T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

METRİK UZAYDA *w*-UZAKLIK FONKSİYONU VE İLGİLİ SABİT NOKTA SONUÇLARI

ÜMRAN BAŞAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı
Prof. Dr. İshak ALTUN

KIRIKKALE - 2023

T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

METRİK UZAYDA *w*-UZAKLIK FONKSİYONU VE İLGİLİ SABİT NOKTA SONUÇLARI

ÜMRAN BAŞAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı
Prof. Dr. İshak ALTUN

KIRIKKALE - 2023

Ümran BAŞAR tarafından hazırlanan "METRİK UZAYDA *w*-UZAKLIK FONKSİYONU VE İLGİLİ SABİT NOKTA SONUÇLARI" adlı tez çalışması, aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. İshak ALTUN — İmza
Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Başkan: Prof. Dr. Murat OLGUN — İmza
Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Doç. Dr. Hatice Aslan HANÇER — İmza
Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Tez Savunma Tarihi: 02.01.2023

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. Recep ÇALIN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYANI

Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Ümran BAŞAR

02.01.2023

ÖZET

METRİK UZAYDA w-UZAKLIK FONKSİYONU VE İLGİLİ SABİT NOKTA SONUÇLARI

BAŞAR, Ümran
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. İshak ALTUN
Ocak 2023, 36 sayfa

Dört bölümden oluşan bu tez çalışmasının ilk bölümünde alışılageldiği biçimde giriş, çalışmanın amacı ve kaynak özetleri sunulmuştur. İkinci bölümde metrik uzayda w-uzaklık fonksiyonunun tanımı, bazı temel özellikleri ile çeşitli örnekler verilmiştir. Ayrıca metrik uzayda metrik fonksiyonu kullanılarak elde edilmiş küme değerli dönüşümler için bazı sabit nokta teoremleri ile bunların bazılarının w-uzaklık fonksiyonu ile snunulmuş versiyonları incelenmiştir. Tezin orijinal kısmını oluşturan üçüncü bölümde ise P-büzülme kavramı ile w-uzaklık kavramları birlikte düşünülerek hem tek değerli dönüşümler hem de küme değerli dönüşümler için bazı yeni sabit nokta teoremleri elde edilmiştir. Son bölüm tartışma ve sonuç için ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sabit nokta, tam metrik uzay, w-uzaklık fonksiyonu, P-büzülme.

ABSTRACT

w-DISTANCE FUNCTION ON METRIC SPACE AND RELATED FIXED POINT RESULTS

BAŞAR, Ümran
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, M. Sc. Thesis
Supervisor: Prof. Dr. İshak ALTUN
January 2023, 36 pages

In the first part of this thesis, which consists of four section, the introduction, the aim of the study and the source summaries are presented in the usual way. In the second section, the definition of w-distance function in metric space, some basic properties and various examples are given. In addition, some fixed point theorems for set-valued mappings obtained by using the metric function in metric space and their versions with w-distance function are examined. In the third section, which constitutes the original part of the thesis, some new fixed point theorems are obtained for both single-valued mappings and set-valued mappings by considering the concepts of P-contraction and w-distance. The last section is reserved for discussion and conclusion.

Key Words: Fixed point, complete metric space, w-distance function, P-contraction.

TEŞEKKÜR

İlk olarak yüksek lisans tez konumum belirlenmesinden, tezin yazım aşamasına kadar her türlü desteğini esirgemeyen, bilgi ve tecrübesi ile zaman ayırıp, yüksek lisans çalışmamı tamamlamamda rehberliği ile ışık tutan danışmanım sayın hocam Prof. Dr. İshak Altun'a teşekkürlerimi sunarım. Bunun yanı sıra yüksek lisans eğitimim boyunca yardımını benden esirgemeyen Doç.Dr. Hatice Aslan Hançer'e teşekkürlerimi sunarım. Bana bu yolda desteklerini hiç esirgemeyen annem, babam ve kardeşime teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Negatif olmayan reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
(X,d)	Metrik uzay
$d(x,A)$	x noktasının A kümesine olan uzaklığı
$w(x,A)$	w-fonksiyonuna göre x noktasının A kümesine olan uzaklığı
$P(X)$	X in boş olmayan alt kümelerinin sınıfı
$Cl(X)$	X in boş olmayan kapalı alt kümelerinin sınıfı

1 . GİRİŞ

Boş olmayan bir X kümesinden (veya boş olmayan bir alt kümesinden) X e tanımlı bir T dönüşümünü göz önüne alalım. Bu durumda ortaya çıkabilecek en önemli sorulardan biri bahsi geçen dönüşümün bazı noktaları sabit bırakıp bırakmadığıdır. Yani, $Tx = x$ denklemi bir çözüme sahip midir? Eğer bu denklemin çözümü varsa buna T nin sabit noktası denir. Sabit nokta teori ilk olarak X kümesi ve T dönüşümü üzerinde hangi şartlar bulunsun ki T nin X üzerinde sabit noktası var olsun sorusunun cevabını araştırmaktadır. Ardından sabit noktanın var olması halinde tek olup olmadığı veya hangi şartlarla tek olduğunu araştırır. Son olarak, sabit noktanın bulunması yöntemleri üzerinde durur. X kümesinin bir kısmi sıralı küme ve T dönüşümünün sıra koruyan bir dönüşüm olması koşulları ile ayrık sabit nokta teori adı verilen çalışmalar mevcut olduğu gibi, genellikle X bir topolojik uzay ve T nin sürekli veya kompakt (veya benzer özelliklere sahip) bir dönüşüm olması halinde sabit nokta teori çalışmaları yapılmaktadır. Analiz veya uygulamalı matematikte bahsi geçen pek çok varlık (ve teklik) teoreminin aslında uygun bir sabit nokta teoreminin (özellikle iyi bilinen Schauder ve Banach sabit nokta teoremlerinin) özel hali veya uygulaması olduğu görülebilir. Bir tam metrik uzaydan kendisine tanımlı büzülme dönüşümlerinin sabit noktasının var ve tek olduğu, hatta her Picard iterasyon dizisinin bu sabit noktaya yakınsadığını belirten Banach sabit nokta teoreminin literatürde pek çok genelleştirmesi mevcuttur. Bu genelleştirmeler, uzayın metriksel yapısını zayıflatarak (örneğin quasi metrik, pseudo metrik, fuzzy metrik, kısmi metrik, b-metrik gibi) veya büzülme eşitsizliğini daha fazla dönüşüme hitap edecek biçimde esneterek yapılmaktadır. Bir başka yol ise büzülme eşitsizliklerinde metrik fonksiyonu yerine metrik fonksiyonu ile belirli ilişkilere sahip başka uzaklık fonksiyonlarını kullanarak sabit nokta sonuçları elde etmektir ki bunlardan biride w-uzaklık fonksiyonudur. Bu tez çalışmasında w-uzaklık fonksiyonu ile oluşturulmuş yeni bir büzülme eşitsizliği dikkate alınarak sabit nokta teoremleri elde edilecektir.

1.1. Kaynak Özetleri

Metrik uzayda w-uzaklık fonksiyonunun temel tanımı için Kada, Suzuki ve Takahashi'nin çalışması incelenmiştir [1]. Ardından w-uzaklık fonksiyonunun çeşitli örnekleri ve önemli özellikleri için Ikbal ve Rizwan [2], Latif ve Abdou [3], Latif ve Albar [4] ile Lin ve Du [5] nun çalışmaları dikkate alınmıştır. Metrik uzayda küme değerli dönüşümler için önemli bazı sabit nokta teoremlerinin ispat tekniğini incelemek için Feng ve Liu [6] ile Klim ve Wardowski [7] nin çalışmaları kullanılmıştır. Son olarak P-büzülme kavramının öenmini vurgulamak ve son zamanlarda elde edilmiş çalışmalardan bahsetmek için [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16] numaralı kaynaklar incelenmiştir.

1.2. Çalışmanın Amacı

Bu tez çalışmasında metrik uzayda P-büzülme ve w-uzaklık fonksiyonlarını birlikte düşünerek P_w-büzülme kavramını tanımlamak ve bu kavramı dikkate alarak hem tek değerli hem de küme değerli dönüşümler için bazı yeni sabit nokta teoremleri elde etmek amaçlanmıştır.

2 . MATERYAL VE YÖNTEM

1996'da Kada, Suzuki ve Takahashi [1] bir metrik uzayda w-uzaklık kavramını aşağıdaki gibi tanıttılar.

2.1. w-uzaklık fonksiyonu

Tanım 2.1.1. (X,d) bir metrik uzay olsun. $w : X \times X \to [0,\infty)$ bir fonksiyon olmak üzere eğer bu fonksiyon her $x,y,z \in X$ için aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu fonksiyona X de bir w-uzaklık fonksiyonu denir:

w1) $w(x,z) \leq w(x,y) + w(y,z)$,

w2) $w(x,\cdot) : X \to [0,\infty)$ dönüşümü alttan yarı sürekli, yani X içindeki her $x,y \in X$ ve $y_n \to y$ olacak biçimde X içindeki her $\{y_n\}$ dizisi için

$$w(x,y) \leq \liminf_{n\to\infty} w(x,y_n),$$

w3) her $\varepsilon > 0$ için $w(z,x) \leq \delta$ ve $w(z,y) \leq \delta$ iken $d(x,y) \leq \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ vardır.

