



T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

**ORANSAL GECİKMELİ UYUMLU KESİRLİ MERTEBEDEN
SWİFT-HOHENBERG DENKLEMİNİN NÜMERİK
ÇÖZÜMLERİ**

Ahmet Semih EROL
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Ali OLGUN

KIRIKKALE-2023



T.C.

**KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ**

**ORANSAL GECİKMELİ UYUMLU KESİRLİ MERTEBEDEN
SWİFT-HOHENBERG DENKLEMİNİN NÜMERİK
ÇÖZÜMLERİ**

Ahmet Semih EROL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Ali OLGUN

KIRIKKALE-2023

Ahmet Semih EROL tarafından hazırlanan “ORANSAL GECİKMELİ UYUMLU KESİRLİ MERTEBEDEN SWIFT-HOHENBERG DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ” adlı tez çalışması, aşağıdaki jüri üyeleri tarafından OY BİRLİĞİ/ OY ÇOKLUĞU ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.



Tez Savunma Tarihi:/...../.....

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Unvanı Adı SOYADI

..... Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYANI

Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Ahmet Semih EROL

ÖZET

ORANSAL GECİKMELİ UYUMLU KESİRLİ MERTEBEDEN SWİFT-HOHENBERG DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Ali OLGUN

Temmuz 2023, 36 sayfa

Bu tezde iki yeni yöntem önerilmektedir. Bu yöntemlerden ilki uyumlu kesirli türev ile q -Shehu homotopi analizi dönüşüm yönteminin birleştirilmesi ile elde edilen uyumlu kesirli q -Shehu homotopi analizi dönüşüm yöntemi, ikincisi ise uyumlu Shehu dönüşümü ile Adomian ayrıştırma yönteminin birleştirilmesi ile elde edilen uyumlu Shehu dönüşümü ayrıştırma yöntemidir. Uyumlu kesirli q -Shehu homotopi analizi dönüşüm yöntemi ve uyumlu Shehu dönüşümü ayrıştırma yöntemi, oransal gecikmeli uyumlu zaman-kesirli Swift-Hohenberg denklemlerini analiz etmek için kullanılmıştır. Bu problemin sayısal çözümlerinin grafikleri çizdirilmiştir. Önerilen yöntemler, sayısal simülasyonlara göre etkili ve tutarlıdır.

Anahtar Kelimeler: Uyumlu zaman-kesirli mertebeden Swift-Hohenberg denklemi, uyumlu kesirli q -Shehu homotopi analiz dönüşüm yöntemi, uyumlu Shehu dönüşümü ayrıştırma yöntemi.

ABSTRACT

NUMERICAL SOLUTIONS OF CONFORMABLE FRACTIONAL SWIFT-HOHENBERG EQUATION WITH PROPORTIONAL DELAY

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, Master's Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Ali OLGUN

July 2023, 36 Pages

Two new methods are proposed in this thesis. The first one is the conformable fractional q -Shehu homotopy analysis transform method, which is obtained by combining the conformable fractional Shehu transform with the q -homotopy analysis transformation method, and the second one is the conformable Shehu transform decomposition method, which is obtained by combining the conformable fractional Shehu transform with the Adomian decomposition method. The conformable fractional q -Shehu homotopy analysis transform method and the conformable Shehu transform decomposition method are used to analyze the conformable time-fractional Swift-Hohenberg equations with proportional delay. The numerical solutions of this problem are plotted. The proposed methods are efficient and consistent according to numerical simulations.

Key words: Conformable time-fractional Swift-Hohenberg equation, conformable fractional q -Shehu homotopy analysis transform method, conformable fractional Shehu transform decomposition method.

TEŞEKKÜR

Öncelikle lisans eğitimimden beri hocam olan kendisinden matematik ve hayat hakkında çok şey öğrendiğim, benden desteğini esirgemeyen saygıdeğer hocam Sayın Prof. Dr. Ali OLGUN' a teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans tez çalışmama tekrar başlamam için beni yüreklendiren ve her zaman destek veren çok kıymetli arkadaşım Halil ANAÇ' a teşekkür ederim.

Her zaman yanımda olan saygıdeğer anne ve babama, desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen sevgili eşim Zeynep EROL' a ve yaşam kaynağım olan kızım Nihan EROL' a sonsuz teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	III
ABSTRACT	IV
TEŞEKKÜR	V
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	VI
TABLOLAR DİZİNİ	VII
ŞEKİLLER DİZİNİ	VIII
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	IX
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	4
3. KULLANILAN METOTLAR	7
3.1. Uyumlu Kesirli q -Shehu Homotopi Analiz Dönüşümü Yöntemi (UKq-SHADY)	7
3.2. Uyumlu Shehu Dönüşümü Ayrıştırma Yöntemi (USDAY).....	10
4. UYGULAMALAR	12
4.1. Denklem (4.1) İçin UKq-SHADY Çözümü	12
4.2. Denklem (4.1) İçin USDAY Çözümü.....	14
4.3. Denklem (4.25) İçin UKq-SHADY Çözümü.....	21
4.4. Denklem (4.25) İçin USDAY Çözümü.....	24
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	32
KAYNAKÇA	33
ÖZGEÇMİŞ	36

TABLolar DİZİNİ

Tablo 1. Örnek 4.1 de $l = 3, \mu = 0.3, h = -1, n = 1$ olmak üzere farklı α' lar için farklı x ve t değerleriyle uyumlu kesirli q-Shehu homotopi analizi dönüşüm yöntemi (UKq-SHADY) ile oransal gecikmeli uyumlu zaman kesirli mertebeden Swift-Hohenberg (S-H) denklemi (OGUZKMSHD) için sayısal çözümler.....	19
Tablo 2. Örnek 4.1 de $l = 3, \mu = 0.3, h = -1, n = 1$ olmak üzere farklı α' lar için farklı x ve t değerleriyle uyumlu Shehu dönüşümü ayrıştırma yöntemi ile oransal gecikmeli uyumlu zaman kesirli mertebeden Swift-Hohenberg denklemi için farklı sayısal çözümler.....	20
Tablo 3. Örnek 4.2 de $l = 2, \eta = 0.5, \rho = 1, h = -1, n = 1$ olmak üzere farklı α' lar için farklı x ve t değerleriyle uyumlu kesirli q-Shehu homotopi analizi dönüşüm yöntemi ile oransal gecikmeli uyumlu zaman kesirli mertebeden Swift-Hohenberg denklemi sayısal çözümler.....	30
Tablo 4. Örnek 4.2 de $l = 2, \eta = 0.5, \rho = 1$ olmak üzere farklı α lar için farklı x ve t değerleriyle uyumlu Shehu dönüşümü ayrıştırma yöntemi ile oransal gecikmeli uyumlu zaman kesirli mertebeden Swift-Hohenberg denklemi için farklı sayısal çözümler.....	31

ŞEKİLLER DİZİNİ

- Şekil 4.1. Örnek 4.1 de $l = 3, \mu = 0.3, h = -1, n = 1$ durumunda, (a) $\alpha = 1$ için Uyumlu kesirli q-homotopi analizi dönüşümü yöntemi (UKq-HADY) çözümü (b) $\alpha = 0,85$ için UKq-HADY çözümü (c) $\alpha = 0,70$ için UKq-HADY çözümü (d) $\alpha = 0,55$ için UKq-HADY çözümü.....17
- Şekil 4.2. Örnek 4.1 de $l = 3, \mu = 0.3$ durumunda, (a) $\alpha = 1$ için uyumlu Shehu dönüşümü ayrıştırma yöntemi (USDAY) çözümü (b) $\alpha = 0,85$ için USDAY çözümü (c) $\alpha = 0,70$ için USDAY çözümü (d) $\alpha = 0,55$ için USDAY çözümü.....18
- Şekil 4.3. Örnek 4.1 de $l = 3, \mu = 0.3, h = -1, n = 1, t = 0.5$ durumunda farklı α değerleri için (a) UKq-SHADY çözümü ve (b)USDAY çözümünün karşılaştırılmasıdır.....19
- Şekil 4.4. Örnek 4.2 de $l = 2, \eta = 0.5, \rho = 1, h = -1, n = 1$ durumunda, (a) $\alpha = 1$ için UKq-SHADY çözümü (b) $\alpha = 0.85$ için UKq-SHADY çözümü (c) $\alpha = 0.70$ için UKq-SHADY çözümü (d) $\alpha = 0.55$ için UKq-SHADY çözümü.....27
- Şekil 4.5. Örnek 4.2 de $l = 2, \eta = 0.5, \rho = 1$ durumunda, (a) $\alpha = 1$ için USDAY çözümü (b) $\alpha = 0,85$ için USDAY çözümü (c) $\alpha = 0,70$ için USDAY çözümü (d) $\alpha = 0,55$ için USDAY çözümü.....28
- Şekil 4.6. Örnek 4.2 de $l = 3, \mu = 0.3, h = -1, n = 1, t = 0.5$ durumunda farklı α değerleri için (a) UKq-SHADY çözümü ve (b) USDAY çözümünün karşılaştırılması.....29

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

AGSY: Artık güç serisi yöntemi

DDY: Diferansiyel dönüşüm yöntemi

HAY: Homotopi analiz yöntemi

HPDY: Homotopi pertürbasyon dönüşüm yöntemi

OGUZKMSHD: Oransal gecikmeli uyumlu zaman kesirli mertebeden Swift-Hohenberg denklemi

S-H: Swift-Hohenberg denklemi

UKSD: Uyumlu kesirli Shehu dönüşümü

UKq-SHADY: Uyumlu kesirli q-Shehu homotopi analizi dönüşüm yöntemi

USDAY: Uyumlu Shehu dönüşümü ayrıştırma yöntemi

A_k : Adomian polinomları

D_t^α : α basamaktan uyumlu kesirli türev operatörü

E_a : Mittag-Leffler fonksiyonu

H_m^* : Homotopi polinomu

1. GİRİŞ

Kesirli hesap, birçok akademisyen tarafından araştırılan ve çalışılan bir kavramdır. Riemann - Liouville, Weyl, Grünwald, Letnikov, M. Caputo, K. S. Miller, B. Ross, I. Podlubny, D. Balenau gibi ünlü matematikçiler kesirli hesap için devrim niteliğinde tanımlar sunarak kesirli hesabın temelini oluşturdular [1-7]. Kesirli kısmi diferansiyel denklemler, doğrusal olmayan modellerin geliştirilmesi ve dinamik sistemlerin incelenmesinde sıklıkla kullanılır. Kesirli dereceli hesap kaos teorisi [8], finansal modeller [9], gürültülü ortamlar [10], optik [11] ve diğer konular [12-15] gibi birçok konuda değerlendirilip incelenmiştir. Kesirli diferansiyel denklemlerin çözümleri, doğada görülen hangi doğrusal olmayan problemlerin benzeyeceğini anlamak için önemlidir. Kesirli diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini bulmak zor olduğundan, analitik ve sayısal yöntemler kullanılır.

2014 yılında yaptığı çalışmalarda kesirli türev tanımı ile adi türev tanımının ortak noktasının lineer olma özelliği olduğunu belirten Khalil [16], adi türeve uyumuyla dikkat çeken bir tanım ortaya koymuştur. Bu tanımın avantajı diğer kesirli türevlerden farklı olarak çarpım ve bölüm kurallarını sağlamasıdır. Bu tanıma da uyumlu kesirli türev denilmektedir. 2015 te Abdeljawad [17] uyumlu kesir türev tanımını kullanarak $0 < \alpha \leq 1$ aralığında seri açılımı, Taylor eşitsizliği ve Laplace dönüşümlerini ilave etmiştir.

Uyumlu kesirli türev, gerçek maddelerin davranışını nasıl açıklayacağımızı anlamamıza yardımcı olur ve karmaşık problemleri çözmek için faydalı bir araçtır. Bu türevin önceki türev tanımlarına göre daha basit ve kullanışlı olduğu görülmüştür. Uyumlu kesirli türevli diferansiyel denklemler, Riemann-Liouville veya Caputo kesirli türevli denklemlerden daha kolay sayısal olarak çözülebilir. Bu, uyumlu kesirli türevin birçok fiziksel problemi modellemek için kullanılmasını sağlamıştır.

Uyumlu kesirli türev, mühendislik ve uygulamalı bilimlerde farklı basamaktan kesirli modelleri incelemek için kullanılır çünkü gerçek dünya problemlerini klasik anlamdaki türev hesaplarına göre analiz etmek genellikle mümkün olmamaktadır. Uyumlu kesirli operatör, mevcut kesirli operatörlerle ilgili bazı sorunların üstesinden

gelmektedir. Uyumlu kesirli operatörle ilgili ortalama değer teoremi, zincir kuralı, iki fonksiyonun çarpımının türevi, iki fonksiyonun bölümünün türevi ve Rolle teoremi gibi geleneksel hesap özelliklerini vermektedir [16-19].

