

1. GİRİŞ

Yaklaşımlar teorisinde singüler integraller çekirdeği, negatif olmayan ve bazı monotonluk koşullarını sağlayan integrallerdir. Genellikle konvolüsyon tipli olan bu integraller, çekirdeğinin özelliğine göre integrallenebilen fonksiyonları daha iyi özellikleri olan sürekli, hatta türevlenebilir fonksiyonlar sınıfına dönüştürebilirler. Bu nedenle bu tip singüler integraller matematiğin harmonik analiz ve yaklaşım teorisi dallarında önemli bir uygulama alanına sahiptir.

Konvolüsyon tipli singüler integraller ise; f ve g integrallenebilen fonksiyonlar olmak üzere

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt \quad (1.1)$$

formülü ile tanımlanan $(f * g)$ fonksiyonuna denir. Eğer yukarıdaki işlemi

$$f \rightarrow f * g$$

şeklinde bir operatör olarak düşünürsek (1.1) ifadesinde belirttiğimiz g (yani sabit tuttuğumuz) fonksiyon da K ile gösterilirse, (1.1) ifadesi

$$(f * K)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)K(x-t)dt$$

şekline gelir. Bu durumda $\mathcal{L}(f; x) = (f * K)(x)$ olmak üzere

$$\mathcal{L}: f \rightarrow \mathcal{L}(f; x)$$

operatörünü elde ederiz.

K çekirdeği bir α parametresine bağlı olduğunda ise $\mathcal{L}_\alpha(f; x)$ operatör ailesi

$$\mathcal{L}_\alpha(f; x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)K_\alpha(x-t)dt$$

ile gösterilir ve $\mathcal{L}_\alpha$ operatörüne konvolüsyon tipli operatör, K_α fonksiyonuna ise operatörün çekirdeği denir.

1.1. İntegral Operatör Ailelerinin Yaklaşım Problemi

D tüm reel eksen veya onun bir alt kümesi ($D \subset \mathbb{R}$) olsun. X ile bu D kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların normlu lineer uzayını gösterelim. Y de bu uzayın bir başka alt uzayı olsun ($Y \subset X$).

Her bir $f \in X$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(x) - \varphi_n(x)\|_X = 0$$

özellikli sağlayacak şekilde $\varphi_n \in Y$ bulunabiliyorsa Y cümlesine X cümlesinin yoğun alt uzayı denir. Yaklaşım probleminde φ_n nin yapısını belirlemek bu teoremin esas amaçlarından biridir.

Yaklaşım teorisinin esas problemlerinden ikincisi ise yaklaşım hızının bulunması problemidir:

$$\|f(x) - \varphi_n(x)\|_X = \alpha_n \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$$

ise bu $\varphi_n(x)$ 'in $f(x)$ 'e yaklaşım hızını belirtir. Bu hızı bulmak için α_n 'nin sıfıra giden bir başka dizi ile karşılaştırılması yeterlidir. Yani; $0 \leq \alpha_n \leq \beta_n$ ise ve β_n de sıfıra gidiyorsa ($\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$) yukarıdaki eşitsizlik α_n 'nin β_n 'den daha hızlı sıfıra gittiğini gösterir. Fonksiyon uzayında β_n 'yi süreklilik modülü ile de ifade edebiliriz. Çünkü f 'nin süreklilik modülü olan $\omega_p(f; \delta)$, sıfıra yakınsayan bir fonksiyondur.

X , D kümesinde tanımlı Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyon uzayı olsun. Bu uzaydaki operatörü $x \in D$ için;

$$\int_D f(t)K_1(x-t)dt$$

biçiminde ifade edersek bu operatörün yaklaşım özellikleri $K_1(x-t)$ ($D \times D$ 'de tanımlı) fonksiyonunun özelliğine bağlıdır. K çekirdeği integrallenebilir (veya türevlenebilir) olduğunda

$$\int_D f(t)K_1(x-t)dt$$

operatörünü

$$g(x) = \int_D f(t)K_1(x-t)dt$$

şeklinde düşünebiliriz.

Eğer yukarıdaki integralin düzgün yakınsaklığı gösterilebilirse K_1 türevlenebilir olduğunda g fonksiyonu da türevlenebilir olur.

$$g : X \rightarrow Y$$

$$f \rightarrow g(x) = \int_D f(x).K(x,y)dy = \mathcal{L}(f;x)$$

yani integral operatörleri, X uzayında olan f fonksiyonunun daha iyi özellikleri olan g fonksiyonuna dönüştürülebilir.

Teorem 1.1.1. f , $[a,b]$ kapalı aralığında integrallenebilen fonksiyon olsun. Bu durumda $|f|$ integrallenebilirdir ve

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 1.1.2. $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ olmak üzere $[a, b]$ aralığında ölçülebilir ve $p \geq 1$ için

$$\int_a^b |f(x)|^p dx < \infty$$

Koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayına $L_p(a, b)$ uzayı denir. Bu uzaylarda norm, $1 \leq p < \infty$ olduğunda

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

ve $p = \infty$ iken

$$\|f\|_p = \operatorname{ess\,sup}_x |f(x)|$$

şeklinde tanımlanır.

1.2. Süreklilik Modülü

Tanım 1.2.1. $f \in L_1$ olmak üzere $\delta > 0$ sayısı için

$$\omega_{L_1}(f; \delta) = \sup_{|t| \leq \delta} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)| dx$$

fonksiyonuna f 'nin L_1 - süreklilik modülü denir.

Tanım 1.2.2. $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $f \in L_p(a, b)$ ise her $\delta > 0$ sayısı için

$$\omega_{L_p}(f; \delta) = \sup_{|t| \leq \delta} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

fonksiyonuna f in L_p - süreklilik modülü denir.

L_1 ve L_p süreklilik modüllerinin önemli özellikleri şunlardır:

$$1. \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_{L_1}(f; \delta) = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_{L_p}(f; \delta) = 0$$

2. m doğal sayı olmak üzere

$$\omega_{L_1}(f; m\delta) \leq m\omega_{L_1}(f; \delta) \quad \text{ve} \quad \omega_{L_p}(f; m\delta) \leq m\omega_{L_p}(f; \delta)$$

3. Keyfi bir pozitif λ reel sayısı için

$$\omega_{L_1}(f; \lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega_{L_1}(f; \delta) \quad \text{ve} \quad \omega_{L_p}(f; \lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega_{L_p}(f; \delta)$$

dir. Aynı zamanda L_1 ve L_p süreklilik modülleri negatif olmayan monoton artan fonksiyonlardır.

1.3. Kaynak Özetleri

G.Anastassiou, C. Cottin ve H. Gonska, [2] makalesinde, yaklaşım fonksiyonu olan f 'nin süreklilik modüllerini incelemişlerdir. G.Anastassiou ve H.Gonska, [3] makalesinde tek değişkenli ötelemeyi koruyan operatörler için süreklilik modülünün özelliğini koruduğunu göstermişlerdir. G. Anastassiou ve G. Gal, [4] kitabında kompakt ve R^n 'de daha genel lineer integral operatörleri ve yukarıdaki operatöre benzer yeni genel integral operatörleri incelenmiştir.

1.3. Çalışmanın Amacı

Bu tezde, genelleştirilmiş singüler integrallerin yaklaşım fonksiyonunun süreklilik modülü yardımı ile düzgün yakınsaklık problemi incelenecektir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, lineer pozitif operatörleri kapsayan daha genel integral operatörler ve süreklilik modülü tanımlanacak ve bu genelleştirilmiş integral operatör ile süreklilik modülü arasındaki ilişkiler incelenecektir. Ayrıca operatörün özel durumlarda verilen sonuçları sağladığı da gösterilecektir.

2.1. Ötelemeyi Koruyan İntegral Operatörleri

$\mathcal{L}_k$ integral operatörleri, R üzerinde tanımlı ve konvolüsyon tipli lineer pozitif operatörler ve temel integral operatörlerin sonlu lineer kombinasyonu yardımı ile oluşturulsun. Biz bu tezde tanımlanacak genel integral tipli lineer pozitif operatörlerin birim operatöre yakınsadığını, süreklilik modülünü koruduğunu ve elde edilecek eşitsizliklerin kesin olduğunu göstereceğiz.

$X := C_U(R)$, R 'de düzgün sürekli reel değerli fonksiyonların sınıfı olsun. $C(R)$, R 'de sürekli fonksiyonların sınıfı olsun. $f \in X$ için $\omega_1(f; \delta) < +\infty$ olacak şekilde $\delta > 0$ vardır.

$\{l_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ pozitif lineer operatörler dizisi $x \in R$, $f \in X$ için

$$l_k(f; x) = l_0(f(2^{-k} \cdot); x)$$

veya

$$l_k(f; x) = l_0(f(2^{-k} \cdot); x) \quad (2.1.1)$$

özelliğiyle $C(R)$ 'deki fonksiyonları $X := C_U(R)$ 'deki fonksiyonlara dönüştürdüğünü kabul edelim. Burada f fonksiyonuna ait t bağımsız değişkeninin diğer değişkenlerle karışmaması için nokta ile göstereceğiz. Sabit bir $a > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{Z}$ ve $f \in X$ için,

$$\sup_{\substack{u, y \in R \\ |u-y| \leq a}} |l_0(f; u) - f(y)| \leq \omega_1\left(f; \frac{ma+n}{2^r}\right) \quad (2.1.2)$$

olsun.

φ , $[-a, a]$ aralığında pozitif reel değerli Lebesgue ölçülebilir ve $\forall x \in R$ için

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-u) du = 1 \quad (2.1.3)$$

özelliğini sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) du = 1 \quad (2.1.4)$$

olduğu kolayca görülebilir.

Örnekler:

i) $\varphi(x) := \mathbf{X}_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}(x)$, $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ için karakteristik fonksiyondur.

ii) $\varphi(x) := \begin{cases} 1-x & , & 0 \leq x \leq 1 \\ 1+x & , & -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & , & d.y. \end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) du = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) du = \int_{-\infty}^{-1} \varphi(u) du + \int_{-1}^0 \varphi(u) du + \int_0^1 \varphi(u) du + \int_1^{\infty} \varphi(u) du$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^0 (1+u)du + \int_0^1 (1-u)du \\
&= \left(u + \frac{u^2}{2}\right) \Big|_{-1}^0 + \left(u - \frac{u^2}{2}\right) \Big|_0^1 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

$\{\mathcal{L}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ X üzerinde pozitif lineer operatörler dizisi olsun.

$$\mathcal{L}_k(f; x) := \int_{-\infty}^{\infty} l_k(f; u) \varphi(2^k x - u) du \quad (2.1.5)$$

ifadesini göz önüne alalım. Özel olarak , $k = 0$ için

$$\mathcal{L}_0(f; x) := \int_{-\infty}^{\infty} l_0(f; u) \varphi(x - u) du \quad (2.1.6)$$

yazabiliriz. $\forall x \in R$ için

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_k(f; x) &= \int_{-\infty}^{\infty} l_k(f; u) \varphi(2^k x - u) du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} l_0(f(2^{-k} \cdot); u) \varphi(2^k x - u) du \\
&= \mathcal{L}_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k x), \\
\mathcal{L}_k(f; x) &= \mathcal{L}_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k x) \quad (2.1.7)
\end{aligned}$$

olduğu görülebilir.

Tanım 2.1.1. $\alpha \in R$, $f_\alpha(\cdot) := f(\cdot + \alpha)$ olsun. Eğer $\phi(f_\alpha) = (\phi f)_\alpha$ ise ϕ 'ye ötelemeyi koruyan operatördür denir.

Teorem 2.1.1. Her $k \in \mathbb{Z}$, $u \in R$, $\alpha \in R$ sabit ve her $f \in X$ için

$$l_0(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k u) = l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k (u + \alpha)) \quad (2.1.8)$$

olsun. Buna göre $\mathcal{L}_k$ ötelemeyi koruyan operatördür.