Şimdi w-uzaklık fonksiyonu ile ilgili bazı örnekler ve özellikleri verelim. Bu örnekler ve özellikler [1] in yanı sıra [2, 3, 4, 5] gibi kaynaklarda da bulunabilir.

Örnek 1. (X,d) bir metrik uzay olmak üzere, d fonksiyonu X üzerinde bir w-uzaklık fonksiyondur. Gerçekten, öncelikle d metrik fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar. Ayrıca d fonksiyonu her iki değişkene göre sürekli olduğundan ikinci değişkene göre alttan yarı süreklidir. Son olarak $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ olarak alınırsa

$$d(z,x) \leq \delta \text{ ve } d(z,y) \leq \delta$$

olduğunda

$$d(x,y) \leq d(z,x) + d(z,y) \leq \varepsilon$$

elde edilir.

Örnek 2. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. Bu durumda her $x, y \in X$ için

$$w(x,y) = \|x\| + \|y\|$$

biçiminde tanımlı $w : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu bir w-uzaklık fonksiyonudur. Gerçekten, norm fonksiyonu negatif olmadığından her $x, y, z \in X$ için

$$\begin{aligned} w(x,z) &= \|x\| + \|z\| \\ &\leq \|x\| + \|y\| + \|y\| + \|z\| \\ &= w(x,y) + w(y,z) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca norm fonksiyonu sürekli olduğundan w ikinci değişkene göre alttan yarı süreklidir. Son olarak $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ olarak alınırsa

$$w(z,x) \leq \delta \text{ ve } w(z,y) \leq \delta$$

olduğunda

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \|x - y\| \\ &\leq \|x\| + \|y\| \\ &= w(x,y) \\ &\leq w(x,z) + w(z,y) \\ &= w(z,x) + w(z,y) \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

elde edlir.

Örnek 3. (X, d) bir metrik uzay ve $g : X \to X$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda her $x,y \in X$ için

$$w(x,y) = \max\{d(gx,y), d(gx,gy)\}$$

biçiminde tanımlı $w : X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu bir w-uzaklık fonksiyonudur. Gerçekten, her $x,y,z \in X$ için

$$\begin{aligned} w(x,z) &= \max\{d(gx,z), d(gx,gz)\} \\ &\leq \max\{d(gx,gy) + d(gy,z), d(gx,gy) + d(gy,gz)\} \\ &= d(gx,gy) + \max\{d(gy,z), d(gy,gz)\} \\ &\leq \max\{d(gx,y), d(gx,gy)\} + \max\{d(gy,z), d(gy,gz)\} \\ &= w(x,y) + w(y,z) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca g dönüşümü sürekli olduğundan w fonksiyonu ikinci değişkene göre alttan yarı süreklidir. Son olarak $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ olarak alınırsa

$$w(z,x) \leq \delta \text{ ve } w(z,y) \leq \delta$$

olduğunda

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x,gz) + d(y,gz) \\ &\leq w(z,x) + w(z,y) \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 4. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. Bu durumda her $x,y \in X$ için

$$w(x,y) = \|y\|$$

biçiminde tanımlı $w : X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu bir w-uzaklık fonksiyonudur.

Örnek 5. (X,d) bir metrik uzay olsun. Bu durumda her $x,y \in X$ için

$$w(x,y) = c, \; c \in \mathbb{R}^+$$

biçiminde tanımlı $w : X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu bir w-uzaklık fonksiyonudur.

Örnek 6. $X = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ olmak üzere

$$d(x,y) = \begin{cases} x+y & , \quad x \neq y \\ \\ 0 & , \quad x = y \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. O zaman d fonksiyonu X üzerinde bir metriktir. Üstelik (X,d) tam metrik uzaydır. $w : X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu her $x,y \in X$ için $w(x,y) = y$ ile tanımlansın. O zaman w bir w-uzaklık fonksiyonudur.

Örnek 7. (X,d) bir metrik uzay ve F de X 'in en az iki elemanlı kapalı ve sınırlı bir alt kümesi ve c de $c \geq \delta(F) = \sup\{d(a,b) : a,b \in F\}$ özelliğine uygun bir reel sayı olsun. O zaman

$$w(x,y) = \begin{cases} d(x,y) & , \quad x,y \in F \\ \\ c & , \quad x \notin F \text{ veya } y \notin F \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan w fonksiyonu bir w-uzaklık fonksiyonudur. Gerçekten, $\{x,y,z\} \subseteq F$ için

$$\begin{aligned} w(x,z) &= d(x,z) \\ &\leq d(x,y) + d(y,z) \\ &= w(x,y) + w(y,z) \end{aligned}$$

olur. Eğer $\{x,y,z\} \nsubseteq F$ ise

$$w(x,z) \leq c \leq w(x,y) + w(y,z)$$

olduğu açıktır. Şimdi her $x \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$w^{-1}(x,(-\infty,\alpha]) = \{y \in X : w(x,y) \leq \alpha\}$$

kümesinin X de kapalı olduğunu göstermek $w(x,\cdot)$ nın alttan yarı sürekli olduğunu göstermek için yeterli olacaktır. Eğer $\alpha \geq c$ ise

$$\{y \in X : w(x,y) \leq \alpha\} = X$$

olacağından bahsi geçen küme kapalıdır. Şimdi $\alpha < c$ olsun. O zaman eğer $x \in F$ ise $w(x,y) < \alpha$ olması $y \in F$ olmasını gerektireceğinden

$$\{y \in X : w(x,y) \leq \alpha\} = \{y \in X : d(x,y) \leq \alpha\} \cap F$$

olur ki F kapalı olduğundan bu küme de kapalıdır. Eğer $x \notin F$ ise

$$\{y \in X : w(x,y) \leq \alpha\} = \emptyset$$

olup kapalı bir kümedir. Sonuç olarak $w(x,\cdot)$ alttan yarı süreklidir. Şimdi $\varepsilon > 0$ olsun. n_0 doğal sayısını $0 < \frac{\varepsilon}{n_0} < c$ olacak biçimde seçelim ve $\delta = \frac{\varepsilon}{2n_0}$ olarak alalım. O zaman herhangi iki $x,y \in X$ için $w(x,y) \leq \delta$ ise o zaman $x,y \in F$ olmak zorundadır. Bu durumda

$$w(z,x) \leq \delta$$

ve

$$w(z,y) \leq \delta$$

ise $x,y,z \in F$ olup buradan

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \leq \frac{\varepsilon}{2n_0} + \frac{\varepsilon}{2n_0} = \frac{\varepsilon}{n_0} < \varepsilon$$

olur.

Kada, Suzuki ve Takahashi w-uzaklık kavramını kullanarak Caristi'nin sabit nokta teoremini, Ekeland'ın varyasyon prensibini (EVP), Takahashi'nin minimizasyon teoremini ve Kirk-Caristi sabit nokta teoremini geliştirdiler.
Şimdi w-uzaklık fonksiyonu ile ilgili temel iki lemma verelim.

Lemma 1. (X,d) bir metrik uzay, $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ bu uzayda iki dizi, $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ de negatif olmayan reel sayıların 0 noktasına yakınsayan dizileri ve w bir w-uzaklık fonsiyonu olsun. Bu durumda $x,y,z \in X$ için aşağıdakiler sağlanır.

(a) Her $n \in \mathbb{N}$ için $w(x_n, y) \leq \alpha_n$ ve $w(x_n, z) \leq \beta_n$ ise $y = z$ dir. Özellikle eğer $w(x, y) = 0$ ve $w(x, z) = 0$ ise $y = z$ dir.

(b) Her $n \in \mathbb{N}$ için $w(x_n, y_n) \leq \alpha_n$ ve $w(x_n, z) \leq \beta_n$ ise $\{y_n\}$ dizisi z noktasına yakınsar.

(c) $m > n$ özelliğindeki her $n, m \in \mathbb{N}$ için $w(x_n, x_m) \leq \alpha_n$ ise $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir.

(d) Her $n \in \mathbb{N}$ için $w(y, x_n) \leq \alpha_n$ ise $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisi olur.

İspat. (a) $\varepsilon > 0$ olsun. w-uzaklığının tanımından en az bir $\delta > 0$ için

$$w(u, y) \leq \delta \text{ ve } w(u, z) \leq \delta \text{ ise } d(y, z) \leq \varepsilon$$

olur. Diğer taraftan

$$\alpha_n \to 0 \text{ olduğundan } \exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ vardır öyle ki } \forall n \geq N_1 \text{ için } \alpha_n < \delta$$

ve benzer şekilde

$$\beta_n \to 0 \text{ olduğundan } \exists N_2 \in \mathbb{N} \text{ vardır öyle ki } \forall n \geq N_2 \text{ için } \beta_n < \delta$$

olur. Şimdi $n_0 = \max\{N_1, N_2\}$ olarak alındığında, her $n \geq n_0$ için $\alpha_n < \delta$ ve $\beta_n < \delta$ olur. Böylece $n \geq n_0$ için

$$w(x_n, y) \leq \alpha_n < \delta \text{ ve } w(x_n, z) \leq \beta_n < \delta$$

olur ki o zaman $d(y, z) \leq \varepsilon$ bulunur. Bu ise $d(y, z) = 0$ ve dolayısıyla $y = z$ olduğunu gösterir. Özel olarak her n için $x_n = x$ ve $\alpha_n = \beta_n = 0$ olarak alınırsa bahsi geçen özel durum elde eldilir.