Jack Swift ve Pierre Hohenberg, sıvıların Rayleigh-Benard konvektif kararsızlığı için bir evrensel model olan Swift-Hohenberg (S-H) denklemini ortaya koymuşlardır ve bu denklem üzerinde birlikte çalışmışlardır [20, 21]. S-H denklemi, iki yatay iletken sınır arasında kısıtlanmış sıvı tabakalarında (özellikle boşluğun içindeki optik elektrik alanın genliği mekanizması, ince titreşen granüler tabakadaki desen vb.) modelleme probleminin çözümleri için anahtar parçasıdır [22]. Önerilen problem, farklı biyolojik yapılardan kaynaklanan birçok yerelleştirilmiş veya yerelleştirilmemiş desen için bir modeldir [22-24]. S-H denklemi, lazerler, su akışı, sıvı kristaller, alev dinamikleri ve istatistiksel mekaniğin de dahil olduğu birçok fiziksel olguyu açıklığa kavuşturmak için çok büyük önem arz etmektedir [25-27]. Bu denklemin uyumlu kesirli mertebeden türevin yaygınlaşması ve birçok fiziksel olayı açıklamada önemli role sahip olmasından dolayı uyumlu kesirli mertebeden S-H denklemi oluşturulmuştur. Aşağıdaki denklem çeşitli teknikler kullanılarak incelenmiştir [28-30].

$$D_t^\alpha w(x, t) + \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + (1 - \mu)w(x, t) + w^3(x, t) = 0, 0 < \alpha \leq 1, \\ t > 0 \quad (1.1)$$

Çeşitli teknikler kullanılarak

$$D_t^\alpha w(x, t) + \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} - \tau \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} - \mu w(x, t) - 2w^2(x, t) + w^3(x, t) = 0 \quad (1.2)$$

saçılıma sahip olan kesirli Swift-Hohenberg denklemi incelenmiştir [30, 31]. Bu türdeki denklemler, termal iletimin sıcaklık ve akışkan hızı dinamiklerini açıklamakta kullanılmaktadır. Burada $w(x, t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu, τ ve μ sırasıyla saçılım ve çatallanma parametreleridir. Araştırma analizinde,

$$D_t^\alpha w(x, t) + \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} - \tau \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} - \mu w(x, t) - 2w^2(x, t) + w^3\left(x, \frac{t}{2}\right) \quad (1.3)$$

oransal gecikmeli uyumlu zaman-kesirli lineer olmayan S-H denklemi ele alınmaktadır. Ayrıca saçılım terimine sahip

$$D_t^\alpha w(x, t) + \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} - \tau \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} - \mu w(x, t) - 2w^2\left(x, \frac{t}{2}\right) + w^3\left(x, \frac{t}{2}\right) = 0 \quad (1.4)$$

oransal gecikmeli uyumlu zaman-kesirli lineer olmayan S-H denklemi ele alınmaktadır. Burada, D_t^α uyumlu zaman-kesir operatörüdür.

Biyolojide, tıpta, popülasyon ekolojisinde, kontrol sistemlerinde, iklim modellerinde ve karmaşık ekonomik makro-dinamiklerde, oransal gecikmeli kısmi fonksiyonel diferansiyel denklemler, gecikmeli kısmi diferansiyel denklemlerin bir çeşididir [32, 33]. S-H denklemi, homotopi pertürbasyon dönüşüm yöntemi (HPDY) [31], homotopi analiz yöntemi (HAY) [28, 34], artık güç serisi yöntemi (AGSY) [30], diferansiyel dönüşüm yöntemi (DDY) [29], varyasyonel iterasyon tekniği [35, 36] gibi birçok teknikte çözülmüştür. Bu çalışmada ise hem uyumlu kesirli hem de oransal gecikmeli S-H denkleminin çözümleri ilk kez verilmektedir. Ayrıca, oransal gecikmeli uyumlu zaman-kesirli mertebeden S-H denklemi için iki yeni çözüm metodu üretilmektedir. Uyumlu kesirli q-Shehu homotopi analizi dönüşüm yöntemi (UKq-SHADY) ve uyumlu Shehu dönüşümü ayrıştırma yöntemi (USDAY), yeni geliştirilmiş metotlardır. Araştırmanın geri kalanı aşağıda listelenmiştir. İkinci bölüm uyumlu kesirli kalkülüs ve Shehu dönüşümünün temel tanım ve teoremlerini açıklamaktadır. Üçüncü bölümde uyumlu kesirli q-Shehu homotopi analizi dönüşüm yöntemi ve uyumlu Shehu dönüşümü ayrıştırma yöntemi tanıtılmaktadır. Oransal gecikmeli uyumlu zaman-kesirli S-H denklemleri Bölüm 4 te sunulmaktadır. Bölüm 5 te de sonuç kısmı verilmektedir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu kısımda uyumlu kesirli türev hesabı ve Shehu dönüşümünün temel tanım ve teoremleri verilmektedir.

Tanım 2.1 [16, 17, 37] $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. O halde, f fonksiyonunun α basamaktan uyumlu kesirli türevi tüm $x > 0$ için $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere

$$T_\alpha(f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon x^{1-\alpha}) - f(x)}{\varepsilon} \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.1 [16, 17, 37] $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere, f, g fonksiyonları $x > 0$ noktasında α –diferansiyelenebilir olsun. O halde uyumlu kesirli türev için aşağıdaki özellikler mevcuttur:

i. (Lineerlik Özelliği) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $T_\alpha(af + bg) = aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g)$ (2.2)

ii. $T_\alpha(x^p) = px^{p-1}$, tüm $p \in \mathbb{R}$, (2.3)

iii. $T_\alpha(\lambda) = 0$, tüm sabit fonksiyonlar için $f(t) = \lambda$, (2.4)

iv. $T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$, (2.5)

v. $T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g^2}$, (2.6)

vi. Eğer f türevlenebilirse, t polinomunun türevi $T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} f(t)$ (2.7)

olarak elde edilmektedir.

Tanım 2.2 [16] f in x noktasında n kez türevlenebilir olduğunu varsayalım. O zaman f nin α dereceden uyumlu kesirli türevi

$$T_\alpha(f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f^{([\alpha]-1)}(x + \varepsilon x^{([\alpha]-\alpha)}) - f^{([\alpha]-1)}(x)}{\varepsilon} \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $x > 0, \alpha \in (n, n + 1], [\alpha], \alpha$ dan büyük veya eşit en küçük tamsayıdır.

Teorem 2.2 [16] f, x noktasında $n -$ defa türevlenebilir olsun. O zaman, $\alpha \in (n, n + 1]$ olmak üzere $\forall x > 0$ için,

$$T_\alpha(f(x)) = x^{[\alpha]-\alpha} f^{[\alpha]}(x) \quad (2.9)$$

olarak elde edilir.

Tanım 2.3 [38]

Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlıdır. Mittag-Leffler fonksiyonu E_α sembolü ile gösterilmektedir.

Tanım 2.4 [39] $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $f(t)$ fonksiyonunun $\alpha -$ yıncı basamaktan uyumlu kesirli Shehu dönüşümü

$${}_cS_\alpha[f(t)] = V_\alpha(s; u) = \int_0^\infty e^{-\frac{st^\alpha}{u\alpha}} f(t) t^{\alpha-1} dt \quad (2.11)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Tanım 2.5 [39] $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon olsun. $f(t)$ fonksiyonunun uyumlu kesirli türevinin uyumlu Shehu dönüşümü

$$V_\alpha[T_\alpha f(t)](v) = \frac{s}{u} V_\alpha(s; u) - f(0) \quad (2.12)$$

gibi verilmektedir.

Tanım 2.6 [40] $f: A \rightarrow B, g: A \rightarrow B$ sürekli dönüşümler ve $I = [0, 1]$ olsun. $\forall x \in A$ için $G(x, 0) = f(x)$ ve $G(x, 1) = g(x)$ eşitliklerini sağlayan bir $G: A \times I \rightarrow B$ sürekli dönüşümü varsa f ve g homotopiktir denir. Bu durumda G dönüşümüne f ve g arasında bir homotopidir denir.

Tanım 2.7 [41] Bir değişkenin skaler bir fonksiyonu için Adomian polinomu aşağıdaki şekilde verilmektedir. f fonksiyonu n defa türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere Adomian polinomu

$$A_n = \frac{1}{n} f(\sum_{i=0}^{\infty} U_i) \quad (2.13)$$

formülü ile tanımlanmaktadır.



3. KULLANILAN METOTLAR

Tezin bu kısmında yeni önerilen iki nümerik metod tanıtılacaktır. Uyumlu kesirli q-Shehu homotopi analizi dönüşüm yöntemi (UKq-SHADY) ve uyumlu Shehu dönüşümü ayrıştırma yönteminin (USDAY) ana fikrini açıklanmaktadır.

3.1. Uyumlu kesirli q-Shehu homotopi analizi dönüşüm yöntemi (UKq-SHADY)

Uyumlu kesirli q-Shehu homotopi analizi dönüşüm yönteminin temel fikrini açıklamak için,

$$D_t^\alpha w(x, t) + Aw(\rho_i x, \sigma_i t) + Hw(\rho_i x, \sigma_i t) = \varphi(x, t), t > 0, n - 1 < \alpha \leq n \quad (3.1)$$

oransal gecikmeli uyumlu zaman-kesirli S-H denklemini inceleyelim. Burada, A bir doğrusal operatör, H bir doğrusal olmayan operatör, $\varphi(x, t)$ bir dış kuvvet terimi, $\rho_i, \sigma_i \in (0, 1)$ ve D_t^α, α basamaktan uyumlu kesirli türev operatörüdür.

Eşitlik (3.1) e uyumlu kesirli Shehu dönüşümünü uygulayıp, başlangıç koşulunu kullanırsak,

$$\begin{aligned} \frac{s}{u} {}_c S_\alpha[w(x, t)] - w(x, 0) + {}_c S_\alpha[Aw(\rho_i x, \sigma_i t)] + {}_c S_\alpha[Hw(\rho_i x, \sigma_i t)] = \\ {}_c S_\alpha[\varphi(x, t)] \end{aligned} \quad (3.2)$$

eşitliği elde edilir.

Eşitlik (3.2) i düzenlersek,

$$\begin{aligned} {}_c S_\alpha[w(x, t)] - \frac{u}{s} w(x, 0) + \frac{u}{s} {}_c S_\alpha[Aw(\rho_i x, \sigma_i t)] + \frac{u}{s} {}_c S_\alpha[Hw(\rho_i x, \sigma_i t)] - \\ \frac{u}{s} {}_c S_\alpha[\varphi(x, t)] = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

eşitliği elde edilir.

Homotopi analiz metodunu kullanarak, reel $\psi(x, t; q)$ fonksiyonu için doğrusal olmayan operatörü

$$N[\psi(x, t; q)] = {}_cS_\alpha[\psi(x, t; q)] - \frac{u}{s}\psi(x, t; q) (0^+) + \frac{u}{s} ({}_cS_\alpha[A\psi(\rho_i x, \sigma_i t; q)] + {}_cS_\alpha[H\psi(\rho_i x, \sigma_i t; q)] - {}_cS_\alpha[\varphi(x, t)]) \quad (3.4)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada, $q \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ dir.

Bir homotopi,

$$(1 - nq) {}_cS_\alpha[\psi(x, t; q) - w_0(x, t)] = hqH^*(x, t)H[\psi(\rho_i x, \sigma_i t; q)] \quad (3.5)$$

şeklinde oluşturulur.

Burada, $h \neq 0$ bir yardımcı parametre ve ${}_cS_\alpha$, uyumlu kesirli Shehu dönüşümünü göstermektedir. $q = 0$ ve $q = \frac{1}{n}$ için denklem (3.5) in sonuçları

$$\psi(x, t; 0) = w_0(x, t), \psi\left(x, t; \frac{1}{n}\right) = w(x, t) \quad (3.6)$$

dir.

Böylece, q yu 0 dan $\frac{1}{n}$ e kadar açarsak, $\psi(x, t; q)$ çözümü $w_0(x, t)$ den $w(x, t)$ çözümüne yakınsar. q civarında, Taylor teoremini kullanarak ve ardından $\psi(x, t; q)$ yu açarak

$$\psi(x, t; q) = w_0(x, t) + \sum_{i=1}^{\infty} w_m(x, t)q^m \quad (3.7)$$

eşitliği elde edilir. Burada,

$$w_m(x, t) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \psi(x, t; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} \quad (3.8)$$

dir. (3.7) eşitliği uygun bir $w_0(x, t)$, n ve h için yakınsar. Orijinal doğrusal olmayan denklemin bir çözümünü

$$w(x, t) = w_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} w_m(x, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m \quad (3.9)$$

formunda arayalım. Bu durumda $w_m(x, t)$ yi bulmak için eşitlik (3.5) teki sıfırıncı mertebeden deformasyon denkleminin q ya göre m defa türevlenirse ve $m!$ ile bölünürse $q=0$ için

$${}_cS_\alpha[w_m(x, t) - k_m w_{m-1}(x, t)] = hH^*(x, t)\mathcal{R}_m(\vec{w}_{m-1}) \quad (3.10)$$

eşitliği elde edilir.