İspat.

$$(\mathcal{L}_0 f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (l_0 f)(u) \varphi(x-u) du = \int_{-\infty}^{\infty} (l_0 f)(x-u) \varphi(u) du$$

olur.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k (f(\cdot + \alpha); x) &= \mathcal{L}_k (f_\alpha; x) = \mathcal{L}_0 (f_\alpha(2^{-k} \cdot); 2^k x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} l_0 (f(2^{-k} \cdot + \alpha); (2^k x - u)) \varphi(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} l_0 (f(2^{-k} \cdot + \alpha); (2^k (x - 2^{-k} u))) \varphi(u) du. \end{aligned}$$

(2.1.8) ifadesini uygularsak

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k (f(\cdot + \alpha); x) &= \int_{-\infty}^{\infty} l_0 (f(2^{-k} \cdot); (2^k (x - 2^{-k} u + \alpha))) \varphi(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} l_0 (f(2^{-k} \cdot); (2^k (x + \alpha) - u))) \varphi(u) du \\ &= \mathcal{L}_0 (f(2^{-k} \cdot); 2^k (x + \alpha)) = \mathcal{L}_k (f; x + \alpha). \end{aligned}$$

Yani,

$$\mathcal{L}_k (f_\alpha) = (\mathcal{L}_k (f))_\alpha$$

elde edilir.

Simdi $\mathcal{L}_k$ operatörünün süreklilik modülünü koruduğunu gösterelim.

Teorem 2.1.2. Herhangi bir $f \in X$, her $u \in R$ ve herhangi $x, y \in R$ için

$$|l_0(f; x-u) - l_0(f; y-u)| \leq \omega_1(f; |x-y|) \quad (2.1.9)$$

olsun. Buna göre $\delta > 0$ için

$$\omega_1(\mathcal{L}_k f; \delta) \leq \omega_1(f; \delta) \quad (2.1.10)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. (2.1.4) ve (2.1.9) ifadelerini kullanırsak

$$|\mathcal{L}_0(f; x) - \mathcal{L}_0(f; y)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} l_0(f; u) \varphi(x - u) du - \int_{-\infty}^{\infty} l_0(f; y) \varphi(y - u) du \right|$$

elde edilir. Burada $u = x - u$ ve $u = y - u$ dönüşümü yaparsak

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_0(f; x) - \mathcal{L}_0(f; y)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} l_0(f; x - u) \varphi(u) du - \int_{-\infty}^{\infty} l_0(f; y - u) \varphi(u) du \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) |l_0(f; x - u) - l_0(f; y - u)| du \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) du \right) \sup_{u \in R} |l_0(f; x - u) - l_0(f; y - u)| \\ &\leq \omega_1(f; |x - y|) \end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz. (2.1.7) eşitliğinden

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_k(f; x) - \mathcal{L}_k(f; y)| &= |\mathcal{L}_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k x) - \mathcal{L}_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k y)| \\ &\leq \omega_1(f(2^{-k} \cdot); 2^k |x - y|) = \omega_1(f; |x - y|) \end{aligned}$$

elde ederiz. Her iki tarafın $\delta > 0$ için supremumunu alınırsa

$$\sup_{|x-y| \leq \delta} |\mathcal{L}_k(f; x) - \mathcal{L}_k(f; y)| \leq \sup_{|x-y| \leq \delta} \omega_1(f; |x - y|)$$

yani $\omega_1(\mathcal{L}_k f; \delta) \leq \omega_1(f; \delta)$ olur.

Teorem 2.1.3. $f \in X$ için (2.1.2) ifadesinin doğru olduğunu kabul edelim. Bu durumda $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $k, r \in \mathbb{Z}$ için

$$|\mathcal{L}_k(f; x) - f(x)| \leq \omega_1\left(f; \frac{ma + n}{2^{k+r}}\right) \quad (2.1.11)$$

eşitsizliği vardır.

İspat. $\varphi \subseteq [-a, a]$ olduğundan, (2.1.3) ve (2.1.7) ifadelerinden görebiliriz ki

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_k(f; x) - f(x)| &= |\mathcal{L}_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k x) - f(2^{-k}(2^k x))| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} [l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x))] \varphi(2^k x - u) du \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_{2^k x-a}^{2^k x+a} [l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x))] \varphi(2^k x - u) du \right| \\
&\leq \sup_{2^k x-a \leq u \leq 2^k x+a} |l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x))| \left(\int_{2^k x-a}^{2^k x+a} \varphi(2^k x - u) \right)
\end{aligned}$$

yani

$$|\mathcal{L}_k(f; x) - f(x)| \leq \sup_{2^k x-a \leq u \leq 2^k x+a} |l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x))|. \quad (2.1.12)$$

$g := f(2^{-k} \cdot) \in X$ alalım. (2.1.12) ifadesi sağdan uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\sup_{|u-2^k x| \leq a} |l_0(g; u) - g(2^k x)| &\leq \omega_1 \left(g; \frac{ma+n}{2^r} \right) \\
&= \sup_{|h| < \frac{ma+n}{2^r}} |g(x+h) - g(x)| \\
&= \sup_{|2^k h| < \frac{ma+n}{2^r}} |f(2^{-k} \cdot + h) - f(2^{-k} \cdot)| \\
&= \sup_{|h| < \frac{ma+n}{2^{r+k}}} |f(2^{-k} \cdot + h) - f(2^{-k} \cdot)| \\
&= \omega_1 \left(f; \frac{ma+n}{2^{k+r}} \right).
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$|\mathcal{L}_k(f; x) - f(x)| \leq \omega_1 \left(f; \frac{ma+n}{2^{k+r}} \right)$$

olduğunu görebiliriz.

Not: $k \rightarrow \infty$ için $\mathcal{L}_k$ operatörü, birim operatör olan I operatörüne yaklaşır.

Sonuç 2.1.1. (i) $\frac{\partial(l_0 f)(x-u)}{\partial x}$ kısmi türevi her $f \in X^{(1)}$ için mevcut, $x \in R$ ve $u \in [-a, a]$ noktalarında sürekli olsun. $\varphi(u)$ fonksiyonu u 'da sürekli olduğunda Leibniz kuralını (2.1.6)'ya uygularsak

$$\frac{d}{dx}(\mathcal{L}_0 f)(x) = \int_{-a}^a (l_0 f)_x(x-u) \varphi(u) du \quad (2.1.13)$$

elde edilir. Burada $(l_0 f)_x$, x 'e göre türevi göstermektedir. $\forall f \in X^{(1)}$ için $(\mathcal{L}_0 f)(x)$ türevlenebilen operatördür. Buradan da $k \in Z$ ve her $f \in X^{(1)}$ için $(\mathcal{L}_k f)(x) = (\mathcal{L}_0 f(2^{-k} \cdot))(2^k x)$ türevlenebilen operatör olduğunu söyleyebiliriz.

(ii) $i \geq 1$ tamsayı olsun. $\frac{\partial^{i-1}(l_0 f)(x-u)}{\partial x^{i-1}}$ ve $\frac{\partial^i(l_0 f)(x-u)}{\partial x^i}$ kısmi türevleri her $f \in X^{(i)}$ için mevcut, $x \in R$ ve $u \in [-a, a]$ noktalarında sürekli olsun. $\varphi(u)$ fonksiyonu da u 'da sürekli ise

$$\frac{d^i}{dx^i}(\mathcal{L}_0 f)(x) = \int_{-a}^a \frac{\partial^i(l_0 f)}{\partial x^i}(x-u) \varphi(u) du \quad (2.1.14)$$

yani $\mathcal{L}_k$ i -defa türevlenebilen bir operatördür.

(iii) $l_0, X^{(i)}$ (X i .kez türevlenebilen sürekli fonksiyon uzayı) uzayını $C^{(i)}(R)$ uzayına dönüştüren bir operatör olsun. Kolayca görülebilir ki eğer $i \geq 1$ bir tamsayı olmak üzere $f \in X^{(i)}$ ise $\frac{\partial^{i-1}(l_0 f)(x-u)}{\partial x^{i-1}}$ ve $\frac{\partial^i(l_0 f)(x-u)}{\partial x^i}$ kısmi türevleri, x ve u noktalarında süreklidir.

Lemma 2.1.1. Eğer $F(x, u)$, $R \times [-a, a]$ da sürekli ise $\int_{-a}^a F(x, u) du$, x 'de süreklidir.

Sonuç 2.1.2. (i) Lemma 2.1.1'den, eğer l_0 , $X^{(i)}$ uzayından $C^{(i)}(R)$ uzayına dönüşüm yapan operatör ise φ fonksiyonu, $[-a, a]$ aralığında sürekli olmak üzere $\mathcal{L}_k$ 'ninde $X^{(i)}$ uzayından $C^{(i)}(R)$ uzayına dönüşüm yapan bir operatör olduğunu söyleyebiliriz. ($i \geq 0$ bir tamsayıdır.)

(ii) φ pozitif ve $[-a, a]$ aralığında sürekli olsun. Eğer $i \geq 1$ tamsayı olmak üzere

$$\frac{\partial^i}{\partial x^i} (l_0 f)(x - u) \geq 0$$

ise

$$\frac{d^i}{dx^i} (\mathcal{L}_0 f)(x) \geq 0 \quad (2.1.15)$$

ifadesi vardır.

(iii) φ , $[-a, a]$ aralığında sürekli olsun. Eğer $f^{(i)} \geq 0$ ve bazı $i \geq 1$ için

$$\frac{d^i}{dx^i} (\mathcal{L}_0 f; x) \geq 0 \text{ ise } k \in \mathbb{Z} \text{ için}$$

$$\frac{d^i}{dx^i} \mathcal{L}_k(f, x) \geq 0 \quad (2.1.16)$$

olduğu açıktır.

Bu eşitsizlikten söyleyebiliriz ki eğer $l_0 f$ artan sürekli bir fonksiyon ve φ , $[-a, a]$ aralığında sürekli ise $\mathcal{L}_0 f$ artan ve sürekli fonksiyondur.

2.2. Örnekler

$$1. \quad (A_k f)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \tau_k^f(u) \varphi(2^k x - u) du \quad (2.2.17)$$

operatörünü göz önüne alalım. Burada

$$\tau_k^f(u) := 2^k \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(2^k t - u) dt \quad (2.2.18)$$

dir ve u noktasında süreklidir. Yani $u \in R$ için

$$l_k(f; u) = \tau_k^f(u). \quad (2.2.19)$$

$$2. \quad (B_k f)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{u}{2^k}\right) \varphi(2^k x - u) du \quad (2.2.20)$$

şeklinde tanımlı operatör için

$$l_k(f; u) = \beta_k(f, u) := f\left(\frac{u}{2^k}\right) \quad (2.2.21)$$

dir.

$$3. \quad (L_k f)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} c_k^f(u) \varphi(2^k x - u) du \quad (2.2.22)$$

şeklinde tanımlı operatör için

$$c_k^f(u) := 2^k \int_{2^{-k}u}^{2^{-k}(u+1)} f(t) dt \quad (2.2.23)$$

olsun. $u \in R$ için

$$l_k(f; u) = c_k^f(u) \quad (2.2.24)$$

dir.

$$4. \quad (\Gamma_k f)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_k^f(u) \varphi(2^k x - u) du \quad (2.2.25)$$

operatörü ve $n \in \mathbb{N}$, $w_{j^*} \geq 0$, $u \in R$ için

$$\gamma_k^f(u) := \sum_{j^*=0}^n w_{j^*} f\left(\frac{u}{2^k} + \frac{j^*}{2^k n}\right), \quad (2.2.26)$$

olur. $\sum_{j^*=0}^n w_{j^*} = 1$ olarak alınırsa

$$l_k(f; u) = \gamma_k^f(u) \quad (2.2.27)$$

şeklinde yazılır.