(b) (a) maddesinde olduğu gibi $\varepsilon > 0$ a karşılık δ ve n_0 sayılarını belirleyebiliriz ki sonuçta her $n \geq n_0$ için $d(y_n, z) \leq \varepsilon$ elde ederiz. O zaman $\{y_n\}$ dizisi z noktasına yakınsar.

(c) $\varepsilon > 0$ olsun. w-uzaklığının tanımından en az bir $\delta > 0$ için

$$w(u, y) \leq \delta \text{ ve } w(u, z) \leq \delta \text{ ise } d(y, z) \leq \varepsilon$$

olur. Ayrıca $\alpha_n \to 0$ olduğundan dolayı her $n \geq n_0$ için $\alpha_n < \delta$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece her $n,m \geq n_0 + 1$ için

$$w(x_{n_0}, x_n) \leq \alpha_{n_0} < \delta \text{ ve } w(x_{n_0}, x_m) \leq \alpha_{n_0} < \delta$$

olur. Buradan $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$ olur. Dolayısı ile $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisi olur.

(d) $\varepsilon > 0$ olsun. w-uzaklığının tanımından en az bir $\delta > 0$ için

$$w(u,y) \leq \delta \text{ ve } w(u,z) \leq \delta \text{ ise } d(y,z) \leq \varepsilon$$

olur. Ayrıca $\alpha_n \to 0$ olduğundan dolayı her $n \geq n_0$ için $\alpha_n < \delta$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece her $n,m \geq n_0$ için

$$w(y, x_n) \leq \alpha_n < \delta \text{ ve } w(y, x_m) \leq \alpha_n < \delta$$

olur. Buradan $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$ olur. Dolayısı ile $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisi olur. $\square$

Uyarı 1. $w(a,b) = w(b,a) = 0$ ve $w(a,a) \leq w(a,b) + w(b,a) = 0$ ise $w(a,a) = 0$ dır.

Lemma 2. (X,d) bir metrik uzay K kapalı bir alt küme ve w da X üzerindeki bir w-uzaklık fonksiyonu olsun. Kabul edelim ki $w(u,u) = 0$ olacak şekilde bir $u \in X$ var olsun. Bu durumda

$$w(u,K) := \inf\{w(u,y) : y \in K\} = 0 \Leftrightarrow u \in K$$

dır.

İspat. $w(u,K) = 0$ olsun. Bu durumda K da $w(u,x_n) \to 0$ olacak biçimde bir $\{x_n\}$ dizisi vardır. Ayrıca $w(u,u) = 0$ olduğundan Lemma 1 in (b) maddesinden $x_n \to u$ olur. Dolayısı ile K kümesi kapalı küme, $\{x_n\} \subseteq K$ ve $x_n \to u$ olduğundan dolayı $u \in K$ olur. Karşıt olarak $u \in K$ olsun. O zaman $w(u,u) = 0$ olduğundan

$$w(u,K) = \inf\{w(u,y) : y \in K\} = 0$$

olur. $\square$

2.2. Metrik uzayda küme değerli dönüşümler için bazı sabit nokta teoremleri

Bu kesimde metrik uzayda küme değerli dönüşümler için Feng-Liu [6] ve Klim-Wardowski [7] tarafından verilen temel sabit nokta teoremlerini ve ispatlarını inceleyeceğiz. Daha sonra bunların w-uzaklık fonksiyonu ile elde edilen versiyonlarını ele alacağız. Bu bölümde aşağıda belirtilen I_b^x kümesinden yararlanacağız. (X,d) bir metrik uzay $Cl(X)$ de X in boş olmayan kapalı alt kümelerinin sınıfı ve $T : X \to Cl(X)$ bir dönüşüm olsun. $b \in (0,1)$ sabiti ve $x \in X$ için

$$I_b^x = \{y \in Tx : bd(x,y) \leq d(x,Tx)\}$$

olarak tanımlansın.

Teorem 2.2.1 (Feng-Liu). (X,d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to Cl(X)$ bir dönüşüm olsun. Ayrıca her $x \in X$ ve bir $y \in I_b^x$ için

$$d(y,Ty) \leq cd(x,y) \tag{2.2.1}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $c \in (0,1)$ sabitinin var olduğunu kabul edelim. Bu durumda $c < b$ ve $f(x) = d(x,Tx)$ fonksiyonunu alttan yarı sürekli olması koşullarıyla T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. Öncelikle $x \in X$ için $Tx \in Cl(X)$ olduğundan dolayı her $b \in (0,1)$ için I_b^x kümesi boş küme değildir. $x_0 \in X$ herhangi bir nokta olmak üzere (2.2.1) eşitsizliğinden

$$d(x_1,Tx_1) \leq cd(x_0,x_1)$$

olacak biçimde bir $x_1 \in I_b^{x_0}$ vardır. Yine $x_1 \in X$ için

$$d(x_2,Tx_2) \leq cd(x_1,x_2)$$

olacak biçimde bir $x_2 \in I_b^{x_1}$ vardır. Bu şekilde devam edilerek her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in I_b^{x_n}$ ve

$$d(x_{n+1},Tx_{n+1}) \leq cd(x_n,x_{n+1}).$$

koşullarına uygun X içerisinde bir $\{x_n\}$ dizisi oluşturulabilir. Şimdi bu dizinin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Burada her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_{n+1}, Tx_{n+1}) \leq cd(x_n, x_{n+1})$$

ve bunun yanı sıra $x_{n+1} \in I_b^{x_n}$ olduğundan dolayı

$$bd(x_n, x_{n+1}) \leq d(x_n, Tx_n)$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi bu iki eşitsizliği kullanarak dizinin ardışık terimleri arasındaki mesafeyi bulalım. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{b} d(x_n, Tx_n) \leq \frac{c}{b} d(x_{n-1}, x_n)$$

olur. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_{n+2}) &\leq \frac{c}{b} d(x_n, x_{n+1}) \\ d(x_{n+1}, Tx_{n+1}) &\leq \frac{c}{b} d(x_n, Tx_n) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(x_n, Tx_n) \\ &\leq \frac{c}{b} d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) \\ &\leq \frac{c}{b}\left[\frac{c}{b} d(x_{n-2}, Tx_{n-2})\right] \\ &= \frac{c^2}{b^2} d(x_{n-2}, Tx_{n-2}) \\ &\vdots \\ &\leq \frac{c^n}{b^n} d(x_0, Tx_0) \\ &= \frac{c^n}{b^n} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde

$$d(x_n, Tx_n) \leq \frac{c^n}{b^n} d(x_0, T_0)$$

eşitsizliği de elde edilebilir. Şimdi ise $m > n$ özelliğindeki her $m,n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
d(x_m,x_n) &\leq d(x_m,x_{m-1}) + d(x_{m-1},x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1},x_n) \\
&\leq \frac{c^{m-1}}{b^{m-1}} d(x_0,x_1) + \frac{c^{m-2}}{b^{m-2}} d(x_0,x_1) + \cdots + \frac{c^n}{b^n} d(x_0,x_1) \\
&= \left[\frac{c^{m-1}}{b^{m-1}} + \frac{c^{m-2}}{b^{m-2}} + \cdots + \frac{c^n}{b^n}\right] d(x_0,x_1) \\
&= \frac{c^n}{b^n}\left[\frac{c^{m-n-1}}{b^{m-n-1}} + \cdots + \frac{c^2}{b^2} + \frac{c}{b} + 1\right] d(x_0,x_1) \\
&= \frac{c^n}{b^n}\left[\frac{\frac{c}{b} - \frac{c^{m-n}}{b^{m-n}}}{1-\frac{c}{b}}\right] d(x_0,x_1) \\
&\leq \frac{\frac{c^n}{b^n}}{1-\frac{c}{b}} d(x_0,x_1)
\end{aligned}$$

olur. Burada $b > c$ olduğundan dolayı $n \to \infty$ için $\frac{c^n}{b^n} \to 0$ olur. Yani

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_m,x_n) = \lim_{n,m\to\infty} \frac{\frac{c^n}{b^n}}{1-\frac{c}{b}} d(x_0,x_1) = 0$$

olur ki bu da bize $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu söyler. (X,d) bir tam metrik uzay olduğundan dolayı $x_n \to z$ olacak biçimde bir $z \in X$ vardır. Son olarak $f(x) = d(x,Tx)$ fonksiyonu alttan yarı sürekli olduğundan

$$0 \leq d(z,Tz) = f(z) \leq \lim_{n\to\infty} \inf f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \inf d(x_n,Tx_n) = 0$$

bulunur. Böylece $d(z,Tz) = 0$ yani $z \in Tz$ elde edilir. □

Teorem 2.2.2 (Klim-Wardowski). (X,d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to Cl(X)$ bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki koşulların sağlandığını varsayalım.