Burada vektörler,

$$\vec{w}_m = \{w_0(x, t), w_1(x, t), \dots, w_m(x, t)\} \quad (3.11)$$

şeklinde verilmektedir.

Eşitlik (3.10) a ters uyumlu kesirli Shehu dönüşümü uygulandığında

$$w_m(x, t) = k_m w_{m-1}(x, t) + h({}_cS_\alpha)^{-1}[H^*(x, t)\mathcal{R}_m(\vec{w}_{m-1})] \quad (3.12)$$

olarak elde edilmektedir. Burada

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_m(\vec{w}_{m-1}) = & {}_cS_\alpha[w_{m-1}(x, t)] - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right)\frac{u}{s}w_0(x, t) + \frac{u}{s}{}_cS_\alpha[Aw_{m-1}(\rho_i x, \sigma_i t) \\ & + H_{m-1}^*(x, t) - \varphi(x, t)] \end{aligned} \quad (3.13)$$

ve

$$k_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ n, & m > 1 \end{cases} \quad (3.14)$$

'dir. Burada, H_m^* homotopi polinomudur ve

$$H_m^* = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \psi(x, t; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0}$$

ve

$$\psi(x, t; q) = \psi_0 + q\psi_1 + q^2\psi_2 + \dots \quad (3.15)$$

şeklinde verilmektedir.

(3.12) ve (3.13) eşitlikleri kullanılarak,

$$w_m(x, t) = (k_m + h)w_{m-1}(x, t) - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right)\frac{u}{s}w_0(x, t) + h$$

$$\times ({}_c\mathcal{S}_\alpha)^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} {}_c\mathcal{S}_\alpha [Aw_{m-1}(\rho_i x, \sigma_i t) + H^*_{m-1}(x, t) - f(x, t)] \right) \right] \quad (3.16)$$

elde edilir.

Uyumlu kesirli q-Shehu homotopi analizi dönüşüm yöntemi (UKq-SHADY) kullanılarak,

$$w(x, t) = \sum_{c=0}^{\infty} w_c(x, t) \quad (3.17)$$

şeklinde bir seri çözümü elde edilir. Bu ifade (3.9) da yerine yazılırsa istenilen çözüm bulunur.

3.2 Uyumlu Shehu Dönüşümü Ayırıştırma Yöntemi (USDAY)

USDAY'nin temel fikrini tanıtmak için, oransal gecikmeli uyumlu zaman-kesirli mertebeden Swift-Hohenberg denklemini ele alalım:

$$D_t^\alpha w(x, t) + Aw(\rho_i x, \sigma_i t) + Hw(\rho_i x, \sigma_i t) = \varphi(x, t), t > 0, n - 1 < \alpha \leq n \quad (3.18)$$

burada A bir lineer operatör, H bir doğrusal olmayan operatör, $\varphi(x, t)$ bir kaynak terimi, $\rho_i, \sigma_i \in (0, 1)$ ve D_t^α a ya uygun bir kesirli türevidir.

Başlangıç koşulu kullanılarak eşitlik (3.18) e uyumlu kesirli Shehu dönüşümü uygulandığında,

$$\begin{aligned} \frac{s}{u} {}_c\mathcal{S}_\alpha [w(x, t)] - w(x, 0) + {}_c\mathcal{S}_\alpha [Aw(\rho_i x, \sigma_i t)] + {}_c\mathcal{S}_\alpha [Hw(\rho_i x, \sigma_i t)] \\ = {}_c\mathcal{S}_\alpha [\varphi(x, t)] \end{aligned} \quad (3.19)$$

denklemini bulunur.

Eşitlik (3.19) düzenlenerek,

$${}_c\mathcal{S}_\alpha [w(x, t)] = \frac{u}{s} w(x, 0) - \frac{u}{s} {}_c\mathcal{S}_\alpha [Aw(\rho_i x, \sigma_i t) + Hw(\rho_i x, \sigma_i t) - \varphi(x, t)] \quad (3.20)$$

olur.

Denklem (3.20) ya ters uyumlu kesirli Shehu dönüşümü uygulanmasıyla,

$$w(x, t) = Q(x, t) - ({}_c\mathcal{S}_\alpha)^{-1} \left[\frac{u}{s} {}_c\mathcal{S}_\alpha [Aw(\rho_i x, \sigma_i t) + Hw(\rho_i x, \sigma_i t)] \right] \quad (3.21)$$

elde edilir.

Burada $Q(x, t)$, homojen olmayan terimi ve başlangıç koşullarını temsil etmektedir.

Denklem (3.22) ile ifade edilen sonsuz dizi çözüm formu

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, t) \quad (3.22)$$

şeklinde olsun.

Denklem (3.21) yi denklem (3.22) i kullanılarak yeniden yazarsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, t) = Q(x, t) - ({}_c\mathcal{S}_\alpha)^{-1} \left[\frac{u}{s} {}_c\mathcal{S}_\alpha [A \sum_{n=0}^{\infty} w_n(\rho_i x, \sigma_i t) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n] \right] \quad (3.23)$$

sonucuna ulaşılır.

Burada B_n , doğrusal olmayan $Hw(\rho_i x, \sigma_i t)$ terimini temsil eden Adomian polinomlarıdır.

Eşitlik (3.23) un her iki tarafının karşılaştırılmasıyla aşağıdaki iterasyonlar bulunur:

$$w_0(x, t) = Q(x, t), \quad (3.24)$$

$$w_1(x, t) = -({}_c\mathcal{S}_\alpha)^{-1} \left[\frac{u}{s} {}_c\mathcal{S}_\alpha [Aw_0(\rho_i x, \sigma_i t) + B_0] \right], \quad (3.25)$$

$$w_2(x, t) = -({}_c\mathcal{S}_\alpha)^{-1} \left[\frac{u}{s} {}_c\mathcal{S}_\alpha [Aw_1(\rho_i x, \sigma_i t) + B_1] \right], \quad (3.26)$$

$$w_3(x, t) = -({}_c\mathcal{S}_\alpha)^{-1} \left[\frac{u}{s} {}_c\mathcal{S}_\alpha [Aw_2(\rho_i x, \sigma_i t) + B_2] \right], \quad (3.27)$$

⋮

Bu sonuçlardan hareketle iterasyon için genel formülü,

$$w_{n+1}(x, t) = -({}_c\mathcal{S}_\alpha)^{-1} \left[\frac{u}{s} {}_c\mathcal{S}_\alpha [Aw_n(\rho_i x, \sigma_i t) + B_n] \right], \quad n \geq 0 \quad (3.28)$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç olarak, çözümün bir yaklaşımı aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(\rho_i x, \sigma_i t) \quad (3.29)$$

4. UYGULAMALAR

Bu kısımda oransal gecikmeli zaman kesirli mertebeden Swift-Hohenberg denklemleri incelenmektedir.

Problem 4.1

$$D_t^\alpha w(x, t) + \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + (1 - \mu)w(x, t) + w^3 \left(x, \frac{t}{2} \right) = 0, t > 0, \\ 0 < \alpha \leq 1 \quad (4.1)$$

saçılıma sahip oransal gecikmeli uyumlu zaman-kesirli doğrusal olmayan S-H denklemini

$$w(x, 0) = \frac{1}{10} \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] \quad (4.2)$$

başlangıç koşulu ve

$$w(0, t) = 0, w_{xx}(l, t) = 0, \quad (4.3)$$

sınır koşullarıyla incelenmektedir [26, 40]. Burada $w(x, t)$, olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

4.1. (4.1) Denklemi için UKq-SHADY çözümü

(4.1) denklemine uyumlu kesirli Shehu dönüşümü uygulanarak ve başlangıç koşulu kullanılarak,

$$\frac{s}{u} {}_c S_\alpha [w(x, t)] - w(x, 0) + {}_c S_\alpha \left[\frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + (1 - \mu)w(x, t) \right. \\ \left. + w^3 \left(x, \frac{t}{2} \right) \right] = 0 \quad (4.4)$$

şeklinde elde edilir.

Eşitlik (4.4) düzenlenerek,

$$\begin{aligned}
{}_cS_\alpha[w(x, t)] - \frac{u}{s}w(x, 0) + \frac{u}{s} {}_cS_\alpha \left[\frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + (1 - \mu)w(x, t) \right. \\
\left. + w^3 \left(x, \frac{t}{2} \right) \right] = 0
\end{aligned} \tag{4.5}$$

şeklinde ifade edilir.

HAM kullanılarak, reel $\psi(x, t; q)$ fonksiyonu için lineer olmayan operatörü

$$\begin{aligned}
N[\psi(x, t; q)] = {}_cS_\alpha[\psi(x, t; q)] - \frac{u}{s}\psi(x, t; q) (0^+) + \frac{u}{s} {}_cS_\alpha \left[\frac{\partial^4 \psi(x, t; q)}{\partial x^4} \right. \\
\left. + 2 \frac{\partial^2 \psi(x, t; q)}{\partial x^2} + (1 - \mu)\psi(x, t; q) + \psi^3 \left(x, \frac{t}{2}; q \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.6}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $q \in \left[0, \frac{1}{n} \right]$ dir.

Önerilen algoritma uygulandığında, m yinci basamaktan deformasyon denklemi

$${}_cS_\alpha[w_m(x, t) - k_m w_{m-1}(x, t)] = h \mathcal{R}_m(\vec{w}_{m-1}) \tag{4.7}$$

şeklinde tanımlanır. Burada,

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_m(\vec{w}_{m-1}) = {}_cS_\alpha[w_{m-1}(x, t)] - \left(1 - \frac{k_m}{n} \right) \frac{u}{s} w_0(x, t) + \frac{u}{s} {}_cS_\alpha \left[\frac{\partial^4 w_{m-1}(x, t)}{\partial x^4} \right. \\
\left. + 2 \frac{\partial^2 w_{m-1}(x, t)}{\partial x^2} + (1 - \mu)w_{m-1}(x, t) + \sum_{r=0}^{m-1} \left(\sum_{j=0}^r V_r V_{r-j} \right) V_{m-1-r} \right]
\end{aligned} \tag{4.8}$$

'dir.

Eşitlik (4.7) ye ters uyumlu kesirli Shehu dönüşümü uygulandığında,

$$w_m(x, t) = k_m w_{m-1}(x, t) + h \left({}_cS_\alpha \right)^{-1} [\mathcal{R}_m(\vec{w}_{m-1})] \tag{4.9}$$

elde edilir.

Başlangıç koşulunu kullanarak,

$$w_0(x, t) = \frac{1}{10} \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] \tag{4.10}$$

olarak bulunur.

Ve sırasıyla eşitlik (4.9) da $m = 1, m = 2$ için aşağıdaki iterasyonlar elde edilir:

$$w_1(x, t) = \frac{-ht^\alpha \sin\left[\frac{\pi x}{l}\right]}{10\alpha l^4} \left[\frac{l^4 \cos^2\left[\frac{\pi x}{l}\right]}{100} + \left(\mu - \frac{101}{100}\right) l^4 + 2\pi^2 l^2 - \pi^4 \right] \quad (4.11)$$

$$w_2(x, t) = (n + h) \left(\frac{-ht^\alpha \sin\left[\frac{\pi x}{l}\right]}{10\alpha l^4} \left[\frac{l^4 \cos^2\left[\frac{\pi x}{l}\right]}{100} + \left(\mu - \frac{101}{100}\right) l^4 + 2\pi^2 l^2 - \pi^4 \right] \right) \\ + \frac{3h^2 t^{2\alpha} \sin\left[\frac{\pi x}{l}\right]}{2 \cdot 10^5 \alpha^2 l^8} \left[2^{-\alpha} \cos^4\left[\frac{\pi x}{l}\right] l^8 + 100l^4 \left[\left[\left(\mu - \frac{51}{50}\right) l^4 + 2\pi^2 l^2 - \pi^4 \right] 2^{-\alpha} \right. \right. \\ \left. \left. + 100l^4 \pi^4 \right] 2^{-\alpha} + \left(\frac{10^4 \mu^2}{3} - 6700\mu + \frac{10100}{3} \right) l^8 + \frac{40000}{3} \left(\mu - \frac{203}{200} \right) l^6 \pi^2 - \frac{20000}{3} \right. \\ \left. \times \left(\mu - \frac{621}{200} \right) l^4 \pi^4 - \frac{40000}{3} l^2 \pi^6 + \frac{10000}{3} \pi^8 \right] \quad (4.12)$$

Son olarak, $w(x, t)$ analitik çözümü,

$$w(x, t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \theta_M(x, t) \quad (4.13)$$

kesikli serisiyle yaklaşık olarak elde edilir.