(2.2.1), $k \in \mathbb{Z}$ için A_k , B_k , L_k , Γ_k larda bulunan bütün l_k 'lar için geçerlidir. Bütün A_k , B_k , L_k , Γ_k için (2.2.7) doğrudur. $k \in \mathbb{Z}$ için

$$\begin{aligned} A_k(f; x) &= A_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k x) \\ B_k(f; x) &= B_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k x) \\ L_k(f; x) &= L_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k x) \\ \Gamma_k(f; x) &= \Gamma_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k x). \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

yazabiliriz. Burada

$$A_k(1) = B_k(1) = L_k(1) = \Gamma_k(1) = 1 \quad (2.2.29)$$

olduğuna dikkat etmeliyiz. Ayrıca tüm $C(R)$ 'lerde tanımlanan yukarıdaki özel operatörlerin olduğu durumlarda π_n derecesi $\leq n$ olan polinomların sınıfı ise

$$\begin{aligned} A_k(\pi_n) &\subseteq \pi_n, \quad B_k(\pi_n) \subseteq \pi_n \\ L_k(\pi_n) &\subseteq \pi_n, \quad \Gamma_k(\pi_n) \subseteq \pi_n \end{aligned} \quad (2.2.30)$$

olur.

Teorem 2.2.1. A_k , B_k , L_k , Γ_k operatörleri ötelemeyi koruyan operatörlerdir.

İspat. Burada Sonuç 2.1.1'i uygulayalım.

1. A_k operatörü için (φ çift);

$$\begin{aligned}
l_0(f; x) &= \tau_0^f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t-x) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(x-t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) \varphi(t) dt .
\end{aligned} \tag{2.2.31}$$

$a \in R$ için

$$\begin{aligned}
l_0(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(2^{-k}(2^k u - t) + \alpha) \varphi(t) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(u + \alpha - 2^{-k} t) \varphi(t) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(2^{-k} 2^k (u + \alpha) - 2^{-k} t) \varphi(t) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(2^{-k} [2^k (u + \alpha) - t]) \varphi(t) dt \\
&= l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k (u + \alpha)) .
\end{aligned}$$

Burada τ_0^f , (2.1.8) ifadesini sağlar. Şimdi A_k operatörünün ötelemeyi koruduğunu gösterelim. Yani $A_k(f(\cdot + \alpha); x) = A_k(f; x + \alpha)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
A_k(f(\cdot + \alpha); x) &= A_0(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \tau_0^{f_\alpha(2^{-k} \cdot)}(u) \varphi(2^k x - u) du .
\end{aligned}$$

$u = 2^k x - u$ dönüşümünü uygulayalım.

$$\begin{aligned}
A_k(f(\cdot + \alpha); x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tau_0^{f_\alpha(2^{-k} \cdot)}(2^k x - u) \varphi(u) du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} l_0(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k x - u) \varphi(u) du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} l_0(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k (x - 2^{-k} u)) \varphi(u) du .
\end{aligned}$$

(2.1.8) ifadesinden

$$\begin{aligned}
A_k(f(\cdot + \alpha); x) &= \int_{-\infty}^{\infty} l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k (x - 2^{-k} u + \alpha)) \varphi(u) du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k (x + \alpha) - u) \varphi(u) du
\end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \tau_0^{f(2^{-k} \cdot)} (2^k (x + \alpha) - u) \varphi(u) du .$$

$u = 2^k (x + \alpha) - u$ dönüşümü yaparsak

$$\begin{aligned} A_k(f(\cdot + \alpha); x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tau_0^{f(2^{-k} \cdot)} (u) \varphi(2^k (x + \alpha) - u) du \\ &= A_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k (x + \alpha)) \\ &= A_k(f(\cdot + \alpha); x) \end{aligned}$$

olur.

2. B_k operatörünü göz önüne alalım. Burada $l_0 f = f$ dir.

$$\begin{aligned} l_0(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k u) &= f(2^{-k} 2^k u + \alpha) \\ &= f(u + \alpha) \\ &= l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k (u + \alpha)) . \end{aligned}$$

Şimdi de B_k operatörünün ötelemeyi koruduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} B_k(f(\cdot + \alpha); x) &= B_0(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \varphi(2^k x - u) du \end{aligned}$$

$u = 2^k x - u$ dönüşümü uygularsak

$$\begin{aligned} B_k(f(\cdot + \alpha); x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(2^k x - u) \varphi(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} l_0(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k x - u) \varphi(u) du \end{aligned}$$

olur. (2.1.8)' i uygulayalım ve 1. örneğin ispatındaki işlemleri tekrarlayalım.

$$\begin{aligned} B_k(f(\cdot + \alpha); x) &= \int_{-\infty}^{\infty} l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k (x + \alpha) - u) \varphi(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(2^k (x + \alpha) - u) \varphi(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \varphi(2^k (x + \alpha) - u) du \end{aligned}$$

$$= B_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k(x + \alpha))$$

$$= B_k(f; x + \alpha).$$

3. L_k operatörü için

$$l_0(f; x) = c_0^f(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt$$

dir. Burada

$$\begin{aligned} l_0(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k u) &= \int_{2^k u}^{2^k u + 1} f(2^{-k} t + \alpha) dt \\ &= \int_{2^k(u + \alpha)}^{2^k(u + \alpha) + 1} f(2^{-k} t) dt \\ &= l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k(u + \alpha)) \end{aligned}$$

yazılabilir. Şimdi L_k operatörünün ötelemeyi koruduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} L_k(f(\cdot + \alpha); x) &= L_0(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} c_0^{f_\alpha(2^{-k} \cdot)}(u) \varphi(2^k x - u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} c_0^{f_\alpha(2^{-k} \cdot)}(2^k x - u) \varphi(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} l_0(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k x - u) \varphi(u) du. \end{aligned}$$

(2.1.8)' i uygulayarak 1. örnekteki işlemleri tekrarlırsak

$$\begin{aligned} L_k(f(\cdot + \alpha); x) &= \int_{-\infty}^{\infty} l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k(x + \alpha) - u) \varphi(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} c_0^{f(2^{-k} \cdot)}(2^k(x + \alpha) - u) \varphi(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} c_0^{f(2^{-k} \cdot)}(u) \varphi(2^k(x + \alpha) - u) du \\ &= L_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k(x + \alpha)) \\ &= L_k(f; x + \alpha) \end{aligned}$$

olur.

4. Γ_k operatörünü göz önüne alalım.

$$l_0(f; u) = \sum_{j=0}^n w_j f\left(u + \frac{j}{n}\right).$$

Burada

$$\begin{aligned} l_0(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k u) &= \sum_{j=0}^n w_j f\left(2^{-k} \left(2^k u + \frac{j}{n}\right) + \alpha\right) \\ &= \sum_{j=0}^n w_j f\left(2^{-k} \left(2^k (u + \alpha) + \frac{j}{n}\right)\right) \\ &= l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k (u + \alpha)). \end{aligned}$$

Şimdi Γ_k operatörünün ötelemeyi koruduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \Gamma_k(f(\cdot + \alpha); x) &= \Gamma_0(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_0^{f \circ (2^{-k} \cdot)}(u) \varphi(2^k x - u) du. \end{aligned}$$

$u = 2^k x - u$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned} \Gamma_k(f(\cdot + \alpha); x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_0^{f \circ (2^{-k} \cdot)}(2^k x - u) \varphi(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} l_0(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k x - u) \varphi(u) du \end{aligned}$$

olur. (2.1.8)'i ve 1. örnekteki işlemleri uygulayalım,

$$\begin{aligned} \Gamma_k(f(\cdot + \alpha); x) &= \int_{-\infty}^{\infty} l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k (x + \alpha) - u) \varphi(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_0^{f \circ (2^{-k} \cdot)}(2^k (x + \alpha) - u) \varphi(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_0^{f \circ (2^{-k} \cdot)}(u) \varphi(2^k (x + \alpha) - u) du \\ &= \Gamma_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k (x + \alpha)) \\ &= \Gamma_k(f; x + \alpha). \end{aligned}$$

A_k , B_k , L_k , Γ_k operatörlerinin süreklilik modülünü koruduğunu gösterelim.

Teorem 2.2.2. Her $f \in C_U(R)$ ve her $\delta > 0$ için,

$$\begin{aligned}\omega_1(A_k f; \delta) &\leq \omega_1(f; \delta), & \omega_1(B_k f; \delta) &\leq \omega_1(f; \delta), \\ \omega_1(L_k f; \delta) &\leq \omega_1(f; \delta), & \omega_1(\Gamma_k f; \delta) &\leq \omega_1(f; \delta).\end{aligned}\quad (2.2.32)$$

İspat. Teorem 2.1.1.'i uygulayalım. Önce (2.1.9)'u ispatlayalım.

1. A_k operatörünü alalım(φ çift). (2.2.31)'den

$$\begin{aligned}|l_0(f; x-u) - l_0(f; y-u)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} (f(x-u-t) - f(y-u-t))\varphi(t)dt \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-u-t) - f(y-u-t)|\varphi(t)dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \omega_1(f; |x-y|)\varphi(t)dt \\ &= \omega_1(f; |x-y|)\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}|A_k(f; x-u) - A_k(f; y-u)| \\ &= |A_0(f(2^{-k}\cdot); 2^k(x-u)) - A_0(f(2^{-k}\cdot); 2^k(y-u))| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \tau_0^{f(2^{-k}\cdot)}(v)\varphi(2^k(x-u)-v)dv - \int_{-\infty}^{\infty} \tau_0^{f(2^{-k}\cdot)}(v)\varphi(2^k(y-u)-v)dv \right|.\end{aligned}$$

$v = 2^k(x-u) - v$ ve $v = 2^k(y-u) - v$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}|A_k(f; x-u) - A_k(f; y-u)| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} [\tau_0^{f(2^{-k}\cdot)}(2^k(x-u)-v) - \tau_0^{f(2^{-k}\cdot)}(2^k(y-u)-v)]\varphi(v)dv \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} [l_0(f(2^{-k}\cdot); 2^k(x-u)-v) - l_0(f(2^{-k}\cdot); 2^k(y-u)-v)]\varphi(v)dv \right|\end{aligned}$$

$$\leq \omega_1(f(2^{-k} \cdot); 2^k |x - y|)$$

$$= \omega_1(f; |x - y|)$$

yazılabilir. Her iki tarafın supremumunu alırsak

$$\sup_{|x-y| \leq \delta} |A_k(f; x-u) - A_k(f; y-u)| = \sup_{|x-y| \leq \delta} \omega_1(f; |x-y|)$$

yani $\omega_1(A_k f; \delta) \leq \omega_1(f; \delta)$ olur.

2. B_k operatörü için $l_0 f = f$ olduğunu biliyoruz.

$$|l_0(f; x-u) - l_0(f; y-u)| = |f(x-u) - f(y-u)|$$

$$\leq \omega_1(f; |x-y|)$$

dir. Buradan

$$|B_k(f; x-u) - B_k(f; y-u)|$$

$$= |B_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k(x-u)) - B_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k(y-u))|$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} [f(v)\varphi(2^k(x-u)-v) - f(v)\varphi(2^k(y-u)-v)] dv \right|.$$

$v = 2^k(x-u) - v$ ve $v = 2^k(y-u) - v$ dönüşümü yapılırsa

$$|B_k(f; x-u) - B_k(f; y-u)|$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} [f(2^k(x-u)-v) - f(2^k(y-u)-v)] \varphi(v) dv \right|$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} [l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k(x-u)-v) - l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k(y-u)-v)] \varphi(v) dv \right|$$

$$\leq \omega_1(f(2^{-k} \cdot); 2^k |x-y|)$$

$$= \omega_1(f; |x-y|)$$

olur. Her iki tarafın supremumunu alırsak

$$\sup_{|x-y| \leq \delta} |B_k(f; x-u) - B_k(f; y-u)| = \sup_{|x-y| \leq \delta} \omega_1(f; |x-y|)$$

yani $\omega_1(B_k f; \delta) \leq \omega_1(f; \delta)$ elde edilir.