(i) $f(x) = d(x,Tx)$ olarak tanımlanan $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu alttan yarı sürekli olsun,

(ii) her $t \in [0,\infty)$ için

$$\limsup_{r\to t^+} \varphi(r) < b \tag{2.2.2}$$

ve her $x \in X$ ve bir $y \in I_b^x$ için

$$d(y,Ty) \leq \varphi(d(x,y))d(x,y)$$

eşitsizliklerini sağlayan $b \in (0,1)$ sabiti ve $\varphi : [0,\infty) \to [0,b)$ fonksiyonunu var olsun. Bu durumda T dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. Kabul edelim ki T dönüşümünün sabit noktası olmasın. O zaman her $x \in X$ için $d(x,Tx) > 0$ olur. Her $x \in X$ için Tx kümesi kapalı olduğundan her $b \in (0,1)$ için I_b^x kümesi boş değildir. Üstelik $x \notin Tx$ olduğundan I_b^x kümesinde x den farklı bir y elemanı mevcuttur. Yani her $b \in (0,1)$ ve her $x \in X$ için

$$bd(x,y) \leq d(x,Tx) \tag{2.2.3}$$

olacak biçimde x den farklı bir $y \in Tx$ vardır. Şimdi b ve φ (ii) koşulundaki gibi olsunlar. $x_1 \in X$ keyfi bir nokta olsun. (2.2.3) ve (ii) den dolayı

$$bd(x_1,x_2) \leq d(x_1,Tx_1), \tag{2.2.4}$$

$$d(x_2,Tx_2) \leq \varphi(d(x_1,x_2))d(x_1,x_2), \tag{2.2.5}$$

ve

$$\varphi(d(x_1,x_2)) < b$$

olacak şekilde x_1 den farklı bir $x_2 \in Tx_1$ vardır. Böylece (2.2.4) ve (2.2.5) den □

$$\begin{aligned} d(x_1,Tx_1) - d(x_2,Tx_2) &\geq bd(x_1,x_2) - \varphi(d(x_1,x_2))d(x_1,x_2) \\ &= [b - \varphi(d(x_1,x_2))]d(x_1,x_2) \\ &> 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$bd(x_2,x_3) \leq d(x_2,Tx_2), \tag{2.2.6}$$

$$d(x_3,Tx_3) \leq \varphi(d(x_2,x_3))d(x_2,x_3) \tag{2.2.7}$$

ve

$$\varphi(d(x_2,x_3)) < b$$

olacak şekilde x_2 den farklı bir $x_3 \in Tx_2$ vardır. Böylece (2.2.6) ve (2.2.7) dan

$$\begin{aligned} d(x_2,Tx_2) - d(x_3,Tx_3) &\geq bd(x_2,x_3) - \varphi(d(x_2,x_3))d(x_2,x_3) \\ &= [b - \varphi(d(x_2,x_3))]d(x_2,x_3) \\ &> 0 \end{aligned}$$

olur. Üstelik (2.2.6) ve (2.2.5) den dolayı

$$d(x_2,x_3) \leq \frac{1}{b}d(x_2,Tx_2) \leq \frac{1}{b}\varphi(d(x_1,x_2))d(x_1,x_2) < d(x_1,x_2)$$

dir. Bu şekilde devam ederek her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq x_{n+1}$, $x_{n+1} \in Tx_n$,

$$bd(x_n,x_{n+1}) \leq d(x_n,Tx_n), \tag{2.2.8}$$

$$d(x_{n+1},Tx_{n+1}) \leq \varphi(d(x_n,x_{n+1}))d(x_n,x_{n+1}) \tag{2.2.9}$$

ve

$$\varphi(d(x_n,x_{n+1})) < b$$

özelliklerine uygun bir $\{x_n\}$ dizisi oluşturabiliriz. Böylece (2.2.8) ve (2.2.9) den dolayı

$$\begin{aligned} bd(x_n,x_{n+1}) &\leq d(x_n,Tx_n) \\ -\varphi(d(x_n,x_{n+1}))d(x_n,x_{n+1}) &\leq -d(x_{n+1},Tx_{n+1}) \end{aligned}$$

olur ki bunları taraf tarafa toplarsak

$$\begin{aligned} bd(x_n,x_{n+1}) - \varphi(d(x_n,x_{n+1}))d(x_n,x_{n+1}) &\leq d(x_n,Tx_n) - d(x_{n+1},Tx_{n+1}) \\ [b - \varphi(d(x_n,x_{n+1}))]d(x_n,x_{n+1}) &\leq d(x_n,Tx_n) - d(x_{n+1},Tx_{n+1}) \\ 0 &< d(x_n,Tx_n) - d(x_{n+1},Tx_{n+1}) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$d(x_n,x_{n+1}) > d(x_{n+1},x_{n+2})$$

olduğu da elde edilebilir. Yani $\{d(x_n,x_{n+1})\}$ ve $\{d(x_n,Tx_n)\}$ reel terimli dizileri monoton azalandırlar. Üstekik alttan sınırlı olduğundan yakınsaktırlar. Şimdi $\{d(x_n,x_{n+1})\}$ dizisi yakınsak olup (2.2.2) den dolayı

$$\limsup_{n\to\infty} \varphi(d(x_n,x_{n+1})) = q$$

olacak biçimde bir $q \in [0,b)$ vardır. Öyleyse her $b_0 \in (q,b)$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n > n_0$ için

$$\varphi(d(x_n,x_{n+1})) < b_0$$

olur. Sonuç olarak $\alpha = b - b_0$ ve $n > n_0$ için

$$d(x_n,Tx_n) - d(x_{n+1},Tx_{n+1}) \geq \alpha d(x_n,x_{n+1})$$

elde edilir. Böylece $n > n_0$ için

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1},Tx_{n+1}) &\leq \varphi(d(x_n,x_{n+1}))d(x_n,x_{n+1}) \\
&\leq \frac{\varphi(d(x_n,x_{n+1}))}{b} d(x_n,Tx_n) \\
&\vdots \\
&\leq \frac{\varphi(d(x_n,x_{n+1}))\cdots\varphi(d(x_1,x_2))}{b^n} d(x_1,Tx_1) \\
&= \frac{\varphi(d(x_n,x_{n+1}))\cdots\varphi(d(x_{n_0+1},x_{n_0+2}))}{b^{n-n_0}} \\
&\quad \times \frac{\varphi(d(x_{n_0},x_{n_0+1}))\cdots\varphi(d(x_1,x_2))}{b^{n_0}} d(x_1,Tx_1) \\
&< \left(\frac{b_0}{b}\right)^{n-n_0} \times \frac{\varphi(d(x_{n_0},x_{n_0+1}))\cdots\varphi(d(x_1,x_2))}{b^{n_0}} d(x_1,Tx_1)
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $b_0 < b$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{b_0}{b}\right)^{n-n_0} = 0$$

olur. Bu ise bize

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,Tx_n) = 0 \tag{2.2.10}$$

olduğunu verir. Şimdi ise $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. $m > n > n_0$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} d(x_m,x_n) &\leq d(x_m,x_{m-1})+d(x_{m-1},x_{m-2})+\cdots+d(x_{n+1},x_n) \\ &\leq \sum_{j=n}^{m-1} d(x_j,x_{j+1}) \\ &\leq \frac{1}{\alpha}\sum_{j=n}^{m-1}\left[d(x_j,Tx_j)-d(x_{j+1},Tx_{j+1})\right] \\ &= \frac{1}{\alpha}[d(x_n,Tx_n)-d(x_m,Tx_m)] \end{aligned}$$

olur. Böylece (2.2.10) den dolayı $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisi olur. (X,d) metrik uzayı tam olduğundan $x_n \to z$ olacak biçimde bir $z \in X$ vardır. Sonuç olarak (i) den

$$0 \leq d(z,Tz) \leq \lim_{n\to\infty} d(x_n,Tx_n) = 0$$

elde edilir. Buradan $d(z,Tz) = 0$ olur ki bu da bize $z \in Tz$ olduğunu söyler.

2.3. Metrik uzayda w-uzaklık fonksiyonu ile bazı sabit nokta teoremleri

Bu kesimde metrik uzayda Klim-Wardowski sabit nokta teoreminin w-uzaklık fonksiyonunu ile verilen karşılıklarını elde edeceğiz. Burada aşağıdaki J_b^x kümesinden yararlanacağız. (X,d) bir metrik uzay, $w : X \times X \to [0,\infty)$ bir w-uzaklık fonksiyonu ve ve $T : X \to Cl(X)$ bir dönüşüm olsun. $b \in (0,1)$ sabiti ve $x \in X$ için

$$J_b^x = \{y \in Tx : bw(x,y) \leq w(x,Tx)\}$$

olarak tanımlansın.

Tanım 2.3.1. (X,d) bir metrik uzay, $w : X \times X \to [0,\infty)$ bir w-uzaklık fonksiyonu ve $T : X \to Cl(X)$ bir dönüşüm olsun. Eğer bir $b \in (0,1)$ sabiti ve her $x \in X$ için

$$w(y,Ty) \leq \phi(w(x,y))w(x,y)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $y \in J_b^x$ noktası varsa T dönüşümüne küme değerli KW-tip

w-büzülme dönüşümü denir. Burada $\phi : [0,\infty) \to [0,b)$ fonksiyonu her $t \in [0,\infty)$ için

$$\limsup_{r \to t^+} \phi(r) < b$$

özelliğine sahip bir fonksiyondur.