Burada,

$$\theta_M(x, t) = \sum_{m=1}^M w_m(x, t) \quad (4.14)$$

'dir. Böylece, (4.1) denkleminin UKq-SHADY çözümü

$$w(x, t) = w_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} w_m(x, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m \quad (4.15)$$

'dir.

4.2. Denklem (4.1) için uyumlu Shehu dönüşümü ayrıştırma yöntemi çözümü

(4.1) numaralı denkleme uyumlu kesirli Shehu dönüşümü uygulandığında ve başlangıç koşulu kullanıldığında,

$$\frac{s}{u} {}_c S_\alpha [w(x, t)] - w(x, 0) + {}_c S_\alpha \left[\frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + (1 - \mu)w(x, t) \right. \\ \left. + w^3 \left(x, \frac{t}{2} \right) \right] = 0 \quad (4.16)$$

denklemini elde edilir.

(4.16) düzenlenirse

$$cS_\alpha[w(x, t)] = \frac{u}{s} w(x, 0) - \frac{u}{s} cS_\alpha \left[\frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right. \\ \left. + (1 - \mu)w(x, t) + w^3 \left(x, \frac{t}{2} \right) \right] \quad (4.17)$$

olur.

(4.17) ye ters uyumlu kesirli Shehu dönüşümü uygulanırsa

$$w(x, t) = \frac{1}{10} \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] - (cS_\alpha)^{-1} \left[\frac{u}{s} cS_\alpha \left[\frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right. \right. \\ \left. \left. + (1 - \mu)w(x, t) + w^3 \left(x, \frac{t}{2} \right) \right] \right] \quad (4.18)$$

elde edilir. Burada bilinmeyen $w(x, t)$ fonksiyonunun sonsuz seri formunun

$$w(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x, t) \quad (4.19)$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. (4.19), (4.18) de yerine yazılırsa

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k(x, t) = \frac{1}{10} \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] - (cS_\alpha)^{-1} \left[\frac{u}{s} cS_\alpha \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^4 w_k(x, t)}{\partial x^4} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^2 w_k(x, t)}{\partial x^2} \right. \right. \\ \left. \left. + (1 - \mu) \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x, t) + \sum_{k=0}^{\infty} A_k \right] \right], k \geq 0 \quad (4.20)$$

olarak elde edilir. Burada A_k , Adomian polinomlarıdır.

Denklem (4.18) ün her iki tarafı karşılaştırıldığında aşağıdaki iterasyonlar elde edilir:

$$w_0(x, t) = \frac{1}{10} \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] \quad (4.21)$$

ve $k = 1, k = 2$ değerleri denklem (4.20) de sırasıyla yerine konulduğunda, eşitlik (4.22) - (4.23) şu şekilde bulunur:

$$w_1(x, t) = \frac{t^\alpha \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right]}{10\alpha l^4} \left[\frac{l^4 \cos^2 \left[\frac{\pi x}{l} \right]}{100} + \left(\mu - \frac{101}{100} \right) l^4 + 2\pi^2 l^2 - \pi^4 \right] \quad (4.22)$$

$$w_2(x, t) = \frac{t^{2\alpha} \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right]}{20\alpha^2 l^8} \left[\frac{3}{10000} 2^{-\alpha} \cos^4 \left[\frac{\pi x}{l} \right] l^8 + \frac{3}{100} l^4 \left[\left(\mu - \frac{51}{50} \right) l^4 + 2\pi^2 l^2 - \pi^4 \right] \right]$$

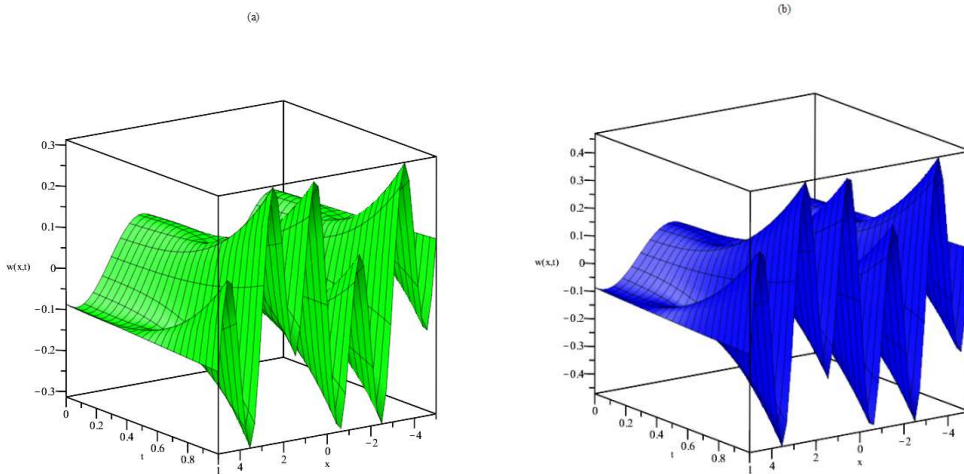
$$\begin{aligned}
& \times 2^{-\alpha} + \left(\frac{\mu}{3} - \frac{1}{3}\right) l^4 + 6\pi^2 l^2 - 27\pi^4 \cos^2 \left[\frac{\pi x}{l}\right] - \frac{3}{100} l^4 \left[\left(\mu - \frac{101}{100}\right) l^4 + 2\pi^2 l^2 \right. \\
& \left. - \pi^4\right] 2^{-\alpha} + (-1 + \mu) \left(\mu - \frac{101}{100}\right) l^8 + 4 \left(\mu - \frac{203}{200}\right) l^6 \pi^2 - 2 \left(\mu - \frac{621}{200}\right) l^4 \pi^4 \\
& \left. - 4l^2 \pi^6 + \pi^8\right] \quad (4.23)
\end{aligned}$$

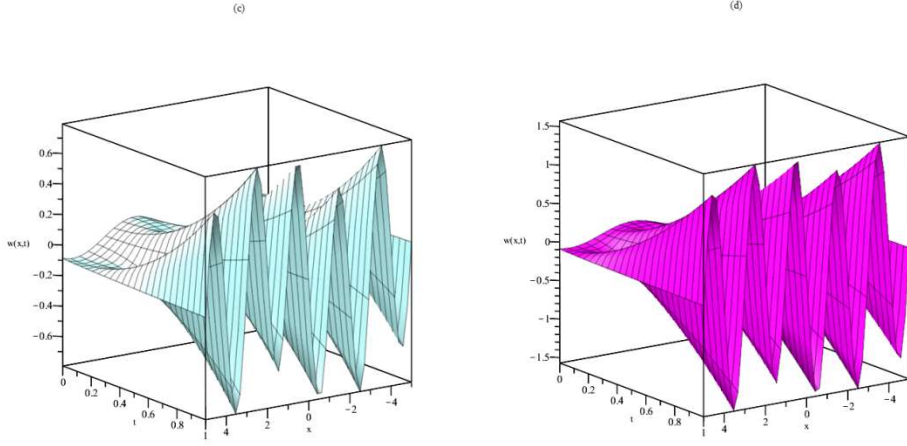
Böylece, (4.4) denkleminin USDAY çözümü

$$\begin{aligned}
w(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x, t) = w_0(x, t) + w_1(x, t) + w_2(x, t) = \frac{1}{10} \sin \left[\frac{\pi x}{l}\right] \\
&+ \frac{t^\alpha \sin \left[\frac{\pi x}{l}\right]}{10\alpha l^4} \left[\frac{l^4 \cos^2 \left[\frac{\pi x}{l}\right]}{100} + \left(\mu - \frac{101}{100}\right) l^4 + 2\pi^2 l^2 - \pi^4 \right] + \frac{t^{2\alpha} \sin \left[\frac{\pi x}{l}\right]}{20\alpha^2 l^8} \left[\frac{3}{10000} 2^{-\alpha} \right. \\
&\times \cos^4 \left[\frac{\pi x}{l}\right] l^8 + \frac{3}{100} l^4 \left[\left[\left(\mu - \frac{51}{50}\right) l^4 + 2\pi^2 l^2 - \pi^4\right] 2^{-\alpha} + \left(\frac{\mu}{3} - \frac{1}{3}\right) l^4 + 6\pi^2 l^2 \right] \\
&\left. - 27\pi^4 \right] \cos^2 \left[\frac{\pi x}{l}\right] - \frac{3}{100} l^4 \left[\left(\mu - \frac{101}{100}\right) l^4 + 2\pi^2 l^2 - \pi^4\right] 2^{-\alpha} + (-1 + \mu) \\
&\times \left(\mu - \frac{101}{100}\right) l^8 + 4 \left(\mu - \frac{203}{200}\right) l^6 \pi^2 - 2 \left(\mu - \frac{621}{200}\right) l^4 \pi^4 - 4l^2 \pi^6 + \pi^8 \left. \right] \quad (4.24)
\end{aligned}$$

'dir. Elde edilen bu sonuçlar bir grafik üzerinde aşağıdaki şekilde ifade edilir.

Farklı α değerleri için UKq-SHADY çözümüne ait 3-boyutlu grafikler Şekil 4.1 de gösterilmektedir.



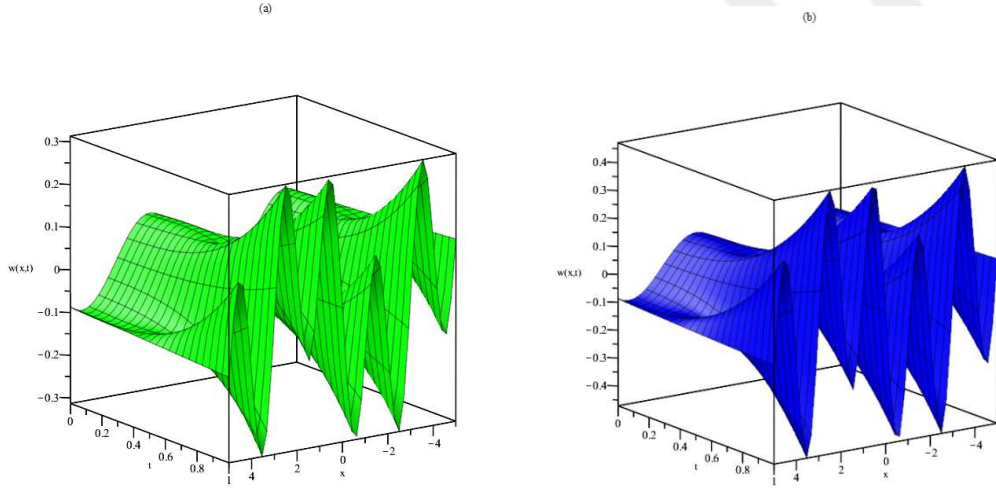


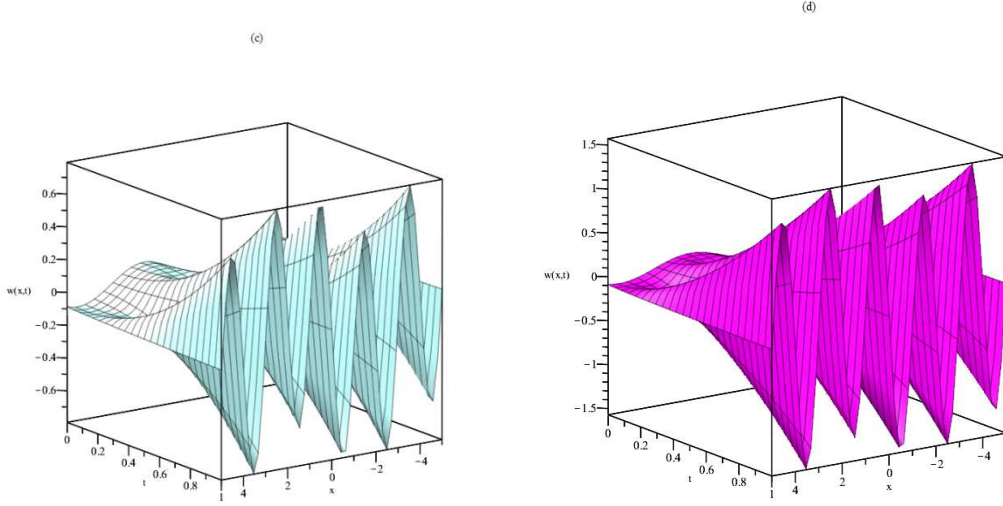
Şekil 4.1 $l = 3, \mu = 0.3, h = -1, n = 1$ değerleri için,

(a) $\alpha = 1$ için UKq-SHADY çözümü **(b)** $\alpha = 0.85$ için UKq-SHADY çözümü **(c)** $\alpha = 0.70$ için Uq-SHADY çözümü **(d)** $\alpha = 0.55$ için Uq-SHADY çözümü.

