T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
DOKTORA TEZİ

3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA BERTRAND EĞRİLERİN GEOMETRİSİNE YENİ BİR YAKLAŞIM

Hatice ALTIN ERDEM

TEMMUZ - 2023

T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
DOKTORA TEZİ

3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA BERTRAND EĞRİLERİN GEOMETRİSİNE YENİ BİR YAKLAŞIM

Hatice ALTIN ERDEM

TEMMUZ - 2023

Hatice ALTIN ERDEM tarafından hazırlanan "3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA BERTRAND EĞRİLERİN GEOMETRİSİNE YENİ BİR YAKLAŞIM" adlı tez çalışması, aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Kazım İLARSLAN İmza
Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

Başkan: Prof. Dr. Levent KULA İmza
Matematik Anabilim Dalı, Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Prof. Dr. Mehmet YILDIRIM İmza
Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Doç. Dr. Bülent ALTUNKAYA İmza
Matematik Anabilim Dalı, Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Doç. Dr. Osman KEÇİLİOĞLU İmza
Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.
Tez Savunma Tarihi: 05.07.2023

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. Recep ÇALIN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

anneme...

ETİK BEYANI

Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Hatice ALTIN ERDEM
05.07.2023

ÖZET

3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA BERTRAND EĞRİLERİN GEOMETRİSİNE YENİ BİR YAKLAŞIM

ALTIN ERDEM, Hatice
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Doktora Tezi
Danışman:Prof. Dr. Kazım İLARSLAN
Temmuz 2023, 64 sayfa

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde tezde gerekli olan kavramlar ve tanımlar verilmiştir. Üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümlerde Minkowski 3-uzayında yeni bir yaklaşım kullanılarak sırasıyla spacelike, timelike ve Cartan null ile pseudo null eğrilerin Bertrand eğri olma şartları elde edilmiştir. Bu eğrilerin ve Bertrand eşlenik eğrilerin Frenet vektörleri ile eğrilik fonksiyonları arasındaki bağıntılar ifade edilmiştir. Bu tip Bertrand eğriler için örnekler inşa edilmiş ve grafikleriyle birlikte verilmiştir. Altıncı bölüm ise tartışma ve sonuç için ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Öklid uzayı, Minkowski 3-uzay, Cartan null eğri, pseudo null eğri, spacelike, timelike ve lightlike(null) eğri, Bertrand eğri, Bertand eşlenik eğri.

ABSTRACT

A NEW APPROACH TO THE GEOMETRY OF BERTRAND CURVES IN MINKOWSKI 3-SPACE

ALTIN ERDEM, Hatice
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, Doctorate Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Kazım İLARSLAN
July 2023, 64 pages

This thesis consists of six chapters. The first chapter is devoted to the introduction. The second chapter contains concepts and definitions which are needed throughout the thesis. In the third, fourth and fifth sections, using a new approach in Minkowski 3-space, the Bertrand curve conditions of spacelike, timelike and Cartan null and pseudo null curves are obtained, respectively. The relations between Frenet vectors and curvature functions of these curves and Bertrand mate curves are expressed. Examples for this type of Bertrand curves are constructed and given with their graphs. The sixth chapter is devoted to the discussion and conclusion.

Key Words: Euclidean space, Minkowski 3-space, Cartan null curves, pseudo null curves, spacelike, timelike and lightlike(null) curves, Bertrand curves, Bertrand mate curves.

TEŞEKKÜR

Büyük bir emek ve özveri ile hazırladığım doktora tezimi tamamlamanın heyecanını ve gururunu yaşıyorum. Benimle birlikte bütün aşamalarını yaşayan herkese teşekkür etme imkanını burada değerlendirmek isterim.

Yüksek lisans ve doktora eğitimim boyunca danışmanlığımı üstlenen, tez konumun belirlenmesinden, tezin yazım aşamasına kadar her türlü desteğini esirgemeyen, bir doktora öğrencisine sahip olması gereken özellikleri bilgi ve tecrübesi ile gösteren, ihtiyaç duyduğum her zaman yanımda olan, doktora eğitimimi tamamlamamda elinden gelen bütün desteği gösteren danışmanım Sayın Prof. Dr. Kazım İlarslan'a saygılarımı sunuyorum ve çok teşekkür ediyorum. Tez izleme komitemde yer alarak değerli görüşleri ile tezimin şekillenmesini sağlayan Sayın Prof. Dr. Levent Kula ve Sayın Prof. Dr. Mehmet Yıldırım'a teşekkür ederim. Bunun yanında tez savunmama katılan kritik noktalarda yapıcı eleştiriler getirerek tezimin son şeklini almasına yardımcı olan Sayın Doç. Dr. Bülent Altunkaya ve Sayın Doç. Dr. Osman Keçilioğlu'na teşekkürü bir borç bilirim. Tezimin yazım aşamasında teknik desteklerini esirgemeyen ve bilgisiyle kolaylaştıran Sayın Dr. İlker Gençtürk'e çok teşekkür ediyorum.

Bütün hayatım boyunca benden sevgilerini esirgemeyen, başarılarımla gurur duyan ve iyi bir insan olmamız için kendi hayatlarını dahi yaşama fırsatı bulamayan sevgili annem (merhume) Mevlüdiye Altın ve babam İsmet Altın'a sonsuz teşekkürler ediyorum. Ayrıca beni asla yalnız bırakmayan ağabeyim Mustafa Altan Altın ve kardeşim Cevahir Altın'a da teşekkür ediyorum. Ailemize katılarak bana her adımda destek veren, yorulduğumda motivasyonumu arttıran gelinimiz Klinik Psikolog Dr. Burcu Altın'a teşekkür ediyorum. Ailemin en değerli varlıkları, yeğenlerim M. Ada Altın, Azra Altın ve İ. Ege Altın, sizlerin halanız olmaktan gurur duyuyorum. Hayatınız boyunca başarılarınızla bizleri mutlu edeceksiniz, inanıyorum. Lisans eğitimimin ilk günlerinde hayatıma giren ve elimi hiç bırakmayan can dostum Gülden Keçeci'ye hep benimle olduğu için teşekkür ediyorum.

Hayatıma en zor zamanımda giren, bana yaptığım her şeyde güvenen ve maddi, manevi bütün desteğini sunan, varlığıyla beni ödüllendiren sevgili eşim Kazım Erdem'e sonsuz teşekkürler ediyorum. Ayrıca eşimin ailesi olan Erdem ailesinin her bir ferdine her koşulda yanımda oldukları için teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_0$	Sıfırdan farklı reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{E}^3$	3-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{E}^4$	4-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{E}_1^3$	3-boyutlu Minkowski uzayı
$\mathbb{E}_1^4$	4-boyutlu Minkowski uzayı (Minkowski uzay-zaman)
$\mathbb{E}_q^n$	n-boyutlu q-indeksli yarı-Öklidyen uzay
g	Simetrik bilineer form
$\|\|,\|\|$	Norm fonksiyonu
$\langle\ ,\ \rangle$	İç çarpım fonksiyonu
T	Eğrinin teğet vektörü
N	Eğrinin asli normal vektörü
B	Eğrinin binormal vektörü
k_i	Ana eğrinin $i-$ yinci eğrilik fonksiyonu
$T^\star$	Eşlenik eğrisinin teğet vektörü
$N^\star$	Eşlenik eğrisinin asli normal vektörü
$B^\star$	Eşlenik eğrisinin binormal vektörü
$k_i^\star$	Eşlenik eğrisinin $i-$ yinci eğrilik fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

1 . GİRİŞ

Diferensiyel geometrinin önemli bir çalışma alanı olan eğriler teorisinin tarihi Huygens (1629-1695), Leibniz (1646-1716) ve Newton (1643-1727) un düzlemsel eğriler üzerine yaptıkları araştırmalara kadar dayanmaktadır. Bir düzlemsel veya uzay eğrisinin diferensiyel geometrisinin çalışılmasında önemli bir aşama Frenet-Serret denklemlerinin inşa edilmesidir. Bu denklemler Frenet (1847) ve Serret (1851) tarafından ayrı ayrı tanımlanmıştır. Günümüzde genellikle Frenet denklemleri olarak bilinmektedir. T (teğet), N (asli normal), B (binormal) ile gösterdiğimiz ve Frenet vektörleri olarak bilinen bu vektörler yardımıyla eğrinin birçok geometrik özelliği incelenebilmektedir. Bunların başında da eğrinin eğrilik fonksiyonlarının elde edilmesi gelmektedir. Bir eğrinin eğrilik fonksiyonlarının eğriyi temsil eden fonksiyonun türevleri yardımıyla bulunması 1671 yılında Newton (1643-1727) tarafından verilmiştir. 1775 yılında Monge (1746-1818), üç boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin birinci ve ikinci eğriliğini tanımlamış ve birinci eğrilik fonksiyonunun analitik ifadesini elde etmiştir. Fakat torsiyon (burulma) eğriliğinin analitik ifadesini verememiştir. Torsiyon (burulma) eğriliğinin analitik ifadesi 1806 yılında Lancret (1774-1807) tarafından verilmiştir. Sonrasında 1826 yılında Cauchy (1789-1857) ilk olarak bir uzay eğrisini sistematik olarak ardışık türevler yardımıyla çalışmıştır [1–4]. Günümüzde birim hızlı bir uzay eğrisinin birinci ve ikinci eğriliklerini Frenet vektörleri ve bunların türevleri yardımıyla kolayca ifade edilebilmektedir.

Eğriler teoresinde yoğun bir şekilde çalışılan problemlerden birisi de eğrilerin sınıflandırılması problemidir. Bu problemin çözümünde eğrinin eğrilikleri k_1(eğrininin eğrilik fonksiyonu olup klasik terminolojide κ ile gösterilmektedir) ve k_2 (eğrinin burulma fonksiyonu olup klasik terminolojide τ ile gösterilmektedir), eğrinin Frenet vektörleri (T, N, B) ve Frenet vektörlerinin oluşturduğu Frenet düzlemleri (Oskülatör, Normal ve Rektifiyen düzlemler) ve bunlar arasındaki ilişkiler büyük bir öneme sahiptir. Uzay eğri çiftlerinin Frenet vektörleri arasındaki ilişkiler sonucunda diferensiyel geometrinin önemli eğri örnekleri olan Bertrand eğrileri, Mannheim eğrileri ve involute-evolute eğrileri ortaya çıkmaktadır [5].

Tezimizin konusunu oluşturan Bertrand eğrileri uzun bir geçmişe sahiptir. 1845 yılında Saint-Venant tarafından 3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ 'de verilen bir uzay eğrisinin asli normalinin aynı uzayda bulunan başka bir eğrinin asli normali olup olamayacağı sorusu, 1850 yılında Bertrand tarafından yayınlanan bir çalışmada cevaplandırılmıştır. Bu çalışmada, bir uzay eğrisinin yukarıda belirtilen soruya bir çözüm olabilmesi için eğrilikleri arasında bir lineer bağıntının olması gerektiği ispatlanmıştır. Buna göre, verilen eğrinin eğrilik fonksiyonları k_1 ve k_2 olmak üzere, $\lambda k_1 + \mu k_2 = 1$, $\lambda \in \mathbb{R}_0, \mu \in \mathbb{R}$ şeklinde bir bağıntını sağlanması gerek ve yeterdir. Bertrand'ın bu çalışmasından itibaren bu eğriler Bertrand eğrileri olarak adlandırılmıştır [6, 7].

Bertrand eğrileri üzerine yapılan çalışmaları üç ana grupta ele alabiliriz. Birinci grup, Öklid uzayındaki Bertrand eğrilerinin genelleştirmelerini içerir. Bu çalışmalardan bazıları şu şekildedir: Pears (1935) , n-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^n$'de Bertrand eğrilerini inceledi ve $n > 3$ için ikinci veya üçüncü eğrilik fonksiyonlarının sıfır olması gerektiğini ispatladı. Böylece $\mathbb{E}^n$'deki Bertrand eğrileri dejenere eğrilerdir. Bu durumda $\mathbb{E}^n$'de Bertrand eğrileri uzayın, 3-boyutlu alt uzayında bulunurlar [8–10]. Ayrı bir çalışmada Matsuda ve Yorozu (2003), 4-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^4$'teki Bertrand eğrilerini araştırdılar. Bu çalışmada tüm eğrilik fonksiyonları sıfırdan farklı olan bir eğrinin Bertrand eğrisi olamayacağını (klasik anlamda) ispatlayarak Bertrand eğrilerinin yeni bir sınıfı olan $(1,3)$-Bertrand eğrilerini tanımladılar [11].

İkinci grupta Bertrand eğrileri için yapılan çalışmalar Öklid iç çarpımı yerine Riemann veya pseudo-Riemann iç çarpımlarıyla donatılmış uzaylar için yapılan çalışmalardan ve üç veya daha yüksek boyutlu reel ve Lorentz uzay formlarındaki çalışmalardan oluşmaktadır. Öklid uzayında (3, 4 ve n boyutları için) Bertrand eğrileri için yapılan çalışmaların özellikle $\mathbb{E}_1^3$ (3-boyutlu Minkowski uzayı), $\mathbb{E}_1^4$ (Minkowski uzay-zaman) ve $\mathbb{E}_q^n$ (n-boyutlu q- indeksli yarı-Öklidyen uzay) uzaylarda genelleştirildiği ayrıca Galile ve pseudo-Galile 3-boyutlu uzaylarında da çalışıldığı görülmektedir [12–24].

Son grupta yer alan çalışmalar, Bertrand eğrilerinin yüzeyler teorisine uygulamaları ve Bertrand eğrilerine yeni bir bakış açısı getiren çalışmalardır. Camcı, İlarslan ve Uçum 3-boyutlu Öklid uzayında Bertrand eğrilerine yeni bir bakış açısı getirmişlerdir. Bu çalışmada klasik Bertrand eğri tanımı üzerinden hareket edilmiştir. Buna göre $\mathbb{E}^3$de verilen bir $(\varphi,\varphi^{\star})$ Bertrand eğri çifti için

$$\varphi^{\star}(s^{\star})=\varphi(s)+\lambda N(s)$$

yazılabilir. Bu eşitlik $\overrightarrow{\varphi\varphi^{\star}}=\lambda N$ zorunluluğunu gerektirir. Bunun yerine

$$\varphi^{\star}(s^{\star})=\varphi(s)+\mu_1(s)T(s)+\mu_2(s)N(s)+\mu_3(s)B(s),$$

$(\mu_1(s),\mu_2(s)$ ve $\mu_3(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar) alınarak Bertrand eğrilerine yeni bir yaklaşım getirmişlerdir [25]. Bu yeni yaklaşım sayesinde literatüre yeni Bertrand eğrisi örnekleri eklenmiştir. Örneğin genel helis eğrilerinin (sabit eğrilik oranına sahip eğriler) de Bertrand eğrileri olabileceğini göstermişlerdir.

Bu tez çalışmasında, yukarıda bahsedilen yeni yaklaşım yardımıyla Minkowski 3-uzayında sırasıyla spacelike, timelike ve Cartan null ile pseudo null eğrilerinin Bertrand eğri olma şartları elde edilerek Bertrand eğri örnekleri inşa edilmiştir. Bu çalışmalardan elde edilen sonuçlar [26, 27] makalelerinde yayınlanmıştır.

1.1. Kaynak Özetleri

Bu tez çalışmasında temel kavramlar için başlıca O'Neill (1983), Kuhnel (1999), Duggal ve Bejancu (1996), Montiel ve Ros (1998) kitapları ile Walrave (1995) doktora tezinin yanı sıra Bertrand eğriler ve bu eğrilerin eşlenik eğrileri için referans listesinde adı geçen makaleler ve kitaplardan yararlanılmıştır.

2 . TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezde gerekli olan kavramlar ve tanımlar verilecektir.

Tanım 2.1 (Simetrik Bilineer Form) Bir reel vektör uzayı V için

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall u, v, w \in V$ için

(i) $g(u,v) = g(v,u)$

(ii) $g(au+bv,w) = ag(u,w) + bg(v,w)$

$g(u,av+bw) = ag(u,v) + bg(u,w)$

şartları sağlanıyorsa g dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde simetrik bilineer form denir [3, 29, 31].

Tanım 2.2 V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun.

(i) $0 \neq v \in V$ olmak üzere $\forall u \in V$ için

$$g(u,v) = 0$$

ise g ye V üzerinde dejeneredir denir. Aksi durumda g ye non-dejeneredir denir. Bu tanıma göre g nin non-dejenere olması için gerek ve yeter şart $\forall v \in V$ için

$$g(u,v) = 0 \text{ iken } u = 0$$

olmasıdır.

(ii) (Skalar çarpım) Non-dejenere simetrik bilineer form, skalar çarpım olarak adlandırılır.

(iii) Eğer her $0 \neq v \in V$ için $g(v,v) > 0$ ise g simetrik bilineer formu pozitif tanımlı, eğer her $0 \neq v \in V$ için $g(v,v) < 0$ ise g simetrik bilineer formu negatif tanımlıdır [28, 31].

Tanım 2.3 (İndeks) V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun.

Bu durumda,

$$g_{|W}\ : W\times W\rightarrow\mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna g' nin indeksi denir ve q ile gösterilir [28].

Tanım 2.4 n-boyutlu q-indeksli yarı-Öklidyen uzay $\mathbb{E}^n_q$ uzayının bir dik koordinat sistemi $(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$ olmak üzere

$$ds^2=-\sum_{i=1}^{q}dx_i^2+\sum_{i=q+1}^{n}dx_i^2$$

olarak tanımlanan non-dejenere metrik ile donatılmış n boyutlu Öklid uzayıdır. $\mathbb{E}^n_q$ uzayının skalar çarpımını g ile gösterelim. Özel olarak $n=3$ ve $q=1$ alınırsa 3-boyutlu Minkowski uzayı elde edilir. Bu uzay Lorentz-Minkowski uzayı olarak da adlandırılır ve genellikle $\mathbb{E}^3_1$ ile gösterilir [28, 31].

Tanım 2.5 $v\in\mathbb{E}^3_1\backslash\{0\}$ olmak üzere, eğer

(i) $g(v,v)>0$ ise, v spacelike (uzaysı) vektör

(ii) $g(v,v)<0$ ise, v timelike (zamansı) vektör

(iii) $g(v,v)=0$ ise, v null veya lightlike (ışıksı) vektör
olarak adlandırılır [28, 29, 31].

Tanım 2.6 $u\in\mathbb{E}^3_1\backslash\{0\}$ olmak üzere, $\mathbb{E}^3_1$ uzayında u vektörünün normu

$$||u||=\sqrt{|g(u,u)|}$$

olarak tanımlanır. $||u||=1$ ise u vektörüne birim vektör denir [28].

Tanım 2.7 u, $v\in\mathbb{E}^3_1$ olmak üzere, u ve v vektörlerinin dik olması için gerek ve yeter şart $g(u,v)=0$ olmasıdır [3–28].

Tanım 2.8 $\mathbb{E}^3_1$'de herhangi iki vektör $u=(u_1,u_2,u_3)$ ve $v=(v_1,v_2,v_3)$ olmak üzere,

$$u\wedge v=(u_3v_2-u_2v_3,u_3v_1-u_1v_3,u_1v_2-u_2v_1)$$

vektörüne u ve v vektörlerinin vektörel çarpımı denir [28].

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases}$$

ve $e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$ olmak üzere,

$$u \wedge v = \det \begin{bmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde verilir. Burada aşağıdaki eşitlikler mevcuttur:

$$e_1 \wedge e_2 = e_3,\ e_2 \wedge e_3 = -e_1,\ e_3 \wedge e_1 = e_2$$

Tanım 2.9 I, $\mathbb{R}$'nin bir açık aralığı olmak üzere, $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ şeklinde tanımlı diferensiyellenebilir bir dönüşüm ise φ'ye 3-boyutlu Minkowski uzayında bir eğri denir [3, 30].

Tanım 2.10 $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ bir eğri olsun. Eğer φ eğrisinin $\forall s \in I$ için hız vektörü $\varphi'(s)$ sırasıyla spacelike, timelike veya null vektör ise φ eğrisi sırasıyla spacelike, timelike veya null eğri olarak adlandırılır [30].