3. L_k operatörünü alalım.

$$\begin{aligned}
|l_0(f; x-u) - l_0(f; y-u)| &= |c_0^f(x-u) - c_0^f(y-u)| \\
&= \left| \int_{x-u}^{x-u+1} f(t) dt - \int_{y-u}^{y-u+1} f(t) dt \right| \\
&= \left| \int_0^1 f(w-u+x) dw - \int_0^1 f(w-u+y) dw \right| \\
&\leq \int_0^1 |f(w-u+x) - f(w-u+y)| dw \\
&\leq \omega_1(f; |x-y|)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
|L_k(f; x-u) - L_k(f; y-u)| \\
&= |L_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k(x-u)) - L_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k(y-u))| \\
&= \left| \int_{-\infty}^{\infty} [c_0^{f(2^{-k} \cdot)}(v) \varphi(2^k(x-u)-v) - c_0^{f(2^{-k} \cdot)}(v) \varphi(2^k(y-u)-v)] dv \right|.
\end{aligned}$$

$v = 2^k(x-u) - v$ ve $v = 2^k(y-u) - v$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}
|L_k(f; x-u) - L_k(f; y-u)| \\
&= \left| \int_{-\infty}^{\infty} [c_0^{f(2^{-k} \cdot)}(2^k(x-u)-v) - c_0^{f(2^{-k} \cdot)}(2^k(y-u)-v)] \varphi(v) dv \right| \\
&= \left| \int_{-\infty}^{\infty} [l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k(x-u)-v) - l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k(y-u)-v)] \varphi(v) dv \right| \\
&\leq \omega_1(f(2^{-k} \cdot); 2^k |x-y|) \\
&= \omega_1(f; |x-y|)
\end{aligned}$$

elde edilir. Her iki tarafın supremumunu alırsak

$$\sup_{|x-y| \leq \delta} |L_k(f; x-u) - L_k(f; y-u)| = \sup_{|x-y| \leq \delta} \omega_1(f; |x-y|)$$

yani $\omega_1(L_k f; \delta) \leq \omega_1(f; \delta)$ olur.

4. Γ_k operatörünü göz önüne alalım.

$$\begin{aligned}
 |l_0(f; x-u) - l_0(f; y-u)| &= |\gamma_0^f(x-u) - \gamma_0^f(y-u)| \\
 &= \left| \sum_{j=0}^n w_j \left(f\left(x-u + \frac{j}{n}\right) - f\left(y-u + \frac{j}{n}\right) \right) \right| \\
 &\leq \sum_{j=0}^n w_j \left| f\left(x-u + \frac{j}{n}\right) - f\left(y-u + \frac{j}{n}\right) \right| \\
 &\leq \omega_1(f; |x-y|) \sum_{j=0}^n w_j \\
 &= \omega_1(f; |x-y|).
 \end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned}
 |\Gamma_k(f; x-u) - \Gamma_k(f; y-u)| \\
 &= |\Gamma_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k(x-u)) - \Gamma_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k(y-u))| \\
 &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} [\gamma_0^{f(2^{-k} \cdot)}(v) \varphi(2^k(x-u) - v) - \gamma_0^{f(2^{-k} \cdot)}(v) \varphi(2^k(y-u) - v)] dv \right|.
 \end{aligned}$$

$v = 2^k(x-u) - v$ ve $v = 2^k(y-u) - v$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}
 |\Gamma_k(f; x-u) - \Gamma_k(f; y-u)| \\
 &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} [\gamma_0^{f(2^{-k} \cdot)}(2^k(x-u) - v) - \gamma_0^{f(2^{-k} \cdot)}(2^k(y-u) - v)] \varphi(v) dv \right| \\
 &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} [l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k(x-u) - v) - l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k(y-u) - v)] \varphi(v) dv \right| \\
 &\leq \omega_1(f(2^{-k} \cdot); 2^k |x-y|) \\
 &= \omega_1(f; |x-y|)
 \end{aligned}$$

olur. Her iki tarafın supremumunu alırsak

$$\sup_{|x-y|\leq\delta} |\Gamma_k(f; x-u) - \Gamma_k(f; y-u)| = \sup_{|x-y|\leq\delta} \omega_1(f; |x-y|)$$

yani $\omega_1(\Gamma_k f; \delta) \leq \omega_1(f; \delta)$ elde edilir.

Teorem 2.2.3. $f(x) = x \in C_U(R)$ olduğu zaman (2.2.32)'deki eşitsizlikler kesindir.

İspat. 1. A_k operatörünü alalım (φ çift).

$$\begin{aligned} (A_k f)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tau_k^f(u) \varphi(2^k x - u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tau_k^f(2^k x - u) \varphi(u) du \\ &= \int_{-a}^a \tau_k^f(2^k x - u) \varphi(u) du . \end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned} \tau_k^f(u) &= 2^k \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(2^k t - u) dt = 2^k \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(u - 2^k t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\omega}{2^k}\right) \varphi(u - \omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{u - \omega}{2^k}\right) \varphi(\omega) d\omega \\ &= \int_{-a}^a f\left(\frac{u - \omega}{2^k}\right) \varphi(\omega) d\omega \end{aligned}$$

ve

$$\tau_k^f(2^k x - u) = \int_{-a}^a f\left(x - \frac{u + \omega}{2^k}\right) \varphi(\omega) d\omega$$

olur. Eğer $f(x) = x$ alınırsa

$$\begin{aligned} \tau_k^f(2^k x - u) - \tau_k^f(2^k y - u) &= \int_{-a}^a \left[f\left(x - \frac{u + \omega}{2^k}\right) - f\left(y - \frac{u + \omega}{2^k}\right) \right] \varphi(\omega) d\omega \\ &= \int_{-a}^a (x - y) \varphi(\omega) d\omega \\ &= x - y \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
(A_k f)(x) - (A_k f)(y) &= \int_{-a}^a (\tau_k^f(2^k x - u) - \tau_k^f(2^k y - u)) \varphi(u) du \\
&= \int_{-a}^a (x - y) \varphi(u) du \\
&= x - y.
\end{aligned}$$

Her iki tarafın $\delta > 0$ için supremumunu alırsak

$$\sup_{|x-y| \leq \delta} |(A_k f)(x) - (A_k f)(y)| = \sup_{|x-y| \leq \delta} |x - y| = \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|$$

yani $\omega_1(A_k(id); \delta) = \omega_1(id; \delta)$ olur.

2. B_k operatörünü ele alalım.

$$\begin{aligned}
(B_k f)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{u}{2^k}\right) \varphi(2^k x - u) du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{2^k x - u}{2^k}\right) \varphi(u) du \\
&= \int_{-a}^a f\left(x - \frac{u}{2^k}\right) \varphi(u) du.
\end{aligned}$$

$f(x) = x$ alarak (2.1.4) özelliğini kullanalım.

$$\begin{aligned}
(B_k f)(x) - (B_k f)(y) &= \int_{-a}^a \left(f\left(x - \frac{u}{2^k}\right) - f\left(y - \frac{u}{2^k}\right) \right) \varphi(u) du \\
&= \int_{-a}^a (x - y) \varphi(u) du = x - y
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Her iki tarafın $\delta > 0$ için supremumunu alırsak

$$\sup_{|x-y| \leq \delta} |(B_k f)(x) - (B_k f)(y)| = \sup_{|x-y| \leq \delta} |x - y| = \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|$$

yani $\omega_1(B_k(id); \delta) = \omega_1(id; \delta)$ elde edilir.

3. L_k operatörü için;

$$(L_k f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c_k^f(u) \varphi(2^k x - u) du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} c_k^f(2^k x - u) \varphi(u) du$$

$$= \int_{-a}^a c_k^f(2^k x - u) \varphi(u) du$$

elde ederiz. Burada

$$c_k^f(u) = 2^k \int_{2^{-k}u}^{2^{-k}(u+1)} f(t) dt = 2^k \int_0^{2^{-k}} f\left(t + \frac{u}{2^k}\right) dt$$

olduğundan

$$c_k^f(2^k x - u) = 2^k \int_0^{2^{-k}} f\left(t + x - \frac{u}{2^k}\right) dt$$

yazabiliriz. Eğer $f(x) = x$ alınırsa

$$\begin{aligned} c_k^f(2^k x - u) - c_k^f(2^k y - u) &= 2^k \int_0^{2^{-k}} (x - y) dt \\ &= (x - y) 2^k \int_0^{2^{-k}} dt = x - y \end{aligned}$$

olur ve böylece

$$(L_k f)(x) - (L_k f)(y) = \int_{-a}^a (x - y) \varphi(u) du = x - y$$

elde edilir. Her iki tarafın $\delta > 0$ için supremumu alınırsa

$$\sup_{|x-y| \leq \delta} |(L_k f)(x) - (L_k f)(y)| = \sup_{|x-y| \leq \delta} |x - y| = \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|$$

yani $\omega_1(L_k(id); \delta) = \omega_1(id; \delta)$ elde edilir.

4. Γ_k operatörünü göz önüne alalım.

$$\Gamma_k(f; x) = \sum_{j=0}^n w_j \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x - \frac{u}{2^k} + \frac{j}{2^k n}\right) \varphi(u) du.$$

eşitliğinde $f(x) = x$ alınırsa

$$(\Gamma_k f)(x) - (\Gamma_k f)(y) = \sum_{j=0}^n w_j \int_{-\infty}^{\infty} (x - y) \varphi(u) du$$

$$= (x - y) \left(\sum_{j=0}^n w_j \right) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) du = x - y$$

olur. Her iki tarafın $\delta > 0$ için supremumu alınır

$$\sup_{|x-y| \leq \delta} |(\Gamma_k f)(x) - (\Gamma_k f)(y)| = \sup_{|x-y| \leq \delta} |x - y| = \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|$$

yani $\omega_1(\Gamma_k(id); \delta) = \omega_1(id; \delta)$ elde edilir.

A_k , B_k , L_k , Γ_k operatörlerinin $k \in \mathbb{Z}$ için I birim fonksiyona yakınsadığını gösterelim.

Teorem 2.2.4. $k \in \mathbb{Z}$ için

$$(i) \quad |A_k(f; x) - f(x)| \leq \omega_1\left(f; \frac{a}{2^{k-1}}\right) \quad (2.2.33)$$

$$(ii) \quad |B_k(f; x) - f(x)| \leq \omega_1\left(f; \frac{a}{2^k}\right) \quad (2.2.34)$$

$$(iii) \quad |L_k(f; x) - f(x)| \leq \omega_1\left(f; \frac{a+1}{2^k}\right) \quad (2.2.35)$$

$$(iv) \quad |\Gamma_k(f; x) - f(x)| \leq \omega_1\left(f; \frac{a+1}{2^k}\right). \quad (2.2.36)$$

İspat. (i) A_k operatörü için (φ çift); (2.2.31) ve (2.1.3) ifadelerini kullanırsak

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{u, y \in R \\ |u-y| \leq a}} |l_0(f, u) - f(y)| &= \sup_{\substack{u, y \in R \\ |u-y| \leq a}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(u-t) dt - \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \varphi(u-t) dt \right| \\ &\leq \sup_{\substack{u, y \in R \\ |u-y| \leq a}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f(y)| \varphi(u-t) dt \\ &\leq \sup_{\substack{u, y \in R \\ |u-y| \leq a}} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_1(f; |t-y|) \varphi(u-t) dt \\ &= \omega_1(f; 2a) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u-t) dt \end{aligned}$$

$$= \omega_1(f; 2a)$$

şeklinde yazabiliriz.

$$|A_k(f; x) - f(x)| = |A_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k x) - f(2^{-k}(2^k x))|$$

$$\begin{aligned} &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \tau_0^{f(2^{-k} \cdot)}(u) \varphi(2^k x - u) du - f(2^{-k}(2^k x)) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2^k x - u) du \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} [l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x))] \varphi(2^k x - u) du \right| \\ &\leq \left| \int_{2^k x - a}^{2^k x + a} [l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x))] \varphi(2^k x - u) du \right| \\ &\leq \sup_{2^k x - a \leq u \leq 2^k x + a} |l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x))| \left(\int_{2^k x - a}^{2^k x + a} \varphi(2^k x - u) du \right). \end{aligned}$$

$g := f(2^{-k} \cdot)$ dersek

$$|A_k(f; x) - f(x)| = \sup_{|u - 2^k x| \leq a} |l_0(g; u) - g(2^k x)| \leq \omega_1(g; 2a) = \omega_1(f; \frac{a}{2^{k-1}})$$

elde edilir.