Lemma 3. (X,d) bir metrik uzay, $w : X \times X \to [0,\infty)$ bir w-uzaklık fonksiyonu ve $T : X \to Cl(X)$ bir küme değerli KW-tip w-büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda X içinde T tarafından elde edilen öyle bir $\{x_n\}$ dizisi vardır ki hem $w(x_n, Tx_n)$ reel terimli dizisi azalarak sıfıra yakınsar hem de $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir.

İspat. Her $x \in X$ için Tx kapalı olduğundan her $b \in (0,1)$ için J_b^x kümesi boş değildir. Şimdi $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun. T küme değerli KW-tip w-büzülme dönüşümü olduğundan

$$w(x_1, Tx_1) \leq \phi(w(x_0,x_1))w(x_0,x_1) \tag{2.3.1}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $x_1 \in J_b^{x_0}$ noktası vardır. $x_1 \in J_b^{x_0}$ olduğundan

$$bw(x_0,x_1) \leq w(x_0, Tx_0) \tag{2.3.2}$$

eşitsizliği de sağlanır. Böylece (2.3.1) ve (2.3.2) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} w(x_0, Tx_0) - w(x_1, Tx_1) &\geq bw(x_0,x_1) - \phi(w(x_0,x_1))w(x_0,x_1) \\ &= [b - \phi(w(x_0,x_1))]\, w(x_0,x_1) > 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$w(x_2, Tx_2) \leq \phi(w(x_1,x_2))w(x_1,x_2) \tag{2.3.3}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $x_2 \in J_b^{x_1}$ noktası vardır. Yine $x_2 \in J_b^{x_1}$ olduğundan

$$bw(x_1,x_2) \leq w(x_1, Tx_1) \tag{2.3.4}$$

eşitsizliği de sağlanır. Böylece (2.3.3) ve (2.3.4) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} w(x_1,Tx_1)-w(x_2,Tx_2) &\geq bw(x_1,x_2)-\phi(w(x_1,x_2))w(x_1,x_2) \\ &= [b-\phi(w(x_1,x_2))]\,w(x_1,x_2)>0 \end{aligned}$$

elde edilir. (2.3.4) ve (2.3.1) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} w(x_1,x_2) &\leq \frac{1}{b}w(x_1,Tx_1) \\ &\leq \frac{1}{b}\phi(w(x_0,x_1))w(x_0,x_1) \\ &\leq w(x_0,x_1) \end{aligned}$$

eşitsizliğini de elde edebiliriz. Bu şekilde devam ederek X içinde $x_{n+1}\in Tx_n$,

$$bw(x_n,x_{n+1})\leq w(x_n,Tx_n),$$

$$w(x_{n+1},Tx_{n+1})\leq \phi(w(x_n,x_{n+1}))w(x_n,x_{n+1})$$

özelliklerini sağlayan bir $\{x_n\}$ dizisi oluşturabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned} w(x_n,Tx_n)-w(x_{n+1},Tx_{n+1}) &\geq bw(x_n,x_{n+1})-\phi(w(x_n,x_{n+1}))w(x_n,x_{n+1}) \\ &= [b-\phi(w(x_n,x_{n+1}))]\,w(x_n,x_{n+1})>0 \qquad (2.3.5) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ki böylece her n doğal sayısı için

$$w(x_n,Tx_n)>w(x_{n+1},Tx_{n+1})$$

ve

$$w(x_n,x_{n+1})\leq w(x_{n-1},x_n)$$

eşitsizlikleri elde edilebilir. Böylece $\{w(x_n,Tx_n)\}$ ve $\{w(x_n,x_{n+1})\}$ dizileri reel terimli negatif olmayan azalan dizilerdir ve dolayısıyla yakınsaktırlar. Şimdi ϕ fonksiyonunun tanımından

$$\limsup_{n\to\infty}\phi(w(x_n,x_{n+1}))=\alpha$$

olacak biçimde bir $\alpha \in [0,b)$ vardır. Böylece her $b_0 \in (\alpha,b)$ için öyle bir n_0 doğal sayısı bulabiliriz ki her $n > n_0$ için

$$\phi(w(x_n,x_{n+1})) < b_0$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece her $n > n_0$ için

$$\phi(w(x_n,x_{n+1})) \times \cdots \times \phi(w(x_{n_0+1},x_{n_0+2})) < b_0^{n-n_0}$$

yazabiliriz. Yine (2.3.5) eşitsizliğini göz önüne alırsak her $n > n_0$ için

$$w(x_n,Tx_n) - w(x_{n+1},Tx_{n+1}) \geq (b-b_0)w(x_n,x_{n+1})$$

elde ederiz. O zaman her $n > n_0$ için

$$\begin{aligned}
w(x_{n+1},Tx_{n+1}) &\leq \phi(w(x_n,x_{n+1}))w(x_n,x_{n+1}) \\
&\leq \frac{1}{b}\phi(w(x_n,x_{n+1}))w(x_n,Tx_n) \\
&\leq \frac{1}{b}\frac{1}{b}\phi(w(x_n,x_{n+1}))\phi(w(x_{n-1},x_n))w(x_{n-1},Tx_{n-1}) \\
&\ \ \vdots \\
&\leq \frac{1}{b^n}\phi(w(x_n,x_{n+1})) \times \cdots \times \phi(w(x_1,x_2))w(x_1,Tx_1) \\
&= \frac{\phi(w(x_n,x_{n+1})) \times \cdots \times \phi(w(x_{n_0+1},x_{n_0+2}))}{b^{n-n_0}} \times \\
&\quad \frac{\phi(w(x_{n_0},x_{n_0+1})) \times \cdots \times \phi(w(x_1,x_2))}{b^{n_0}} w(x_1,Tx_1) \\
&\leq \left(\frac{b_0}{b}\right)^{n-n_0} \frac{\phi(w(x_{n_0},x_{n_0+1})) \times \cdots \times \phi(w(x_1,x_2))}{b^{n_0}} w(x_1,Tx_1)
\end{aligned}$$

yazılabilir. $b_0 < b$ olduğundan $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_0}{b}\right)^{n-n_0} = 0$ olur. Böylece $\{w(x_n,Tx_n)\}$ azalan dizisi sıfıra yakınsar. Şimdi $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Öncelikle dikkat edelim ki her $n > n_0$ için

$$w(x_n,x_{n+1}) \leq \left(\frac{b_0}{b}\right)^{n} w(x_0,x_1)$$

eşitsizliği sağlanır. O zaman her $m > n > n_0$ için

$$\begin{aligned} w(x_n, x_m) &\leq \sum_{j=n}^{m-1} w(x_j, x_{j+1}) \\ &\leq \left[\left(\frac{b_0}{b}\right)^n + \left(\frac{b_0}{b}\right)^{n+1} + \cdots + \left(\frac{b_0}{b}\right)^{m-1} \right] w(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{\left(\frac{b_0}{b}\right)^n}{1 - \frac{b_0}{b}} w(x_0, x_1) \end{aligned}$$

elde edilir ki Lemma 1 den $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. □

Teorem 2.3.2. (X,d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to Cl(X)$ küme değerli KW-tip w-büzülme dönüşümü olsun. Ayrıca kabul edelim ki $g(x) = w(x, Tx)$ biçiminde tanımlı g fonksiyonu alttan yarı sürekli olsun. Bu durumda $g(z) = 0$ olacak biçimde bir $z \in X$ noktası vardır. Ek olarak, eğer $w(z,z) = 0$ ise $z \in Tz$ dir.

İspat. Lemma 3 dikkate alındığında X içinde öyle bir $\{x_n\}$ Cauchy dizisi vardır ki $\{g(x_n)\}$ reel terimli dizisi azalarak 0 a yakınsar. X tam olduğundan $x_n \to z$ olacak biçimde bir $z \in X$ noktası vardır. g fonksiyonu alttan yarı sürekli olduğundan

$$0 \leq w(z, Tz) = g(z) \leq \liminf g(x_n) = 0$$

olur. Yani $g(z) = w(z, Tz) = 0$ olur. Ek olarak $w(z,z) = 0$ ise Lemma 2 den $z \in Tz$ elde edilir. □

Teorem 2.3.3. (X,d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to Cl(X)$ küme değerli KW-tip w-büzülme dönüşümü olsun. Kabul edelim ki $y \notin Ty$ olacak biçimdeki her $y \in X$ için

$$\inf\{w(x,y) + w(x,Tx) : x \in X\} > 0$$

olsun. Bu durumda T bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. Lemma 3 dikkate alındığında X içinde her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in Tx_n$ olacak biçimde bir $\{x_n\}$ Cauchy dizisi vardır. X tam olduğundan $x_n \to z$ olacak biçimde bir $z \in X$ noktası vardır. O zaman $w(x_n, \cdot)$ fonksiyonu alttan yarı sürekli ve $x_m \to z$ olduğundan