Tanım 2.11 $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ bir eğri olsun.

(i) φ null bir eğri olmak üzere, eğer $\forall s \in I$ için $\langle \varphi''(s), \varphi''(s) \rangle = 1$ şartı sağlanıyorsa φ eğrisine pseudo yay parametresi ile parametrelendirilmiştir denir. Bu durumda φ null eğrisi Cartan null eğri olarak adlandırılır.

(ii) φ null olmayan bir eğri olmak üzere, eğer $\forall s \in I$ için $\langle \varphi'(s), \varphi'(s) \rangle = \pm 1$ şartı sağlanıyorsa φ eğrisine yay uzunluğu parametresi ile parametrelendirilmiştir denir [29–31].

Aşağıdaki tanımlara, örnekler kısmında ihtiyaç duyulduğundan verilmiştir.

Tanım 2.12 $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ birim hızlı bir eğri olsun. φ eğrisinin konum vektörü her zaman kendi rektifiyen düzleminde kalıyorsa, φ eğrisine Minkowski 3-uzayında bir rektifiyen eğri adı verilir [39].

Tanım 2.13 $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ birim hızlı bir eğri olsun. Eğer sıfırdan farklı sabit bir vektör alanı U için $g(N(s), U)$ fonksiyonu sabit ise φ eğrisine slant helis adı verilir.

Burada $N(s)$ eğrinin asli normal vektör alanıdır. [32, 36].

Tezimizin ana konusu olan Minkowski 3-uzayında Bertrand eğrilerinin genel tanımını şu şekilde verebiliriz:

Tanım 2.14 Minkowski 3-uzayında sıfırdan farklı eğriliklere sahip bir $\varphi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisi için, aynı asli normal vektöre sahip olacak şekilde bir $\varphi^\star : I^\star \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisi ve $s \in I$, $s^\star \in I^\star$ noktalarında $s^\star = f(s)$ olmak üzere bir $f : I \to I^\star$ difeomorfizm varsa φ eğrisine Bertrand eğrisi denir. Bu durumda, $\varphi^\star$ eğrisi, φ eğrisinin Bertrand eşlenik eğrisi olarak adlandırılır. Yani; Minkowski 3-uzayında, verilen bir birim hızlı, sıfırdan farklı eğriliğe sahip φ eğrisi ve başka bir uzay eğrisi $\varphi^\star$'ın karşılık gelen noktalarda asli normal vektör alanları lineer bağımlı ise, o zaman bu φ eğrisi Bertrand eğrisi olarak adlandırılır ve diğer $\varphi^\star$ eğrisi de φ eğrisinin Bertrand eşlenik eğrisi olarak isimlendirilir. Ayrıca $(\varphi, \varphi^\star)$ eğri çiftine Bertrand eğri çifti adı verilir.

$\{T, N, B\}$ kümesi, teğet vektör T, asli normal vektör N ve binormal vektör B'den oluşur ve $\mathbb{E}_1^3$'deki bir φ eğrisi boyunca hareketli Frenet çatısı olarak adlandırılır. Verilen eğrinin causal karakterine göre, Frenet vektörlerinin türevlerini, bu vektörler ve eğrilik fonksiyonlarına bağlı olarak ifade edilen denklemlerine Frenet denklemleri denir [31, 39, 41]. Bu denklemleri şu şekilde verebiliriz:

Durum 2.1 Eğer φ spacelike ya da timelike bir eğri ise, Frenet denklemleri, k_1 ve k_2 sırasıyla birinci ve ikinci eğrilikleri olmak üzere

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_2 k_1 & 0 \\ -\varepsilon_1 k_1 & 0 & \varepsilon_3 k_2 \\ 0 & -\varepsilon_2 k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

olarak verilir. Ayrıca, $g(T,T) = \varepsilon_1 = \pm 1, g(N,N) = \varepsilon_2 = \pm 1, g(B,B) = \varepsilon_3 = \pm 1$ ve $g(T,N) = g(T,B) = g(N,B) = 0$ koşulları da sağlanır.

Durum 2.2 Eğer φ null (lightlike) bir eğri ise, k_1 ve k_2 sırasıyla birinci ve ikinci eğrilikleri olmak üzere, eğer φ bir doğru ise birinci eğriliği $k_1 = 0$ dır. Diğer tüm durumlar için $k_1 = 1$ dir. Bu durumda Frenet denklemleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ k_2 & 0 & -k_1 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

olarak verilir. Ayrıca, $g(T,T) = g(B,B) = g(T,N) = g(N,B) = 0, g(N,N) = g(T,B) = 1$ koşulları da sağlanır.

Durum 2.3 Eğer φ pseudo null bir eğri ise, k_1 ve k_2 sırasıyla birinci ve ikinci eğrilikleri olmak üzere, eğer φ bir doğru ise birinci eğriliği $k_1 = 0$ dır. Diğer tüm durumlar için $k_1 = 1$ dir. Bu durumda Frenet denklemleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ -k_1 & 0 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

olarak verilir. Ayrıca, $g(N,N) = g(B,B) = g(T,N) = g(T,B) = 0, g(T,T) = g(N,B) = 1$ koşulları da sağlanır.

Kabul edelim ki, $\mathbb{E}_1^3$'de, Minkowski 3-uzayında , $\varphi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}_1^3$, Frenet çatısı $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ve sıfırdan farklı eğrilikleri k_1, k_2 olan bir Bertrand eğrisi ve $\varphi^\star : I^\star \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}_1^3$, Frenet çatısı $\{T^\star(s), N^\star(s), B^\star(s)\}$ ve eğrilikleri $k_1^\star$, $k_2^\star$ olan Bertrand eşlenik eğrisi olsun. Camcı ve diğerleri tarafından, Öklid $3-$uzayında Bertrand eğrileri için verilen yeni yaklaşım, Minkowski $3-$uzayında Bertrand eğrileri için düşünülecek olursa $\varphi^\star$ eğrisi, $\mu_1(s), \mu_2(s), \mu_3(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$\varphi^\star(s^\star) = \varphi^\star(f(s)) = \varphi(s) + \mu_1(s)T(s) + \mu_2(s)N(s) + \mu_3(s)B(s)$$

şeklinde yazılabilir. Öklid $3-$uzayında düzlemsel eğriler ve helis eğrileri dışındaki bir eğrinin bir tek Bertrand eşleniği bulunmasına rağmen [2] Minkowski $3-$uzayında φ eğrisinin causal karakterine göre eşlenik eğrisi $\varphi^\star$ farklı causal karakterlerine sahip birden fazla eğri olabilir.

3 . MINKOWSKI 3-UZAYINDA SPACELIKE BERTRAND EĞRİLER

Bu bölümde, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski $3-$uzayında, bir spacelike eğri için Camcı ve diğerleri tarafından verilen yeni yaklaşım kullanılarak bu eğrinin bir Bertrand eğri olma karakterizasyonları ifade edilip ilgili örnekler inşa edilecektir.

Kabul edelim ki, $\mathbb{E}_1^3$'de $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ eğrisi $\{T, N, B\}$ Frenet çatısına ve sıfırdan farklı k_1, k_2 eğriliklerine sahip bir spacelike Bertrand eğrisi ve $\varphi^\star : I^\star \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ eğrisi de $\{T^\star, N^\star, B^\star\}$ Frenet çatısına ve $k_1^\star, k_2^\star$ eğriliklerine sahip φ eğrisinin bir Bertrand eşlenik eğrisi olsun. Buna göre $\varphi^\star$ aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$\varphi^\star(s^\star) = \varphi^\star(f(s)) = \varphi(s) + \mu_1(s)T(s) + \mu_2(s)N(s) + \mu_3(s)B(s)$$

burada $\mu_1(s), \mu_2(s)$ ve $\mu_3(s)$, I üzerinde diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. φ eğrisi spacelike asli normal vektörü N'ye sahip bir spacelike eğri olduğunda, φ eğrisinin Bertrand eşlenik eğrisi, $\varphi^\star$ için aşağıdaki durumlardan birisi mümkündür:

(i) $\varphi^\star$ bir timelike eğridir,

(ii) $\varphi^\star$ spacelike asli normal vektöre sahip bir spacelike eğridir,

(iii) $\varphi^\star$ bir Cartan null eğridir.

Aşağıdaki teoremde tüm durumlar ayrı ayrı değerlendirilmiştir.

Teorem 3.1 $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-uzayında sıfırdan farklı eğrilikleri k_1, k_2 ve spacelike asli normal vektör N'ye sahip bir birim hızlı spacelike eğri olsun. φ eğrisinin, Bertrand eşlenik eğrisi $\varphi^\star : I^\star \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ olan bir Bertrand eğri olması için gerek ve yeter şart aşağıda verilen koşullardan birinin sağlanmasıdır:

(i) $\mu_1(s), \mu_2(s)$ ve $\mu_3(s)$ gibi diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$\left.\begin{aligned} \mu_3 k_2 &= \mu_2' + \mu_1 k_1 \\ \mu_3' &= \mu_2 k_2 \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

eşitlikleri sağlanır ya da $h \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\left.\begin{aligned} \mu_3' - \mu_2 k_2 &\neq 0 \\ \mu_2' + \mu_1 k_1 &= \mu_3 k_2 \\ 1 + \mu_1' - \mu_2 k_1 &= h\left(\mu_3' - \mu_2 k_2\right) \\ hk_2 - k_1 &\neq 0 \\ hk_1 - k_2 &\neq 0 \\ 1 - h^2 &> 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

eşitlikleri sağlanır. O zaman φ eğrisi bir Bertrand eğridir. Bu durumda, Bertrand eşlenik eğrisi $\varphi^{\star}$ bir timelike eğridir.

(ii) $\mu_1(s), \mu_2(s)$ ve $\mu_3(s)$ gibi diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$\left.\begin{aligned} \mu_3 k_2 &= \mu_2' + \mu_1 k_1 \\ \mu_3' - \mu_2 k_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

eşitlikleri sağlanır ya da $h \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\left.\begin{aligned} \mu_3' - \mu_2 k_2 &\neq 0 \\ \mu_2' + \mu_1 k_1 &= \mu_3 k_2 \\ 1 + \mu_1' - \mu_2 k_1 &= h\left(\mu_3' - \mu_2 k_2\right) \\ hk_2 - k_1 &\neq 0 \\ hk_1 - k_2 &\neq 0 \\ 1 - h^2 &< 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

eşitlikleri sağlanır. O zaman φ eğrisi bir Bertrand eğridir. Bu durumda, Bertrand eşlenik eğrisi $\varphi^{\star}$, spacelike asli normal vektör N'ye sahip bir spacelike eğridir.

(iii) $\mu_1(s), \mu_2(s)$ ve $\mu_3(s)$ gibi diferensiyellenebilir fonksiyonlar ve $\gamma \in \mathbb{R}, h = \pm 1$

olmak üzere,

$$\left.\begin{array}{rl} \mu_3^{'}-\mu_2k_2 \neq & 0 \\ \mu_2^{'}+\mu_1k_1 = & \mu_3k_2 \\ 1+\mu_1^{'}-\mu_2k_1 = & h\left(\mu_3^{'}-\mu_2k_2\right) \\ \left|\mu_3^{'}-\mu_2k_2\right| = & \gamma^2\left|hk_1-k_2\right| \\ hk_1-k_2 \neq & 0 \\ hk_1+k_2 \neq & 0 \end{array}\right\} \tag{3.5}$$

eşitlikleri sağlanır. O zaman φ eğrisi bir Bertrand eğridir. Bu durumda, Bertrand eşlenik eğrisi $\varphi^{\star}$ bir Cartan null eğridir.

İspat. Kabul edelim ki, φ eğrisi sıfırdan farklı eğrilikleri $k_1(s), k_2(s)$ olan ve yay uzunluğu parametresi s ile parametrelendirilmiş bir spacelike Bertrand eğrisi ve $\varphi^{\star}$ eğrisi de yay uzunluğu ya da pseudo yay parametresi $s^{\star}$ ile parametrelendirilmiş, φ eğrisinin Bertrand eşlenik eğrisi olsun. Yani, her $s \in I$ için I üzerinde $\mu_1(s), \mu_2(s)$ ve $\mu_3(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere, $\varphi^{\star}$ eğrisi şu şekilde ifade edilebilir:

$$\varphi^{\star}(s^{\star}) = \varphi^{\star}(f(s)) = \varphi(s)+\mu_1(s)T(s)+\mu_2(s)N(s)+\mu_3(s)B(s) \tag{3.6}$$

(i) $\varphi^{\star}$ timelike bir eğri olsun. (3.6) denkleminin s parametresine göre türevi alınır ve (2.1) de verilen denklemler kullanılırsa,

$$f^{'}T^{\star} = \left(1+\mu_1^{'}-\mu_2k_1\right)T+\left(\mu_2^{'}+\mu_1k_1-\mu_3k_2\right)N+\left(\mu_3^{'}-\mu_2k_2\right)B \tag{3.7}$$

eşitliği elde edilir. Buradan (3.7) denklemi N ile skaler çarpılırsa,

$$\mu_3k_2 = \mu_2^{'}+k_1 \tag{3.8}$$

bulunur.(3.8) eşitliği (3.7) denkleminde yerine yazılırsa,

$$f^{'}T^{\star} = \left(1+\mu_1^{'}-\mu_2k_1\right)T+\left(\mu_3^{'}-\mu_2k_2\right)B \tag{3.9}$$

elde edilir. Bu (3.9) denklemi kendisi ile çarpılırsa,

$$\left(f^{'}\right)^2 = \left(\mu_3^{'}-\mu_2k_2\right)^2-\left(1+\mu_1^{'}-\mu_2k_1\right)^2 \tag{3.10}$$

bulunur. Ayrıca

$$\delta = \frac{1+\mu_1^{'} - \mu_2 k_1}{f^{'}} \quad , \gamma = \frac{\mu_3^{'} - \mu_2 k_2}{f^{'}} \tag{3.11}$$

eşitliklerindeki seçimler yapılırsa (3.9) denklemi

$$T^{\star} = \delta T + \gamma B \tag{3.12}$$

olarak yazılır. Buradan da (3.12) deki eşitliğin s parametresine göre türevi alınır ve (2.1) de verilen denklemler kullanılırsa,

$$f^{'} k_1^{\star} N^{\star} = \delta^{'} T + (\delta k_1 - \gamma k_2) N + \gamma^{'} B \tag{3.13}$$

elde edilir. (3.13) denklemi kendisiyle çarpılırsa,

$$\delta^{'} = 0 \quad \text{ve} \quad \gamma^{'} = 0 \tag{3.14}$$

olduğu görülür. Öncelikle, $\gamma = 0$ olduğunu varsayalım. O zaman $\mu_3^{'} - \mu_2 k_2 = 0$ dır. Şimdi de kabul edelim ki $\gamma \neq 0$ olsun. Böylece $h = \delta / \gamma$ olmak üzere,

$$1 + \mu_1^{'} - \mu_2 k_1 = h \left(\mu_3^{'} - \mu_2 k_2 \right)$$

elde edilir. Eğer (3.11) da elde edilen eşitlikler (3.13) de yerine yazılırsa,

$$f^{'} k_1^{\star} N^{\star} = (\delta k_1 - \gamma k_2) N \tag{3.15}$$

bulunur. Ayrıca (3.15) eşitliği kendisi ile çarpılır ve (3.10), (3.11) denklemleri de kullanılırsa,

$$\left(f^{'} \right)^2 (k_1^{\star})^2 = \frac{(hk_1 - k_2)^2}{1 - h^2}$$

elde edilir. Burada $hk_1 - k_2 \neq 0$ ve $1 - h^2 > 0$ olarak alınmıştır. $\lambda = \frac{\delta k_1 - \gamma k_2}{f^{'} k_1^{\star}}$ seçimi yapılırsa,

$$N^{\star} = \lambda N \tag{3.16}$$

olur. (3.16) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınır ve (2.1) de verilen denklemler kullanılırsa,

$$f'k_2^\star B^\star = -\lambda k_1 T + \lambda^{'} N - \lambda k_2 B - f'k_1^\star T^\star \tag{3.17}$$

elde edilir. Burada $\lambda^{'} = 0$ dır. Son olarak, (3.7) eşitliği kullanılarak ve aşağıdaki seçimler yapılarak,

$$P(s) = \frac{(hk_1 - k_2)\left(\mu_3^{'} - \mu_2 k_2\right)(hk_2 - k_1)}{\left(f'\right)^2 k_1^\star (1-h^2)}$$

$$Q(s) = \frac{(hk_1 - k_2)\left(\mu_3^{'} - \mu_2 k_2\right)(hk_2 - k_1)h}{\left(f'\right)^2 k_1^\star (1-h^2)}$$

(3.17) denklemi tekrar yazılırsa,

$$f'k_2^\star B^\star = P(s)T + Q(s)B$$

elde edilir. Sonuç olarak $hk_2 - k_1 \neq 0$ dır.

Tersine, φ sıfırdan farklı k_1 ve k_2 eğriliklere sahip yay uzunluğu parametresi s ile parametrelendirilmiş bir spacelike eğri olsun. Öncelikle kabul edelim ki, φ eğrisi $\mu_1(s)$, $\mu_2(s)$ ve $\mu_3(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere, (3.1) de verilen denklemleri sağlasın. O zaman, bir $\varphi^\star$ eğrisi şu şekilde ifade edilebilir:

$$\varphi^\star(s^\star) = \varphi^\star(f(s)) = \varphi(s) + \mu_1(s)T(s) + \mu_2(s)N(s) + \mu_3(s)B(s) \tag{3.18}$$

İfade edilen bu (3.18) denkleminin s parametresine göre türevi alınırsa,

$$\frac{d\varphi^\star}{ds} = \left(1 + \mu_1^{'} - \mu_2 k_1\right)T$$

bulunur. Ayrıca (2.1) de verilen denklemler kullanılarak,

$$f^{'} = \left\|\frac{d\varphi^\star}{ds}\right\| = m_1\left(1 + \mu_1^{'} - \mu_2 k_1\right) > 0$$

burada $m_1 = sgn\left(1 + \mu_1^{'} - \mu_2 k_1\right)$ dır. O zaman $m_2, m_3 = \pm 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} T^\star &= m_1 T \\ N^\star &= m_1 m_2 N \end{aligned}$$

$$B^{\star} = m_1 m_2 m_3 B$$

ve

$$\begin{aligned} k_1^{\star} &= \frac{m_2 k_1}{f'} \\ k_2^{\star} &= \frac{m_3 k_2}{f'} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Sonuç olarak φ eğrisi bir Bertrand eğridir ve $\varphi^{\star}$ eğrisi de, φ eğrisinin bir timelike Bertrand eşlenik eğrisidir.