Şekil 4.1 de UKq-SHADY çözümlerinin 3-boyutlu davranışlarının $a = 1$ den $a = 0.55$ e gittikçe arttığı gözlemlenmektedir.

Farklı α değerleri için USDAY çözümüne ait 3-boyutlu grafikler Şekil 4.2 de gösterilmektedir.



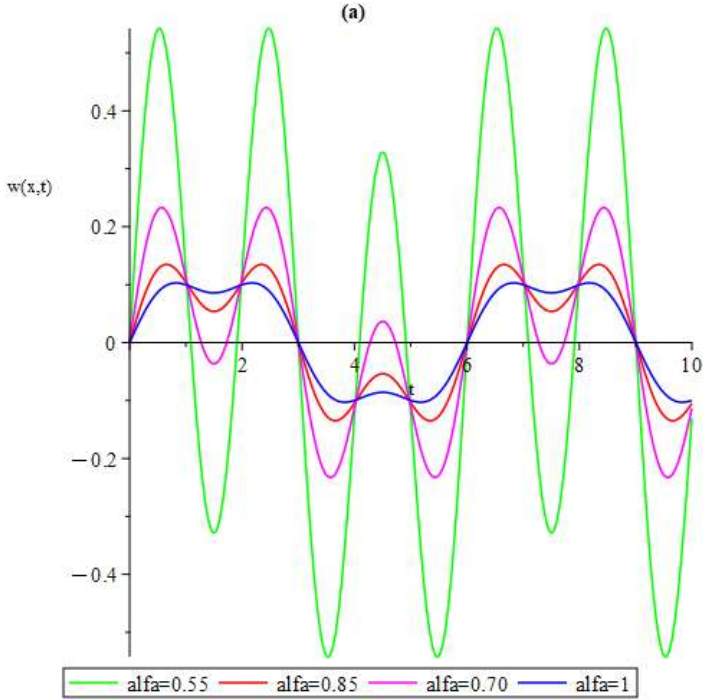


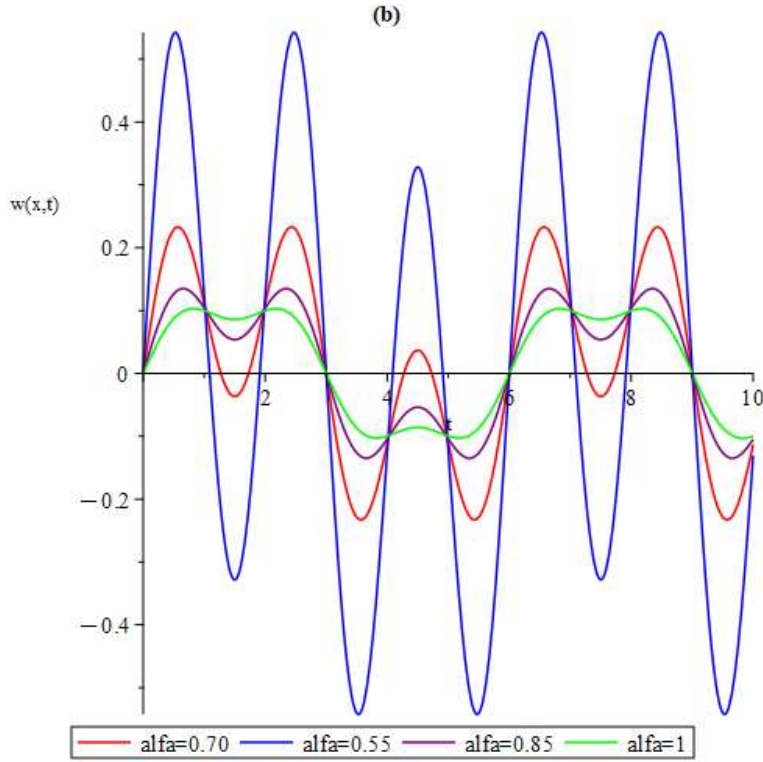
Şekil 4.2 $l = 3, \mu = 0.3$ değerleri için,

(a) $\alpha = 1$, için USDAY çözümü (b) $\alpha = 0.85$ için USDAY çözümü (c) $\alpha = 0.70$ için USDAY çözümü (d) $\alpha = 0.55$ için USDAY çözümü.

Şekil 4.2 de USDAY çözümlerinin 3-boyutlu davranışlarının $a = 1$ den $a = 0.55$ e gittikçe arttığı gözlemlenmektedir.

Farklı α değerleri için elde edilen UKq-SHADY ve USDAY çözümlerine ait 2-boyutlu grafikler Şekil 4.3 te gösterilmektedir.





Şekil 4.3 Eşitlik (4.1) için $l = 3, \mu = 0.3, h = -1, n = 1, t = 0.5$ olmak üzere farklı α değerleri için,

(a) UKq-SHADY çözümünün 2-boyutlu grafiği (b) USDAY çözümünün 2-boyutlu grafiği

Şekil 4.3 te iki metotla da elde edilen çözümlerin iki boyutlu davranışlarının benzer olduğu gözlemlenmektedir. Şekil 4.3 te iki grafikte de $\alpha = 0.55$ ten $\alpha = 1$ e değıştikçe genliğinin daraldığı gözlemlenmektedir.

Tablo 4.1 Çeşitli α değerleri için $l = 3, \mu = 0.3, h = -1, n = 1$ olmak üzere, x değışkeni sabit iken artan t değerlerine göre eşitlik (4.1) için UKq-SHADY çözümünün sayısal değerleri.

x	t	$\alpha = 0.55$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.85$	$\alpha = 1$
0.1	0.1	0.02183028447	0.01291273226	0.01123977954	0.01080371354
	0.2	0.04424028868	0.01905705819	0.01322693156	0.01157758999
	0.3	0.07538926723	0.02951424222	0.01717936025	0.01323869603
	0.4	0.11413415110	0.04452665732	0.02364124959	0.01625653178
	0.5	0.15975804650	0.06425651933	0.03307019241	0.02110059736
0.2	0.1	0.04257638075	0.02554657740	0.02233151817	0.02148433319
	0.2	0.08528146383	0.03728604551	0.02614832257	0.02298328891
	0.3	0.14459942930	0.05722474844	0.03370223434	0.02617081677
	0.4	0.21836156800	0.08582641819	0.04602940632	0.03194008309
	0.5	0.30520635540	0.12340073200	0.06400074178	0.04118425422
0.3	0.1	0.06124815856	0.03763908101	0.03313122954	0.03192058385

	0.2	0.12022345020	0.05392822667	0.03847762419	0.03405148484
	0.3	0.20203971040	0.08149160008	0.04896492223	0.03850888590
	0.4	0.30372595600	0.12097428210	0.06602189143	0.04652241783
	0.5	0.42341350400	0.17280532760	0.09084848998	0.05932171152
0.4	0.1	0.07703466085	0.04895918477	0.04350275723	0.04199476250
	0.2	0.14673554940	0.06835696686	0.04996455267	0.04462863072
	0.3	0.24323940020	0.10098682410	0.06246431482	0.05000189431
	0.4	0.36308038950	0.14762002080	0.08268659535	0.05956057903
	0.5	0.50407192140	0.20876628860	0.11204438030	0.07475071070
0.5	0.1	0.08937217283	0.05931938852	0.05332101722	0.05159436599
	0.2	0.16327207310	0.08012797347	0.06040908768	0.05457808832
	0.3	0.26527172420	0.11481262220	0.07383620710	0.06044936981
	0.4	0.39177182290	0.16420575430	0.09538171431	0.07072940311
	0.5	0.54049036960	0.22885219870	0.12653512450	0.08693938079

Tablo 4.1 de UKq-SHADYçözümlerinin konum sabitken artan zaman değerleri için $\alpha = 0.55$ ten $\alpha = 1$ e kadar olan sayısal sonuçlarını incelenmektedir.

Tablo 4.2 Çeşitli α değerleri için $l = 3, \mu = 0.3, h = -1, n = 1$ ve farklı x ve t değerlerine göre eşitlik (4.1) için USDAY çözümünün sayısal değerleri.

x	t	$\alpha = 0.55$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.85$	$\alpha = 1$
0.1	0.1	0.02183028449	0.01291273227	0.01123977954	0.01080371354
	0.2	0.04257638078	0.02554657741	0.02233151817	0.02148433319
	0.3	0.07538926730	0.02951424223	0.01717936024	0.01323869604
	0.4	0.11413415110	0.04452665737	0.02364124959	0.01625653178
	0.5	0.15975804660	0.06425651940	0.03307019240	0.02110059736
0.2	0.1	0.04257638078	0.02554657741	0.02233151817	0.02148433319
	0.2	0.08528146380	0.03728604552	0.02614832257	0.02298328891
	0.3	0.14459942930	0.05722474846	0.03370223434	0.02617081677
	0.4	0.21836156780	0.08582641824	0.04602940631	0.03194008310
	0.5	0.30520635540	0.12340073210	0.06400074176	0.04118425421
0.3	0.1	0.06124815859	0.03763908100	0.03313122954	0.03192058385
	0.2	0.12022345020	0.05392822668	0.03847762418	0.03405148484
	0.3	0.20203971040	0.08149160004	0.04896492222	0.03850888590
	0.4	0.30372595600	0.12097428210	0.06602189138	0.04652241784
	0.5	0.42341350380	0.17280532740	0.09084848993	0.05932171152
0.4	0.1	0.07703466090	0.04895918477	0.04350275723	0.04199476250
	0.2	0.14673554940	0.06835696685	0.04996455267	0.04462863072
	0.3	0.24323940030	0.10098682410	0.06246431480	0.05000189431
	0.4	0.36308039000	0.14762002090	0.08268659528	0.05956057904
	0.5	0.50407192200	0.20876628870	0.11204438030	0.07475071071
0.5	0.1	0.08937217288	0.05931938852	0.05332101722	0.05159436600
	0.2	0.16327207330	0.08012797344	0.06040908767	0.05457808832

0.3	0.26527172420	0.11481262210	0.07383620710	0.06044936982
0.4	0.39177182320	0.16420575420	0.09538171429	0.07072940311
0.5	0.54049037020	0.22885219880	0.12653512450	0.08693938080

Tablo 4.2 de USDAY çözümlerinin konum sabitken artan zaman değerleri için $a = 0.55$ ten $a = 1$ e kadar olan sayısal sonuçlarını incelenmektedir.

Problem 4.2

$$D_t^\alpha w(x, t) + \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - \eta \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} - \rho w(x, t) - 2w^2 \left(x, \frac{t}{2} \right) + w^3 \left(x, \frac{t}{2} \right) = 0 \quad t > 0, 0 < \alpha \leq 1 \quad (4.25)$$

saçılıma sahip oransal gecikmeli uyumlu zaman-kesirli doğrusal olmayan S-H denklemi

$$w(x, 0) = \frac{1}{10} \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] \quad (4.26)$$

başlangıç koşulunu ve

$$w(0, t) = 0, w_{xx}(l, t) = 0 \quad (4.27)$$

sınır koşullarını göz önüne alalım [26, 42]. Burada $w(x, t)$, olasılık yoğunluk fonksiyonu, η ve ρ sırasıyla saçılım ve çatallanma parametreleridir. Şimdi bu problem için aşağıdaki incelemeleri yapalım.

4.3 Eşitlik (4.25) için UKq-SHADY çözümü

(4.25) denklemine uyumlu kesirli Shehu dönüşümü uygulanıp başlangıç koşulunu kullanılırsa,

$$\frac{s}{u} {}_c S_\alpha [w(x, t)] - w(x, 0) + {}_c S_\alpha \left[\frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - \eta \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} - \rho w(x, t) - 2w^2 \left(x, \frac{t}{2} \right) + w^3 \left(x, \frac{t}{2} \right) \right] = 0 \quad (4.28)$$

olarak elde edilir.

Bu ifade düzenlenirse,

$${}_c S_\alpha [w(x, t)] - \frac{u}{s} w(x, 0) + \frac{u}{s} {}_c S_\alpha \left[\frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - \eta \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \right]$$

$$-\rho w(x, t) - 2w^2\left(x, \frac{t}{2}\right) + w^3\left(x, \frac{t}{2}\right) = 0 \quad (4.29)$$

olur.

HAM kullanılarak, reel $\psi(x, t; q)$ fonksiyonu için doğrusal olmayan operatörü

$$\begin{aligned} N[\psi(x, t; q)] = & {}_c\mathcal{S}_\alpha[\psi(x, t; q)] - \frac{u}{s}\psi(x, t; q) (0^+) + \frac{u}{s} {}_c\mathcal{S}_\alpha\left[\frac{\partial^4\psi(x, t; q)}{\partial x^4}\right. \\ & \left.+ 2\frac{\partial^2\psi(x, t; q)}{\partial x^2} - \eta\frac{\partial^3\psi(x, t; q)}{\partial x^3} - \rho\psi(x, t; q) - 2\psi^2\left(x, \frac{t}{2}; q\right) + \psi^3\left(x, \frac{t}{2}; q\right)\right] \end{aligned} \quad (4.30)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada $q \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ dir.