Lemma 3 nın ispatına göre her $n \geq n_0$ için

$$w(x_n, z) \leq \liminf w(x_n, x_m) \leq \frac{\gamma^n}{1-\gamma} w(x_0, x_1)$$

yazılabilir. Burada $\gamma = \frac{b_0}{b}$ dir. Aynı zamanda

$$w(x_n, Tx_n) \leq w(x_n, x_{n+1}) \leq \gamma^n w(x_0, x_1)$$

elde edilebilir. Şimdi $z \notin Tz$ olduğunu kabul edelim. O zaman

$$\begin{aligned}
0 &< \inf\{w(x,z) + w(x,Tx) : x \in X\} \\
&\leq \inf\{w(x_n,z) + w(x_n,Tx_n) : n \geq n_0\} \\
&\leq \inf\left\{\frac{\gamma^n}{1-\gamma} w(x_0,x_1) + \gamma^n w(x_0,x_1) : n \geq n_0\right\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu mümkün değildir. O zaman $z \in Tz$ olmalıdır. □

3 . ARAŞTIRMA BULGULARI

2017'de Fulga ve Proca [8], metrik uzayda E-büzülmeden esinlenerek yeni tip büzülme eşitsizlikleri yoluyla tek değerli dönüşümler için bazı sabit nokta teoremleri sundu. E-büzülme adı verilen bu fikir ilk olarak Popescu tarafından kullanıldığından (bu durum [8] ve [9] nomaralı kaynaklarda belirtilmiştir) Popescu'yu anmak için biz çalışmalarımızda P-büzülme olarak kullanmayı tercih ediyoruz. Popescu'nun orijinal tanımı ve ilgili sabit nokta teoremi aşağıdaki gibidir: (X,d) bir metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda her $x,y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \leq k\left[d(x,y) + |d(x,Tx) - d(y,Ty)|\right] \tag{3.0.1}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $k \in [0,1)$ sabiti varsa T dönüşümüne bir P-büzülme dönüşümü denir. Metrik uzayda her büzülme dönüşümü aynı zamanda bir P-büzülme dönüşümüdür, fakat bunun karşıtı doğru değildir. Böylece Popescu'nun elde ettiği ve "(X,d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir P-büzülme dönüşümü olsun. O zaman T bir tek sabit noktaya sahiptir. Üstelik her Picard iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar." biçiminde ifade edilen teorem ünlü Banach sabit nokta teoreminden daha genel bir dönüşüm sınıfına hitap etmektedir. Son zamanlarda P-büzülme ile ilgili literatürde pek çok çalışma yapılmıştır. Bunun için [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16] numaralı kaynaklara bakılabilir.

Bu bölümde metrik uzayda w-uzaklık fonksiyonu ile Popescu'nun P-büzülme düşüncesini birleştirerek hem tek değerli hem de küme değerli dönüşümler için bazı yeni sabit nokta teoremleri elde edeceğiz.

3.1. Tek değerli dönüşümler için sonuçlar

İlk olarak aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 3.1.1. (X,d) bir metrik uzay, w, X üzerinde bir w-uzaklık fonksiyonu ve T :

$X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$w(Tx, Ty) \leq c[w(x,y) + |w(x,Tx) - w(y,Ty)|], \tag{3.1.1}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $c \in [0,1)$ sabiti varsa T dönüşümüne bir P_w-büzülme dönüşümü denir.

Şimdi ilk ana teoremimizi verelim.

Teorem 3.1.2. (X,d) bir tam metrik uzay, w, X üzerinde bir w-uzaklık fonksiyonu ve $T : X \to X$ bir P_w-büzülme dönüşümü olsun. Ayrıca aşağıdakilerden birinin sağlandığını kabul edelim:

(i) T süreklidir,

(ii) w süreklidir,

(iii) $y \neq Ty$ olacak biçimdeki her $y \in X$ için

$$\inf\{w(x,y) + w(x,Tx) : x \in X\} > 0.$$

Bu durumda T dönüşümü bir tek $z \in X$ sabit noktasına sahiptir. Üstelik $w(z,z) = 0$ dır.

İspat. $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun. O zaman $n \geq 0$ için $x_{n+1} = Tx_n$ biçiminde tanımlı $\{x_n\}$ Picard dizisini göz önüne alarak aşağıdaki iki durumu inceleyelim:
(1) En az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için $w(x_{n_0}, x_{n_0+1}) = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$w(x_{n_0+1}, x_{n_0+2}) = 0$$

olduğunu iddia ediyoruz. Gerçekten (3.1.1) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} w(x_{n_0+1}, x_{n_0+2}) &= w(Tx_{n_0}, Tx_{n_0+1}) \\ &\leq c\,[w(x_{n_0}, x_{n_0+1}) + |w(x_{n_0}, Tx_{n_0}) - w(x_{n_0+1}, Tx_{n_0+1})|] \\ &= c\,[w(x_{n_0}, x_{n_0+1}) + |w(x_{n_0}, x_{n_0+1}) - w(x_{n_0+1}, x_{n_0+2})|] \\ &= cw(x_{n_0+1}, x_{n_0+2}), \end{aligned}$$

elde edilir ki bu $w(x_{n_0+1}, x_{n_0+2}) = 0$ olmaması durumunda bir çelişki teşkil eder. O zaman $w(x_{n_0+1}, x_{n_0+2}) = 0$ olup üçgen eşitsizliğinden

$$w(x_{n_0}, x_{n_0+2}) \leq w(x_{n_0}, x_{n_0+1}) + w(x_{n_0+1}, x_{n_0+2}) = 0$$

elde edilir. Böylece $w(x_{n_0}, x_{n_0+1}) = 0$ ve $w(x_{n_0}, x_{n_0+2}) = 0$ olduğundan from Lemma 1 (a) dikkate alınırsa $x_{n_0+1} = x_{n_0+2} = Tx_{n_0+1}$ olur. Yani x_{n_0+1} noktası T nin bir sabit noktasıdır.

(2) Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için $w(x_n, x_{n+1}) > 0$ olsun. O zaman (3.1.1) den her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} w(x_{n+1}, x_{n+2}) &= w(Tx_n, Tx_{n+1}) \\ &\leq c\left[w(x_n, x_{n+1}) + |w(x_n, Tx_n) - w(x_{n+1}, Tx_{n+1})|\right] \\ &= c\left[w(x_n, x_{n+1}) + |w(x_n, x_{n+1}) - w(x_{n+1}, x_{n+2})|\right] \qquad (3.1.2) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $w(x_{n+1}, x_{n+2}) < w(x_n, x_{n+1})$ olmalıdır. (Aksi halde (3.1.2) den $0 < w(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq cw(x_{n+1}, x_{n+2})$ olur ki bu bir çelişkidir). O zaman yine (3.1.2) den her $n \in \mathbb{N}$ için

$$w(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq \frac{2c}{1+c} w(x_n, x_{n+1})$$

elde edilir. Böylece $\lambda = \frac{2c}{1+c} < 1$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

$$w(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq \lambda^{n+1} w(x_0, x_1)$$

elde edilir. Şimdi $m > n$ olacak biçimdeki her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} w(x_n, x_m) &\leq \sum_{i=n}^{m-1} w(x_i, x_{i+1}) \\ &= \sum_{i=n}^{m-1} \lambda^i w(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} w(x_0, x_1) \qquad (3.1.3) \end{aligned}$$

olup Lemma 1 (c) den $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisi olur. X in tamlığından $x_n \to z$ olacak biçimde bir $z \in X$ vardır. w fonksiyonu ikinci değişkene göre alttan yarı sürekli olduğundan, (3.1.3) eşitsizliği dikkate alındığında

$$w(x_n,z) \leq \lim\inf_{m\to\infty} w(x_n,x_m) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} w(x_0,x_1) \tag{3.1.4}$$

elde edilir.

Şimdi eğer T sürekli ise, $x_{n+1} = Tx_n \to Tz$ olup limitin tekliğinden $z = Tz$ elde edilir. Üstelik (3.1.1) den

$$w(z,z) = w(Tz,Tz) \leq cw(z,z) \tag{3.1.5}$$

elde edilir ki bu $w(z,z) = 0$ olmazsa bir çelişkidir.

Eğer w sürekli ise (3.1.3) ve (3.1.4) den

$$w(z,z) = \lim_{n,m\to\infty} w(x_n,x_m) = 0$$

elde edilir ve böylece

$$\lim_{n\to\infty} w(x_n,z) = 0$$

olur. Şimdi (3.1.1) de $x = x_n$ ve $y = z$ yazarsak her $n \in \mathbb{N}$ için

$$w(x_{n+1},Tz) \leq c[w(x_n,z) + |w(x_n,x_{n+1}) - w(z,Tz)|]$$

elde edilir. O zaman $n \to \infty$ için limit alıp w nin de sürekli olduğunu dikkate alırsak

$$w(z,Tz) \leq cw(z,Tz)$$

elde edilir ki bu $w(z,Tz) = 0$ olmazsa bir çelişkidir. Böylece $w(z,z) = 0 = w(z,Tz)$ elde edildiğinden Lemma 1 (a) gereği $z = Tz$ bulunur.

Son olarak (iii) nin var olduğunu kabul edelim ve $z \neq Tz$ olsun. O zaman (3.1.3) ve (3.1.4) den

$$\begin{aligned} 0 &< \inf\{w(x,z) + w(x,Tx) : x \in X\} \\ &\leq \inf\{w(x_n,z) + w(x_n,Tx_n) : n \in \mathbb{N}\} \\ &= \inf\{w(x_n,z) + w(x_n,x_{n+1}) : n \in \mathbb{N}\} \to 0 \end{aligned}$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Böylece $z = Tz$ olup (3.1.5) deki gibi $w(z,z) = 0$ elde edilir.