Şimdi de kabul edelim ki, $\mu_1(s), \mu_2(s)$ ve $\mu_3(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar ve $h \in \mathbb{R}$ olmak üzere, φ eğrisi (3.2) de verilen denklemleri sağlasın. O zaman, bir $\varphi^{\star}$ eğrisi şu şekilde ifade edilebilir:

$$\varphi^{\star}(s^{\star}) = \varphi^{\star}(f(s)) = \varphi(s) + \mu_1(s) T(s) + \mu_2(s) N(s) + \mu_3(s) B(s) \tag{3.19}$$

Burada (3.19) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınırsa,

$$\frac{d\varphi^{\star}}{ds} = \left(1 + \mu_1' - \mu_2 k_1\right) T + \left(\mu_3' - \mu_2 k_2\right) B \tag{3.20}$$

elde edilir. Böylece (3.20) den aşağıdaki denklem elde edilir:

$$f' = \left\| \frac{d\varphi^{\star}}{ds} \right\| = n_1 \left(\mu_3' - \mu_2 k_2\right) \sqrt{1 - h^2}.$$

Burada $n_1 = sgn\left(\mu_3' - \mu_2 k_2\right)$ dır. Elde edilen son denklemlerle birlikte (3.20) eşitliği tekrar yazılırsa,

$$T^{\star} = \frac{n_1}{\sqrt{1 - h^2}} (hT + B) \tag{3.21}$$

bulunur. Ayrıca $g(T^{\star}, T^{\star}) = -1$ dir. Buradan (3.21) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınırsa,

$$\frac{dT^{\star}}{ds^{\star}} = \frac{n_1 (hk_1 - k_2)}{f' \sqrt{1 - h^2}} N \tag{3.22}$$

Böylece $n_2 = sgn\left(hk_1 - k_2\right)$ olacak şekilde,

$$k_1^\star = \left\| \frac{dT^\star}{ds^\star} \right\| = \frac{n_2\left(hk_1 - k_2\right)}{f' \sqrt{1-h^2}}$$

eşitliği elde edilir. Bu (3.22) eşitliğinden de,

$$N^\star = n_1 n_2 N \tag{3.23}$$

bulunur. Ayrıca $g\left(N^\star, N^\star\right) = 1$ olduğu görülür. Aynı şekilde devam edilirse, yani (3.23) denkleminin s parametresine göre türevi alınır ve (2.1) de verilen denklemler ile (3.21), (3.22) eşitlikleri de kullanılırsa,

$$\frac{dN^\star}{ds^\star} - k_1^\star T^\star = \frac{n_1 n_2\left(hk_2 - k_1\right)}{f'\left(1-h^2\right)}\left(T + hB\right)$$

elde edilir ve bunun sonucunda da $n_3 = sgn\left(hk_2 - k_1\right)$ olmak üzere,

$$k_2^\star = \frac{n_3\left(hk_2 - k_1\right)}{f' \sqrt{1-h^2}}$$

eşitliği elde edilir. Son olarak aynı işlemlerin tekrarı ile,

$$B^\star = \frac{n_1 n_2 n_3}{\sqrt{1-h^2}}\left(T + hB\right)$$

bulunur ve $g\left(B^\star, B^\star\right) = 1$ dir. O zaman φ bir timelike eğri ve $\varphi^\star$ eğrisinin de Bertrand eşlenik eğrisidir. Sonuç olarak φ bir Bertrand eğridir.

(ii) $\varphi^\star$ spacelike asli normale sahip bir spacelike eğri olsun. Bu durumda bu kısmın ispatı, yukarıda ispatı verilen $\varphi^\star$ eğrisinin timelike olduğu durumdaki ispat ile benzer olduğundan ispat tekrarlanmamıştır.

(iii) $\varphi^\star$ bir Cartan null eğri olsun. O zaman (3.6) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınır ve (2.1) ve (2.2) de verilen denklemler kullanılırsa,

$$f' T^\star = \left(1 + \mu_1' - \mu_2 k_1\right) T + \left(\mu_2' + \mu_1 k_1 - \mu_3 k_2\right) N + \left(\mu_3' - \mu_2 k_2\right) B \tag{3.24}$$

elde edilir. Buradan (3.24) eşitliği N ile skaler çarpılırsa,

$$\mu_3 k_2 = \mu_2^{'} + \mu_1 k_1 \tag{3.25}$$

bulunur ve elde edilen bu (3.25) eşitliği (3.24) denkleminde yerine yazılırsa,

$$f^{'} T^{\star} = \left(1 + \mu_1^{'} - \mu_2 k_1\right) T + \left(\mu_3^{'} - \mu_2 k_2\right) B \tag{3.26}$$

elde edilir. Ayrıca (3.26) eşitliği kendisi ile çarpılırsa,

$$\left.\begin{aligned} \left(1 + \mu_1^{'} - \mu_2 k_1\right)^2 &= \left(\mu_3^{'} - \mu_2 k_2\right)^2 \\ 1 + \mu_1^{'} - \mu_2 k_1 &= h\left(\mu_3^{'} - \mu_2 k_2\right) \end{aligned}\right\} \tag{3.27}$$

bulunur ve burada $h = \pm 1$ dir. Eğer

$$\delta = \frac{\mu_3^{'} - \mu_2 k_2}{f^{'}} \tag{3.28}$$

eşitliği alınır ve (3.26) denkleminde bu seçilen (3.28) eşitliği yazılırsa,

$$T^{\star} = \delta\left(hT + B\right) \tag{3.29}$$

bulunur. Buradan (3.29) denkleminin s parametresine göre türevi alınır ve (2.1) ve (2.2) de verilen denklemler kullanılırsa,

$$f^{'} N^{\star} = \delta^{'}\left(hT + B\right) + \delta\left(hk_1 - k_2\right) N \tag{3.30}$$

elde edilir. Bulunan bu (3.30) eşitliğinden de

$$\delta^{'} = 0 \quad \text{ve} \quad hk_1 - k_2 \neq 0 \tag{3.31}$$

olduğu söylenir. Ayrıca (3.30) eşitliğinde, (3.31) de bulunan denklemler yerine yazılırsa,

$$f^{'} N^{\star} = \delta\left(hk_1 - k_2\right) N \tag{3.32}$$

dır. Eğer (3.32) denklemi kendisi ile çarpılır ve (2.2) de verilen denklemler ile (3.27), (3.28) eşitlikleri de kullanılırsa,

$$\left|\mu_3' - \mu_2 k_2\right| = \delta^2 \left|hk_1 - k_2\right| \tag{3.33}$$

bulunur. Burada $N^\star = \pm N$ olduğundan,

$$-k_2^\star T^\star - B^\star = \pm\left(-k_1 T - k_2 B\right)$$

ve

$$2k_2^\star = k_1^2 - k_2^2$$

elde edilir. Ayrıca (3.33) eşitliği de, $hk_1 - k_2 \neq 0$ olduğunu gösterir.

Tersine, φ sıfırdan farklı k_1, k_2 eğriliklerine sahip yay uzunluğu parametresi s ile parametrelendirilmiş bir spacelike eğri olsun. $\mu_1(s), \mu_2(s)$ ve $\mu_3(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar ve $\gamma \in \mathbb{R}$, $h = \pm 1$ olmak üzere, φ eğrisi (3.5) de verilen denklemleri sağlasın. O zaman, bir $\varphi^\star$ eğrisi şu şekilde ifade edilebilir,

$$\varphi^\star\left(s^\star\right) = \varphi^\star\left(f\left(s\right)\right) = \varphi\left(s\right) + \mu_1\left(s\right) T\left(s\right) + \mu_2\left(s\right) N\left(s\right) + \mu_3\left(s\right) B\left(s\right) \tag{3.34}$$

Eğer (3.34) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınırsa,

$$\frac{d\varphi^\star}{ds} = \left(\mu_3' - \mu_2 k_2\right)\left(hT + B\right) \tag{3.35}$$

ve

$$\frac{d^2\varphi^\star}{ds^2} = \left(\mu_3' - \mu_2 k_2\right)'\left(hT + B\right) + \left(\mu_3' - \mu_2 k_2\right)\left(hk_1 - k_2\right) N$$

elde edilir. Ayrıca burada $m_2 = sgn\left(\mu_3' - \mu_2 k_2\right)$ ve $m_3 = sgn\left(hk_1 - k_2\right)$ olmak üzere,

$$f' = \sqrt{m_2\left(\mu_3' - \mu_2 k_2\right)}\sqrt{m_3\left(hk_1 - k_2\right)}$$

olduğu görülür. Bunlara bağlı olarak $m_4 = sgn\left(\delta\right)$ olmak üzere, (3.35) denklemi tekrar yazılırsa,

$$T^\star = m_4 \delta\left(hT + B\right) \tag{3.36}$$

bulunur. Aynı zaman da $g\left(T^\star, T^\star\right) = 0$ eşitliği de sağlanır. Önceki yapılan işlemler tekrarlanırsa, yani (3.36) denkleminin s parametresine göre türevi alınırsa,

$$\frac{dT^{\star}}{ds^{\star}} = \frac{m_4\delta\left(hk_1 - k_2\right)}{f^{'}}N = m_3m_4N$$

elde edilir. Böylece elde edilen eğrinin birinci eğriliği $k_1^{\star} = 1$ bulunur. Ayrıca,

$$N^{\star} = m_3m_4N$$

dır ve $g\left(N^{\star}, N^{\star}\right) = 1$ eşitliği sağlanır. Buradan aynı işlemler tekrar edilirse,

$$B^{\star} = \frac{m_4}{-2\delta}\left(-hT + B\right)$$

bulunur. $g\left(B^{\star}, B^{\star}\right) = 0$ ve $g\left(T^{\star}, B^{\star}\right) = 1$ eşitlikleri sağlanır. Son olarak da eğrinin ikinci eğriliği,

$$k_2^{\star} = g\left(\frac{dN^{\star}}{ds^{\star}}, B^{\star}\right) = \frac{m_3\left(hk_1 + k_2\right)}{-2f'\delta} \neq 0$$

olarak elde edilir. O zaman $\varphi^{\star}$ eğrisi bir Cartan null eğridir ve φ eğrisinin Bertrand eşlenik eğrisidir. Böylece φ eğrisi bir Bertrand eğridir.

Teorem 3.2 $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayı $\mathbb{E}_1^3$'de, sıfırdan farklı eğrilikleri k_1, k_2 ve timelike asli normal vektör N'ye sahip bir birim hızlı spacelike eğri olsun. φ eğrisinin, Bertrand eşlenik eğrisi $\varphi^{\star} : I^{\star} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ olan bir Bertrand eğri olması için gerek ve yeter şart aşağıda verilen koşullardan birinin sağlanmasıdır:

$\mu_1(s), \mu_2(s)$ ve $\mu_3(s)$ gibi diferensiyellenebilir fonksiyonları için,

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 k_1 &= \mu_2^{'} + \mu_3 k_2 \\ \mu_3^{'} + \mu_2 k_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.37}$$

eşitlikleri sağlanır ya da $h \in \mathbb{R}$ için,

$$\left.\begin{aligned} \mu_3' + \mu_2 k_2 &\neq 0 \\ \mu_1 k_1 &= \mu_2' + \mu_3 k_2 \\ 1 + \mu_1' - \mu_2 k_1 &= h\left(\mu_3' + \mu_2 k_2\right) \\ hk_2 - k_1 &\neq 0 \\ hk_1 - k_2 &\neq 0 \\ h &\neq 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.38}$$

eşitlikleri sağlanır. O zaman φ eğrisi bir Bertrand eğridir. Bu durumda Bertrand eşlenik eğrisi $\varphi^\star$, timelike asli normal $N^\star$ vektörüne sahip bir spacelike eğridir.

İspat. Bu teoremin ispatı, yukarıda verilen Teorem 3.1'in ispatına benzer olduğu için ispatı tekrarlanmamıştır.

Sonuç 3.1 $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$, Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olan bir spacelike Bertrand eğri ve $\varphi^\star : I^\star \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$, Frenet çatısı $\{T^\star, N^\star, B^\star\}$ olan φ eğrisinin Bertrand eşlenik eğrisi olsun. φ bir slant helis ise, o zaman $\varphi^\star$ bir slant helistir ancak ve ancak

$$\mu_3'(s) - \mu_2(s)k_2(s) = \text{sabit}$$

eşitliği sağlanır ve burada $\mu_3(s) = g(\varphi^\star, B)$, $\mu_2(s) = g(\varphi^\star, N)$ dır.

İspat. Bu sonucun ispatı, yukarıda verilen Teorem 3.1'in ispatına benzer olduğu için ispatı tekrarlanmamıştır.

3.1. Örnekler

Bu bölümde, yukarıda açıklanan yeni yaklaşıma göre Bertrand eğrileri ve bu eğrilerin Bertrand eşlenik eğrileri için örnekler oluşturulmuştur. Spacelike rektifiyen eğri örnekleri [37] makalesinden alınmıştır.

Örnek 3.1 $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$, eğrilikleri $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ olan bir spacelike Bertrand eğri olsun. Teorem 3.1' deki durumlar sağlansın. Kabul edelim ki $\mu_2 = \mu_0 \in \mathbb{R}$ olsun. O zaman

$$\mu_1 k_1 = \mu_3 k_2$$

$$1+\mu_1^{'}-\mu_0 k_1 \;=\; h\left(\mu_3^{'}-\mu_0 k_2\right)$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\mu_1(s)=\frac{k_2\left(s-\mu_0\int\left(k_1-hk_2\right)ds\right)}{hk_1-k_2}$$

ve

$$\mu_3(s)=\frac{k_1\left(s-\mu_0\int\left(k_1-hk_2\right)ds\right)}{hk_1-k_2}$$

elde edilir. Böylece Bertrand eşlenik eğrisi $\varphi^{\star}$ aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}\varphi^{\star}(s) \;=\; & \varphi(s)+\frac{k_2\left(s-\mu_0\int\left(k_1-hk_2\right)ds\right)}{hk_1-k_2}T(s)+\mu_0 N(s)\\ & +\frac{k_1\left(s-\mu_0\int\left(k_1-hk_2\right)ds\right)}{hk_1-k_2}B(s)\end{aligned}$$

Burada Bertrand eşlenik eğrisi $\varphi^{\star}$, sırasıyla, $h^2>1$, $h^2<1$ ya da $h^2=1$ ise spacelike, timelike ya da null eğridir.

Örnek 3.2 $\mathbb{E}_1^3$'de eğrilikleri $k_1=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ ve $k_2=-\frac{3}{\sqrt{2}}$ olan spacelike asli normal vektör N'ye sahip bir spacelike dairesel helis eğrisi,

$$\varphi(s)=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\sinh\sqrt{3}s,\cosh\sqrt{3}s,3s\right)$$

denklemi ile verilsin. Bu eğrinin Frenet vektörleri de aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}T(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cosh\sqrt{3}s,\sinh\sqrt{3}s,\sqrt{3}\right),\\ N(s) &= \left(\sinh\sqrt{3}s,\cosh\sqrt{3}s,0\right),\\ B(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}\cosh\sqrt{3}s,\sqrt{3}\sinh\sqrt{3}s,1\right).\end{aligned}$$

(i) Eğer Teorem 3.1-(i) durumundaki koşulları sağlayan $\mu_1=-1,\mu_2=\sqrt{6},\mu_3=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ve $h=\frac{-2}{3\sqrt{3}}$ seçimleri yapılırsa $\varphi^{\star}$ eğrisi,

$$\varphi^{\star}(s)=\frac{1}{\sqrt{23}\sqrt{6}}\left(7\sinh\sqrt{3}s,7\cosh\sqrt{3}s,3s-2\right)$$

olarak ifade edilir. Gerekli hesaplamalarla $\varphi^{\star}$ eğrisinin eğrilikleri $k_1^{\star}=7\sqrt{3}$, $k_2^{\star}=$

$-\frac{3}{\sqrt{46}}$ ve Frenet vektörleri de,

$$\begin{aligned}
T^{\star}(s) &= \left(\frac{7}{\sqrt{46}}\cosh\sqrt{3}s, \frac{7}{\sqrt{46}}\sinh\sqrt{3}s, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{46}}\right), \\
N^{\star}(s) &= \left(\sinh\sqrt{3}s, \cosh\sqrt{3}s, 0\right), \\
B^{\star}(s) &= \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{46}}\cosh\sqrt{3}s, \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{46}}\sinh\sqrt{3}s, \frac{7}{\sqrt{46}}\right)
\end{aligned}$$

bulunur. O zaman φ eğrisi bir Bertrand eğridir. Böylece, $\varphi^{\star}$ eğrisi φ eğrisinin bir timelike Bertrand eşlenik eğrisidir.

(ii) Eğer Teorem 3.1-(ii) durumundaki koşulları sağlayan $\mu_1 = \sqrt{3}$, $\mu_2 = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$, $\mu_3 = -1$ ve $h = \frac{2}{\sqrt{3}}$ seçimleri yapılırsa $\varphi^{\star}$ eğrisi,

$$\varphi^{\star}(s) = \left(\frac{5}{\sqrt{6}}\sinh\sqrt{3}s, \frac{5}{\sqrt{6}}\cosh\sqrt{3}s, \frac{3(3s+2\sqrt{3})}{\sqrt{6}}\right)$$

olarak ifade edilir. Gerekli hesaplamalarla $\varphi^{\star}$ eğrisinin eğrilikleri $k_1^{\star} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $k_2^{\star} = -\frac{9}{\sqrt{2}}$ ve Frenet vektörleri de,

$$\begin{aligned}
T^{\star}(s) &= \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\cosh\sqrt{3}s, \frac{5}{\sqrt{2}}\sinh\sqrt{3}s, \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right), \\
N^{\star}(s) &= \left(\sinh\sqrt{3}s, \cosh\sqrt{3}s, 0\right), \\
B^{\star}(s) &= \left(\frac{-3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cosh\sqrt{3}s, \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sinh\sqrt{3}s, \frac{5}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

bulunur. O zaman φ eğrisi bir Bertrand eğridir. Böylece, $\varphi^{\star}$ eğrisi φ eğrisinin spacelike bir Bertrand eşlenik eğrisidir.

(iii) Eğer Teorem 3.1-(iii) durumundaki koşulları sağlayan $\mu_1(s) = \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{3+\sqrt{3}}\right)s$, $\mu_2 = 1$, $\mu_3(s) = \left(-\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{3+\sqrt{3}}\right)s$ ve $h = 1$ seçimleri yapılırsa $\varphi^{\star}$ eğrisi,

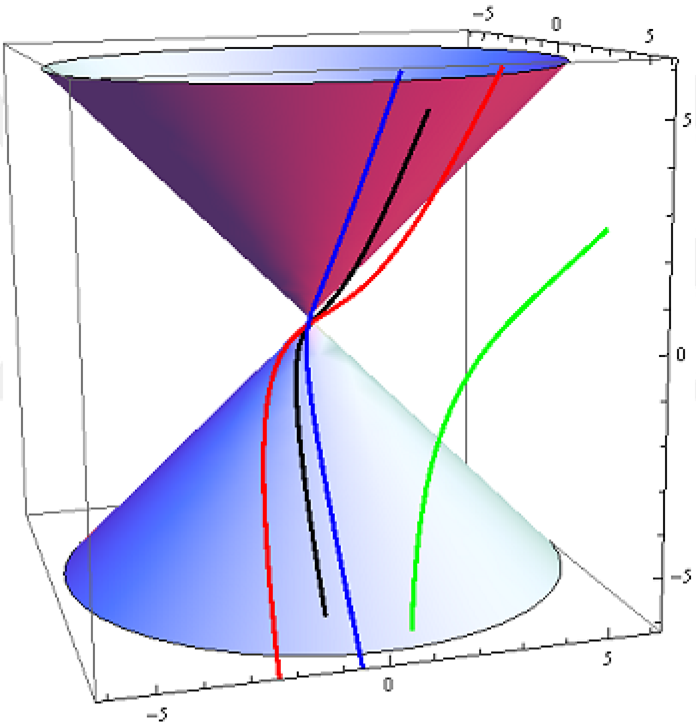
$$\varphi^{\star}(s) = \left(\frac{1}{3}\sinh\sqrt{3}s, \frac{1}{3}\cosh\sqrt{3}s, \frac{\sqrt{3}}{3}s\right)$$

olarak ifade edilir. Gerekli hesaplamalarla $\varphi^{\star}$ eğrisinin eğrilikleri $k_1^{\star} = 1$, $k_2^{\star} = -\frac{3}{2}$ ve

Frenet vektörleri de,

$$
\begin{aligned}
T^{\star}(s) &= \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cosh\sqrt{3}s, \frac{\sqrt{3}}{3}\sinh\sqrt{3}s, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \\
N^{\star}(s) &= \left(\sinh\sqrt{3}s, \cosh\sqrt{3}s, 0\right), \\
B^{\star}(s) &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cosh\sqrt{3}s, \frac{-\sqrt{3}}{2}\sinh\sqrt{3}s, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)
\end{aligned}
$$

bulunur. O zaman φ eğrisi bir Bertrand eğridir. Böylece $\varphi^{\star}$ eğrisi, φ eğrisinin bir Cartan null Bertrand eşlenik eğrisidir.



Şekil 3.1: Örnek 3.2.'de verilen φ eğrisi ve bu eğriye ait olan Bertrand eşlenik eğrilerinin grafikleri; kırmızı grafik φ eğrisi, mavi grafik timelike Bertrand eşlenik eğrisi, yeşil grafik spacelike Bertrand eşlenik eğrisi ve siyah grafik Cartan null Bertrand eşlenik eğrisi olarak gösterilmiştir.