Önerilen algoritma uygulandığında, m - yinci dereceden deformasyon denklemi

$${}_c\mathcal{S}_\alpha[w_m(x, t) - k_m w_{m-1}(x, t)] = h\mathcal{R}_m(\vec{w}_{m-1}) \quad (4.31)$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_m(\vec{w}_{m-1}) = & {}_c\mathcal{S}_\alpha[w_{m-1}(x, t)] - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right)\frac{u}{s}w_0(x, t) + \frac{u}{s} {}_c\mathcal{S}_\alpha\left[\frac{\partial^4 w_{m-1}(x, t)}{\partial x^4}\right. \\ & \left.+ 2\frac{\partial^2 w_{m-1}(x, t)}{\partial x^2} - \eta\frac{\partial^3 w_{m-1}(x, t)}{\partial x^3} - \rho w_{m-1}(x, t) - 2\sum_{j=0}^{m-1} w_j\left(x, \frac{t}{2}\right) w_{m-1-j}\left(x, \frac{t}{2}\right)\right. \\ & \left.+ \sum_{r=0}^{m-1} \left(\sum_{j=0}^r w_r\left(x, \frac{t}{2}\right) w_{r-j}\left(x, \frac{t}{2}\right)\right) w_{m-1-r}\left(x, \frac{t}{2}\right)\right] \end{aligned} \quad (4.32)$$

dir.

(4.31) e ters uyumlu kesirli Shehu dönüşümü uygulandığında,

$$w_m(x, t) = k_m w_{m-1}(x, t) + h({}_c\mathcal{S}_\alpha)^{-1}[\mathcal{R}_m(\vec{w}_{m-1})] \quad (4.33)$$

olarak elde edilir.

Problemde verilen başlangıç koşulu bu ifadeye uygulanırsa,

$$w_0(x, t) = \frac{1}{10} \sin\left[\frac{\pi x}{l}\right] \quad (4.34)$$

olarak bulunur.

Eğer (4.32) de sırasıyla $m = 1$ ve $m = 2$ alınırsa aşağıdaki iterasyonlar elde edilir:

$$w_1(x, t) = \frac{ht^\alpha}{10^3 \alpha l^4} \left[l^4 \sin^3 \left[\frac{\pi x}{l} \right] - 20 l^4 \sin^2 \left[\frac{\pi x}{l} \right] \right. \\ \left. + 100(-\rho l^4 - 2l^2 \pi^2 + \pi^4) \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] + 100 \eta \pi^3 \cos \left[\frac{\pi x}{l} \right] \right] \quad (4.35)$$

$$w_2(x, t) = (n + h) \left[\frac{ht^\alpha}{10^3 \alpha l^4} \left[l^4 \sin^3 \left[\frac{\pi x}{l} \right] - 20 l^4 \sin^2 \left[\frac{\pi x}{l} \right] \right. \right. \\ \left. \left. + 100(-\rho l^4 - 2l^2 \pi^2 + \pi^4) \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] + 100 \eta \pi^3 \cos \left[\frac{\pi x}{l} \right] \right] \right] + \frac{1}{10^7 \alpha^2 l^8} \left[h^2 \left[\frac{1}{3} \right. \right. \\ \times \left[\left[\sin^2 \left[\frac{\pi x}{l} \right] - 20 \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] - 100 \rho \right] \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] l^4 - 200 \pi^2 l^2 \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] + 100 l \eta \pi^3 \right. \\ \times \cos \left[\frac{\pi x}{l} \right] + 100 \pi^4 \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] \right]^2 h \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] 4^{-\alpha} \alpha t^{3\alpha} + 100 t^{2\alpha} \left[\left[\sin^2 \left[\frac{\pi x}{l} \right] \right. \right. \\ \left. \left. - 20 \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] - 100 \rho \right] \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] l^4 - 200 \pi^2 l^2 \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] + 100 l \eta \pi^3 \cos \left[\frac{\pi x}{l} \right] \right. \\ \left. + 100 \pi^4 \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] \right] \left[\sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] - 10 \right] \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] l^4 2^{-\alpha} - 50 \left[\sin^2 \left[\frac{\pi x}{l} \right] - 20 \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] \right. \\ \left. - 100 \rho \right] \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] \rho l^8 - 300 \left[\sin^3 \left[\frac{\pi x}{l} \right] - 2 \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] \cos^2 \left[\frac{\pi x}{l} \right] - \frac{40 \sin^2 \left[\frac{\pi x}{l} \right]}{3} \right. \\ \left. - \frac{200 \rho \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right]}{3} + \frac{40 \cos^2 \left[\frac{\pi x}{l} \right]}{3} \right] \pi^2 l^6 + 1050 \eta \cos \left[\frac{\pi x}{l} \right] \left[\sin^2 \left[\frac{\pi x}{l} \right] - \frac{2 \cos^2 \left[\frac{\pi x}{l} \right]}{7} \right. \\ \left. - \frac{160 \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right]}{21} - \frac{200 \rho}{21} \right] \pi^3 l^5 + 1050 \left[\sin^3 \left[\frac{\pi x}{l} \right] - \frac{20 \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] \cos^2 \left[\frac{\pi x}{l} \right]}{7} \right. \\ \left. - \frac{160 \sin^2 \left[\frac{\pi x}{l} \right]}{21} - \frac{200 \rho \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right]}{21} + \frac{160 \cos^2 \left[\frac{\pi x}{l} \right]}{21} + \frac{400 \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right]}{21} \right] \pi^4 l^4 - 2 \cdot 10^4 \\ \times \cos \left[\frac{\pi x}{l} \right] l^3 \eta \pi^5 - 5 \cdot 10^3 \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] l^2 (\eta^2 + 4) \pi^6 + 10^4 l \eta \pi^7 \cos \left[\frac{\pi x}{l} \right] + 5 \cdot 10^3 \\ \left. \left. \times \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] \pi^8 \right] \right] \quad (4.36)$$

Son olarak, $w(x, t)$ analitik çözümü,

$$w(x, t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \Theta_M(x, t) \quad (4.37)$$

kesikli serisiyle yaklaşık olarak elde edilir.

Burada,

$$\theta_M(x, t) = \sum_{m=1}^M w_m(x, t) \quad (4.38)$$

'dir. Böylece, (4.25) denkleminin UKq-SHADY çözümü

$$w(x, t) = w_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} w_m(x, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m \quad (4.39)$$

olarak bulunur.

4.4 Denklem (4.25) için USDAY çözümü

(4.25) numaralı denkleme uyumlu kesirli Shehu dönüşümü uygulandığında ve başlangıç koşulu kullanıldığında,

$$\begin{aligned} \frac{s}{u} {}_c\mathcal{S}_\alpha[w(x, t)] - w(x, 0) + {}_c\mathcal{S}_\alpha \left[\frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - \eta \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \right. \\ \left. - \rho w(x, t) - 2w^2 \left(x, \frac{t}{2}\right) + w^3 \left(x, \frac{t}{2}\right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.40)$$

eşitliği elde edilir.

(4.40) düzenlenirse,

$$\begin{aligned} {}_c\mathcal{S}_\alpha[w(x, t)] = \frac{u}{s} w(x, 0) - \frac{u}{s} {}_c\mathcal{S}_\alpha \left[\frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - \eta \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \right. \\ \left. - \rho w(x, t) - 2w^2 \left(x, \frac{t}{2}\right) + w^3 \left(x, \frac{t}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (4.41)$$

olarak bulunur.

(4.41) ya ters uyumlu kesirli Shehu dönüşümü uygulandığında,

$$\begin{aligned} w(x, t) = \frac{1}{10} \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] - \left({}_c\mathcal{S}_\alpha \right)^{-1} \left\{ \frac{u}{s} {}_c\mathcal{S}_\alpha \left[\frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - \eta \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \right. \right. \\ \left. \left. - \rho w(x, t) - 2w^2 \left(x, \frac{t}{2}\right) + w^3 \left(x, \frac{t}{2}\right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.42)$$

olur.

Bilinmeyen $w(x, t)$ fonksiyonunu sonsuz seri formunda aşağıdaki şekilde ifade edildiğini varsayalım:

$$w(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x, t) \quad (4.43)$$

(4.43), (4.42) de yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x, t) = & \frac{1}{10} \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] - (cS_{\alpha})^{-1} \left[\frac{u}{s} cS_{\alpha} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^4 w_k(x, t)}{\partial x^4} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^2 w_k(x, t)}{\partial x^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + (1 - \mu) \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x, t) + \sum_{k=0}^{\infty} A_k \right] \right], k \geq 0 \end{aligned} \quad (4.44)$$

olarak elde edilir. Burada A_k , Adomian polinomlarıdır.

Denklem (4.41) in her iki tarafı karşılaştırıldığında aşağıdaki iterasyonlar elde edilir:

$$w_0(x, t) = \frac{1}{10} \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] \quad (4.45)$$

'dir. $k = 1, k = 2$ değerleri eşitlik (4.44) da sırasıyla yerine konulduğunda sırasıyla

$$\begin{aligned} w_1(x, t) = & -\frac{t^{\alpha}}{10^3 \alpha l^4} \left[l^4 \sin^3 \left[\frac{\pi x}{l} \right] - 20 l^4 \sin^2 \left[\frac{\pi x}{l} \right] + 100(-\rho l^4 - 2l^2 \pi^2 + \pi^4) \right. \\ & \left. \times \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] + 100 \eta \pi^3 \cos \left[\frac{\pi x}{l} \right] \right] \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} w_2(x, t) = & \frac{1}{10^7 \alpha^2 l^8} \left[\left[\frac{1}{3} \left[\sin^2 \left[\frac{\pi x}{l} \right] - 20 \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] - 100 \rho \right] \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] l^4 - 200 \pi^2 l^2 \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] \right. \right. \\ & \left. \left. + 100 l \eta \pi^3 \cos \left[\frac{\pi x}{l} \right] + 100 \pi^4 \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] \right]^2 h \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] 4^{-\alpha} \alpha t^{3\alpha} \right. \\ & \left. + 100 t^{2\alpha} \left[\left[\sin^2 \left[\frac{\pi x}{l} \right] - 20 \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] - 100 \rho \right] \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] l^4 - 200 \pi^2 l^2 \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] \right. \right. \\ & \left. \left. + 100 l \eta \pi^3 \cos \left[\frac{\pi x}{l} \right] + 100 \pi^4 \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] \right] \left[\sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] - 10 \right] \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] l^4 2^{-\alpha} - 50 \right. \\ & \left. \times \left[\sin^2 \left[\frac{\pi x}{l} \right] - 20 \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] - 100 \rho \right] \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] \rho l^8 - 300 \left[\sin^3 \left[\frac{\pi x}{l} \right] \right. \right. \\ & \left. \left. - 2 \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] \cos^2 \left[\frac{\pi x}{l} \right] - \frac{40 \sin^2 \left[\frac{\pi x}{l} \right]}{3} - \frac{200 \rho \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right]}{3} + \frac{40 \cos^2 \left[\frac{\pi x}{l} \right]}{3} \right] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \pi^2 l^6 + 1050\eta \cos \left[\frac{\pi x}{l} \right] \left[\sin^2 \left[\frac{\pi x}{l} \right] - \frac{2 \cos^2 \left[\frac{\pi x}{l} \right]}{7} - \frac{160 \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right]}{21} - \frac{200}{21} \right] \pi^3 l^5 \\
& + 1050 \left[\sin^3 \left[\frac{\pi x}{l} \right] - \frac{20 \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] \cos^2 \left[\frac{\pi x}{l} \right]}{7} - \frac{160 \sin^2 \left[\frac{\pi x}{l} \right]}{21} - \frac{200 \rho s \left[\frac{\pi x}{l} \right]}{21} \right. \\
& \left. + \frac{160 \cos^2 \left[\frac{\pi x}{l} \right]}{21} + \frac{400 \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right]}{21} \right] \pi^4 l^4 - 2 \cdot 10^4 \cos \left[\frac{\pi x}{l} \right] l^3 \eta \pi^5 - 5 \cdot 10^3 \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] l^2 \\
& \left. \times (\eta^2 + 4) \pi^6 + 10^4 l \eta \pi^7 \cos \left[\frac{\pi x}{l} \right] + 5 \cdot 10^3 \sin \left[\frac{\pi x}{l} \right] \pi^8 \right] \quad (4.47)
\end{aligned}$$

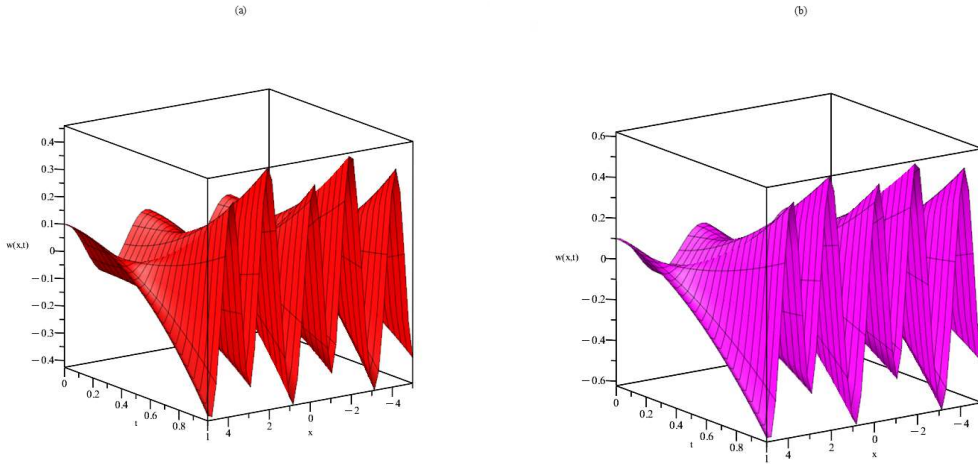
iterasyonları bulunur.