(ii) B_k operatöründe $l_0(f, u) = f(u)$ olduğundan

$$\sup_{\substack{u, y \in R \\ |u - y| \leq a}} |l_0(f, u) - f(y)| = \sup_{\substack{u, y \in R \\ |u - y| \leq a}} |f(u) - f(y)| = \omega_1(f; a)$$

elde edilir.

$$|B_k(f; x) - f(x)| = |B_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k x) - f(2^{-k}(2^k x))|$$

$$\begin{aligned} &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \varphi(2^k x - u) du - f(2^{-k}(2^k x)) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2^k x - u) du \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} [l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x))] \varphi(2^k x - u) du \right| \\ &\leq \left| \int_{2^k x - a}^{2^k x + a} [l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x))] \varphi(2^k x - u) du \right| \end{aligned}$$

$$\leq \sup_{2^k x - a \leq u \leq 2^k x + a} \left| l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x)) \right| \left(\int_{2^k x - a}^{2^k x + a} \varphi(2^k x - u) du \right).$$

$g := f(2^{-k} \cdot)$ dersek

$$|B_k(f; x) - f(x)| = \sup_{|u - 2^k x| \leq a} |l_0(g; u) - g(2^k x)| \leq \omega_1(g; a) = \omega_1\left(f; \frac{a}{2^k}\right)$$

elde edilir.

(iii) L_k operatörü için;

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{u, y \in R \\ |u - y| \leq a}} |l_0(f, u) - f(y)| &= \sup_{\substack{u, y \in R \\ |u - y| \leq a}} \left| \int_u^{u+1} f(t) dt - f(y) \right| \\ &= \sup_{\substack{u, y \in R \\ |u - y| \leq a}} \left| \int_u^{u+1} f(t) dt - f(y) \int_u^{u+1} dt \right| \\ &\leq \sup_{\substack{u, y \in R \\ |u - y| \leq a}} \int_u^{u+1} |f(t) - f(y)| dt \\ &\leq \sup_{\substack{u, y \in R \\ |u - y| \leq a}} \int_u^{u+1} \omega_1(f; |t - y|) dt \\ &\leq \sup_{\substack{u, y \in R \\ |u - y| \leq a}} \int_0^1 \omega_1(f; |t + u - y|) dt \\ &\leq \sup_{\substack{u, y \in R \\ |u - y| \leq a}} \int_0^1 \omega_1(f; t + |u - y|) dt \\ &\leq \sup_{\substack{u, y \in R \\ |u - y| \leq a}} \omega_1(f; 1 + |u - y|) \\ &= \omega_1(f; 1 + a) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Yine Teorem 2.1.2.'yi uygularsak

$$|L_k(f; x) - f(x)| = |L_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k x) - f(2^{-k}(2^k x))|$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} c_0^{f(2^{-k} \cdot)}(u) \varphi(2^k x - u) du - f(2^{-k}(2^k x)) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2^k x - u) du \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_{-\infty}^{\infty} [l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x))] \varphi(2^k x - u) du \right| \\
&\leq \left| \int_{2^k x - a}^{2^k x + a} [l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x))] \varphi(2^k x - u) du \right| \\
&\leq \sup_{2^k x - a \leq u \leq 2^k x + a} |l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x))| \cdot \left(\int_{2^k x - a}^{2^k x + a} \varphi(2^k x - u) du \right).
\end{aligned}$$

$g := f(2^{-k} \cdot)$ dersek

$$|L_k(f; x) - f(x)| = \sup_{|u - 2^k x| \leq a} |l_0(g; u) - g(2^k x)| \leq \omega_1(g; 1 + a) = \omega_1\left(f; \frac{a+1}{2^k}\right)$$

elde edilir.

(iv) Γ_k operatörünü göz önüne alalım.

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{u, y \in R \\ |u - y| \leq a}} |l_0(f, u) - f(y)| &= \sup_{\substack{u, y \in R \\ |u - y| \leq a}} \left| \sum_{j=0}^n w_j f\left(u + \frac{j}{n}\right) - f(y) \right| \\
&= \sup_{\substack{u, y \in R \\ |u - y| \leq a}} \left| \sum_{j=0}^n w_j f\left(u + \frac{j}{n}\right) - f(y) \sum_{j=0}^n w_j \right| \\
&\leq \sup_{\substack{u, y \in R \\ |u - y| \leq a}} \sum_{j=0}^n w_j |f(u + \frac{j}{n}) - f(y)| \\
&\leq \sup_{\substack{u, y \in R \\ |u - y| \leq a}} \sum_{j=0}^n w_j \omega_1(f; |u + \frac{j}{n} - y|) \\
&\leq \sup_{\substack{u, y \in R \\ |u - y| \leq a}} \sum_{j=0}^n w_j \omega_1(f; \frac{j}{n} + |u - y|) \\
&\leq \left(\sum_{j=0}^n w_j \right) \omega_1(f; 1 + a) \\
&= \omega_1(f; a + 1)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$|\Gamma_k(f; x) - f(x)| = |\Gamma_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k x) - f(2^{-k}(2^k x))|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_0^{f(2^{-k} \cdot)}(u) \varphi(2^k x - u) du - f(2^{-k}(2^k x)) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2^k x - u) du \right| \\
&= \left| \int_{-\infty}^{\infty} [l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x))] \varphi(2^k x - u) du \right| \\
&\leq \left| \int_{2^k x - a}^{2^k x + a} [l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x))] \varphi(2^k x - u) du \right| \\
&\leq \sup_{2^k x - a \leq u \leq 2^k x + a} \left| l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x)) \right| \left(\int_{2^k x - a}^{2^k x + a} \varphi(2^k x - u) du \right).
\end{aligned}$$

$g := f(2^{-k} \cdot)$ dersek

$$|\Gamma_k(f; x) - f(x)| = \sup_{|u - 2^k x| \leq a} |l_0(g; u) - g(2^k x)| \leq \omega_1(g; 1 + a) = \omega_1\left(f; \frac{a+1}{2^k}\right)$$

elde edilir.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölüm de ikinci bölümde incelenen konvolüsyon tipli lineer pozitif operatörler öteleme yardımı ile çift indise bağlı olarak yeniden tanımlanacaktır. Bu operatörlerin ötelemeyi koruduğu, birime yakınsadığı ve süreklilik modülünü koruduğu gösterilecektir. Ayrıca genelleştirilmiş integrallerin yakınsaklık özellikleri n -boyutlu uzayda tekrar incelenecek ve örnekler verilecektir.

3.1. Ötelemeyi Koruyan Yüksek Mertebeli İntegral Operatörleri

Yaklaşım fonksiyonu olan f 'nin karakteristik özelliği ile lineer yaklaşım operatörü olan $\mathcal{L}_k(f)$ operatörünün karakteristik özelliğinin benzer olduğu gösterilecektir. Ayrıca $\mathcal{L}_k(f)$ 'in f 'ye yaklaşımının sağlanması için en uygun yeter şartlar araştırılacaktır. Özel olarak bazı yeni ve çok daha genel operatörler incelenecektir.

Genel scaling tipli fonksiyon φ ve basit pozitif lineer operatör l_k 'yı içeren konvolüsyon tipli integral formunda $\mathcal{L}_{k,j}$ operatörleri çalışılacaktır. Son olarakta bu tür operatörlerden örnekler verilecektir.

$X := C_U(R)$, R 'de düzgün sürekli reel değerli fonksiyonların sınıfı olsun. $C(R)$, R 'de sürekli fonksiyonların bir sınıfı olmak üzere $f \in X$ için $\tilde{\omega}_p(f; \delta) < +\infty$ olacak şekilde $p \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ vardır. Burada p .dereceden süreklilik modülü

$$\tilde{\omega}_p(f; \delta) := \sup_{0 < h \leq \delta} \|\Delta_h^p f\|_\infty$$

eşitliği ile göz önüne alınacaktır. Ayrıca

$$\Delta_h^p f(t) := \sum_{i=0}^p (-1)^{p-i} \binom{p}{i} f(t + ih)$$

sonlu ileri farktır. $\{l_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ pozitif lineer operatörler dizisi $x \in R$, $f \in X$ için

$$l_k(f; x) = l_0(f(2^{-k} \cdot); x) \quad (3.1.1)$$

özelliliyle $C(R)$ uzayından X uzayına dönüşüm yapan operatör olsun.

Sabit $a > 0$, $u, y \in R$, $m \in N$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{Z}$ ve $f \in X$ için

$$\sup_{|u-y| \leq a} |l_0(f; u) - f(y)| \leq \omega_1(f; \frac{ma+n}{2^r}) \quad (3.1.2)$$

olsun. Ayrıca φ , $[-a, a]$ aralığında pozitif reel değerli fonksiyon ve Lebesgue ölçülebilirdir. $\forall x \in R$ için

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-u) du = 1 \quad (3.1.3)$$

şeklindedir.

Teorem 3.1.1. $h > 0$ olmak üzere $\forall x, u \in R$, $p \in \mathbb{N}$, herhangi bir $f \in X$ için

$$|\Delta_h^p l_0(f; x-u)| \leq \tilde{\omega}_p(f; h) \quad (3.1.4)$$

olsun. Bu durumda $\forall \delta > 0$, $k \in \mathbb{Z}$ için

$$\tilde{\omega}_p(\mathcal{L}_k f; \delta) \leq \tilde{\omega}_p(f; \delta) \quad (3.1.5)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat . p . dereceden sonlu ileri fark tanımından $\forall h \in [0, \delta]$, $x \in R$ için

$$|\Delta_h^p(\mathcal{L}_0(f; x))| = \left| \sum_{j=0}^p (-1)^{p-j} \binom{p}{j} \mathcal{L}_0(f; x + jh) \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \sum_{j=0}^p (-1)^{p-j} \binom{p}{j} \int_{-\infty}^{\infty} l_0(f; x + jh - u) \varphi(u) du \right| \\
&= \left| \int_{-\infty}^{\infty} (\Delta_h^p l_0(f; x - u)) \varphi(u) du \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\Delta_h^p l_0(f; x - u)| \varphi(u) du \\
&\leq \tilde{\omega}_p(f; h)
\end{aligned}$$

olduğu açıktır.

$$\mathcal{L}_k(f; x) = \mathcal{L}_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k x)$$

özelliğinden dolayı

$$\begin{aligned}
|\Delta_h^p(\mathcal{L}_k(f; x))| &= |\Delta_{2^k h}^p \mathcal{L}_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k x)| \\
&= \left| \sum_{i=0}^p (-1)^{p-i} \binom{p}{i} \mathcal{L}_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k(x + ih)) \right| \\
&\leq \tilde{\omega}_p(f(2^{-k} \cdot); 2^k h) = \tilde{\omega}_p(f; h)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Yani

$$|\Delta_h^p(\mathcal{L}_k(f; x))| \leq \tilde{\omega}_p(f; h)$$

elde ederiz. Bu eşitsizlikte her iki tarafın $\delta > 0$ için supremumunu alırsak

$$\tilde{\omega}_p(\mathcal{L}_k f; \delta) \leq \tilde{\omega}_p(f; \delta)$$

olur.

Şimdi aşağıdaki yeni operatörü tanımlayalım. $k \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{N}$ için

$$\mathcal{L}_{k,j}(f; x) := \int_{-\infty}^{\infty} l_k(f; 2^k x - ju) \varphi(u) du \quad (3.1.6)$$

olsun.

$$\mathcal{L}_{k,j}(f; x) = \mathcal{L}_{0,j}(f(2^{-k} \cdot); 2^k x) \quad (3.1.7)$$

olduğunu gösterelim. Basit hesaplamalarla

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{k,j}(f;x) &= \int_{-\infty}^{\infty} l_k(f;2^k x - ju) \varphi(u) du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} l_0(f(2^{-k}\cdot);2^k x - ju) \varphi(u) du \\
&= \mathcal{L}_{0,j}(f(2^{-k}\cdot);2^k x)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Yani $\mathcal{L}_{k,1} = \mathcal{L}_k$ dir.

