Verlag, Berlin, .1976

[15] K. Bozkurt, F. Özsarac, A. Aral, Bivariate Bernstein Polynomials that Reproduce Exponential Functioans, Commun.Fac.Sci.Univ.Ank.Ser. A1 Math. Stat. Volume 70, Number 1, Pages 541-554 2021.

[16] S. Begen and H. G. Ince-Ilarslan. Degree of Approximation for BivariateSzázs-Kantorovich Type Based on Brenke Type Polynomials. Honam Mathematical J. No 2, pp. 251-268 2020.

[17] H. Gonska, P. Pitul, I. Ra¸sa, On Peano's form of the taylor remainder, Voronoskaja's theorem and the commutator of positive linear operators In: Numerical Analysis and Approximation Theory (Proc. Int. Conf. Cluj-Napoca 2006; ed. by O Agratini and P.Blaga), Cluj-Napoca, Casa Cartii de Ştiinta, pp. 55-80 2006.

[18] T. Acar, V. Gupta and A. Aral, Rate of convergence for generalized Szasz operators, Bull. Math. Sci. 1, 99-113, 2011.

[19] A.D. Gadjiev, The convergence problem for a sequence of positive linear operators on unbounded sets and theorems analogous to that P.P. Korovkin, Soviet Math. Dokl., 15 (5),1433-1436, 1974.

[20] A.D. Gadjiev, Theorems of the type of P.P. Korovkin's theorems, Math. Zametki, 20 (5), 781-786 (1976).(inRussian), Math. Notes, 20 (5-6), 995-998(Engl. Trans.) 1976.

[21] O. Agratini, Properties of discrete non-multiplicative operators, Anal. Math. Phys.(2017) https://doi.org/10.1007/s13324-017-0186-4