Tekliği göstermek için kabul edelim ki u da T dönüşümünün bir sabit noktası olsun. O zaman (3.1.1) den $w(u,u) = 0$ elde edilir. Ayrıca

$$w(z,u) = w(Tz,Tu) \le cw(z,u)$$

eşitsizliği bize $w(z,u) = 0$ olması gerektiğini de söyler. Böylece Lemma 1 (a) dan $u = z$ elde edilir. $\square$

Şimdi son teoremimizi destekleyici nitelikte karşılaştırmalı bir örnek verelim.

Örnek 8. $X = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ kümesi d alışılmış metriği birlikte göz önüne alınsın. $T : X \to X$ dönüşümü $Tx = x^2$ biçiminde tanımlansın ve X üzerinde $w(x,y) = y$ biçiminde tanımlı w-uzaklık fonksiyonu dikkate alınsın. O zaman her $x, y \in X$ için

$$w(Tx,Ty) = y^2$$

ve

$$w(x,y) + |w(x,Tx) - w(y,Ty)| = y + \left|x^2 - y^2\right|$$

olduğundan

$$w(Tx,Ty) \le \frac{1}{2}[w(x,y) + |w(x,Tx) - w(y,Ty)|]$$

elde edilir. Yani, T dönüşümü P_w-büzülme dönüşümüdür. Teorem 3.1.2 in diğer şartlarının sağlandığı açıktır. Sonuç olarak T dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

Burada T dönüşümünün d metriğine göre bir P-büzülme olmadığına dikkat edelim. Gerçekten,

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{d(Tx, T\frac{1}{2})}{d(x, \frac{1}{2}) + \left|d(x,Tx) - d(\frac{1}{2}, T\frac{1}{2})\right|} = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{\frac{1}{4} - x^2}{\frac{1}{2} - x + \left|x - x^2 - \frac{1}{4}\right|} = 1$$

olduğundan (3.0.1) eşitsizliği sağlanacak biçimde bir $k \in [0,1)$ sabiti bulunamaz. Böylece Popescu'nun teoremi bu örneğe uygulanamaz.

Örnek 9. $X = C[0,1]$ kümesi supremum normu ile birlikte göz önüne alınsın. $T : X \to$

X dönüşümü

$$Tf(t) = \int_0^t (t-s)f(s)ds$$

biçiminde tanımlansın ve X üzerinde $w(f,g) = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ biçiminde tanımlı w-uzaklık fonksiyonu dikkate alınsın. O zaman her $f,g \in X$ için

$$|Tf(t)| = \left|\int_0^t (t-s)f(s)ds\right| \leq \|f\|_\infty \int_0^t (t-s)ds = \frac{t^2}{2}\|f\|_\infty$$

ve

$$\|Tf\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|f\|_\infty$$

olduğundan

$$\begin{aligned} w(Tf,Tg) &= \|Tf\|_\infty + \|Tg\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|f\|_\infty + \frac{1}{2}\|g\|_\infty \\ &= \frac{1}{2}w(f,g) \leq \frac{1}{2}\left[w(f,g) + |w(f,Tf) - w(g,Tg)|\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Yani, T dönüşümü P_w-büzülme dönüşümüdür. Teorem 3.1.2 in diğer şartlarının sağlandığı açıktır. Sonu. olarak T dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

Örnek 10. $X = \left\{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ kümesi alışılmış metrik ile birlikte göz önüne alınsın. $T : X \to X$ dönüşümü

$$T\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}},\ n \in \mathbb{N} \text{ ve } T0 = 0$$

biçiminde tanımlansın ve X üzerinde $w(x,y) = y$ biçiminde tanımlı w-uzaklık fonksiyonu dikkate alınsın. O zaman her $m,n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} w\left(T\frac{1}{2^n}, T\frac{1}{2^m}\right) &= \frac{1}{2^{m+1}} \\ &= \frac{1}{2}w\left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^m}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left[w\left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^m}\right) + \left|w\left(\frac{1}{2^n}, T\frac{1}{2^n}\right) - w\left(\frac{1}{2^m}, T\frac{1}{2^m}\right)\right|\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Yani, T dönüşümü P_w-büzülme dönüşümüdür. Teorem 3.1.2 in diğer şartlarının sağlandığı açıktır. Sonuç olarak T dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

3.2. Küme değerli dönüşümler için sonuçlar

Küme değerli dönüşümler hakkındaki teoremimiz için daha öncede kullandığımız bazı gösterimlere ihtiyacımız var. (X,d) bir metrik uzay, $P(X)$ ve $Cl(X)$ sırasıyla X in boş olmayan alt kümelerinin sınıfı ile boş olmayan kapalı alt kümelerinin sınıfını göstersin. $w : X \times X \to [0,\infty)$ bir w-uzaklık fonksiyonu ve ve $T : X \to P(X)$ bir dönüşüm olsun. $b \in (0,1)$ sabiti ve $x \in X$ için

$$J_b^x = \{y \in Tx : bw(x,y) \leq w(x,Tx)\}$$

olarak tanımlansın. J_b^x kümesini daha detaylı anlayabilmek için aşağıdaki notu inceleyelim.

Uyarı 2. 1. $T : X \to P(X)$ bir dönüşüm olmak üzere $x \in X$ noktası için $w(x,Tx) > 0$ olsun. O zaman her $b \in (0,1)$ için J_b^x kümesi boş değildir. Gerçekten, eğer

$$\varepsilon_b = (\frac{1}{b} - 1)w(x,Tx) > 0$$

olarak seçersek infimum tanımıdan

$$w(x,y_{\varepsilon_b}) \leq w(x,Tx) + \varepsilon_b$$

olacak biçimde bir $y_{\varepsilon_b} \in Tx$ vardır. O zaman

$$bw(x,y_{\varepsilon_b}) \leq w(x,Tx)$$

olup $y_{\varepsilon_b} \in J_b^x$ dir.

2. $x \in X$ için $w(x,Tx) = 0$ olsun. O zaman $Tx \in Cl(X)$ olsa bile J_b^x boş olabilir. Örneğin, $X = (0,1]$ kümesi üzerinde alışılmış metrik, $Tx = (0,x] \in Cl(X)$ ve $w(x,y) = y$ olsun. O zaman her $x \in X$ için $w(x,Tx) = 0$ olur. Dolayısıyla $bw(x,y) \leq w(x,Tx)$ eşitsizliğini sağlayan bir $y \in Tx$ noktası bulunamaz. Böylece her $b \in (0,1)$ için J_b^x kümesi boştur.

3. (X,d) tam metrik uzay ve $Tx \in Cl(X)$ olsun. Bu durumda her $b \in (0,1)$ için J_b^x kümesi boş değildir. Burada $w(x,Tx) > 0$ olacak biçimdeki $x \in X$ noktaları için 1. durumda inceleme yapılmıştır. Şimdi $w(x,Tx) = 0$ olsun. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} w(x,y_n) =$

0 olacak biçimde Tx içerisinde bir $\{y_n\}$ dizisi bulabiliriz. Böylece Lemma 1 (d) den, $\{y_n\}$ bir Cauchy dizisi olur. X tam olduğundan d metriğine göre $y_n \to y$ olacak biçimde bir $y \in X$ vardır ki Tx kapalı olduğundan $y \in Tx$ dir. Diğer taraftan, w fonksiyonu ikinci değişkene göre alttan yarı sürekli olduğundan

$$w(x,y) \leq \liminf_{n\to\infty} w(x,y_n) = 0$$

elde edilir. Bu ise her $b \in (0,1)$ için

$$bw(x,y) = 0 = w(x,Tx)$$

olacak biçimde bir $y \in Tx$ in var olduğunu gösterir. Sonuç olarak J_b^x boş değildir.

Tanım 3.2.1. (X,d) bir metrik uzay, w, X üzerinde bir w-uzaklık fonksiyonu, $T : X \to P(X)$ bir küme değerli dönüşüm ve $b \in (0,1)$ olsun. Eğer $c \geq 0$ ve $\frac{2c}{b(1+c)} < 1$ olmak üzere her $x \in X$ için

$$w(y,Ty) \leq c[w(x,y) + |w(x,Tx) - w(y,Ty)|]$$

eşitsizliğini sağlayan bir $y \in J_b^x$ varsa T dönüşümüne küme değerli P_w-büzülme denir.

Şimdi ikinci ana teoremimiz olan ve Popescu ve Feng-Liu'nun düşüncelerini birleştirerek elde ettiğimiz sabit nokta teoremini verelim.

Teorem 3.2.2. (X,d) bir tam metrik uzay, w, X üzerinde bir w-uzaklık fonksiyonu ve $T : X \to Cl(X)$ bir küme değerli P_w-büzülme olsun. Ayrıca $f(x) = w(x,Tx)$ biçiminde tanımlı f fonksiyonu alttan yarı sürekli olsun. Bu durumda $f(z) = 0$ olacak biçimde bir $z \in X$ noktası vardır. Ek olarak eğer $w(z,z) = 0$ ise z noktası T nin bir sabit noktasıdır.