Teorem 3.1.2. Tüm $k \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ sabit, her $u \in \mathbb{R}$ ve herhangi $f \in X$ için

$$l_0(f(2^{-k}\cdot + \alpha);2^k u) = l_0(f(2^{-k}\cdot);2^k(u + \alpha)) \quad (3.1.8)$$

olduğunu kabul edelim. O halde $\mathcal{L}_{k,j}$ ötelemeyi koruyan operatördür.

İspat . Tanım 2.1.1.'in sağlandığını göstermemiz gerekir.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{k,j}(f(\cdot + \alpha);x) &= \mathcal{L}_{k,j}(f_\alpha;x) = \mathcal{L}_{0,j}(f_\alpha(2^{-k}\cdot);2^k x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} l_0(f(2^{-k}\cdot + \alpha);2^k x - ju) \varphi(u) du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} l_0(f(2^{-k}\cdot + \alpha);2^k(x - 2^{-k} ju)) \varphi(u) du .
\end{aligned}$$

(3.1.8) ifadesini kullanırsak

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{k,j}(f(\cdot + \alpha);x) &= \int_{-\infty}^{\infty} (l_0(f(2^{-k}\cdot);2^k(x - 2^{-k} ju + \alpha)) \varphi(u) du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (l_0(f(2^{-k}\cdot);2^k(x + \alpha) - ju) \varphi(u) du \\
&= \mathcal{L}_{0,j}(f(2^{-k}\cdot);2^k(x + \alpha)) = \mathcal{L}_{k,j}(f;x + \alpha)
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Şimdi $\mathcal{L}_{k,j}$ için süreklilik modülünün korunduğunu gösterelim.

Teorem 3.1.3. $k \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ için

$$\tilde{\omega}_p(\mathcal{L}_{k,j}(f); \delta) \leq \tilde{\omega}_p(f; \delta) \quad (3.1.9)$$

eşitsizliği vardır.

İspat . p .dereceden sonlu ileri fark tanımından

$$\begin{aligned} |\Delta_h^p(\mathcal{L}_{0,j}(f; x))| &= \left| \sum_{i=0}^p (-1)^{p-i} \binom{p}{i} \mathcal{L}_{0,j}(f; x + ih) \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^p (-1)^{p-i} \binom{p}{i} \right) l_0(f; x + ih - ju) \varphi(u) du \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |(\Delta_h^p l_0(f; x - ju))| \varphi(u) du \\ &\leq \tilde{\omega}_p(f; h) \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikten

$$\begin{aligned} |\Delta_h^p \mathcal{L}_{k,j}(f; x)| &= |\Delta_{2^k h}^p \mathcal{L}_{0,j}(f(2^{-k} \cdot); 2^k x)| \\ &\leq \tilde{\omega}_p(f(2^{-k} \cdot); 2^k h) \\ &= \tilde{\omega}_p(f; h) \end{aligned}$$

yazılabilir. $|\Delta_h^p \mathcal{L}_{k,j}(f; x)| \leq \tilde{\omega}_p(f; h)$ ifadesinin her iki tarafının $\delta > 0$ için

supremumunu alırsak;

$$\tilde{\omega}_p(\mathcal{L}_k f; \delta) \leq \tilde{\omega}_p(f; \delta)$$

elde edilir. Bu ifade teoremi ispatlar.

Şimdi $\mathcal{L}_{k,j}$ operatörünün yaklaşım hızını veren teoremi ifade edelim.

Teorem 3.1.4. $f \in X$ ve (3.1.2) ifadesinin doğru olduğunu kabul edelim. $m, j \in \mathbb{N}$,

$n \in \mathbb{Z}_+$, $k, r \in \mathbb{Z}$ için

$$|\mathcal{L}_{k,j}(f; x) - f(x)| \leq \omega_1\left(f; \frac{mja + n}{2^{k+r}}\right). \quad (3.1.10)$$

İspat . $\varphi \subseteq [-a, a]$ olduğundan (3.1.3) eşitliği sağlanır. Buna göre

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_{k,j}(f; x) - f(x)| &= |\mathcal{L}_{0,j}(f(2^{-k} \cdot); 2^k x) - f(x)| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k x - ju) \varphi(u) du - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(u) du \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} (l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k x - ju) - f(x)) \varphi(u) du \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} (l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k x - ju) - f(2^{-k}(2^k x))) \varphi(u) du \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k x - ju) - f(2^{-k}(2^k x))| \varphi(u) du \\ &= \int_{-a}^a |l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k x - ju) - f(2^{-k}(2^k x))| \varphi(u) du \\ &\leq \sup \{ |l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k x - ju) - f(2^{-k}(2^k x))| ; \\ &\quad u \in [-a, a] \} \end{aligned}$$

yazılabilir. $g := f(2^{-k} \cdot)$ olarak tanımlarsak

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_{k,j}(f; x) - f(x)| &\leq \sup \{ |l_0(g; 2^k x - ju) - g(2^k x)| ; u \in [-a, a] \} \\ &\leq \sup \{ |l_0(g; v) - g(w)| ; |v - w| \leq ja \} \\ &\leq \omega_1(g; \frac{mja + n}{2^r}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{|h| < \frac{mja+n}{2^r}} |g(x+h) - g(x)| \\
&= \sup_{|2^k h| \leq \frac{mja+n}{2^r}} |f(2^{-k} \cdot + h) - f(2^{-k} \cdot)| \\
&= \sup_{|h| < \frac{mja+n}{2^{r+k}}} |f(2^{-k} \cdot + h) - f(2^{-k} \cdot)| \\
&= \omega_1(f; \frac{mja+n}{2^{r+k}})
\end{aligned}$$

elde edilir.

Klasik yaklaşım teorisinde genelleştirilmiş Jackson operatörünün tanımındaki düşünceyi kullanarak daha önce bahsedilen genel integral operatörünü aşağıdaki gibi genelleştirebiliriz. $k \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ için,

$$I_{0,q}(f; x) := - \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^q (-1)^j \binom{q}{j} l_0(f; ju) \varphi(u) du \quad (3.1.11)$$

ve

$$I_{k,q}(f; x) := - \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^q (-1)^j \binom{q}{j} l_k(f; 2^k x - ju) \varphi(u) du \quad (3.1.12)$$

olsun.

$$\begin{aligned}
I_{k,q}(f; x) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^q (-1)^j \binom{q}{j} l_k(f; 2^k x - ju) \varphi(u) du \\
&= - \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^q (-1)^j \binom{q}{j} l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k x - ju) \varphi(u) du \\
&= I_{0,q}(f(2^{-k} \cdot); 2^k x).
\end{aligned}$$

$$I_{k,q}(f; x) = I_{0,q}(f(2^{-k} \cdot); 2^k x) \quad (3.1.13)$$

olduğu açıktır. Ayrıca

$$I_{0,q}(f;x) = - \sum_{j=1}^q (-1)^j \binom{q}{j} \mathcal{L}_{0,j}(f;x) \quad (3.1.14)$$

ve

$$I_{k,q}(f;x) = - \sum_{j=1}^q (-1)^j \binom{q}{j} \mathcal{L}_{k,j}(f;x) \quad (3.1.15)$$

ifadelerinin doğruluğu kolaylıkla gösterilebilir.

Teorem 3.1.5. (3.1.8) ifadesinin doğru olduğunu kabul edelim. $I_{k,q}$ operatörü ötelemeyi koruyan operatördür.

İspat . Tanım 2.1.1.'i kullanırsak

$$\begin{aligned} I_{k,q}(f(\cdot + \alpha); x) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^q (-1)^j \binom{q}{j} l_0(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k(x - 2^{-k}ju)) \varphi(u) du \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^q (-1)^j \binom{q}{j} l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k(x - 2^{-k}ju + \alpha)) \varphi(u) du \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^q (-1)^j \binom{q}{j} l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k(x + \alpha) - ju) \varphi(u) du \\ &= I_{k,q}(f; x + \alpha) \end{aligned}$$

ve böylece $I_{k,q}$ operatörünün ötelemeyi koruyan operatör olduğu gösterilmiş olur.

$I_{k,q}$ operatörünün süreklilik modülünü koruduğunu aşağıdaki teorem ile verelim.

Teorem 3.1.6. (3.1.4) ifadesinin doğru olduğunu kabul edelim. $\delta > 0$, $p, q \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$ için

$$\tilde{\omega}_p(I_{k,q}(f); \delta) \leq (2^q - 1) \tilde{\omega}_p(f; \delta) \quad (3.1.16)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat . $\sum_{j=1}^q \binom{q}{j} = 2^q - 1$ olduğunu biliyoruz. Burada Teorem 3.1.3.'ü uygulayacağız.

$$-\sum_{j=1}^q (-1)^j \binom{q}{j} = 1 \quad (3.1.17)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \left| \Delta_h^p I_{k,q}(f); x \right| &= \left| \sum_{i=0}^p (-1)^{p-i} \binom{p}{i} I_{k,q}(f; x) \right| \\ &= \left| \sum_{i=0}^p (-1)^{p-i} \binom{p}{i} \left(-\sum_{j=1}^q (-1)^j \binom{q}{j} \mathcal{L}_{k,j}(f; x) \right) \right| \\ &= \left| -\sum_{j=1}^q (-1)^j \binom{q}{j} \Delta_h^p \mathcal{L}_{k,j}(f; x) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^q \binom{q}{j} \left| \Delta_h^p \mathcal{L}_{k,j}(f; x) \right| \\ &= (2^q - 1) \left| \Delta_h^p \mathcal{L}_{k,j}(f; x) \right| \end{aligned}$$

yazılabilir. Her iki tarafın supremumunu alırsak

$$\sup_{0 < h < \delta} \left| \Delta_h^p I_{k,q}(f); x \right| \leq \sup_{0 < h < \delta} (2^q - 1) \left| \Delta_h^p \mathcal{L}_{k,j}(f; x) \right|$$

yani $\tilde{\omega}_p(I_{k,q}(f); \delta) \leq (2^q - 1) \tilde{\omega}_p(f; \delta)$ olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.7. $f \in X$ ve (3.1.2)'nin doğru olduğunu kabul edelim. $k \in \mathbb{Z}$,

$q, m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ için

$$\left| I_{k,q}(f, x) - f(x) \right| \leq (2^q - 1) \omega_1 \left(f; \frac{mqn + n}{2^{k+r}} \right) \quad (3.1.18)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat . $I_{k,q}$ operatörünün tanımından

$$\begin{aligned}
|I_{k,q}(f;x) - f(x)| &= \left| -\sum_{j=1}^q (-1)^j \binom{q}{j} \mathcal{L}_{k,j}(f;x) - \left(-\sum_{j=1}^q (-1)^j \binom{q}{j} \right) f(x) \right| \\
&= \left| \sum_{j=1}^q (-1)^j \binom{q}{j} \mathcal{L}_{k,j}(f;x) - \sum_{j=1}^q (-1)^j \binom{q}{j} f(x) \right| \\
&= \left| \sum_{j=1}^q (-1)^j \binom{q}{j} (\mathcal{L}_{k,j}(f;x) - f(x)) \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^q \binom{q}{j} |\mathcal{L}_{k,j}(f;x) - f(x)| \\
&\leq \sum_{j=1}^q \binom{q}{j} \omega_1\left(f; \frac{mja+n}{2^{k+r}}\right)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Süreklilik modülü artan bir fonksiyon olduğundan en büyük değerini q 'da alır ve

$$|I_{k,q}(f;x) - f(x)| \leq (2^q - 1) \omega_1\left(f; \frac{mqa+n}{2^{k+r}}\right)$$

olur.

(3.1.9) ve (3.1.16)'daki eşitsizlikler kesindir.