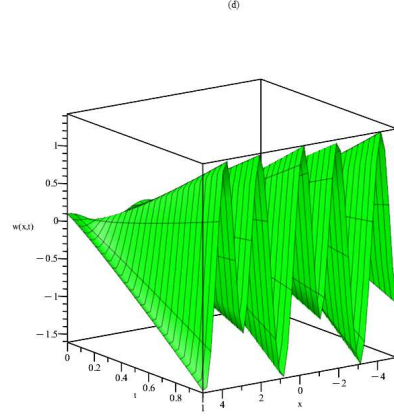
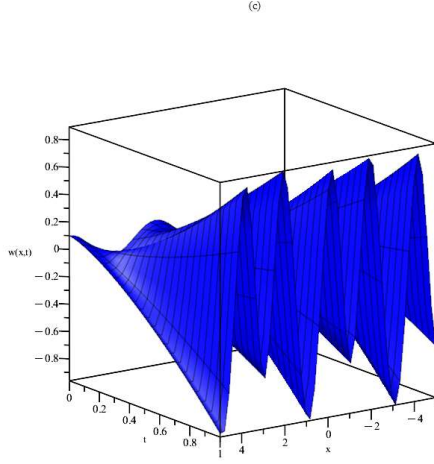
Böylece, (4.25) denkleminin USDAY çözümü,

$$w(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x, t) = w_0(x, t) + w_1(x, t) + w_2(x, t) + \dots \quad (4.48)$$

olarak bulunur.

Şekil 4.4, farklı α değerleri için UKq-SHADY grafiklerini göstermektedir.





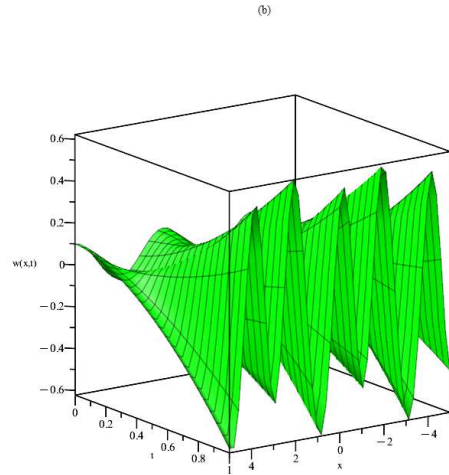
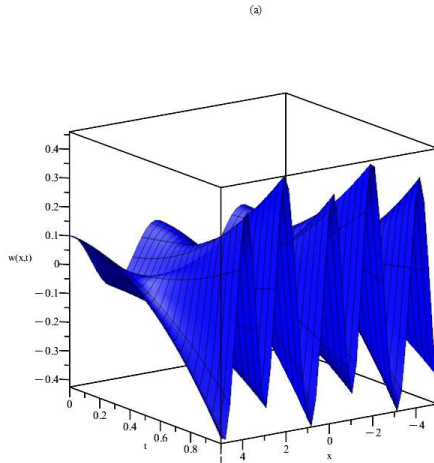
Şekil 4.4 $l = 2, \eta = 0.5, \rho = 1, h = -1, n = 1$ değerleri için,

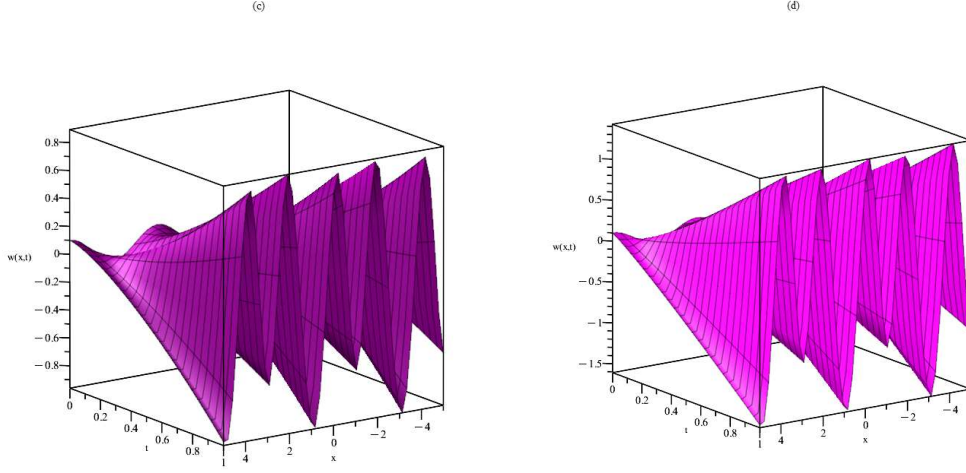
(a) $\alpha=1$ için UKq-SHADY çözümü (b) $\alpha=0.85$ için UKq-SHADY çözümü

(c) $\alpha=0.70$ için UKq-SHADY çözümü (d) $\alpha=0.55$ için UKq-SHADY çözümü

Şekil 4.4 de UKq-SHADYçözümlerinin 3-boyutlu davranışlarının $a = 1$ den $a = 0.55$ e gittikçe arttığı gözlemlenmektedir.

Farklı α değerleri için USDAY çözümüne ait 3-boyutlu grafikler Şekil 4.5 te gösterilmektedir.





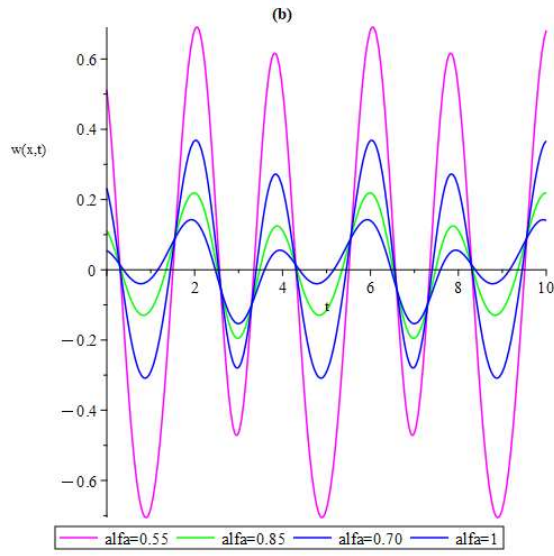
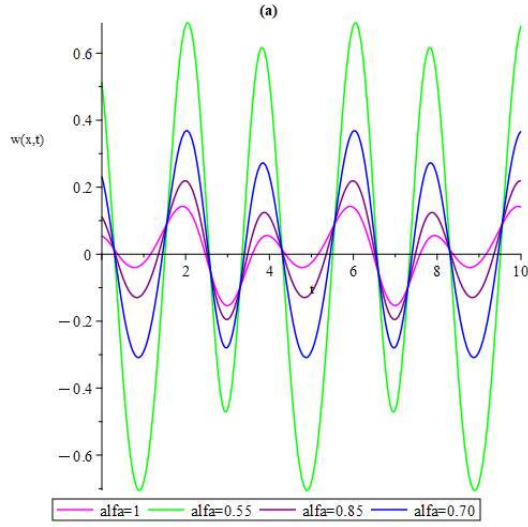
Şekil 4.5. $l = 2, \eta = 0.5, \rho = 1$ değerleri için,

(a) $\alpha=1$ için USDAY çözümü **(b)** $\alpha=0.85$ için USDAY çözümü

(c) $\alpha=0.70$ için USDAY çözümü **(d)** $\alpha=0.55$ için USDAY çözümü.

Şekil 4.5 te UKq-SHADYçözümlerinin 3-boyutlu davranışlarının $a = 1$ den $a = 0.55$ e gittikçe arttığı gözlemlenmektedir.

Farklı α değerleri için elde edilen UKq-SHADY ve USDAY çözümlerine ait 2-boyutlu grafikler Şekil 4.6 da gösterilmektedir.



Şekil 4.6. Eşitlik (4.25) için $l = 2, \eta = 0.5, \rho = 1, h = -1, n = 1, t = 0.5$ olmak üzere farklı α değerleri için,

(a) UKq-SHADY çözümünün 2- boyutlu grafiği **(b)** USDAY çözümünün 2- boyutlu grafiği

Tablo 4.3 $l = 2, \eta = 0.5, \rho = 1, h = -1, n = 1$ olmak üzere, farklı α değerleri için x değişkeni sabit iken artan t değerlerine göre eşitlik (4.25) için UKq-SHADY çözümünün sayısal değerleri.

x	t	$\alpha = 0.55$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.85$	$\alpha = 1$
0.1	0.1	0.0479167212	0.0134397217	0.0082103602	0.0091071897
	0.2	0.1184118653	0.0377317511	0.0146966779	0.0088129643
	0.3	0.1987703242	0.0740832839	0.0305451583	0.0147526140
	0.4	0.2850994453	0.1192532530	0.0543752481	0.0269258480
	0.5	0.3757011301	0.1715866489	0.0853932244	0.0453323754
0.2	0.1	0.0319652654	0.0194462607	0.0205400681	0.0234262289
	0.2	0.0656880229	0.0276818701	0.0197049590	0.0197111721
	0.3	0.1071041662	0.0440681451	0.0248452243	0.0197408435
	0.4	0.1530407631	0.0662621582	0.0349913038	0.0235147051
	0.5	0.2021481622	0.0931035045	0.0496036438	0.0310322186
0.3	0.1	0.0129644454	0.0243220423	0.0321696160	0.0371140839
	0.2	0.0063592039	0.0151141498	0.0234993563	0.0298249042
	0.3	0.0049175926	0.0096483644	0.0170121357	0.0235095287
	0.4	0.0063223761	0.0066073317	0.0122051992	0.0181672623
	0.5	0.0096332300	0.0053920007	0.0088261129	0.0137974099
0.4	0.1	-0.0063188815	0.0286470281	0.0430446875	0.0499145022
	0.2	-0.0531562580	0.0022095139	0.0267600165	0.0392442218
	0.3	-0.0975092849	-0.0250100048	0.0087944757	0.0267411738
	0.4	-0.1407727179	-0.0532637225	-0.0108723803	0.0124046207
	0.5	-0.1834503414	-0.0825710820	-0.0321978973	-0.0037661749
0.5	0.1	-0.0234484324	0.03290873435	0.0530925339	0.0615790783
	0.2	-0.1071537235	-0.0091180777	0.0300637974	0.0480234916
	0.3	-0.1910091218	-0.0562175906	0.0017210258	0.0300150892
	0.4	-0.2754848195	-0.1076176228	-0.0314952081	0.0075532024
	0.5	-0.3606521122	-0.1627839767	-0.0692619361	-0.0193628373

Tablo 4.3 te UKq-SHADY çözümlerinin konum sabitken artan zaman değerleri için $\alpha = 0.55$ ten $\alpha = 1$ e kadar olan sayısal sonuçları incelenmektedir.