Örnek 3.3 $\mathbb{E}_1^3$'de eğrilikleri $k_1(s) = s$ ve $k_2(s) = -s$ olan spacelike asli normal vektör N'ye sahip bir spacelike genel helis eğrisi,

$$\varphi(s) = \left(-\frac{s^5}{40}, -\frac{s^5}{40} + s, \frac{s^3}{6}\right)$$

denklemi ile verilsin. Bu eğrinin Frenet vektörleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} T(s) &= \left(-\frac{s^4}{8}, -\frac{s^4}{8}+1, \frac{s^2}{2}\right), \\ N(s) &= \left(-\frac{s^2}{2}, -\frac{s^2}{2}, 1\right), \\ B(s) &= \left(-\frac{s^4}{8}-1, -\frac{s^4}{8}, \frac{s^2}{2}\right). \end{aligned}$$

(i) Eğer Teorem 3.1-(i) durumundaki koşulları sağlayan $\mu_1 = -1, \mu_2 = \sqrt{6}, \mu_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ve $h = \frac{-2}{3\sqrt{3}}$ seçimleri yapılırsa, $\varphi^\star$ eğrisi,

$$\varphi^\star(s) = \left(-\frac{s^5}{40} - \frac{2s}{3}, -\frac{s^5}{40} + \frac{s}{3}, \frac{s^3}{6} + 1\right)$$

olarak ifade edilir. Gerekli hesaplamalarla $\varphi^\star$ eğrisinin eğrilikleri $k_1^\star(s) = 3s$, $k_2^\star(s) = -3s$ ve Frenet vektörleri de,

$$\begin{aligned} T^\star(s) &= \left(-\frac{\sqrt{3}s^4}{8} - \frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}s^4}{8} + \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}s^2}{8}\right), \\ N^\star(s) &= \left(-\frac{s^2}{2}, -\frac{s^2}{2}, 1\right), \\ B^\star(s) &= \left(-\frac{\sqrt{3}s^4}{8} - \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}s^4}{8} + \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}s^2}{2}\right) \end{aligned}$$

bulunur. O zaman φ eğrisi bir Bertrand eğridir. Böylece, $\varphi^\star$ eğrisi φ eğrisinin bir timelike Bertrand eşlenik eğrisidir.

(ii) Eğer Teorem 3.1-(ii) durumundaki koşulları sağlayan $\mu_1(s) = \frac{s^2}{2} + 2s$, $\mu_2 = 1$, $\mu_3(s) = -\frac{s^2}{2} - 2s$ ve $h = -\frac{3}{2}$ seçimleri yapılırsa $\varphi^\star$ eğrisi,

$$\varphi^\star(s) = \left(-\frac{s^5}{40} + 2s, -\frac{s^5}{40} + 3s, \frac{s^3}{6} + 1\right)$$

olarak ifade edilir. Gerekli hesaplamalarla $\varphi^\star$ eğrisinin eğrilikleri $k_1^\star(s) = \frac{s}{5}$, $k_2^\star(s) = -\frac{s}{\sqrt{5}}$ ve Frenet vektörleri de,

$$T^\star(s) = \left(-\frac{s^4}{8\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{s^4}{8\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{s^2}{2\sqrt{5}}\right),$$

$$
\begin{aligned}
N^{\star}(s) &= \left(-\frac{s^2}{2},-\frac{s^2}{2},1\right), \\
B^{\star}(s) &= \left(-\frac{s^4}{8\sqrt{5}}-\frac{3}{\sqrt{5}},-\frac{s^4}{8\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{s^2}{2\sqrt{5}}\right)
\end{aligned}
$$

bulunur. O zaman φ eğrisi bir Bertrand eğridir. Böylece, $\varphi^{\star}$ eğrisi φ eğrisinin bir spacelike Bertrand eşlenik eğrisidir.

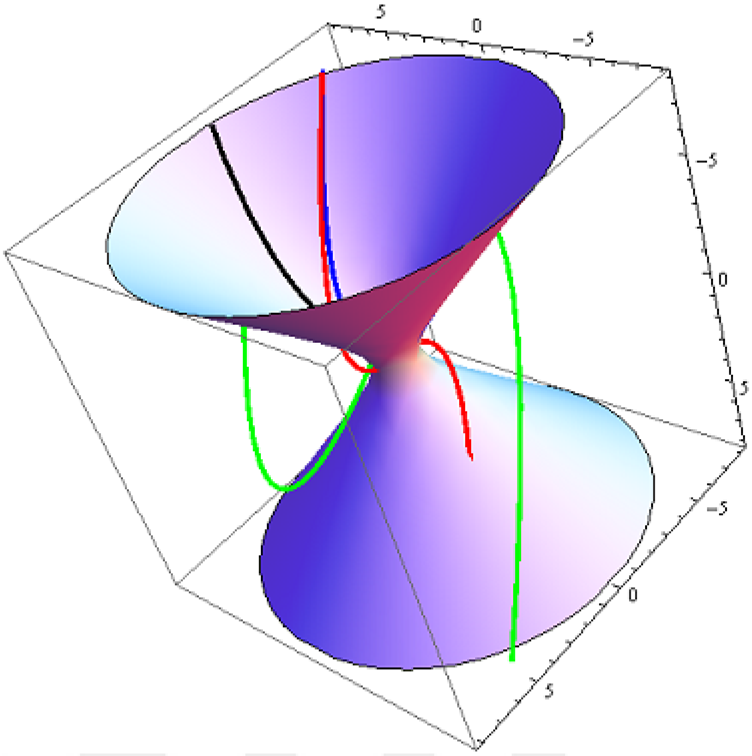
(iii) Eğer Teorem 3.1-(iii) durumundaki koşulları sağlayan $\mu_1(s) = -\frac{s^6}{12}+\frac{s^5}{15}+s^2-s$, $\mu_2(s) = -\frac{s^4}{2}+\frac{s^3}{3}, \mu_3(s) = \frac{s^6}{12}-\frac{s^5}{15}+s^2$, $\gamma = 1$ ve $h = 1$ seçimleri yapılırsa, $\varphi^{\star}$ eğrisi,

$$
\varphi^{\star}(s) = \left(-\frac{s^6}{12}-s^2,-\frac{s^6}{12}+s^2,\frac{s^4}{2}\right)
$$

olarak ifade edilir. Gerekli hesaplamalarla $\varphi^{\star}$ eğrisinin eğrilikleri $k_1^{\star} = 1$, $k_2^{\star} = 0$ ve Frenet vektörleri de,

$$
\begin{aligned}
T^{\star}(s) &= \left(-\frac{s^4}{4}-1,-\frac{s^4}{4}+1,s^2\right), \\
N^{\star}(s) &= \left(-\frac{s^2}{2},-\frac{s^2}{2},1\right), \\
B^{\star}(s) &= \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)
\end{aligned}
$$

bulunur. O zaman φ eğrisi bir Bertrand eğridir. Böylece, $\varphi^{\star}$ eğrisi φ eğrisinin bir Cartan null Bertrand eşlenik eğrisidir.



Şekil 3.2: Örnek 3.3'te verilen φ eğrisi ve bu eğriye ait olan Bertrand eşlenik eğrilerinin grafikleri; kırmızı grafik φ eğrisi, mavi grafik timelike Bertrand eşlenik eğrisi, yeşil grafik spacelike Bertrand eşlenik eğrisi ve siyah grafik Cartan null Bertrand eşlenik eğrisi olarak gösterilmiştir.

Örnek 3.4 $\mathbb{E}_1^3$'de eğrilikleri $k_1(s) = \frac{\sqrt{5}}{3s}$ ve $k_2(s) = \frac{2}{3s}$ olan timelike asli normal vektör N'ye sahip bir spacelike genel helis eğrisi,

$$\varphi(s) = \left(\frac{1}{12}\left(16s + 5s^2 - 10\ln s\right), \frac{\sqrt{5}}{6}\left(4s + s^2 - 2\ln s\right), \frac{\sqrt{5}}{12}\left(s^2 + 2\ln s\right)\right)$$

denklemi ile verilsin. Bu eğrinin Frenet vektörleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} T(s) &= \left(\frac{5s^2+8s-5}{6s}, \frac{\sqrt{5}\left(s^2+2s-1\right)}{3s}, \frac{\sqrt{5}(s^2+1)}{6s}\right), \\ N(s) &= \left(-\frac{\sqrt{5}(s^2+1)}{2s}, -\frac{s^2+1}{s}, \frac{1-s^2}{2s}\right), \\ B(s) &= \left(\frac{\sqrt{5}\left(1-s^2+2s\right)}{3s}, \frac{2-2s^2+5s}{3s}, -\frac{1+s^2}{3s}\right). \end{aligned}$$

Eğer Teorem 3.2.'deki koşulları sağlayan $\mu_1(s) = \frac{14}{3\sqrt{5}}\ln s - 2s, \mu_2 = 1, \mu_3(s) = \frac{7}{3}\ln s -$

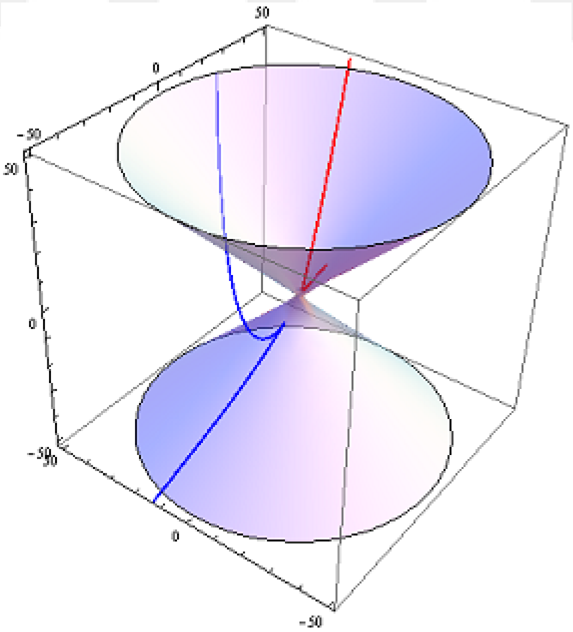
$\sqrt{5}s$ ve $h=\frac{1}{\sqrt{5}}$ seçimleri yapılırsa $\varphi^{\star}$ eğrisi,

$$\varphi^{\star}(s)=\left(\begin{array}{c}-\frac{(6\sqrt{5}+(56+6\sqrt{5})s^2-5s^3}{12s}+\frac{(-25+84\sqrt{5})\ln s}{30},\frac{-6-2(3+7\sqrt{5})s^2+\sqrt{5}s^3}{6s}+\frac{(-21+\sqrt{5})\ln s}{3},\\ \frac{6-6s^2+\sqrt{5}s^3}{12s}+\frac{\sqrt{5}\ln s}{6}\end{array}\right)$$

olarak ifade edilir. Gerekli hesaplamalarla $\varphi^{\star}$ eğrisinin eğrilikleri $k_1^{\star}(s)=\frac{5\sqrt{5}}{18(3\sqrt{5}-5s)}$, $k_2^{\star}(s)=\frac{5\sqrt{\frac{23}{3}}}{6(3\sqrt{5}-5s)}$ ve Frenet vektörleri de,

$$\begin{aligned}
T^{\star}(s)&=\left(-\frac{(3\sqrt{5}-5s)(-5+s(-28+5s))}{6\sqrt{30}s^2\sqrt{5+\frac{9-6\sqrt{5}s}{s^2}}},\frac{\sqrt{\frac{5}{6}}(-3+\sqrt{5}s)(-1-7s+s^2)}{3s^2\sqrt{5+\frac{9-6\sqrt{5}s}{s^2}}},\frac{\sqrt{\frac{5}{6}}(-3+\sqrt{5}s)(1+s^2)}{6s^2\sqrt{5+\frac{9-6\sqrt{5}s}{s^2}}}\right)\\
N^{\star}(s)&=\left(-\frac{\sqrt{5}(s^2+1)}{2s},-\frac{s^2+1}{s},\frac{1-s^2}{2s}\right)\\
B^{\star}(s)&=\left(\frac{(-3\sqrt{5}+5s)(-59+s(-28+59s))}{18\sqrt{46}s^2\sqrt{5+\frac{9-6\sqrt{5}s}{s^2}}},\frac{(-3\sqrt{5}+5s)(-59+s(-35+59s))}{9\sqrt{46}s^2\sqrt{5+\frac{9-6\sqrt{5}s}{s^2}}},\frac{59(-3+\sqrt{5}s)(1+s^2)}{18\sqrt{46}s^2\sqrt{5+\frac{9-6\sqrt{5}s}{s^2}}}\right)
\end{aligned}$$

bulunur. O zaman φ eğrisi bir Bertrand eğridir. Böylece $\varphi^{\star}$ eğrisi φ eğrisinin timelike asli normal vektör N'ye sahip bir spacelike Bertrand eşlenik eğrisidir.



Şekil 3.3: Örnek 3.4' te verilen φ eğrisi ve bu eğriye ait olan Bertrand eşlenik eğrisinin grafikleri; kırmızı grafik φ eğrisi, mavi grafik timelike asli normal vektöre sahip spacelike Bertrand eşlenik eğrisi olarak gösterilmiştir.

Örnek 3.5 $\mathbb{E}_1^3$'de eğrilikleri $k_1(s)=\frac{\tanh(1)}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}$ and $k_2(s)=\frac{s\tanh(1)}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}$ olan timelike asli normal vektör N'ye sahip bir spacelike rektifiyen slant helis eğrisi,

$$\varphi(s)=\left(\begin{array}{c}-\sinh(1)\sqrt{1+s^2},\cosh(1)\sqrt{1+s^2}\cos[\operatorname{sech}(1)\arctan(s)],\\ \cosh(1)\sqrt{1+s^2}\sin[\operatorname{sech}(1)\arctan(s)]\end{array}\right)$$

denklemi ile verilsin. Bu eğrinin Frenet vektörleri de aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
T(s)=&\left(\begin{array}{c}-\frac{\sinh(1)s}{1+s^2},\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\left(\cosh(1)s\cos[\operatorname{sech}(1)\arctan(s)]-\sin[\operatorname{sech}(1)\arctan(s)]\right),\\ \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\left(\cos[\operatorname{sech}(1)\arctan(s)]+\cosh(1)s\sin[\operatorname{sech}(1)\arctan(s)]\right)\end{array}\right),\\
N(s)=&\left(\cosh(1),-\sinh(1)\cos[\operatorname{sech}(1)\arctan(s)],-\sinh(1)\sin[\operatorname{sech}(1)\arctan(s)]\right),\\
B(s)=&\left(\begin{array}{c}-\frac{\sinh(1)}{\sqrt{1+s^2}},\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\left(\cosh(1)\cos[\operatorname{sech}(1)\arctan(s)]+s\sin[\operatorname{sech}(1)\arctan(s)]\right),\\ \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\left(s\cos[\operatorname{sech}(1)\arctan(s)]+\cosh(1)\sin[\operatorname{sech}(1)\arctan(s)]\right)\end{array}\right).
\end{aligned}$$

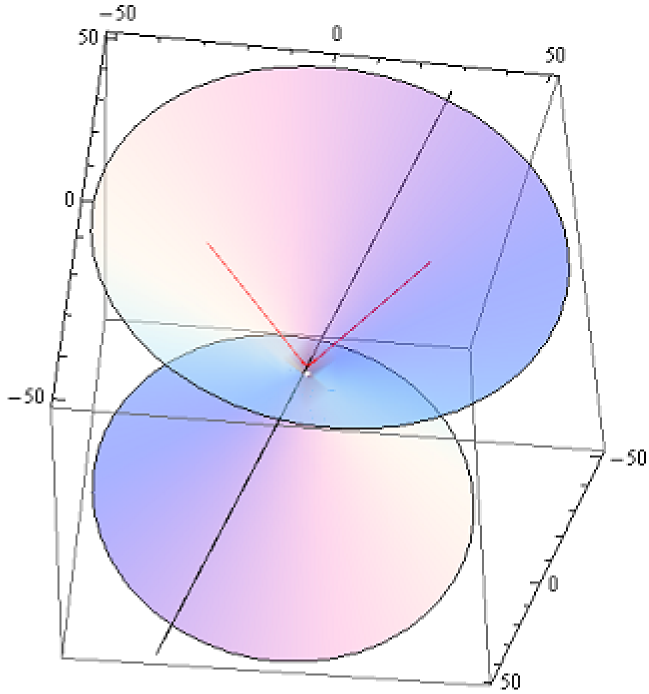
Eğer Teorem 3.2.'deki koşulları sağlayan $\mu_1(s)=\frac{s\tanh(1)}{\sqrt{1+s^2}}-\frac{s^2}{s-1},\mu_2=1,\mu_3(s)=\frac{\tanh(1)}{\sqrt{1+s^2}}-\frac{s}{s-1}$ ve $h=1$ seçimleri yapılırsa $\varphi^\star$ eğrisi,

$$\varphi^\star(s)=\left(\begin{array}{c}\operatorname{sech}(1)+\frac{\sinh(1)\sqrt{1+s^2}}{-1+s},\\ -\frac{\cosh(1)\sqrt{1+s^2}\cos[\operatorname{sech}(1)\arctan(s)]}{-1+s},-\frac{\cosh(1)\sqrt{1+s^2}\sin[\operatorname{sech}(1)\arctan(s)]}{-1+s}\end{array}\right)$$

olarak ifade edilir. Gerekli hesaplamalarla $\varphi^\star$ eğrisinin eğrilikleri $k_1^\star(s)=\frac{\tanh(1)(-1+s)^3}{2\left(1+s^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, $k_2^\star(s)=\frac{\tanh(1)(-1+s)^2(1+s)}{2\left(1+s^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ ve Frenet çatısı da,

$$\begin{aligned}
T^\star(s)=&\ \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+s^2}}\left(\begin{array}{c}-\sinh(1)(1+s),\\ \cosh(1)(1+s)\cos[\operatorname{sech}(1)\arctan(s)]+(-1+s)\sin[\operatorname{sech}(1)\arctan(s)],\\ (-1+s)\cos[\operatorname{sech}(1)\arctan(s)]+\cosh(1)(1+s)\sin[\operatorname{sech}(1)\arctan(s)]\end{array}\right)\\
N^\star(s)=&\ \left(-\cosh(1),\sinh(1)\cos[\operatorname{sech}(1)\arctan(s)],\sinh(1)\sin[\operatorname{sech}(1)\arctan(s)]\right)\\
B^\star(s)=&\ \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+s^2}}\left(\begin{array}{c}-\sinh(1)(-1+s),\\ \cosh(1)(-1+s)\cos[\operatorname{sech}(1)\arctan(s)]-(1+s)\sin[\operatorname{sech}(1)\arctan(s)],\\ (1+s)\cos[\operatorname{sech}(1)\arctan(s)]+\cosh(1)(-1+s)\sin[\operatorname{sech}(1)\arctan(s)]\end{array}\right)
\end{aligned}$$

bulunur. O zaman φ eğrisi bir Bertrand eğridir. Böylece $\varphi^\star$ eğrisi, φ eğrisinin timelike asli normal vektör N'ye sahip bir spacelike Bertrand eşlenik eğrisidir.



Şekil 3.4: Örnek 3.5' te verilen φ eğrisi ve bu eğriye ait olan Bertrand eşlenik eğrisinin grafikleri; kırmızı grafik φ eğrisi, siyah grafik timelike asli normal vektöre sahip spacelike Bertrand eşlenik eğrisi olarak gösterilmiştir.

4 . MINKOWSKI 3-UZAYINDA TIMELIKE BERTRAND EĞRİLER

Bu bölümde, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında bir timelike eğri için literatürde yapılan işlemlerden farklı olan önceki bölümde anlatılan yeni yaklaşım kullanılarak Bertrand eğri olma karakterizasyonları incelenecektir. Bunun sonucunda elde edilen teorem ifade ve ispat edilip örnekler grafikleriyle verilecektir.