Lemma 3.1.1. Her $u, x, y \in \mathbb{R}$ ve $j \in \mathbb{N}$ sabiti için

$$l_0(id(2^{-k} \cdot); 2^k x - ju) - l_0(id(2^{-k} \cdot); 2^k y - ju) = x - y \quad (3.1.19)$$

yani

$$\mathcal{L}_{k,j}(id;x) - \mathcal{L}_{k,j}(id;y) = x - y. \quad (3.1.20)$$

Aynı zamanda $\delta > 0$ için

$$\omega_1(\mathcal{L}_{k,j}(id); \delta) = \omega_1(id; \delta) \quad (3.1.21)$$

dır. (3.1.9)'deki eşitsizlik $\forall x \in \mathbb{R}$, $id \in C_u(\mathbb{R})$ olmak üzere $f(x) := id(x) = x$ fonksiyonu için $p = 1$ olduğunda kesindir. Yani

$$I_{k,q}(id; x) - I_{k,q}(id; y) = x - y \quad (3.1.22)$$

ve

$$\omega_1(I_{k,q}(id); \delta) = \omega_1(id; \delta) \quad (3.1.23)$$

olur.

İspat .

$$\mathcal{L}_{k,j}(id; x) = \int_{-\infty}^{\infty} l_0(id(2^{-k} \cdot); 2^k x - ju) \varphi(u) du$$

dır. Bu nedenle

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{k,j}(id; x) - \mathcal{L}_{k,j}(id; y) &= \int_{-\infty}^{\infty} (l_0(id(2^{-k} \cdot); 2^k x - ju) - l_0(id(2^{-k} \cdot); 2^k y - ju)) \varphi(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - y) \varphi(u) du = x - y \end{aligned}$$

olur. Her iki tarafın $\delta > 0$ için supremumunu alırsak

$$\sup_{|x-y| \leq \delta} |\mathcal{L}_{k,j}(id; x) - \mathcal{L}_{k,j}(id; y)| = \sup_{|x-y| \leq \delta} |x - y|$$

yani $\omega_1(\mathcal{L}_{k,j}(id); \delta) = \omega_1(id; \delta)$ olur. Ayrıca basit hesaplamalarla $f(x) = x$ için

$$I_{k,q}(id; x) - I_{k,q}(id; y)$$

$$\begin{aligned} &= \left(- \sum_{j=1}^q (-1)^j \binom{q}{j} \mathcal{L}_{k,j}(id; x) \right) - \left(- \sum_{j=1}^q (-1)^j \binom{q}{j} \mathcal{L}_{k,j}(id; y) \right) \\ &= - \sum_{j=1}^q (-1)^j \binom{q}{j} (\mathcal{L}_{k,j}(id; x) - \mathcal{L}_{k,j}(id; y)) \\ &= \left(- \sum_{j=1}^q (-1)^j \binom{q}{j} \right) (x - y) = x - y, \end{aligned}$$

elde ederiz. Her iki tarafın supremumu alınırsa

$$\omega_1(I_{k,q}(id); \delta) = \omega_1(id; \delta)$$

yazılabilir.

Sonuç 3.1.1.

(i) Burada $j \in \mathbb{N}$ için

$$\mathcal{L}_{0,j}(f; x) = \int_{-\infty}^{\infty} l_0(f, x - ju) \varphi(u) du \quad (3.1.24)$$

eşitliğini inceleyelim. Her $f \in X^{(1)}$ için $\frac{\partial(l_0 f)(x-u)}{\partial x}$ kısmi türevi mevcut ve

$x \in R$ ve $u \in [-a, a]$ noktalarında $\varphi(u)$ fonksiyonu sürekli olsun. Leibniz kuralını

(3.1.24) ifadesine uygularsak

$$\frac{d}{dx}(\mathcal{L}_{0,j}(f))(x) = \int_{-a}^a (l_0 f)_x(x - ju) \varphi(u) du \quad (3.1.25)$$

elde edilir. $(l_0 f)_x$ x 'e göre türevi göstermektedir. Böylece $k \in \mathbb{Z}$ için

$$\mathcal{L}_{k,j}(f; x) = \mathcal{L}_{0,j}(f(2^{-k} \cdot); 2^k x)$$

ifadesinde her $f \in X^{(1)}$ türevlenebilirdir.

(ii) $i \geq 1$ tamsayı olmak üzere $\frac{\partial^{i-1}}{\partial x^{i-1}}(l_0 f)(x - ju), \frac{\partial^i}{\partial x^i}(l_0 f)(x - ju)$ kısmi

türevleri her $f \in X^{(i)}$ için mevcut ve $x \in R, u \in [-a, a]$ noktalarında $\varphi(u)$

fonksiyonu sürekli. Leibniz kuralından

$$\frac{d^i}{dx^i}(\mathcal{L}_{0,j}(f))(x) = \int_{-a}^a \frac{\partial^i(l_0 f)}{\partial x^i}(x - ju) \varphi(u) du \quad (3.1.26)$$

elde ederiz. Yani $\mathcal{L}_{k,j}$ i -defa türevlenebilir bir operatördür.

(iii) $l_0, X^{(i)}$ uzayından $C^{(i)}(R)$ uzayına dönüşüm yapan bir operatör olsun.

$i \geq 1$ bir tamsayı olmak üzere $f \in X^{(i)}$ için $\frac{\partial^{i-1}}{\partial x^{i-1}}(l_0 f)(x - ju)$ ve $\frac{\partial^i}{\partial x^i}(l_0 f)(x - ju)$

kısmi türevleri x ve u noktalarında sürekli.

(iv) (i) ve (ii) deki yorumlar $I_{k,q}$ operatörleri için doğrudur. Çünkü $I_{k,q}$ operatörleri $\mathcal{L}_{k,j}$ operatörlerinin bir lineer kombinasyonlarıdır.

Sonuç 3.1.2.

(i) Lemma 2.1.1.'den eğer l_0 , $X^{(i)}$ uzayından $C^{(i)}(R)$ uzayına dönüşüm yapan operatör ise, φ fonksiyonu, $[-a, a]$ aralığında sürekli, $i \geq 0$ bir tamsayı olmak üzere $\mathcal{L}_{k,j}$ operatörünün, $X^{(i)}$ uzayından $C^{(i)}(R)$ uzayına dönüşüm yapan bir operatör olduğu söylenebilir.

(ii) φ pozitif ve $[-a, a]$ aralığında sürekli olduğundan $i \geq 1$ tamsayı olmak üzere

$$\frac{d^i}{dx^i}(l_0 f)(x - ju) \geq 0$$

dır. Buradan da

$$\frac{d^i}{dx^i}(\mathcal{L}_{0,j}(f))(x) \geq 0$$

elde ederiz.

(iii) φ , $[-a, a]$ aralığında sürekli olsun. Eğer $f^{(i)} \geq 0$ ve bazı $i \geq 1$ için

$$\left(\frac{d^i}{dx^i} \right) \mathcal{L}_{0,j}(f, x) \geq 0 \text{ ise } k \in \mathbb{Z} \text{ için}$$

$$\frac{d^i}{dx^i} \mathcal{L}_{k,j}(f, x) \geq 0$$

olur.

(iv) Eğer $l_0(f)$ artan sürekli bir fonksiyon ve φ pozitif, $[-a, a]$ aralığında sürekli ise $\mathcal{L}_{0,j}$ artan ve sürekli bir fonksiyondur.

Sonuç 3.1.3.

(i) (3.1.6)'den $k \in \mathbb{Z}$ için

$$\mathcal{L}_{k,j}(f; x) = \int_{-\infty}^{\infty} l_k(f, u) \frac{1}{j} \varphi\left(\frac{1}{j}(2^k x - u)\right) du \quad (3.1.27)$$

olduğu kolayca görülebilir. (3.1.3)'den de her $j \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ için

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{j} \varphi\left(\frac{1}{j}(x - u)\right) du = 1 \quad (3.1.28)$$

olduğu görülür. $j \in \mathbb{N}$ için

$$\varphi_j^*(.) := \frac{1}{j} \varphi\left(\frac{1}{j}.\right) \quad (3.1.29)$$

eşitliğinden φ_j^* 'nin desteği $[-ja, ja]$ aralığı olur.

φ 'ye bağlı olan $\mathcal{L}_{k,j}$ operatörü ile φ_j^* 'ye bağlı olan $\mathcal{L}_k$ operatörünün birbirine eşit olduğu açıktır.

3.2. Örnekler

Aşağıdaki dört örnekte l_k 'nin özel durumlarında, ötelemeyi koruyan operatörleri göreceğiz. Ayrıca bu operatörlerin Bölüm 3.1'de ispatladığımız teoremleri sağladığını göstereceğiz. Burada temel fonksiyonumuz φ 2. bölümdeki gibi olacaktır ve ayrıca aşağıda tanımlayacağımız $A_{k,j}$ operatörlerinde φ 'nin şartlarına ek olarak φ 'nin çift ve sürekli olduğunu kabul edeceğiz.

Her bir $k \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{N}$ için 2. bölümdeki A_k , B_k , L_k , Γ_k operatörlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$(i) \quad A_{k,j}(f;x) := \int_{-\infty}^{\infty} \tau_k^f(2^k x - ju) \varphi(u) du \quad (3.2.30)$$

$$(ii) \quad B_{k,j}(f;x) := \int_{-\infty}^{\infty} \beta_k(f, 2^k x - ju) \varphi(u) du \quad (3.2.31)$$

$$(iii) \quad L_{k,j}(f;x) := \int_{-\infty}^{\infty} c_k^f(2^k x - ju) \varphi(u) du \quad (3.2.32)$$

$$(iv) \quad \Gamma_{k,j}(f;x) := \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_k^f(2^k x - ju) \varphi(u) du . \quad (3.2.33)$$

$A_k = A_{k,1}$, $B_k = B_{k,1}$, $L_k = L_{k,1}$ ve $\Gamma_k = \Gamma_{k,1}$ dir. İlk olarak (3.1.1) ifadesinin bütün l_k 'lar için geçerli olduğunu belirtelim. Bu yüzden (2.1.7) özelliği, (2.2.27)'de olduğu gibi $A_{k,j}$, $B_{k,j}$, $L_{k,j}$, $\Gamma_{k,j}$ için de geçerlidir. Her $k \in \mathbb{Z}$ için,

$$\begin{aligned} A_{k,j}(f;x) &= A_{0,j}(f(2^{-k} \cdot); 2^k x) \\ B_{k,j}(f;x) &= B_{0,j}(f(2^{-k} \cdot); 2^k x) \\ L_{k,j}(f;x) &= L_{0,j}(f(2^{-k} \cdot); 2^k x) \\ \Gamma_{k,j}(f;x) &= \Gamma_{0,j}(f(2^{-k} \cdot); 2^k x) \end{aligned} \quad (3.2.34)$$

olduğu açıktır. Aynı zamanda $k \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ için;

$$I_{k,q}^A(f;x) := - \sum_{j=1}^q (-1)^j \binom{q}{j} A_{k,j}(f,x) \quad (3.2.35)$$

$$I_{k,q}^B(f;x) := - \sum_{j=1}^q (-1)^j \binom{q}{j} B_{k,j}(f,x) \quad (3.2.36)$$

$$I_{k,q}^L(f;x) := - \sum_{j=1}^q (-1)^j \binom{q}{j} L_{k,j}(f,x) \quad (3.2.37)$$

$$I_{k,q}^\Gamma(f;x) := - \sum_{j=1}^q (-1)^j \binom{q}{j} \Gamma_{k,j}(f,x) \quad (3.2.38)$$

ifadelerini tanımlayalım. (3.2.35)-(3.2.38) eşitlikleri ile tanımlanan operatörler, (2.2.27) ve (3.2.34)'de tanımlanan temel özellikleri sağlar.