Tablo 4.4 $l = 2, \eta = 0.5, \rho = 1$ olmak üzere, farklı α değerleri için x değişkeni sabit iken artan t değerlerine göre eşitlik (4.25) için USDAY çözümünün sayısal sonuçları.

x	t	$\alpha = 0.55$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.85$	$\alpha = 1$
0.1	0.1	0.0479167212	0.0134397217	0.00821036029	0.00910718970
	0.2	0.1184118653	0.0377317511	0.01469667795	0.00881296431
	0.3	0.1987703242	0.0740832839	0.03054515836	0.01475261408
	0.4	0.2850994453	0.1192532530	0.05437524819	0.02692584809
	0.5	0.3757011301	0.1715866489	0.08539322441	0.04533237540
0.2	0.1	0.0319652654	0.0194462607	0.02054006817	0.02342622893
	0.2	0.0656880229	0.0276818701	0.01970495903	0.01971117214
	0.3	0.1071041662	0.0440681451	0.02484522432	0.01974084358
	0.4	0.1530407631	0.0662621582	0.03499130385	0.02351470515
	0.5	0.2021481622	0.0931035045	0.04960364385	0.03103221869

0.3	0.1	0.0129644454	0.0243220423	0.03216961603	0.03711408392
	0.2	0.00635920398	0.01511414985	0.02349935633	0.02982490427
	0.3	0.00491759262	0.00964836449	0.01701213574	0.02350952874
	0.4	0.00632237613	0.00660733174	0.01220519921	0.01816726232
	0.5	0.00963323006	0.00539200072	0.00882611290	0.01379740996
0.4	0.1	-0.00631888155	0.02864702818	0.04304468759	0.04991450225
	0.2	-0.05315625802	0.00220951394	0.02676001658	0.03924422185
	0.3	-0.09750928498	-0.02501000486	0.00879447575	0.02674117388
	0.4	-0.1407727179	-0.05326372255	-0.01087238038	0.01240462078
	0.5	-0.1834503414	-0.08257108202	-0.03219789739	-0.0037661749
0.5	0.1	-0.0234484324	0.03290873435	0.05309253395	0.06157907839
	0.2	-0.1071537235	-0.00911807775	0.03006379744	0.04802349166
	0.3	-0.1910091218	-0.05621759064	0.00172102585	0.03001508923
	0.4	-0.2754848195	-0.1076176228	-0.03149520813	0.00755320244
	0.5	-0.3606521122	-0.1627839767	-0.06926193617	-0.0193628373

Tablo 4.4 de USDAY çözümlerinin konum sabitken artan zaman değerleri için $a = 0.55$ ten $a = 1$ e kadar olan sayısal sonuçları incelenmektedir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Denklem 4.1 ve 4.2 için OGUZKMSHD için, Şekil 4.1 ve şekil 4.4, $\alpha = 0.55, \alpha = 0.70, \alpha = 0.85$ ve $\alpha = 1$ için UKq-SHADY yöntemiyle elde edilen sıcaklık $w(x, t)$ nin 3-boyutlu grafiklerini göstermektedir. Şekil 4.2 ve 4.5 ise $\alpha = 0.55, \alpha = 0.70, \alpha = 0.85$ ve $\alpha = 1$ için USDAY yöntemiyle elde edilen olasılık yoğunluk fonksiyonu $w(x, t)$ nin 3-boyutlu grafiklerini göstermektedir. Şekil 4.3 ve 4.6 ise α nın farklı değerleri için UKq-SHADY ve USDAY çözümlerinin 2-boyutlu grafiklerini göstermektedir. Tablo 4.1 ve tablo 4.3, $\alpha = 0.55, \alpha = 0.70, \alpha = 0.85$ ve $\alpha = 1$ için UKq-SHADY yöntemiyle elde edilen sıcaklık $w(x, t)$ nin farklı değerlerini göstermektedir. Ayrıca, Tablo 4.2 ve tablo 4.4, $\alpha = 0.55, \alpha = 0.70, \alpha = 0.85$ ve $\alpha = 1$ için USDAY yöntemiyle elde edilen sıcaklık $w(x, t)$ nin grafiklerini göstermektedir.

Bu sonuçlar ve grafikler, OGUZKMSHD' nin farklı α değerleri için davranışlarını göstermektedir. UKq-SHADY ve USDAY yöntemleriyle elde edilen çözümlerin benzerlikleri ve farklılıkları incelenebilir. Ayrıca, α değerinin OGUZKMSHD probleminin çözümüne etkisini değerlendirebilir ve sonuçları tartışabiliriz.

Bu tezdeki 2 ve 3 boyutlu grafikler MAPLE yazılımı kullanılarak elde edilmiştir. Şekiller 4.1, 4.2, 4.4, 4.5 te, MAPLE yazılımı tarafından oluşturulan yüzey grafiklerinin genel yapısının değişimi gözlemlenmektedir. Tablolar 4.1, 4.2, 4.3 ve 4.4 ten de görüldüğü üzere her iki yöntemden de benzer sonuçlar elde edilmektedir. Şekiller 4.3, 4.6 da MAPLE yazılımı tarafından oluşturulan 2 boyutlu grafiklerden $\alpha = 1$ e yaklaştıkça çözümlerin analitik çözüme yakınsadığı gözlemlenmektedir. Tablolar 4.1, 4.2, 4.3 ve 4.4 ten de görüldüğü üzere her iki yöntemden de benzer sonuçlar elde edilmiştir.

Böylece OGUZKMSHD' nin nümerik çözümleri için oransal gecikmeli doğrusal olmayan zaman-kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için geliştirilen bu yöntemlerin hem avantajlı hem de etkili olduğu sonucuna varılmaktadır. Bu çalışma literatürde var olan diğer oransal gecikmeli doğrusal olmayan zaman-kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin yeni nümerik çözümleri için ve ayrıca bu konuyla ilgili tez çalışmalarında faydalı olacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] Liouville, J. (1832). Mémoire sur quelques questions de géométrie et de mécanique, et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces questions. *Ecole polytechnique*, 13, 71-162.
- [2] Riemann, G. F. B. (1896). *Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation*. Leipzig, Germany: Gesammelte Mathematische Werke.
- [3] Caputo, M. (1969). *Elasticità e Dissipazione*. Bologna, Italy: Zanichelli.
- [4] Miller, K. S. ve Ross, B. (1993). *An Introduction to Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. New York, NY, USA: Wiley.
- [5] Podlubny, I. (1999). *Fractional Differential Equations*. New York, NY, USA: Academic Press.
- [6] Baleanu, D., Diethelm, K., Scalas, E., ve Trujillo, J.J. (2012). *Fractional Calculus: Models and Numerical Methods*. Boston, MA, USA: World Scientific.
- [7] Povstenko, Y. (2015). *Linear Fractional Diffusion-Wave Equation for Scientists and Engineers*. New York, NY, USA: Birkhäuser.
- [8] Baleanu, D., Wu, G. C., ve Zeng, S. D. (2017). Chaos analysis and asymptotic stability of generalized Caputo fractional differential equations. *Chaos, Solitons & Fractals*, 102, 99-105.
- [9] Sweilam, N. H., Hasan, M. M. A., ve Baleanu, D. (2017). New studies for general fractional financial models of awareness and trial advertising decisions. *Chaos, Solitons Fractals*, 104, 772-784.
- [10] Liu, D. Y., Gibaru, O., Perruquetti, W., ve Laleg-Kirati, T. M. (2015). Fractional order differentiation by integration and error analysis in noisy environment. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60, 2945-2960.
- [11] Esen, A., Sulaiman, T. A., Bulut, H., ve Baskonus, H. M. (2018). Optical solitons to the space-time fractional (1+1)-dimensional coupled nonlinear Schrödinger equation. *Optik*, 167, 150-156.
- [12] Veerasha, P., Prakasha, D. G., ve Baskonus, H. M. (2019). New numerical surfaces to the mathematical model of cancer chemotherapy effect in Caputo fractional derivatives. *Chaos*, 29, 013119.
- [13] Caponetto, R., Dongola, G., Fortuna, L., ve Gallo, A. (2010). New results on the synthesis of FO-PID controllers. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15, 997-1007.
- [14] Prakash, A., Veerasha, P., Prakasha, D. G., & Goyal, M. (2019). A homotopy technique for fractional order multi-dimensional telegraph equation via Laplace transform. *The European Physical Journal Plus*, 134, 1-18.

- [15] Veerasha, P., Prakasha, D. G., ve Baskonus, H. M. (2019). Novel simulations to the time-fractional Fisher's equation. *Mathematical Sciences*, 13(1), 33-42.
- [16] Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., ve Sababheh, M. (2014). A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264, 65-70.
- [17] Abdeljawad, T. (2015). On conformable fractional calculus. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 279, 57-66.
- [18] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., ve Trujillo, J. J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations*. Amsterdam, The Netherlands: Elsevier B.V.
- [19] Debnath, L. (2003). Recent applications of fractional calculus to science and engineering. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2003(54), 3413-3442.
- [20] Swift, J., & Hohenberg, P. C. (1977). Hydrodynamic fluctuations at the convective instability. *Physical Review A*, 15(1), 319.
- [21] Hohenberg, P. C., ve Swift, J. B. (1992). Effects of additive noise at the onset of Rayleigh-Bénard convection. *Physical Review A*, 46(8), 4773.
- [22] Ryabov, P. N., ve Kudryashov, N. A. (2017). Nonlinear waves described by the generalized Swift-Hohenberg equation. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 788, No. 1, p. 012032). IOP Publishing.
- [23] Cross, M. C., & Hohenberg, P. C. (1993). Pattern formation outside of equilibrium. *Reviews of Modern Physics*, 65(3), 851.
- [24] Hoyle, R. B. (2006). *Pattern Formation*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- [25] Pomeau, Y., Zaleski, S., ve Manneville, P. (1983). Dislocation motion in cellular structures. *Physical Review A*, 27(5), 2710.
- [26] Peletier, L. A., ve Rottschäfer, V. (2003). Large time behaviour of solutions of the Swift-Hohenberg equation. *Comptes Rendus Mathématique*, 336(3), 225-230.
- [27] Lega, J., Moloney, J. V., ve Newell, A. C. (1994). Swift-Hohenberg equation for lasers. *Physical Review Letters*, 73(22), 2978.
- [28] Vishal, K., Kumar, S., ve Das, S. (2012). Application of homotopy analysis method for fractional Swift-Hohenberg equation revisited. *Applied Mathematics and Modelling*, 36, 3630-3637.
- [29] Khan, N. A., Khan, N. U., Ayaz, M., ve Mahmood, A. (2011). Analytical methods for solving the time-fractional Swift-Hohenberg (S-H) equation. *Computers & Mathematics with Applications*, 61(8), 2182-2185.
- [30] Prakasha, D. G., Veerasha, P., ve Baskonus, H. M. (2019). Residual power series method for fractional Swift-Hohenberg equation. *Fractal and Fractional*, 3(1), 9.
- [31] Vishal, K., Das, S., Ong, S. H., ve Ghosh, P. (2013). On the solutions of fractional Swift-Hohenberg equation with dispersion *Applied Mathematics and Computation*, 219(11), 5792-5801.
- [32] Wu, J. (1996). *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations*. New York, NY, USA: Springer.

- [33] Keller, A. A. (2010). Contribution of the delay differential equations to the complex economic macrodynamics. *WSEAS Transactions on Systems*, 9(4), 358-371.
- [34] Alkan, A. (2022). Improving Homotopy Analysis Method with An Optimal Parameter for Time-Fractional Burgers Equation. *Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi Mühendislik ve Doğa Bilimleri Dergisi*, 4(2), 117-134.
- [35] Chen, X., ve Wang, L. (2010). The variational iteration method for solving a neutral functional-differential equation with proportional delays. *Computers and Mathematics with Applications*, 59(8), 2696-2702.
- [36] Singh, B. K., ve Kumar, P. (2017). Fractional variational iteration method for solving fractional partial differential equations with proportional delay. *International Journal of Differential Equations*, 5206380.
- [37] Gözütok, N. Y., ve Gözütok, U. (2017). Multivariable conformable fractional calculus. *arXiv preprint arXiv:1701.00616*.
- [38] Mittag-Leffler, G. M. (1903). Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences*, 137, 554-558.
- [39] Benattia, M. E., ve Belghaba, K. (2021). Shehu conformable fractional transform, theories and applications. *Cankaya University Journal of Science and Engineering*, 18(1), 24-32.
- [40] Liao, S. J. (2009). Notes on the homotopy analysis method: Some definitions and theorems *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 14, 983-997.
- [41] Koca, K. (2001). *Kısmi Türevli Denklemler*. Ankara: Gündüz Eğitim ve Yayıncılık.
- [42] Merdan, M. (2013). A numeric-analytic method for time-fractional Swift-Hohenberg (S-H) equation with modified Riemann-Liouville derivative. *Applied Mathematical Modelling*, 37(6), 4224-4231.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ahmet Semih EROL

Doğum Tarihi :

Yabancı Dil :

Eğitim Durumu :

Lisans :

Bölümü :

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl/Yıllar :

Yayınları (Diğer) : Ahmet Semih EROL, Halil ANAÇ,
Ali OLGUN, " Oransal Gecikmeli Uyumlu Zaman-Kesirli Swift-Hohenberg
Denkleminin Yeni Yöntemlerle Sayısal Çözümleri " Karamanoğlu Mehmetbey
Üniversitesi Mühendislik ve Doğa Bilimleri Dergisi, 5(1), 1-24, (2023)

Araştırma Alanları : Uygulamalı Matematik