İspat. İlk olarak Uyarı 2 den her $x \in X$ için J_b^x kümesi boş değildir. O zaman kabulümüzden, keyfi $x_0 \in X$ noktası için

$$w(x_1,Tx_1) \leq c[w(x_0,x_1) + |w(x_0,Tx_0) - w(x_1,Tx_1)|]$$

olacak biçimde bir $x_1 \in J_b^{x_0}$ noktası vardır. Yine $x_1 \in X$ noktası için

$$w(x_2, Tx_2) \leq c[w(x_1, x_2) + |w(x_1, Tx_1) - w(x_2, Tx_2)|]$$

olacak biçimde bir $x_2 \in J_b^{x_1}$ noktası vardır. Bu şekilde devam ederek $x_{n+1} \in J_b^{x_n}$ ve

$$w(x_{n+1}, Tx_{n+1}) \leq c[w(x_n, x_{n+1}) + |w(x_n, Tx_n) - w(x_{n+1}, Tx_{n+1})|] \tag{3.2.1}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\{x_n\}$ dizisi oluşturabiliriz. Şimdi eğer $w(x_{n_0}, Tx_{n_0}) = 0$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa o zaman $f(x_{n_0}) = 0$ olur. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $w(x_n, Tx_n) > 0$ olduğunu kabul edelim. Şimdi de eğer

$$w(x_{m+1}, Tx_{m+1}) \geq w(x_m, Tx_m)$$

olacak biçimde bir $m \in \mathbb{N}$ varsa (3.2.1) den ($x_{m+1} \in J_b^{x_m}$ olduğundan $bw(x_m, x_{m+1}) \leq w(x_m, Tx_m)$ eşitsizliğinin sağlandığına dikkat edelim)

$$\begin{aligned} w(x_{m+1}, Tx_{m+1}) &\leq c[w(x_m, x_{m+1}) + |w(x_m, Tx_m) - w(x_{m+1}, Tx_{m+1})|] \\ &= c[w(x_m, x_{m+1}) + w(x_{m+1}, Tx_{m+1}) - w(x_m, Tx_m)], \end{aligned}$$

ve böylece

$$\begin{aligned} w(x_{m+1}, Tx_{m+1}) &\leq \frac{c}{1-c} w(x_m, x_{m+1}) - \frac{c}{1-c} w(x_m, Tx_m) \\ &= \frac{c}{1-c} [w(x_m, x_{m+1}) - w(x_m, Tx_m)] \\ &\leq \frac{c}{1-c} \left[\frac{1}{b} w(x_m, Tx_m) - w(x_m, Tx_m) \right] \\ &\leq \left(\frac{c}{1-c} \right) \left(\frac{1-b}{b} \right) w(x_m, Tx_m) \\ &< w(x_m, Tx_m) \\ &\leq w(x_{m+1}, Tx_{m+1}) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $w(x_{n+1}, Tx_{n+1}) < w(x_n, Tx_n)$

olmalıdır. O zaman (3.2.1) den

$$w(x_{n+1},Tx_{n+1}) \leq c[w(x_n,x_{n+1})+w(x_n,Tx_n)-w(x_{n+1},Tx_{n+1})]$$

ve böylece

$$\begin{aligned} w(x_{n+1},Tx_{n+1}) &\leq \frac{c}{1+c}[w(x_n,x_{n+1})+w(x_n,Tx_n)] \\ &\leq \frac{2c}{1+c}w(x_n,x_{n+1}) \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $x_{n+2} \in J_b^{x_{n+1}}$ olduğundan

$$\begin{aligned} bw(x_{n+1},x_{n+2}) &\leq w(x_{n+1},Tx_{n+1}) \\ &\leq \frac{2c}{1+c}w(x_n,x_{n+1}) \end{aligned}$$

olup her $n \in \mathbb{N}$ için

$$w(x_{n+1},x_{n+2}) \leq \frac{2c}{b(1+c)}w(x_n,x_{n+1})$$

elde edilir. Böylece $\lambda = \frac{2c}{b(1+c)} < 1$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

$$w(x_n,x_{n+1}) \leq \lambda^n w(x_0,x_1)$$

bulunur. Buradan da

$$\lim_{n\to\infty} w(x_n,x_{n+1}) = 0,$$

ve aynı zamanda $m > n$ olacak biçimdeki her $m,n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} w(x_n,x_m) &\leq w(x_n,x_{n+1})+w(x_{n+1},x_{n+2})+\cdots+w(x_{m-1},x_m) \\ &\leq \lambda^n w(x_0,x_1)+\lambda^{n+1}w(x_0,x_1)+\cdots+\lambda^{m-1}w(x_0,x_1) \\ &\leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda}w(x_0,x_1) \end{aligned}$$

elde edilir. $\lambda < 1$ olduğundan bu son eşitsizlik ve Lemma 1 (c) den $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. X tam olduğundan $\{x_n\}$ dizisinin d metriğine göre yakınsadığı bir $z \in X$ noktası vardır. f fonksiyonu alttan yarı sürekli olduğundan

$$\begin{aligned} 0 &\leq w(z,Tz) = f(z) \\ &\leq \liminf f(x_n) \\ &= \liminf w(x_n, Tx_n) \\ &\leq \liminf w(x_n, x_{n+1}) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir ki budaran $f(z) = w(z,Tz) = 0$ bulunur. Ek olarak eğer $w(z,z) = 0$ ise Lemma 2 den $z \in Tz$ olmalıdır. $\square$

4 . TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında metrik uzayda w-uzaklık fonksiyonu göz önüne alınarak hem tek değerli hem de küme değerli dönüşümler için elde edilmiş sabit nokta teoremleri detaylı bir biçimde incelenmiştir. Ardından son zamanlarda metrik uzayda P-büzülme olarak adlandırılan genel bir büzülme eşitsizliğinin w-uzaklık fonksiyonu ile ifade edilen versiyonu (P_w-büzülme) tanımlanmış ve örneklendirilmişitr. Son olarak metrik uzayda tek değerli ve küme değerli P_w-büzülme dönüşümleri için bazı sabit nokta teoremleri elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Kada, O. Suzuki, T. ve Takahashi, W. (1996). Nonconvex minimization theorems and fixed point theorems in complete metric spaces. *Math. Japon.*, 44, 381-391.

[2] Iqbal, I. ve Rizwan, M. (2020). Existence of the solution to second order differential equation through fixed point results for nonlinear F-contractions involving w_0-distance. *Filomat*, 34 (12), 4079-4094.

[3] Latif, A. ve Abdou, A.N. (2009). Fixed points of generalized contractive maps. *Fixed Point Theory and Applications*, 2009, 1-9.

[4] Latif, A. ve Albar, W.A. (2008). Fixed point results in complete metric spaces. *Demonstratio Mathematica*, 41 (1), 145-150.

[5] Lin, L.J. ve Du, W.S. (2007). Some equivalent formulations of the generalized Ekeland's variational principle and their applications. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 67 (1), 187-199.

[6] Feng, Y. ve Liu, S. (2006). Fixed point theorems for multivalued contractive mappings and multivalued Caristi type mappings, *J. Math. Anal. Appl.*, 317, 103-112.

[7] Klim, D. ve Wardowski, D. (2007). Fixed point theorems for set-valued contractions in complete metric spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 334, 132-139.

[8] Fulga, A. ve Proca, A. (2017). Fixed points for φ_E-Geraghty contractions. *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 10, 5125-513.

[9] Fulga, A. ve Proca, A. (2017). A new generalization of Wardowski fixed point theorem in complete metric spaces. *Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Applications*, 1 (1), 57-63.

[10] Altun, I. Aslantas, M. ve Sahin, H. (2020). Best proximity point results for p-proximal contractions. *Acta Mathematica Hungarica*, 162 (2), 393-402.

[11] Altun, I. Durmaz, G. ve Olgun, M. (2018). *P*-contractive mappings on metric spaces. *Journal of Nonlinear Functional Analysis*, 2018, Article ID 43, pp. 1-7.

[12] Altun, I. Hançer, H.A. ve Erduran, A. (2022). Nonself *P*-contractions on convex metric spaces and their fixed points. *The Journal of Analysis*, 30, 999-1010.

[13] Altun, I. Hancer, H. A. ve Erduran, A. (2020). Fixed point results for single valued and set valued *P*-contractions and application to second order boundary value problems. *Carpathian Journal of Mathematics*, 36 (2), 205-214.

[14] Aslantas, M. Sahin, H. ve Altun, I. (2021). Best proximity point theorems for cyclic *p*-contractions with some consequences and applications. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 26 (1), 113-129.

[15] Hancer, H.A. (2021). On multivalued *P*-contractive mappings that belongs to class of weakly Picard operators. *Fixed Point Theory*, 22 (2), 663-670.

[16] Karapınar, E. Fulga, A. ve Aydi, H. (2020) Study on Pata *E*-contractions. *Advances in Difference Equations*, 1, 1-15.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ümran BAŞAR
Doğum Tarihi/Yeri :
Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise **:** Bekir Gökdağ Lisesi, Ankara

Lisans **:** Kırıkkale Üniversitesi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Yayınları :

1) I. Altun, H.A. Hancer, Ü. Başar, Fixed point results for *P*-contractions via *w*-distance, Creative Mathematics and Informatics, 32 (2023), 13-20.