Kabul edelim ki $\mathbb{E}_1^3$'de $\varphi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}_1^3$, Frenet çatısı $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ve sıfırdan farklı eğrilikleri $k_1(s), k_2(s)$ olan bir timelike Bertrand eğrisi olsun. Bu durumda $\varphi^\star : I^\star \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}_1^3$, Frenet çatısı $\{T^\star(s), N^\star(s), B^\star(s)\}$ ve $k_1^\star(s), k_2^\star(s)$ eğriliklerine sahip φ eğrisinin bir Bertrand eşlenik eğrisi olsun. O zaman $\varphi^\star$ eğrisi $\mu_1(s), \mu_2(s), \mu_3(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$\varphi^\star(s^\star) = \varphi^\star(f(s)) = \varphi(s) + \mu_1(s)T(s) + \mu_2(s)N(s) + \mu_3(s)B(s)$$

olarak yazılabilir. Bu timelike φ eğrisinin asli normal vektörü N spacelike olduğunda φ eğrisinin Bertrand eşlenik eğrisi $\varphi^\star$ için aşağıdaki durumlardan birisi mümkündür:

(i) $\varphi^\star$ bir timelike eğridir,

(ii) $\varphi^\star$ spacelike asli normal vektöre sahip bir spacelike eğridir,

(iii) $\varphi^\star$ bir Cartan null eğridir.

Aşağıdaki teoremde olabilecek tüm bu durumlar ayrı ayrı ele alınmıştır.

Teorem 4.1 $\varphi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-uzayında sıfırdan farklı $k_1(s), k_2(s)$ eğriliklerine sahip bir birim hızlı timelike eğri olsun. O zaman φ eğrisinin, Bertrand eşlenik eğrisi $\varphi^\star : I^\star \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}_1^3$ olan bir Bertrand eğri olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki durumlardan birinin sağlanmasıdır:

(i) $\mu_1(s), \mu_2(s), \mu_3(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\left.\begin{aligned} \mu_2' + \mu_1 k_1 &= \mu_3 k_2 \\ \mu_3{}' + \mu_2 k_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

eşitlikleri sağlanır ya da h reel sayısı için

$$\left.\begin{array}{ll} \mu_2' + \mu_1 k_1 & = \mu_3 k_2 \\ \mu_3{}' + \mu_2 k_2 & \neq 0 \\ 1 + \mu_1' + \mu_2 k_1 & = h\left(\mu_3{}' + \mu_2 k_2\right) \\ k_1 - h k_2 & \neq 0 \\ h k_1 - k_2 & \neq 0 \\ h^2 - 1 & > 0 \end{array}\right\} \tag{4.2}$$

eşitlikleri sağlanır. O zaman φ eğrisi bir Bertrand eğridir. Bu durumda, Bertrand eşlenik eğrisi $\varphi^{\star}$ bir timelike eğridir.

(ii) $\mu_1(s), \mu_2(s), \mu_3(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonları ve h reel sayısı için

$$\left.\begin{array}{ll} \mu_2' + \mu_1 k_1 & = \mu_3 k_2 \\ \mu_3{}' + \mu_2 k_2 & \neq 0 \\ 1 + \mu_1' + \mu_2 k_1 & = h\left(\mu_3{}' + \mu_2 k_2\right) \\ k_1 - h k_2 & \neq 0 \\ h k_1 - k_2 & \neq 0 \\ h^2 - 1 & < 0 \end{array}\right\} \tag{4.3}$$

eşitlikleri sağlanır. O zaman φ eğrisi bir Bertrand eğridir. Bu durumda, Bertrand eşlenik eğrisi $\varphi^{\star}$ spacelike asli normal vektör N'ye sahip bir spacelike eğridir.

(iii) $\mu_1(s), \mu_2(s), \mu_3(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonları ve γ reel sayısı, $h = \pm 1$ için

$$\left.\begin{array}{ll} \mu_2' + \mu_1 k_1 & = \mu_3 k_2 \\ \mu_3{}' + \mu_2 k_2 & \neq 0 \\ 1 + \mu_1' + \mu_2 k_1 & = h\left(\mu_3{}' + \mu_2 k_2\right) \\ \left|\mu_3{}' + \mu_2 k_2\right| & = \gamma^2 \left|h k_1 - k_2\right| \\ h k_1 - k_2 & \neq 0 \\ h k_1 + k_2 & \neq 0 \end{array}\right\} \tag{4.4}$$

eşitlikleri sağlanır. O zaman φ eğrisi bir Bertrand eğridir. Bu durumda, Bertrand eşlenik eğrisi $\varphi^{\star}$ bir Cartan null (lightlike) eğridir.

İspat. Kabul edelim ki, φ eğrisi $k_1(s), k_2(s)$ sıfırdan farklı eğrilikleri olan ve yay parametresi s ile parametrelendirilmiş bir timelike Bertrand eğrisi ve $\varphi^{\star}$ eğrisi de yay uzunluğu ya da pseudo yay parametresi $s^{\star}$ ile parametrelendirilmiş φ eğrisinin Bertrand eşlenik eğrisi olsun. O zaman her $s \in I$ için $\mu_1(s), \mu_2(s), \mu_3(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere $\varphi^{\star}$ eğrisi

$$\varphi^{\star}(s^{\star}) = \varphi^{\star}(f(s)) = \varphi(s) + \mu_1(s)T(s) + \mu_2(s)N(s) + \mu_3(s)B(s) \tag{4.5}$$

olarak yazılabilir.

(i) $\varphi^{\star}$ eğrisi timelike bir eğri olsun. (4.5) eşitliğinin s ye göre türevi alınıp (2.1) de verilen denklemler kullanılırsa,

$$f^{'}T^{\star} = \left(1 + \mu_1^{'} + \mu_2 k_1\right)T + \left(\mu_2^{'} + \mu_1 k_1 - \mu_3 k_2\right)N + \left(\mu_3^{'} + \mu_2 k_2\right)B \tag{4.6}$$

elde edilir. Elde edilen bu (4.6) eşitliğinin N vektörü ile skaler çarpımı yapılırsa,

$$\mu_3 k_2 = \mu_2^{'} + k_1 \tag{4.7}$$

dir. Bu (4.7)denklemi (4.6) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$f^{'}T^{\star} = \left(1 + \mu_1^{'} + \mu_2 k_1\right)T + \left(\mu_3^{'} + \mu_2 k_2\right)B \tag{4.8}$$

bulunur. Burada (4.8) eşitliğinin kendisi ile çarpımı yapılırsa,

$$\left(f^{'}\right)^2 = \left(1 + \mu_1^{'} + \mu_2 k_1\right)^2 - \left(\mu_3^{'} + \mu_2 k_2\right)^2 \tag{4.9}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\delta = \frac{1 + \mu_1^{'} + \mu_2 k_1}{f^{'}} \text{ ve } \gamma = \frac{\mu_3^{'} + \mu_2 k_2}{f^{'}} \tag{4.10}$$

olarak alınır ve (4.8) eşitliğinde (4.10) eşitlikleri kullanılırsa,

$$T^{\star} = \delta T + \gamma B \tag{4.11}$$

elde edilir. Buradan (4.11) eşitliğinin s ye göre türevi alınıp (2.1) de verilen denklemler kullanılırsa,

$$f^{'}k_1^{\star}N^{\star}=\delta^{'}T+(\delta k_1-\gamma k_2)N+\gamma^{'}B \tag{4.12}$$

bulunur. Elde edilen (4.12) eşitliğinin N vektörü ile skaler çarpımı yapılırsa,

$$\delta^{'}=0 \quad \text{ve} \quad \gamma^{'}=0 \tag{4.13}$$

bulunur. Bu eşitliklerden öncelikle kabul edelim ki, $\gamma=0$ olsun. O zaman $\mu_3^{'}+\mu_2 k_2=0$ elde edilir. Şimdi de kabul edelim ki, $\gamma\neq 0$ olsun. Böylece $h=\delta/\gamma$ olmak üzere,

$$1+\mu_1^{'}+\mu_2 k_1=h\left(\mu_3^{'}+\mu_2 k_2\right)$$

elde edilir. Ayrıca (4.13) de elde edilen eşitlikler (4.12) de yerine yazılırsa,

$$f^{'}k_1^{\star}N^{\star}=(\delta k_1-\gamma k_2)N \tag{4.14}$$

bulunur. Burada (4.14) eşitliğinin kendisi ile çarpımı yapılır ve (4.9), (4.10) eşitlikleri kullanılırsa, $hk_1-k_2\neq 0$ ve $h^2-1>0$ olmak üzere,

$$\left(f^{'}\right)^2(k_1^{\star})^2=\frac{(hk_1-k_2)^2}{h^2-1}$$

elde edilir. Buradan (4.14) eşitliğnde $\lambda=\frac{\delta k_1-\gamma k_2}{f^{'}k_1^{\star}}$ olarak seçilirse,

$$N^{\star}=\lambda N \tag{4.15}$$

bulunur. Elde edilen bu (4.15) eşitliğinde s ye göre türev alınıp (2.1) de verilen denklemler kullanılırsa, $\lambda^{'}=0$ olmak üzere;

$$f'k_2^{\star}B^{\star}=\lambda k_1 T+\lambda^{'}N+\lambda k_2 B-f'k_1^{\star}T^{\star} \tag{4.16}$$

olarak elde edilir. Böylece (4.8) eşitliği kullanılarak (4.16) eşitliği tekrar yazılırsa,

$$f'k_2^{\star}B^{\star}=P(s)T+Q(s)B$$

elde edilir. Burada $hk_2-k_1\neq 0$ olmak üzere ,

$$P(s)=\frac{(hk_1-k_2)\left(\mu_3'+\mu_2k_2\right)(hk_2-k_1)}{\left(f'\right)^2k_1^\star(h^2-1)} \text{ ve } Q(s)=\frac{(hk_1-k_2)\left(\mu_3'+\mu_2k_2\right)(hk_2-k_1)h}{\left(f'\right)^2k_1^\star(h^2-1)}$$

olarak bulunur.

Tersine, φ eğrisi yay uzunluğu parametresi s ile parametrelendirilmiş ve sıfırdan farklı $k_1(s), k_2(s)$ eğrilikli bir timelike eğri olsun. Öncelikle kabul edelim ki, $\mu_1(s), \mu_2(s), \mu_3(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere φ eğrisi (4.1) deki koşulları sağlasın. O zaman bir $\varphi^\star$ eğrisi,

$$\varphi^\star(s^\star)=\varphi^\star(f(s))=\varphi(s)+\mu_1(s)T(s)+\mu_2(s)N(s)+\mu_3(s)B(s) \tag{4.17}$$

eşitliği ile tanımlanabilir. Bu (4.17) eşitliğinin s ye göre türevi alınıp (2.1) de verilen denklemler kullanılırsa,

$$\frac{d\varphi^\star}{ds}=\left(1+\mu_1'+\mu_2k_1\right)T \tag{4.18}$$

eşitliği bulunur. Buradan $m_1=sgn\left(1+\mu_1'+\mu_2k_1\right)$ olmak üzere, $f'=\left\|\frac{d\varphi^\star}{ds}\right\|=m_1\left(1+\mu_1'+\mu_2k_1\right)>0$ yazılabilir. Böylece, $m_2, m_3=\pm1$ olacak şekilde,

$$\begin{aligned} T^\star &= m_1T \\ N^\star &= m_1m_2N \\ B^\star &= m_1m_2m_3B \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} k_1^\star &= \frac{m_2k_1}{f'} \\ k_2^\star &= \frac{m_3k_2}{f'} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Sonuç olarak φ eğrisi bir Bertrand eğridir ve $\varphi^\star$ eğrisi de φ eğrisinin bir timelike Bertrand eşlenik eğrisidir.

Şimdi de kabul edelim ki, $\mu_1(s), \mu_2(s), \mu_3(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar ve h reel sayı olmak üzere φ eğrisi (4.2) deki koşulları sağlasın. O zaman bir $\varphi^\star$ eğrisi,

$$\varphi^\star(s^\star) = \varphi^\star(f(s)) = \varphi(s) + \mu_1(s)T(s) + \mu_2(s)N(s) + \mu_3(s)B(s) \tag{4.19}$$

eşitliği ile tanımlanabilir. Bu (4.19) eşitliğinin s ye göre türevi alınıp (2.1) de verilen denklemler kullanılırsa,

$$\frac{d\varphi^\star}{ds} = \left(1 + \mu_1' + \mu_2 k_1\right) T + \left(\mu_3' + \mu_2 k_2\right) B \tag{4.20}$$

eşitliği elde edilir. Burada $n_1 = sgn\left(\mu_3' + \mu_2 k_2\right)$ olmak üzere,

$$f' = \left\| \frac{d\varphi^\star}{ds} \right\| = n_1 \left(\mu_3' + \mu_2 k_2\right) \sqrt{h^2 - 1} \tag{4.21}$$

dir. Böylece (4.20) eşitliği (4.21) denklemi kullanılarak tekrar yazılırsa,

$$T^\star = \frac{n_1}{\sqrt{h^2-1}} (hT + B), \quad g(T^\star, T^\star) = -1 \tag{4.22}$$

bulunur. Elde edilen bu (4.22) eşitliğinin s ye göre türevi alınıp (2.1) de verilen denklemler kullanılırsa,

$$\frac{dT^\star}{ds^\star} = \frac{n_1(hk_1 - k_2)}{f'\sqrt{h^2-1}} N \tag{4.23}$$

eşitliği elde edilir. Buradan $n_2 = sgn(hk_1 - k_2)$ olmak üzere,

$$k_1^\star = \left\| \frac{dT^\star}{ds^\star} \right\| = \frac{n_2(hk_1 - k_2)}{f'\sqrt{h^2-1}}$$

elde edilir. Böylece (4.23) eşitliğnden $N^\star$ vektörü,

$$N^\star = n_1 n_2 N, \quad g(N^\star, N^\star) = 1 \tag{4.24}$$

olarak bulunur. Daha sonra (4.24) eşitliğinin s ye göre türevi alınıp (2.1) de verilen denklemler ile (4.22) ve (4.23) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\frac{dN^\star}{ds^\star} - k_1^\star T^\star = \frac{n_1 n_2 (hk_2 - k_1)}{f'(h^2-1)} (T + hB)$$

elde edilir. Burada $n_3 = sgn(hk_2 - k_1)$ olmak üzere, $k_2^\star = \frac{n_3(hk_2-k_1)}{f'\sqrt{h^2-1}}$ olduğu bulunur. Son olarak da $B^\star$ vektörü benzer işlemler yapılarak,

$$B^\star = \frac{n_1 n_2 n_3}{\sqrt{h^2-1}}(T + hB), \quad g(B^\star, B^\star) = 1$$

elde edilir. O zaman $\varphi^\star$ bir timelike eğridir ve φ eğrisinin Bertrand eşlenik eğrisidir. Böylece, φ eğrisi bir Bertrand eğridir.

(ii) $\varphi^\star$ eğrisi asli normal vektörü spacelike olan bir spacelike eğri olsun. Bu durumda bu kısmın ispatı, yukarıda ispatı verilen $\varphi^\star$ eğrisinin timelike olduğu durumdaki ispat ile benzer olduğundan ispat tekrarlanmamıştır.

(iii) $\varphi^\star$ eğrisi bir Cartan null eğri olsun. $\varphi^\star$ eğrisi (4.5) eşitliği ile tanımlanabilir. O zaman (4.5) eşitliğinin s ye göre türevi alınıp (2.1) ve (2.2) de verilen denklemler kullanılırsa,

$$f' T^\star = \left(1 + \mu_1' + \mu_2 k_1\right) T + \left(\mu_2' + \mu_1 k_1 - \mu_3 k_2\right) N + \left(\mu_3' + \mu_2 k_2\right) B \tag{4.25}$$

eşitliği elde edilir. Buradan (4.25) eşitliğinin N vektörü ile skaler çarpımı yapılırsa,

$$\mu_3 k_2 = \mu_2' + \mu_1 k_1 \tag{4.26}$$

bulunur. Elde edilen bu (4.26) eşitliği (4.25) de yerine yazılırsa,

$$f' T^\star = \left(1 + \mu_1' + \mu_2 k_1\right) T + \left(\mu_3' + \mu_2 k_2\right) B \tag{4.27}$$

bulunur. Bu (4.27) eşitliğinin kendisi ile çarpımı yapılırsa,

$$\left(1 + \mu_1' + \mu_2 k_1\right)^2 = \left(\mu_3' + \mu_2 k_2\right)^2 \tag{4.28}$$

elde edilir. Burada $h = \pm 1$ seçilirse,

$$1 + \mu_1' + \mu_2 k_1 = h\left(\mu_3' + \mu_2 k_2\right)$$

olarak elde edilir. Ayrıca,

$$\delta = \frac{\mu_3' + \mu_2 k_2}{f'} \tag{4.29}$$

alınırsa (4.29) eşitliğini kullanarak (4.27) denklemi

$$T^{\star} = \delta\left(hT + B\right) \tag{4.30}$$

elde edilir. Elde edilen bu (4.30) eşitliğinin s ye göre türevi alınıp (2.1) ve (2.2) de verilen denklemler kullanılırsa,

$$f' N^{\star} = \delta' \left(hT + B\right) + \delta\left(hk_1 - k_2\right) N \tag{4.31}$$

bulunur. Bu eşitlikten

$$\delta' = 0 \quad \text{ve} \quad hk_1 - k_2 \neq 0 \tag{4.32}$$

elde edilir. Buradan (4.32) eşitliği (4.31) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$f' N^{\star} = \delta\left(hk_1 - k_2\right) N \tag{4.33}$$

eşitliği elde edilir. Daha sonra elde edilen bu (4.33) eşitliğinin kendisi ile çarpımı yapılıp (4.28) ve (4.29) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\left|\mu_3' + \mu_2 k_2\right| = \delta^2 \left|hk_1 - k_2\right|$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca $N^{\star} = \pm N$ olduğundan $|k_1| \neq |k_2|$ ya da $hk_1 + k_2 \neq 0$ olacak şekilde,

$$k_2^{\star} T^{\star} - B^{\star} = \pm\left(k_1 T + k_2 B\right)$$

ve

$$-2k_2^{\star} = k_2^2 - k_1^2$$

elde edilir.

Tersine, φ eğrisi yay uzunluğu parametresi s ile parametrelendirilmiş ve sıfırdan farklı $k_1(s), k_2(s)$ eğrilikli bir timelike eğri olsun. Kabul edelim ki, φ eğrisi $\mu_1(s), \mu_2(s), \mu_3(s)$

diferensiyellenebilir fonksiyonlar ve h reel sayı olmak üzere (4.4) deki koşulları sağlasın. O zaman bir $\varphi^{\star}$ eğrisi,

$$\varphi^{\star}(s^{\star}) = \varphi^{\star}(f(s)) = \varphi(s) + \mu_1(s)T(s) + \mu_2(s)N(s) + \mu_3(s)B(s) \tag{4.34}$$

eşitliği ile tanımlanabilir. Elde edilen bu (4.34) eşitliğinin s ye göre türevi alınıp (2.1) ve (2.2) de verilen denklemler kullanılırsa,

$$\frac{d\varphi^{\star}}{ds} = \left(\mu_3^{'} + \mu_2 k_2\right)(hT + B) \tag{4.35}$$

bulunur. Buradan $m_2 = sgn\left(\mu_3^{'} + \mu_2 k_2\right)$ ve $m_3 = sgn\,(hk_1 - k_2)$ olmak üzere,

$$\frac{d^2\varphi^{\star}}{ds^2} = \left(\mu_3^{'} + \mu_2 k_2\right)^{'}(hT + B) + \left(\mu_3^{'} + \mu_2 k_2\right)(hk_1 - k_2)N$$

ve

$$f^{'} = \sqrt{m_2\left(\mu_3^{'} + \mu_2 k_2\right)}\sqrt{m_3\,(hk_1 - k_2)}$$

elde edilir. Böylece $m_4 = sgn\,(\delta)$ olmak üzere, (4.35) denklemi tekrar yazılırsa,

$$T^{\star} = m_4\delta\,(hT + B), \quad g\,(T^{\star}, T^{\star}) = 0 \tag{4.36}$$

bulunur. Daha sonra elde edilen bu (4.36) eşitliğinin s ye göre türevi alınıp (2.1) ve (2.2) de verilen denklemler kullanılırsa,

$$\frac{dT^{\star}}{ds^{\star}} = \frac{m_4\delta\,(hk_1 - k_2)}{f^{'}}N = m_3 m_4 N$$

ve

$$k_1^{\star} = 1$$

elde edilir. Bu eşitlikten de

$$N^{\star} = m_3 m_4 N, \quad g\,(N^{\star}, N^{\star}) = 1 \tag{4.37}$$

bulunur ve (4.37) eşitliğinin s ye göre türevi alınıp (2.1) ve (2.2) de verilen denklemler kullanılarak benzer işlemlerle,

$$B^{\star} = \frac{m_4}{2\delta}(-hT + B),$$

$$g(B^{\star}, B^{\star}) = 0 \quad \text{ve} \quad g(T^{\star}, B^{\star}) = 1$$

olduğu elde edilir. Son olarak da

$$k_2^{\star} = g\left(\frac{dN^{\star}}{ds^{\star}}, B^{\star}\right) = \frac{m_3(hk_1 + k_2)}{2f'\delta} \neq 0$$

bulunur. Böylece $\varphi^{\star}$ eğrisi Cartan null eğridir ve φ eğrisinin Bertrand eşlenik eğrisidir. Sonuç olarak φ eğrisi bir Bertrand eğridir.

4.1. Örnekler

Örnek 4.1 $k_1(s), k_2(s)$ eğrilikli bir timelike Bertrand eğri $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ olsun. O zaman Teorem 4.1.'in koşulları sağlanır. Kabul edelim ki $\mu_2 = v_0 \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

$$\mu_1 k_1 = \mu_3 k_2 \quad \text{ve} \quad 1 + \mu_1' + v_0 k_1 = h\left(\mu_3' + v_0 k_2\right)$$

yazılabilir. Böylece

$$\mu_3 = \frac{k_1\left(s - v_0 \int (hk_2 - k_1)\,ds\right)}{hk_1 - k_2}$$

ve

$$\mu_1 = \frac{k_2\left(s - v_0 \int (hk_2 - k_1)\,ds\right)}{hk_1 - k_2}$$

elde edilir. Bu eşitlikler kullanılarak $\varphi^{\star}$ Bertrand eşlenik eğrisi

$$\begin{aligned} \varphi^{\star} &= \varphi + \frac{k_2\left(s - v_0 \int (hk_2 - k_1)\,ds\right)}{hk_1 - k_2} T + v_0 N \\ &\quad + \frac{k_1\left(s - v_0 \int (hk_2 - k_1)\,ds\right)}{hk_1 - k_2} B \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada $\varphi^{\star}$ Bertrand eşlenik eğrisi, $h^2 > 1$, $h^2 < 1$ ya da $h^2 = 1$ olması durumunda sırasıyla timelike, spacelike ya da Cartan null eğridir.

Örnek 4.2 $\mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-uzayında bir timelike eğrinin denklemi eğrilikleri $k_1 = \sqrt{2}$, $k_2 = -1$ olmak üzere,

$$\varphi(s) = \left(\sqrt{2}\sinh s, \sqrt{2}\cosh s, s\right)$$

olarak verilsin. Bu eğrinin Frenet vektörleri de

$$T(s) = \left(\sqrt{2}\cosh s, \sqrt{2}\sinh s, 1\right)$$

$$N(s) = (\sinh s, \cosh s, 0)$$

$$B(s) = \left(\cosh s, \sinh s, \sqrt{2}\right)$$

olarak elde edilir.

(i) Eğer Teorem 4.1-(i) durumundaki koşulları sağlayan $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = \sqrt{2}$, $\mu_3 = \sqrt{2}$ ve $h = -\frac{3}{\sqrt{2}}$ seçimleri yapılırsa $\varphi^\star$ eğrisinin denklemi,

$$\varphi^\star(s) = \left(2\sqrt{2}\sinh s, 2\sqrt{2}\cosh s, s+1\right)$$

bulunur. Gerekli hesaplamalarla

$$T^\star(s) = \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\cosh s, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\sinh s, \frac{1}{\sqrt{7}}\right)$$

$$N^\star(s) = (\sinh s, \cosh s, 0)$$

$$B^\star(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\cosh s, -\frac{1}{\sqrt{7}}\sinh s, -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)$$

ve $k_1^\star = \frac{2\sqrt{2}}{7}$, $k_2^\star = \frac{1}{7}$ eşitlikleri elde edilir. O zaman φ eğrisi bir Bertrand eğridir. Sonuç olarak $\varphi^\star$ eğrisi, φ eğrisinin bir timelike Bertrand eşlenik eğrisidir.

(ii) Eğer Teorem 4.1-(ii) durumundaki koşulları sağlayan $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = -\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\mu_3 = -2\sqrt{2}$ ve $h = \frac{1}{\sqrt{2}}$ seçimleri yapılırsa $\varphi^\star$ eğrisinin denklemi,

$$\varphi^\star(s) = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\sinh s, \frac{2\sqrt{2}}{3}\cosh s, s-2\right)$$

bulunur. Gerekli hesaplamalarla

$$T^\star(s) = \left(2\sqrt{2}\cosh s, 2\sqrt{2}\sinh s, 3\right)$$

$$N^\star(s) = (\sinh s, \cosh s, 0)$$

$$B^{\star}(s)=\left(3\cosh s,3\sinh s,2\sqrt{2}\right)$$

ve $k_1^{\star}=6\sqrt{2}$, $k_2^{\star}=-9$ eşitlikleri elde edilir. O zaman φ eğrisi bir Bertrand eğridir. Sonuç olarak $\varphi^{\star}$ eğrisi, φ eğrisinin bir spacelike Bertrand eşlenik eğrisidir.

(iii) Eğer Teorem 4.1-(iii) durumundaki koşulları sağlayan $\mu_1=2$, $\mu_2=-1-\sqrt{2}$, $\mu_3=-2\sqrt{2}$ ve $h=-1$ seçimleri yapılırsa $\varphi^{\star}$ eğrisinin denklemi,

$$\varphi^{\star}(s)=(-\sinh s,-\cosh s,s-2)$$

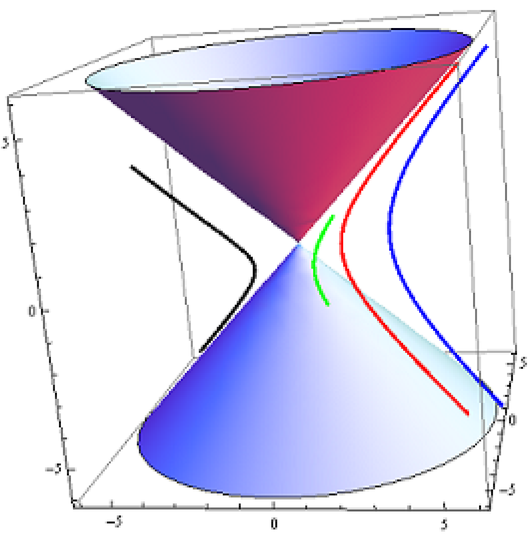
olarak bulunur. Gerekli hesaplamalarla

$$T^{\star}(s)=(-\cosh s,-\sinh s,1)$$

$$N^{\star}(s)=(-\sinh s,-\cosh s,0)$$

$$B^{\star}(s)=\left(\frac{\cosh s}{2},\frac{\sinh s}{2},\frac{1}{2}\right)$$

ve $k_1^{\star}=1$, $k_2^{\star}=1/2$ eşitlikleri elde edilir. O zaman φ eğrisi bir Bertrand eğridir. Sonuç olarak $\varphi^{\star}$ eğrisi, φ eğrisinin bir Cartan null Bertrand eşlenik eğrisidir.



Şekil 4.1: Örnek 4.2'de verilen φ eğrisi ve bu eğriye ait olan Bertrand eşlenik eğrilerinin grafikleri; kırmızı grafik φ eğrisi, mavi grafik timelike Bertrand eşlenik eğrisi, yeşil grafik spacelike Bertrand eşlenik eğrisi ve siyah grafik Cartan null Bertrand eşlenik eğrisi olarak gösterilmiştir.

Örnek 4.3 $\mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-uzayında bir timelike genel helis eğrisinin denklemi,

$$\varphi(s) = \left(\frac{3s^8 - 5}{24s^3}, \frac{3s^8 + 5}{24s^3}, \frac{3s}{4} \right)$$

olsun. $k_1(s) = 5/s$, $k_2(s) = 3/s$ eğrilikleri ve Frenet vektörleri de,

$$T(s) = \left(\frac{5\left(s^8+1\right)}{8s^4}, \frac{5\left(s^8-1\right)}{8s^4}, \frac{3}{4} \right)$$

$$N(s) = \left(\frac{s^8-1}{2s^4}, \frac{s^8+1}{2s^4}, 0 \right)$$

$$B(s) = \left(-\frac{3\left(s^8+1\right)}{8s^4}, -\frac{3\left(s^8-1\right)}{8s^4}, -\frac{5}{4} \right)$$

olarak bulunur.

(i) Eğer Teorem 4.1-(i) durumundaki koşulları sağlayan $\mu_1(s) = 3(s - \ln s)/7$, $\mu_2 = 1$, $\mu_3(s) = 5(s - \ln s)/7$ ve $h = 2$ seçimleri yapılırsa $\varphi^\star$ eğrisinin denklemi,

$$\varphi^\star(s) = \left(\frac{-12 - 5s + 12s^8 + 3s^9}{24s^4}, \frac{12 + 5s + 12s^8 + 3s^9}{24s^4}, \frac{5s}{28} + \frac{4\ln s}{7} \right)$$

şeklinde bulunur. Gerekli hesaplamalarla

$$T^\star(s) = \left(\frac{7\left(s^8+1\right)}{8\sqrt{3}s^4}, \frac{7\left(s^8-1\right)}{8\sqrt{3}s^4}, \frac{1}{4\sqrt{3}} \right)$$

$$N^\star(s) = \left(\frac{s^8-1}{2s^4}, \frac{s^8+1}{2s^4}, 0 \right)$$

$$B^\star(s) = \left(-\frac{s^8+1}{8\sqrt{3}s^4}, -\frac{s^8-1}{8\sqrt{3}s^4}, -\frac{7}{4\sqrt{3}} \right)$$

ve $k_1^\star(s) = 49/(48+15s)$, $k_2^\star(s) = 7/(48+15s)$ eşitlikleri elde edilir. O zaman φ eğrisi bir Bertrand eğridir. Sonuç olarak $\varphi^\star$ eğrisi, φ eğrisinin bir timelike Bertrand eşlenik eğrisidir.

(ii) Eğer Teorem 4.1-(ii) durumundaki koşulları sağlayan $\mu_1(s) = -6s - 21\ln s, \mu_2 = 1, \mu_3(s) = -10s - 35\ln s$ ve $h = \frac{1}{2}$ seçimleri yapılırsa $\varphi^\star$ eğrisinin denklemi,

$$\varphi^{\star}(s) = \left(\frac{-12 - 5s + 12s^8 + 3s^9}{24s^4}, \frac{12 + 5s + 12s^8 + 3s^9}{24s^4}, \frac{35s}{4} + 28\ln s \right)$$

olarak bulunur. Gerekli hesaplamalarla

$$T^{\star}(s) = \left(\frac{s^8+1}{8\sqrt{3}s^4}, \frac{s^8-1}{8\sqrt{3}s^4}, \frac{7}{4\sqrt{3}} \right)$$

$$N^{\star}(s) = \left(\frac{s^8-1}{2s^4}, \frac{s^8+1}{2s^4}, 0 \right)$$

$$B^{\star}(s) = \left(-\frac{7\left(s^8+1\right)}{8\sqrt{3}s^4}, -\frac{7\left(s^8-1\right)}{8\sqrt{3}s^4}, -\frac{1}{4\sqrt{3}} \right)$$

ve $k_1^{\star}(s) = 1/(48+15s)$, $k_2^{\star}(s) = 7/(48+15s)$ eşitlikleri elde edilir. O zaman φ eğrisi bir Bertrand eğridir. Sonuç olarak $\varphi^{\star}$ eğrisi, φ eğrisinin bir spacelike Bertrand eşlenik eğrisidir.

(iii) Eğer Teorem 4.1-(iii) durumundaki koşulları sağlayan $\mu_1(s) = \frac{2}{3}s + \frac{3\ln s}{4}, \mu_2(s) = \frac{1}{4} - \frac{s}{3}, \mu_3(s) = s + \frac{5\ln s}{4}$ ve $h = \gamma = 1$ seçimleri yapılırsa $\varphi^{\star}$ eğrisinin denklemi,

$$\varphi^{\star}(s) = \left(\frac{s^8-1}{8s^4}, \frac{s^8+1}{8s^4}, -\ln s \right)$$

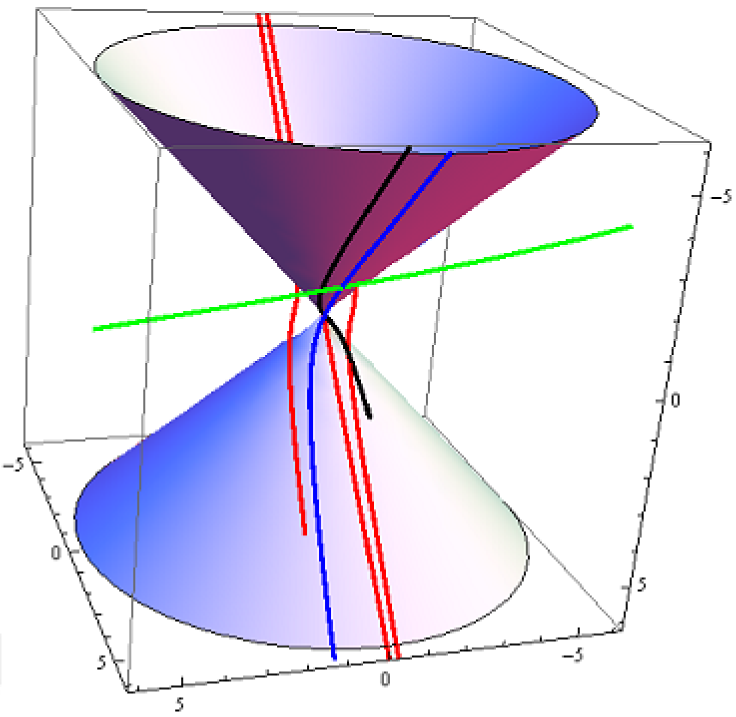
bulunur. Gerekli hesaplamalarla

$$T^{\star}(s) = \left(\frac{s^8+1}{4s^4}, \frac{s^8-1}{4s^4}, -\frac{1}{2} \right)$$

$$N^{\star}(s) = \left(\frac{s^8-1}{2s^4}, \frac{s^8+1}{2s^4}, 0 \right)$$

$$B^{\star}(s) = \left(\frac{-s^8-1}{2s^4}, \frac{-s^8+1}{2s^4}, -1 \right)$$

ve $k_1^{\star} = 1$, $k_2^{\star} = 2$ eşitlikleri elde edilir. O zaman φ eğrisi bir Bertrand eğridir. Sonuç olarak $\varphi^{\star}$ eğrisi, φ eğrisinin bir Cartan null Bertrand eşlenik eğrisidir.



Şekil 4.2: Örnek 4.3'te verilen φ eğrisi ve bu eğriye ait olan Bertrand eşlenik eğrilerinin grafikleri; kırmızı grafik φ eğrisi, mavi grafik timelike Bertrand eşlenik eğrisi, yeşil grafik spacelike Bertrand eşlenik eğrisi ve siyah grafik Cartan null Bertrand eşlenik eğrisi olarak gösterilmiştir.

5 . MINKOWSKI 3-UZAYINDA CARTAN NULL VE PSEUDO NULL BERTRAND EĞRİLER

Bu bölümde, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında Cartan null ve pseudo null eğriler için önceki bölümlerde uygulanan yeni yaklaşım kullanılarak Bertrand eğri olma karakterizasyonları ele alınacaktır. Bunun sonucunda elde edilen teorem ifade ve ispat edilip ilgili örnekler inşa edilecektir.

5.1. Cartan Null Bertrand Eğri

Kabul edelim ki, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında $\varphi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}_1^3$, Frenet çatısı $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ve $k_1(s) = 1, k_2(s)$ sıfırdan farklı eğrilikleri olan bir Cartan null Bertrand eğrisi ve $\varphi^\star : I^\star \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}_1^3$, Frenet çatısı $\{T^\star(s), N^\star(s), B^\star(s)\}$ ve $k_1^\star(s), k_2^\star(s)$ eğriliklerine sahip φ eğrisinin Bertrand eşlenik eğrisi olsun. Bu yeni yaklaşıma göre $\varphi^\star$ eğrisi $\mu_1(s), \mu_2(s), \mu_3(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$\varphi^\star(s^\star) = \varphi^\star(f(s)) = \varphi(s) + \mu_1(s) T(s) + \mu_2(s) N(s) + \mu_3(s) B(s)$$

Bu Cartan null φ eğrisinin asli normal vektörü N spacelike olduğunda Bertrand eşlenik eğrisi, $\varphi^\star$ için aşağıdaki durumlardan birisi mümkündür:

(i) $\varphi^\star$ bir timelike eğridir,

(ii) $\varphi^\star$ spacelike asli normal vektöre sahip bir spacelike eğridir,

(iii) $\varphi^\star$ bir Cartan null eğridir.

Aşağıdaki teoremde olabilecek tüm bu durumlar ayrı ayrı incelenecektir.

Teorem 5.1 $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$, sıfırdan farklı $k_1(s) = 1, k_2(s)$ eğriliklerine sahip pseudo yay parametresi ile parametrelendirilmiş bir birim hızlı Cartan null eğri olsun. O zaman φ eğrisinin, Bertrand eşlenik eğrisi $\varphi^\star : I^\star \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}_1^3$ olan bir Bertrand eğri olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki durumlardan birinin sağlanmasıdır:

(i) $\mu_1(s), \mu_2(s), \mu_3(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonları ve h reel sayısı için

$$\left.\begin{aligned} \mu_2' + \mu_1 &= \mu_3 k_2 \\ \mu_3' - \mu_2 &= h f' \\ -2(1+\mu_1'+\mu_2 k_2)(\mu_3'-\mu_2) &= (f')^2 \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

eşitlikleri sağlanır. O zaman φ eğrisi bir Bertrand eğridir. Bu durumda Bertrand eşlenik eğrisi $\varphi^\star$ bir timelike eğridir.

(ii) $\mu_1(s), \mu_2(s), \mu_3(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonları ve h reel sayısı için

$$\left.\begin{aligned} \mu_2' + \mu_1 &= \mu_3 k_2 \\ \mu_3' - \mu_2 &= h f' \\ 2(1+\mu_1'+\mu_2 k_2)(\mu_3'-\mu_2) &= (f')^2 \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

eşitlikleri sağlanır. O zaman φ eğrisi bir Bertrand eğridir. Bu durumda Bertrand eşlenik eğrisi $\varphi^\star$ spacelike asli normal vektör N'ye sahip bir spacelike eğridir.

(iii) $\mu_1(s), \mu_2(s), \mu_3(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\left.\begin{aligned} \mu_2' + \mu_1 &= \mu_3 k_2 \\ \mu_3' - \mu_2 &= 0 \\ 1+\mu_1'+\mu_2 k_2 &\neq 0 \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

eşitlikleri sağlanır ya da

$$\left.\begin{aligned} \mu_2' + \mu_1 &= \mu_3 k_2 \\ \mu_3' - \mu_2 &\neq 0 \\ 1+\mu_1'+\mu_2 k_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

eşitlikleri sağlanır. O zaman φ eğrisi bir Bertrand eğridir. Bu durumda Bertrand eşlenik eğrisi $\varphi^\star$ bir Cartan null (lightlike) eğridir.

İspat. Kabul edelim ki, φ eğrisi sıfırdan farklı $k_1 = 1, k_2(s)$ eğrilikleri olan ve yay uzunluğu parametresi s ile parametrelendirilmiş bir Cartan null Bertrand eğrisi ve $\varphi^\star$ eğrisi de yay uzunluğu ya da pseudo yay parametresi $s^\star$ ile parametrelendirilmiş φ eğrisinin Bertrand eşlenik eğrisi olsun. Yani, her $s \in I$ için I üzerinde $\mu_1(s), \mu_2(s)$ ve $\mu_3(s)$

diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere, $\varphi^{\star}$ eğrisi şu şekilde ifade edilebilir:

$$\varphi^{\star}\left(s^{\star}\right)=\varphi^{\star}\left(f\left(s\right)\right)=\varphi\left(s\right)+\mu_1\left(s\right)T\left(s\right)+\mu_2\left(s\right)N\left(s\right)+\mu_3\left(s\right)B\left(s\right) \tag{5.5}$$

(i) $\varphi^{\star}$ timelike bir eğri olsun. (5.5) denkleminin s parametresine göre türevi alınır ve (2.1), (2.2) de verilen denklemler kullanılırsa,

$$f^{'}T^{\star}=\left(1+\mu_1^{'}+\mu_2k_2\right)T+\left(\mu_2^{'}+\mu_1-\mu_3k_2\right)N+\left(\mu_3^{'}-\mu_2\right)B \tag{5.6}$$

eşitliği elde edilir. Buradan (5.6) denklemi N ile skaler çarpılırsa,

$$\mu_3k_2=\mu_1+\mu_2^{'} \tag{5.7}$$

bulunur. (5.7) eşitliği (5.6) denkleminde yerine yazılırsa,

$$f^{'}T^{\star}=\left(1+\mu_1^{'}+\mu_2k_2\right)T+\left(\mu_3^{'}-\mu_2\right)B \tag{5.8}$$

elde edilir. Bu (5.8) denklemi kendisi ile çarpılırsa,

$$\left(f^{'}\right)^2=-2\left(1+\mu_1^{'}+\mu_2k_2\right)^2\left(\mu_3^{'}-\mu_2\right)$$

bulunur. Ayrıca

$$1+\mu_1^{'}+\mu_2k_2=-\frac{\left(f^{'}\right)^2}{2\left(\mu_3^{'}-\mu_2\right)} \quad , \lambda=\frac{\mu_3^{'}-\mu_2}{f^{'}} \tag{5.9}$$

eşitliklerindeki seçimler yapılırsa (5.8) denklemi

$$T^{\star}=-\frac{1}{2\lambda}T+\lambda B \tag{5.10}$$

olarak yazılır. Buradan da (5.10) deki eşitliğin s parametresine göre türevi alınır, (2.1) ve (2.2) de verilen denklemler kullanılırsa,

$$f^{'}k_1^{\star}N^{\star}=\left(-\frac{1}{2\lambda}-\lambda k_2\right)N \tag{5.11}$$

elde edilir. (5.11) denklemi kendisiyle çarpılırsa,

$$\left(f'\right)^2 (k_1^\star)^2 = \left(-\frac{1}{2\lambda} - \lambda k_2\right)^2$$

olduğu görülür. O zaman $m_1 = \pm 1$ olmak üzere,

$$k_1^\star = m_1 \frac{-1 - 2\lambda^2 k_2}{2\lambda f'} \tag{5.12}$$

elde edilir. Eğer (5.12) de elde edilen eşitlik (5.11) de yerine yazılırsa,

$$N^\star = m_1 N \tag{5.13}$$

bulunur. Buradan (5.13) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınır ve (2.1), (2.2) de verilen denklemler kullanılırsa,

$$f' k_1^\star T^\star + f' k_2^\star B^\star = m_1 (k_2 T - B) \tag{5.14}$$

elde edilir. (5.14) eşitliği kendisiyle çarpılırsa ve (2.1), (2.2) de verilen denklemler ile (5.9) eşitlikleri kullanılırsa $m_2 = \pm 1$ olmak üzere,

$$k_2^\star = m_2 \frac{1 - 2\lambda^2 k_2}{2\lambda f'}$$

elde edilir.

Tersine, φ sıfırdan farklı $k_1 = 1$, k_2 eğriliklere sahip ve yay uzunluğu parametresi s ile parametrelendirilmiş bir Cartan null eğri olsun. Öncelikle kabul edelim ki, φ eğrisi $\mu_1(s), \mu_2(s)$ ve $\mu_3(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere, (5.1) de verilen denklemleri sağlasın. O zaman bir $\varphi^\star$ eğrisi şu şekilde ifade edilebilir:

$$\varphi^\star(s^\star) = \varphi^\star(f(s)) = \varphi(s) + \mu_1(s) T(s) + \mu_2(s) N(s) + \mu_3(s) B(s) \tag{5.15}$$

İfade edilen bu (5.15) denkleminin s parametresine göre türevi alınırsa,

$$\frac{d\varphi^\star}{ds} = \left(1 + \mu_1' + \mu_2 k_2\right) T + \left(\mu_3' - \mu_2\right) B \tag{5.16}$$

bulunur. Ayrıca (5.16) eşitliğinin tekrar türevi alınırsa,

$$f' = \left\| \frac{d^2\varphi^\star}{ds^2} \right\| = \sqrt{n_1\left(1+\mu_1'+2\mu_2 k_2-\mu_3' k_2\right)}$$

elde edilir, burada $n_1 = sgn\left(1+\mu_1'+2\mu_2 k_2-\mu_3' k_2\right)$ dır. O zaman (5.16) denklemi tekrar yazılırsa,

$$T^\star = \frac{n_2}{2\lambda}\left(-T+\lambda^2 B\right) \tag{5.17}$$

bulunur, burada $n_2 = sgn(\lambda)$ dır. Ayrıca $g(T^\star,T^\star) = -1$ dir. Buradan (5.17) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınırsa,

$$\frac{dT^\star}{ds^\star} = \frac{n_2\left(-1-\lambda^2 k_2\right)}{2\lambda f'} N \tag{5.18}$$

Böylece $n_3 = sgn\left(-1-\lambda^2 k_2\right)$ olacak şekilde (5.18) eşitliği kullanılarak,

$$k_1^\star = \left\| \frac{dT^\star}{ds^\star} \right\| = \frac{n_3\left(-1-\lambda^2 k_2\right)}{2\lambda f'}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliklerden de,

$$N^\star = n_2 n_3 N \tag{5.19}$$

bulunur. Ayrıca $g(N^\star,N^\star) = 1$ olduğu görülür. Aynı şekilde devam edilirse, yani (5.19) denkleminin s parametresine göre türevi alınır ve (2.1), (2.2) de verilen denklemler kullanılırsa,

$$\frac{dN^\star}{ds^\star} = \frac{n_2 n_3}{f'}\left(k_2 T - B\right) \tag{5.20}$$

elde edilir. Son olarak (5.20) denkleminde aynı işlemlerin tekrarı ile,

$$B^\star = \frac{n_3}{2\lambda}\left(T+2\lambda^2 B\right)$$

bulunur ve $g(B^\star,B^\star) = 1$ dir. Ayrıca $n_4 = sgn\left(1-2\lambda^2 k_2\right)$ olmak üzere,

$$k_2^\star = -g\left(\frac{dN^\star}{ds^\star}, B^\star\right) = \frac{n_4\left(1-2\lambda^2 k_2\right)}{2\lambda f'}$$

eşitliği elde edilir.O zaman $\varphi^\star$ bir timelike eğri ve φ eğrisinin Bertrand eşlenik eğrisidir. Sonuç olarak φ bir Bertrand eğridir.

(ii) $\varphi^\star$, spacelike bir eğri olsun. Bu durumda bu kısmın ispatı, yukarıda ispatı verilen $\varphi^\star$ eğrisinin timelike olduğu durumdaki ispat ile benzer olduğundan ispat tekrarlanmamıştır.

(iii) $\varphi^\star$, bir Cartan null eğri olsun. O zaman (5.5) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınır ve (2.2) deki Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$f^{'} T^\star = \left(1+\mu_1^{'}-\mu_2 k_1\right) T + \left(\mu_2^{'}+\mu_1 k_1-\mu_3 k_2\right) N + \left(\mu_3^{'}-\mu_2 k_2\right) B \tag{5.21}$$

elde edilir. Buradan (5.21) eşitliği N ile skaler çarpılırsa,

$$\mu_3 k_2 = \mu_2^{'}+\mu_1 \tag{5.22}$$

bulunur ve elde edilen bu (5.22) eşitliği (5.21) denkleminde yerine yazılırsa,

$$f^{'} T^\star = \left(1+\mu_1^{'}+\mu_2 k_2\right) T + \left(\mu_3^{'}-\mu_2\right) B \tag{5.23}$$

elde edilir. Ayrıca (5.23) eşitliği kendisi ile çarpılırsa,

$$2\left(1+\mu_1^{'}+\mu_2 k_2\right)\left(\mu_3^{'}-\mu_2\right) = 0$$

böylece,

$$1+\mu_1^{'}+\mu_2 k_2 = 0 \text{ ya da } \mu_3^{'}-\mu_2 = 0 \tag{5.24}$$

olduğu bulunur. Böylece aşağıdaki iki alt durum elde edilir:

(1) $\mu_3^{'}-\mu_2 = 0$ olsun. O zaman bu eşitlik (5.23) denkleminde yerine yazılırsa,

$$f^{'} T^\star = \left(1+\mu_1^{'}+\mu_2 k_2\right) T \tag{5.25}$$

ve

$$1+\mu_1^{'}+\mu_2 k_2 \neq 0$$

bulunur. Buradan (5.25) denkleminin s parametresine göre türevi alınır ve (2.2) de verilen denklemler kullanılırsa,

$$N^{\star}=\frac{1+\mu_1^{'}+\mu_2 k_2}{\left(f^{'}\right)^2}N \tag{5.26}$$

elde edilir. Eğer (5.26) denklemi kendisi ile çarpılırsa,

$$\left(f^{'}\right)^2=a_1\left(1+\mu_1^{'}+\mu_2 k_2\right) \tag{5.27}$$

bulunur ve burada $a_1=sgn\left(1+\mu_1^{'}+\mu_2 k_2\right)$ dır. Ayrıca $g(\frac{dT^{\star}}{ds^{\star}},N^{\star})=k_1^{\star}=1$ elde edilir. (5.26) denkleminde (5.27) deki eşitlikler yazılırsa,

$$N^{\star}=a_2 a_3 N \tag{5.28}$$

elde edilir ve $g\left(N^{\star},N^{\star}\right)=1$ olduğu görülür.
(5.28) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınır ve (2.2) de verilen denklemler kullanılırsa,

$$k_2 T^{\star}-B^{\star}=\frac{a_1 a_2}{f^{'}}\left(k_2 T-B\right) \tag{5.29}$$

bulunur. Ayrıca (5.29) eşitliği de kendisi ile çarpılırsa,

$$k_2^{\star}=\frac{k_2}{\left(f^{'}\right)^2}$$

olduğu elde edilir.
(2) $1+\mu_1^{'}+\mu_2 k_2=0$ olsun. O zaman bu eşitlik (5.23) denkleminde yerine yazılırsa,

$$f^{'}T^{\star}=\left(\mu_3^{'}-\mu_2\right)B \tag{5.30}$$

ve

$$\mu_3^{'}-\mu_2\neq 0$$

bulunur. Buradan (5.30) denkleminin s parametresine göre türevi alınır ve (2.2) de verilen denklemler kullanılırsa,

$$N^{\star}=-\frac{\left(\mu_3^{'}-\mu_2\right)k_2}{\left(f^{'}\right)^2}N \tag{5.31}$$

elde edilir. Eğer (5.31) denklemi kendisi ile çarpılırsa,

$$\left(f^{'}\right)^{2} = b_1\left(\mu_3^{'} - \mu_2\right) \tag{5.32}$$

bulunur ve burada $b_1 = sgn\left(\mu_3^{'} - \mu_2\right)$ dır. Ayrıca $g(\frac{dT^{\star}}{ds^{\star}}, N^{\star}) = k_1^{\star} = 1$ elde edilir. Bu durumda (5.31) denkleminde (5.32) deki eşitlikler yazılırsa,

$$N^{\star} = b_1 b_2 N \tag{5.33}$$

elde edilir ve $g(N^{\star}, N^{\star}) = 1$ olduğu görülür.

Aynı şekilde devam edilerek (5.33) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınır ve (2.2) de verilen denklemler kullanılırsa,

$$k_2^{\star} T^{\star} - B^{\star} = \frac{b_1 b_2}{f^{'}}\left(k_2 T - B\right) \tag{5.34}$$

bulunur. Bu durumda (5.34) eşitliği de kendisi ile çapılırsa,

$$k_2^{\star} = \frac{k_2}{\left(f^{'}\right)^{2}}$$

olduğu elde edilir.

Tersine, φ sıfırdan farklı $k_1 = 1$, k_2 eğriliklerine sahip ve yay uzunluğu parametresi s ile parametrelendirilmiş bir Cartan null eğri olsun. $\mu_1(s), \mu_2(s)$ ve $\mu_3(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere, φ eğrisi (5.3) ya da (5.4) de verilen denklemleri sağlasın. O zaman $\varphi^{\star}$ eğrisi şu şekilde ifade edilebilir,

$$\varphi^{\star}(s^{\star}) = \varphi^{\star}(f(s)) = \varphi(s) + \mu_1(s)T(s) + \mu_2(s)N(s) + \mu_3(s)B(s) \tag{5.35}$$

Eğer (5.35) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınırsa,

$$\frac{d\varphi^{\star}}{ds} = \left(1 + \mu_1^{'} + \mu_2 k_2\right)T + \left(\mu_3^{'} - \mu_2\right)B \tag{5.36}$$

ve (5.3) denklemleri kullanılırsa,

$$\frac{d^2\varphi^{*}}{ds^2} = \left(1 + \mu_1^{'} + \mu_2 k_2\right)^{'} T + \left(1 + \mu_1^{'} - \mu_3^{'} k_2 + 2\mu_2 k_2\right)N$$

elde edilir. Ayrıca burada $b_3 = sgn\left(1+\mu_1^{'} - \mu_3^{'}k_2 + 2\mu_2 k_2\right)$ olacak şekilde,

$$f^{'} = \sqrt{b_3\left(1+\mu_1^{'} - \mu_3^{'}k_2 + 2\mu_2 k_2\right)} \tag{5.37}$$

olduğu görülür. Bunlara bağlı olarak (5.36) denklemi tekrar yazılırsa,

$$T^{\star} = \frac{1+\mu_1^{'}+\mu_2 k_2}{f^{'}}T$$

bulunur. Aynı zaman da $g(T^{\star}, T^{\star}) = 0$ eşitliği de sağlanır. Ayrıca

$$T^{\star} = \pm T \tag{5.38}$$

ve

$$k_1^{\star} = 1$$

olduğu görülür. Önceki yapılan işlemler tekrarlanırsa, yani, (5.38) denkleminin s parametresine göre türevi alınırsa,

$$N^{\star} = \pm N \tag{5.39}$$

ve

$$g(N^{\star}, N^{\star}) = 1$$

elde edilir. Buradan da (5.39) denkleminin s parametresine göre türevi alınırsa,

$$f' k_2^{\star} T^{\star} - f' B^{\star} = \pm(k_2 T - B)$$

bulunur. Ayrıca

$$B^{\star} = \pm B$$

ve

$$g(B^{\star}, B^{\star}) = 0$$

eşitlikleri sağlanır. Aynı zamanda

$$k_2^{\star} = \frac{k_2}{f'}$$

olarak elde edilir.

Ya da (5.4) denklemleri kullanılırsa,

$$\frac{d^2\varphi^*}{ds^2} = \left(1+\mu_1^{'} - \mu_3^{'}k_2 + 2\mu_2 k_2\right)N + \left(\mu_3^{'} - \mu_2\right)^{'} B$$

elde edilir. Ayrıca burada $b_3 = sgn\left(1+\mu_1^{'} - \mu_3^{'}k_2 + 2\mu_2 k_2\right)$ olacak şekilde,

$$f^{'} = \sqrt{b_3\left(1+\mu_1^{'} - \mu_3^{'}k_2 + 2\mu_2 k_2\right)} \tag{5.40}$$

olduğu görülür. Bunlara bağlı olarak (5.36) denklemi tekrar yazılırsa,

$$T^{\star} = \frac{\mu_3^{'} - \mu_2}{f^{'}} B$$

elde edilir. Aynı zaman da $g\left(T^{\star}, T^{\star}\right) = 0$ eşitliği de sağlanır. Ayrıca

$$T^{\star} = \pm k_2 T \tag{5.41}$$

bulunur. (5.41) denkleminin s parametresine göre türevi alınırsa,

$$N^{\star} = \pm\frac{\left(k_2\right)^2}{f^{'}} N \tag{5.42}$$

elde edilir ve $g\left(N^{\star}, N^{\star}\right) = 1$ olduğu görülür.

Aynı şekilde (5.42) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınır ve (2.2) de verilen denklemler kullanılırsa,

$$f^{'}k_2^{\star}T^{\star} - f^{'}B^{\star} = \pm\frac{\left(k_2\right)^2}{f^{'}}\left(k_2 T - B\right) \tag{5.43}$$

bulunur. (5.43) eşitliği de kendisi ile çapılırsa,

$$k_2^{\star} = \frac{k_2}{\left(f^{'}\right)^2}$$

olduğu elde edilir. Son olarak aynı işlemlerin tekrarı ile,

$$B^{\star} = \pm\frac{\left(k_2\right)^2}{\left(f^{'}\right)^2} B$$

elde edilir. Ayrıca $g(B^{\star},B^{\star})=0$ ve $g(T^{\star},B^{\star})=1$ olduğu görülür.

O zaman $\varphi^{\star}$ eğrisi bir Cartan null eğridir ve φ eğrisinin Bertrand eşlenik eğrisidir. Böylece φ eğrisi bir Bertrand eğridir.

5.2. Pseudo Null Bertrand Eğri

Kabul edelim ki, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında $\varphi: I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{E}_1^3$, Frenet çatısı $\{T(s),N(s),B(s)\}$ ve sıfırdan farklı eğrilikleri $k_1(s)=1, k_2(s)$ olan bir pseudo null Bertrand eğrisi ve $\varphi^{\star}: I^{\star}\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{E}_1^3$, Frenet çatısı $\{T^{\star}(s),N^{\star}(s),B^{\star}(s)\}$ ve $k_1^{\star}(s),k_2^{\star}(s)$ eğriliklerine sahip φ eğrisinin Bertrand eşlenik eğrisi olsun. O zaman $\varphi^{\star}$ eğrisi $\mu_1(s)$, $\mu_2(s)$, $\mu_3(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$\varphi^{\star}(s^{\star})=\varphi^{\star}(f(s))=\varphi(s)+\mu_1(s)T(s)+\mu_2(s)N(s)+\mu_3(s)B(s)$$

olarak yazılabilir. Bu pseudo null φ eğrisinin asli normal vektörü N null olduğunda Bertrand eşlenik eğrisi $\varphi^{\star}$, null asli normal vektör $N^{\star}$'a sahip bir pseudo null eğri olabilir. Aşağıdaki teoremde olabilecek bu durum ele alınacaktır.

Teorem 5.2 $\varphi: I\subset\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{E}_1^3$, sıfırdan farklı $k_1(s)=1, k_2(s)$ eğriliklerine sahip, null asli normal vektör N'ye sahip bir birim hızlı pseudo null eğri olsun. O zaman φ eğrisinin, Bertrand eşlenik eğrisi $\varphi^{\star}: I^{\star}\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{E}_1^3$ olan bir Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki durumun sağlanmasıdır:

$\mu_1(s),\mu_2(s),\mu_3(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonları ve $m_1=\pm1$ olmak üzere,

$$\left.\begin{aligned}\mu_3^{'}-\mu_3k_2 &= 0\\ (1+\mu_1^{'}-\mu_3)^2 &= (f^{'})^2\\ \left(\frac{\mu_1+\mu_2^{'}+\mu_2k_2}{f^{'}}\right)^{'}+\frac{\mu_1+\mu_2^{'}+\mu_2k_2}{f^{'}}k_2 &= m_1\left(\mu_1^{'}-\mu_3\right)\end{aligned}\right\}$$

eşitlikleri sağlanır. O zaman φ eğrisi bir Bertrand eğridir. Bu durumda Bertrand eşlenik eğrisi $\varphi^{\star}$ null asli normal vektör $N^{\star}$'a sahip bir pseudo null eğridir.

İspat. Bu teoremin ispatı, yukarıda verilen Teorem 5.1'in ispatı ile benzer olduğu için ispat tekrarlanmamıştır.

5.3. Örnekler

Örnek 5.1 $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında bir Cartan null eğrinin denklemi

$$\varphi(s) = (-\sinh s, -\cosh s, s-2)$$

olarak verilsin. Eğrilikleri $k_1 = 1$, $k_2 = \frac{1}{2}$ olan bu eğrinin Frenet vektörleri de,

$$\begin{aligned} T(s) = & \quad (-\cosh s, -\sinh s, 1) \\ N(s) = & \quad (-\sinh s, -\cosh s, 0) \\ B(s) = & \quad \tfrac{1}{2}(\cosh s, \sinh s, 1) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada φ eğrisinin Cartan null helis olduğu kolayca görülebilir.

(i) Eğer Teorem 5.1-(i) durumundaki koşulları sağlayan $\mu_1(s) = -\frac{s}{2} - 1$, $\mu_2 = s$, $\mu_3(s) = -s$ ve $h = 1$ seçimler yapılırsa $\varphi^\star$ eğrisinin denklemi,

$$\varphi^\star(s) = (\cosh s - (1+s)\sinh s, \sinh s - (1+s)\cosh s, -3)$$

bulunur. Gerekli hesaplamalarla

$$\begin{aligned} T^\star(s) = & \quad (\cosh s, \sinh s, 0) \\ N^\star(s) = & \quad (-\sinh s, -\cosh s, 0) \\ B^\star(s) = & \quad (0, 0, -1) \end{aligned}$$

ve $k_1^\star(s) = \frac{1}{1+s}$, $k_2^\star(s) = 0$ eşitlikleri elde edilir. O zaman φ eğrisi bir Bertrand eğridir. Sonuç olarak $\varphi^\star$ eğrisi, φ eğrisinin bir timelike Bertrand eşlenik eğrisidir.

(ii) Eğer Teoremin 5.1-(ii) durumundaki koşulları sağlayan $\mu_1(s) = s - e^s, \mu_2(s) = e^s - 1, \mu_3(s) = 2s$ ve $h = 1$ seçimler yapılırsa $\varphi^\star$ eğrisinin denklemi,

$$\varphi^\star(s) = (e^s(\cosh s - \sinh s), e^s(\sinh s - \cosh s), 3s - e^s - 2)$$

bulunur. Gerekli hesaplamalarla

$$
\begin{aligned}
T^{\star}(s) = &\quad (0,0,1) \\
N^{\star}(s) = &\quad (\sinh s, \cosh s, 0) \\
B^{\star}(s) = &\quad (0,0,1)
\end{aligned}
$$

ve $k_1^{\star}(s) = \frac{1}{3-e^s}$, $k_2^{\star}(s) = 0$ eşitlikleri elde edilir. O zaman φ eğrisi bir Bertrand eğridir. Sonuç olarak $\varphi^{\star}$ eğrisi, φ eğrisinin bir spacelike Bertrand eşlenik eğrisidir.

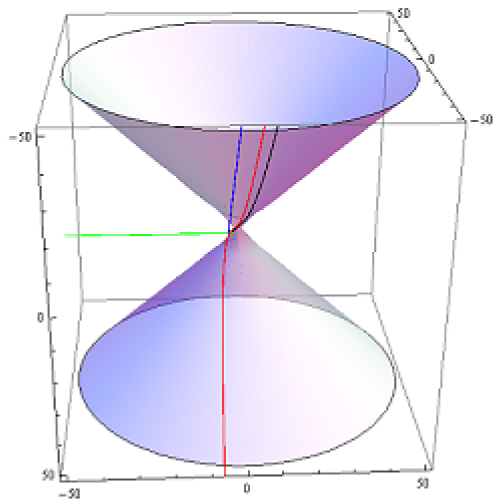
(iii) Eğer Teoremin 5.1-(iii) durumundaki koşulları sağlayan $\mu_1(s) = \frac{s}{2}, \mu_2(s) = 1, \mu_3(s) = s$ seçimler yapılırsa $\varphi^{\star}$ eğrisinin denklemi,

$$\varphi^{\star}(s) = (-2\sinh s, -2\cosh s, 2s-2)$$

bulunur. Gerekli hesaplamalarla

$$
\begin{aligned}
T^{\star}(s) = &\quad (-\cosh s, -\sinh s, 1) \\
N^{\star}(s) = &\quad (-\sinh s, -\cosh s, 0) \\
B^{\star}(s) = &\quad (1,-1,0)
\end{aligned}
$$

ve $k_1^{\star} = 1$, $k_2^{\star} = 0$ eşitlikleri elde edilir. O zaman φ eğrisi bir Bertrand eğridir. Sonuç olarak $\varphi^{\star}$ eğrisi, φ eğrisinin bir Cartan null Bertrand eşlenik eğrisidir.



Şekil 5.1: Örnek 5.1'de verilen φ eğrisi ve bu eğriye ait olan Bertrand eşlenik eğrilerinin grafikleri; kırmızı grafik φ eğrisi, mavi grafik timelike Bertrand eşlenik eğrisi, yeşil grafik spacelike Bertrand eşlenik eğrisi ve siyah grafik Cartan null Bertrand eşlenik eğrisi olarak gösterilmiştir.

Örnek 5.2 $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında bir pseudo null eğrinin denklemi,

$$\varphi(s)=\left(\frac{s^3}{3},\frac{s}{2}+\frac{s^3}{2\sqrt{3}},-\frac{\sqrt{3}s}{2}+\frac{s^3}{6}\right)$$

olarak verilsin. Eğrilikleri $k_1(s)=1$, $k_2(s)=\frac{1}{s}$ olan bu eğrinin Frenet vektörleri de,

$$\begin{aligned}
T(s)= &\ \left(s^2,\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}s^2}{2},-\tfrac{\sqrt{3}}{2}+\tfrac{s^2}{2}\right)\\
N(s)= &\ \left(2s,\sqrt{3}s,s\right)\\
B(s)= &\ \left(-\tfrac{1}{4s}-\tfrac{s^3}{4},-\tfrac{s}{4}-\tfrac{\sqrt{3}s^3}{8}+\tfrac{\sqrt{3}}{8s},\tfrac{\sqrt{3}s}{4}+\tfrac{1}{8s}-\tfrac{s^3}{8}\right)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Eğer Teorem 5.2'deki koşulları sağlayan $\mu_1(s)=\frac{s^2}{2},\mu_2=-\frac{s^3}{8},\mu_3(s)=s$ ve $m_1=1$ seçimler yapılırsa $\varphi^{\star}$ eğrisinin denklemi,

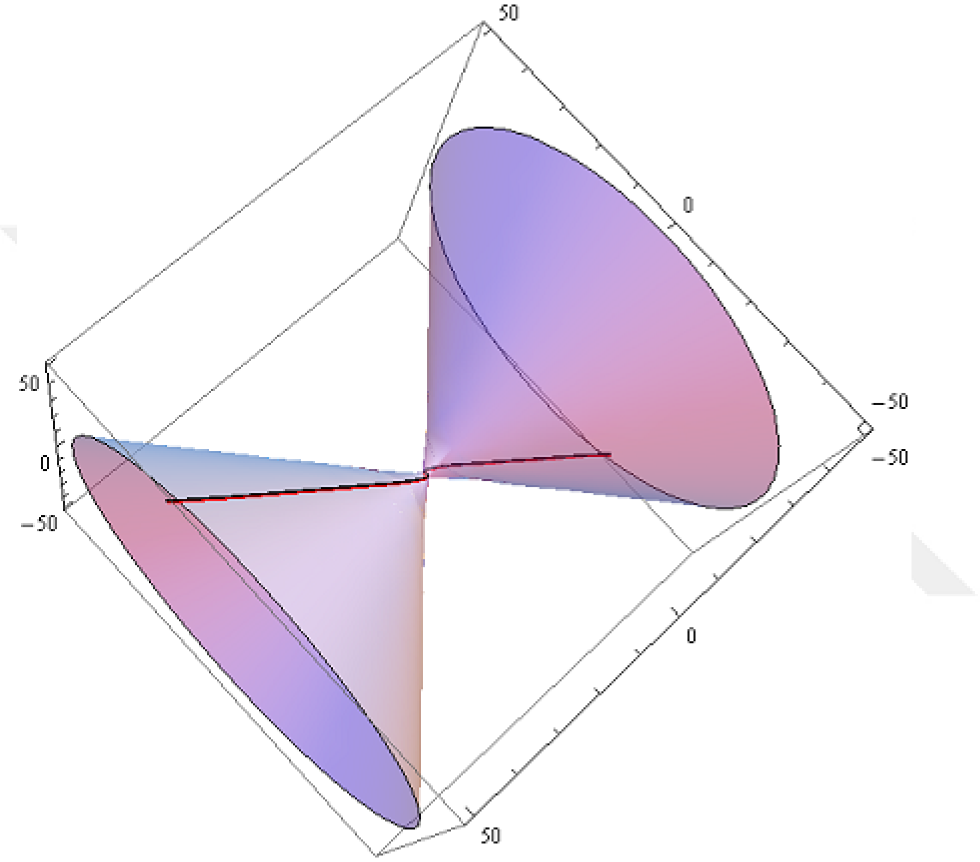
$$\varphi^{\star}(s)=\left(-\frac{1}{4}+\frac{s^3}{3},\frac{1}{24}(3\sqrt{3}+12s+4\sqrt{3}s^3),\frac{1}{24}(3-12\sqrt{3}s+4s^3)\right)$$

bulunur.

Gerekli hesaplamalarla

$$
\begin{aligned}
T^{\star}(s) = &\ \left(s^2, \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{3}s^2), \tfrac{1}{2}(-\sqrt{3}+s^2)\right)\\
N^{\star}(s) = &\ \left(2s, \sqrt{3}s, s\right)\\
B^{\star}(s) = &\ \left(-\tfrac{1}{4s}-\tfrac{s^3}{4}, -\tfrac{s}{4}-\tfrac{\sqrt{3}s^3}{8}+\tfrac{\sqrt{3}}{8s}, \tfrac{\sqrt{3}s}{4}+\tfrac{1}{8s}-\tfrac{s^3}{8}\right)
\end{aligned}
$$

ve $k_1^{\star}(s)=1$, $k_2^{\star}(s)=s$ eşitlikleri elde edilir. O zaman φ eğrisi bir Bertrand eğridir. Sonuç olarak $\varphi^{\star}$ eğrisi, φ eğrisinin bir pseudo null Bertrand eşlenik eğrisidir.



Şekil 5.2: Örnek 5.2'de verilen φ eğrisi ve bu eğriye ait olan Bertrand eşlenik eğrilerinin grafikleri; kırmızı grafik pseudo null Bertrand φ eğrisi, siyah grafik pseudo null Bertrand eşlenik eğrisi olarak gösterilmiştir.

6 . TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında, $\mathbb{E}_1^3$, 3- boyutlu Minkowski uzayında sırasıyla spacelike, timelike, Cartan null ve Pseudo null eğriler için yeni bir yaklaşım kullanılıp bu eğrilerin Bertrand eğrisi olma karakterizasyonları verilerek yeni Bertrand eğri örnekleri inşa edilmiştir. Örneğin klasik yaklaşımda genel helis eğrileri Bertrand eğrisi olamazken, ele aldığımız yeni yaklaşıma göre bu eğriler Bertrand eğri olabilmektedir.

Tezimizin ilgili bölümlerinde Minkowski 3-uzayında, eğriler causal karakterlerine göre ayrılıp Bertrand eğri olma karakterizasyonları ifade edildikten sonra ilgili örnekler ve grafikleri verilmiştir. Bu tez çalışmasıyla, literatürde çok sınırlı olan Bertrand eğri örneklerine yeni örnekler eklenmiştir.

Bu tezde kullanılan yeni yaklaşım yardımıyla Bertrand eğrileri farklı uzaylarda, farklı boyutlarda tekrar ele alınabilir.

KAYNAKLAR

[1] Struik, D. J., Lectures on Classical Differential Geometry, Addison-Wesley Press, Inc., Cambridge 42, Mass., 1950.

[2] Carmo, M. P., Differential geometry of curves and surfaces, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.

[3] Kuhnel, W., Differential geometry: curves-surfaces-manifolds. Braunschweig, Wiesbaden, 1999.

[4] Montiel, S., Ros, A., Curves and surfaces. Real Sociedad Matematica Espanola Madrid, Spain, 1998.

[5] Miller, J., Note on Tortuous Curves, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Soc. 24(1905), 51-55.

[6] Bertrand, J. M., Mémoire sur la théorie des courbes á double courbure, Comptes Rendus, 36, (1850).

[7] Saint Venant, B., Mémoire sur les lignes courbes non planes, Journal de l'Ecole Polytechnique, vol. 18, pp.1-76, (1845).

[8] Pears, L. R., Bertrand curves in Riemannian space. J. London Math. Soc., 1-10(2) (1935), 180-183.

[9] Cheng,Y. M., Lin, C. C., On the generalized bertrand curves in Euclidean-spaces. Note di Matematica, 29 (2) (2009), 33-39.

[10] Görgülü, A.,Özdamar, E., A generalization of the Bertrand curves as general inclined curves in En. Communications of the Faculty of Sciences of the University of Ankara, Series A1: Mathematics and Statistics, 35(1–2) (1986), pp. 53-60.

[11] Matsuda, H., Yorozu, S., Notes on Bertrand curves. Yokohama Math. J., 50 (1-2) (2003), 41-58.

[12] Ekmekci, N., İlarslan, K., On Bertrand curves and their characterization, Differ. Geom. Dyn. Syst. 3 (2001), no. 2, 17-24.

[13] Balgetir, H., Bektaş, M., Inoguchi, J., Null Bertrand curves in Minkowski 3-space and their characterizations, Note Mat. 23 (2004/05), no. 1, 7-13.

[14] Gökcek,F., Altın Erdem, H., On Cartan null Bertrand curves in Minkowski 3-space, Facta Universitatis (Nis) Ser. Math. Inform. Vol. 36, No 5 (2021), 1079-1088.

[15] Inoguchi, J., Lee, S., Null curves in Minkowski 3-space, Int. Electron. J. Geom., 2 (2008), 40-83.

[16] Jin, D. H., Null Bertrand curves in a Lorentz manifold, J. Korea Soc. Math. Educ. Ser. B Pure Appl. Math. 15 (2008), no. 3, 209-215.

[17] Öztekin, H.B., Weakened Bertrand curves in the Galilean space G3. Journal of Advanced Mathematical Studies, 2 (2) (2009), 69–76.

[18] Öğrenmiş, A. O., Öztekin, H., Ergüt, M., Bertrand curves in Galilean space and their characterizations. Kragujevac J. Math., 32(2009), 139-147.

[19] Uçum, A., Keçilioğlu, O., İlarslan, K., Generalized Pseudo Null Bertrand curves in Semi-Euclidean 4-Space with index 2. Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser., 65(2016), 459–472.

[20] Schief, W. K., On the Integrability of Bertrand curves and Razzaboni surfaces. Journal of Geometry and Physics. 45, 130-150 (2002).

[21] Huang, J., Chen, L., Izumiya, S., Pei, D., Geometry of special curves and surfaces in 3-space form. J. Geom. Phys., 136 (2019), 31–38.

[22] Liu, H., Curves in Three Dimensional Riemannian Space Forms. Results. Math., 66 (2014), 469–480.

[23] Lucas, P., Ortega-Yagues, J. A., Bertrand curves in the three-dimensional sphere. Journal of Geometry and Physics , 62(9) 2012, 1903-1914.

[24] Lucas, P., Ortega-Yagues, J. A., Bertrand curves in non-flat threedimensional (Riemannian or Lorentzian) space forms. Bull. Korean Math. Soc. 50(2013), 1109–1126.

[25] Camcı, Ç., Uçum, A., İlarslan, K., A New Approach to Bertrand Curves in Euclidean 3-Space, J. Geom. (2020) 111:49.

[26] Altın Erdem, H., Camcı, Ç., Uçum, A., İlarslan, K., New approach to timelike Bertrand curves in Minkowski 3-space, Carpathian Mathematical Publications (ESCI), Accepted, (2021).

[27] Altın Erdem, H., İlarslan, K., Spacelike Bertrand curves in Minkowski 3-space, Revisted, Analele Stiintifice ale Universitatii, Ovidius Constanta (SCI-Exp.), (2022).

[28] O'Neill, B., Semi-Riemannian geometry with applications to relativity. Academic Press, New York, 1983.

[29] Duggal, K. L., Jin D. H.., Null curves and hypersurfaces of semi-Riemannian manifolds. World Scientific, Singapore, 2007.

[30] Lopez, R., Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space, Int. Electron. J. Geom., 7 (1) 2014, 44-107.

[31] Walrave, J., Curves and surfaces in Minkowski space. Doctoral thesis. K. U. Leuven, Fac. of Science, Leuven, 1995.

[32] Izumiya, S., Takeuchi, N., New special curves and developable surfaces. Turkish J. Math. 28: 531–537, 2004.

[33] Kula, L., Ekmekçi, N., Yaylı, Y., İlarslan, K., Characterizations of slant helices in Euclidean 3-space. Turkish J. Math. 34: 261–273, 2010.

[34] Ali, A., Position vectors of slant helices in Euclidean 3-space. J. Egyptian Math. Soc. 20: 1–6, 2012.

[35] Kula, L., Yaylı, Y., On slant helix and its spherical indicatrix. Appl. Math. Comput. 169: 600–607, 2005.

[36] Ali, T.A., Lopez, R., Slant helices in Minkowski 3-space. J. Korean Math Soc., 48 (2011), 159-167.

[37] Altunkaya, B., Kula, L., On spacelike rectifying slant helices in Minkowski 3-space. Turkish J. Math., 42(3) (2018), 1098–1110.

[38] Chen, B. Y., When does the position vector of a space curve always lie in its rectifying plane?. Amer. Math. Montly. 110: 147-152, 2003.

[39] İlarslan, K., Nesovic, E., Petrovic-Torgasev, M., Some characterizations of rectifying curves in the Minkowski 3-space. Novi Sad J. Math. 33(2): 23-32, 2003.

[40] Chen, B.Y., Dillen, F., Rectifying curves as centrodes and extremal curves. Bull Ins Math Aca Sinica, 33 (2005),77-90.

[41] Bonnor, W. B., Curves with null normals in Minkowski space-time. A random walk in relativity and cosmology, Wiley Easten Limited (1985), 33-47.

[42] Olszak, Z., A note about the torsion of null curves in the 3-dimensional Minkowski spacetime and the Schwarzian derivative. Filomat 29 (2015), no. 3, 553–561.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Hatice ALTIN ERDEM

Doğum Tarihi/Yeri

Yabancı Dil

Eğitim Durumu

Lise :

Lisans :

Yüksek Lisans :

Çalıştığı Kurum ve Yıllar :

Yayınları :

1.) Altın Erdem, H., Camcı, Ç., Uçum, A., İlarslan, K., New approach to timelike Bertrand curves in Minkowski 3-space, Carpathian Mathematical Publications (ESCI), kabul edildi, (2021).

2.) Altın Erdem, H., İlarslan, K., Spacelike Bertrand curves in Minkowski 3-space, Revisted, Analele Stiintifice ale Universitatii, Ovidius Constanta (SCI-Exp.), kabul edildi, (2022).

Araştırma Alanları : Minkowski 3 uzayı, Bertrand eğrileri, Eğrilerin causal karakterleri.