π_n derecesi n veya n den küçük olan polinomların sınıfını göstermek üzere yukarıda tanımlanan operatörlerden π_n uzayından π_n uzayına dönüşüm yapan lineer operatörlerdir. Yani

$$\begin{aligned} A_{k,j}(\pi_n) &\subseteq \pi_n, & B_{k,j}(\pi_n) &\subseteq \pi_n \\ L_{k,j}(\pi_n) &\subseteq \pi_n, & \Gamma_{k,j}(\pi_n) &\subseteq \pi_n \end{aligned} \quad (3.2.39)$$

ve

$$\begin{aligned} I_{k,q}^A(\pi_n) &\subseteq \pi_n, & I_{k,q}^B(\pi_n) &\subseteq \pi_n \\ I_{k,q}^L(\pi_n) &\subseteq \pi_n, & I_{k,q}^\Gamma(\pi_n) &\subseteq \pi_n. \end{aligned} \quad (3.2.40)$$

Buna ek olarak herhangi bir $j \in \mathbb{N}$ için

$$A_{k,j}(1) = B_{k,j}(1) = L_{k,j}(1) = \Gamma_{k,j}(1) = 1 \quad (3.2.41)$$

ve

$$I_{k,q}^A(1) = I_{k,q}^B(1) = I_{k,q}^L(1) = I_{k,q}^\Gamma(1) = 1 \quad (3.2.42)$$

dir. Şimdi yukarıdaki özel operatörlerin sağladığı özellikleri gösterelim.

Teorem 3.2.1. Kabul edelim ki $f \in X$, $\delta > 0$, $p \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$ olsun.

$$\tilde{\omega}_p(A_k f; \delta) \leq \tilde{\omega}_p(f; \delta) \quad (3.2.43)$$

$$\tilde{\omega}_p(B_k f; \delta) \leq \tilde{\omega}_p(f; \delta) \quad (3.2.44)$$

$$\tilde{\omega}_p(L_k f; \delta) \leq \tilde{\omega}_p(f; \delta) \quad (3.2.45)$$

$$\tilde{\omega}_p(\Gamma_k f; \delta) \leq \tilde{\omega}_p(f; \delta). \quad (3.2.46)$$

İspat.

$$(i) \quad \tau_0^f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u-t)\varphi(t)dt$$

ve

$$\begin{aligned} (\Delta_h^p r_0^f)(x-u) &= \sum_{i=0}^p (-1)^{p-i} \binom{p}{i} (\tau_0^f)(x-u+ih) \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^{p-i} \binom{p}{i} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u+ih-t)\varphi(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^p (-1)^{p-i} \binom{p}{i} f(x-u-t+ih) \right) \varphi(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} ((\Delta_h^p f)(x-u-t))\varphi(t)dt \end{aligned}$$

olduğundan

$$|(\Delta_h^p \tau_0^f)(x-u)| \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)dt \right) \|\Delta_h^p f\|_{\infty} \leq \tilde{\omega}_p(f, h)$$

elde edilir. Teorem 3.1.1.'den (3.2.43)'deki eşitsizlik sağlanmış olur.

(ii) Burada $\beta_0(f, u) = f(u)$ ve

$$|(\Delta_h^p \beta_0(f))(x-u)| = |(\Delta_h^p f)(x-u)| \leq \tilde{\omega}_p(f; h).$$

Teorem 3.1.1'den (3.2.44) eşitsizliğinin doğru olduğu açıktır.

$$(iii) \quad c_0^f(u) = \int_u^{u+1} f(t)dt = \int_0^1 f(w+u)dw$$

dir. Buna ek olarak

$$\begin{aligned} (\Delta_h^p c_0^f)(x-u) &= \sum_{i=0}^p (-1)^{p-i} \binom{p}{i} (c_0^f)(x-u+ih) \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^{p-i} \binom{p}{i} \int_0^1 f(w+x-u+ih)dw \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^p (-1)^{p-i} \binom{p}{i} f(w+x-u+ih) \right) dw \\
&= \int_0^1 ((\Delta_h^p f)(w+x-u)) dw
\end{aligned}$$

olduğundan

$$|(\Delta_h^p c_0^f)(x-u)| \leq \|\Delta_h^p f\|_\infty \leq \tilde{\omega}_p(f, h)$$

elde edilir. Teorem 3.1.1.'den de (3.2.45) eşitsizliği sağlanır.

$$(iii) \quad \gamma_0^f(u) = \sum_{j^*=0}^n w_{j^*} f\left(u + \frac{j^*}{n}\right)$$

ve

$$\begin{aligned}
\Delta_h^p \gamma_0^f(f; x-u) &= \sum_{i=0}^p (-1)^{p-i} \binom{p}{i} \gamma_0^f(x-u+ih) \\
&= \sum_{i=0}^p (-1)^{p-i} \binom{p}{i} \left(\sum_{j^*=0}^n w_{j^*} f\left(x-u+ih + \frac{j^*}{n}\right) \right) \\
&= \sum_{j^*=0}^n w_{j^*} \left(\sum_{i=0}^p (-1)^{p-i} \binom{p}{i} f\left(x-u + \frac{j^*}{n} + ih\right) \right) \\
&= \sum_{j^*=0}^n w_{j^*} \left((\Delta_h^p f)\left(x-u + \frac{j^*}{n}\right) \right)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$|(\Delta_h^p \gamma_0^f)(x-u)| \leq \|\Delta_h^p f\|_\infty \left(\sum_{j^*=0}^n w_{j^*} \right) \leq \tilde{\omega}_p(f; h).1$$

elde edilir. Teorem 3.1.1.'den (3.2.46)'daki eşitsizlik sağlanmış olur.

Sonuç 3.2.1.

(i) Teorem 3.2.1.'deki (3.2.43)-(3.2.46) arasındaki eşitsizlikler, $p=1$ olduğu zaman kesindir. Bu eşitlik durumu $f(x) = x \in C_U(R)$ 'nin olduğu durumlarda vardır.

$p > 1$ olduğunda kesinlik aynı fonksiyon tarafından uygulanır. Yani eşitsizliğin her iki tarafı da eşittir.

(ii) Teorem 2.2.3.'de A_k , B_k , L_k , Γ_k operatörlerinin birim operatöre yakınsadığını gösterdik. $p > 1$ olduğu varsayımdaki ω_p hala açık problem durumundadır.

Teorem 3.2.2. $A_{k,j}$, $B_{k,j}$, $L_{k,j}$, $\Gamma_{k,j}$ operatörleri ötelemeyi koruyan operatörlerdir.

İspat. A_k , $A_{k,j}$, B_k , $B_{k,j}$, L_k , $L_{k,j}$, Γ_k , $\Gamma_{k,j}$ operatörlerini tanımlayan l_k operatörü, bütün operatörlerde aynıdır.

(i) $A_{k,j}$ operatörünü göz önüne alalım (φ çift).

$$\begin{aligned} l_0(f; x) &= \tau_0^f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t-x) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(x-t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Teorem 3.1.2.'deki (3.1.9) varsayımını kullanalım. $a \in R$ için

$$\begin{aligned} l_0(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k x - ju) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(2^{-k}(2^k x - ju - t) + \alpha) \varphi(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \alpha - 2^{-k} ju - 2^{-k} t) \varphi(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(2^{-k} 2^k (x + \alpha) - 2^{-k} t) \varphi(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(2^{-k} [2^k (u + \alpha) - ju - t]) \varphi(t) dt \\ &= l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k (u + \alpha) - ju). \end{aligned}$$

$A_{k,j}$ operatörünün $A_{k,j}(f(\cdot + \alpha); x) = A_{k,j}(f; x + \alpha)$ ifadesini sağladığını gösterelim.

$$A_{k,j}(f(\cdot + \alpha); x) = A_{0,j}(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \tau_0^{f_\alpha(2^{-k} \cdot)}(u) \varphi(2^k x - ju) du$$

$u = 2^k x - ju$ dönüşümü yapalım.

$$\begin{aligned} A_{k,j}(f(\cdot + \alpha); x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tau_0^{f_\alpha(2^{-k} \cdot)}(2^k x - ju) \varphi(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} l_0(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k x - ju) \varphi(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k(x + \alpha) - ju) \varphi(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tau_0^{f(2^{-k} \cdot)}(2^k(x + \alpha) - ju) \varphi(u) du. \end{aligned}$$

Tekrar $u = 2^k(x + \alpha) - ju$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} A_{k,j}(f(\cdot + \alpha); x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tau_0^{f(2^{-k} \cdot)}(u) \varphi(2^k(x + \alpha) - ju) du \\ &= A_{0,j}(f(2^{-k} \cdot); 2^k(x + \alpha)) = A_{k,j}(f(\cdot + \alpha); x) \end{aligned}$$

olur.

(ii) $B_{k,j}$ operatöründe $l_0 f = f$ olduğunu biliyoruz. (3.1.9) varsayımını kullanalım.

$$\begin{aligned} l_0(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k x - ju) &= f(2^{-k}(2^k x - ju) + \alpha) \\ &= f(x + \alpha - 2^{-k} ju) \\ &= f(2^{-k}[2^k(x + \alpha) - ju]) \\ &= l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k(x + \alpha) - ju). \end{aligned}$$

Şimdi de $B_{k,j}$ operatörünün ötelemeyi koruduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} B_{k,j}(f(\cdot + \alpha); x) &= B_{0,j}(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(u) \varphi(2^k x - ju) du. \end{aligned}$$

$u = 2^k x - ju$ dönüşümünü uygulayalım.

$$\begin{aligned}
B_{k,j}(f(\cdot + \alpha); x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\alpha}(2^k x - ju) \varphi(u) du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} l_0(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k x - ju) \varphi(u) du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k(x + \alpha) - ju) \varphi(u) du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(2^k(x + \alpha) - ju) \varphi(u) du .
\end{aligned}$$

Tekrar $u = 2^k(x + \alpha) - ju$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}
B_{k,j}(f(\cdot + \alpha); x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \varphi(2^k(x + \alpha) - ju) du \\
&= B_{0,j}(f(2^{-k} \cdot); 2^k(x + \alpha)) = B_{k,j}(f; x + \alpha)
\end{aligned}$$

olur.

(iii) $L_{k,j}$ operatörünü ele alalım.

$$l_0(f; x) = c_0^f(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt$$

dir. Burada (3.1.9) varsayımını kullanalım.

$$\begin{aligned}
l_0(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k x - ju) &= \int_{2^k x - ju}^{2^k x - ju + 1} f(2^{-k} t + \alpha) dt \\
&= \int_{2^k(x + \alpha) - ju}^{2^k(x + \alpha) - ju + 1} f(2^{-k} t) dt \\
&= l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k(x + \alpha) - ju) .
\end{aligned}$$

Şimdi $L_{k,j}$ operatörünün ötelemeyi koruduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
L_{k,j}(f(\cdot + \alpha); x) &= L_{0,j}(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} c_0^{f_{\alpha}(2^{-k} \cdot)}(u) \varphi(2^k x - ju) du .
\end{aligned}$$

$u = 2^k x - ju$ dönüşümü yapalım.

$$L_{k,j}(f(\cdot + \alpha); x) = \int_{-\infty}^{\infty} c_0^{f_{\alpha}(2^{-k} \cdot)}(2^k x - ju) \varphi(u) du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} l_0(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k x - ju) \varphi(u) du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k (x + \alpha) - ju) \varphi(u) du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} c_0^{f(2^{-k} \cdot)}(2^k (x + \alpha) - ju) \varphi(u) du .$$

Tekrar $u = 2^k (x + \alpha) - ju$ dönüşümü yaparsak

$$L_{k,j}(f(\cdot + \alpha); x) = \int_{-\infty}^{\infty} c_0^{f(2^{-k} \cdot)}(u) \varphi(2^k (x + \alpha) - ju) du$$

$$= L_{0,j}(f(2^{-k} \cdot); 2^k (x + \alpha))$$

$$= L_{k,j}(f; x + \alpha)$$

olur.

(iv) $\Gamma_{k,j}$ operatöründe ise

$$l_0(f; u) = \sum_{j^*=0}^n w_{j^*} f(u + \frac{j^*}{n}).$$

Burada (3.1.9) varsayımını kullanırsak

$$l_0(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k x - ju) = \sum_{j^*=0}^n w_{j^*} f(2^{-k} (2^k x - ju + \frac{j^*}{n}) + \alpha)$$

$$= \sum_{j^*=0}^n w_{j^*} f(2^{-k} (2^k (x + \alpha) - ju + \frac{j^*}{n}))$$

$$= l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k (x + \alpha) - ju)$$

olur. Şimdi $\Gamma_{k,j}$ operatörünün ötelemeyi koruduğunu gösterelim.

$$\Gamma_{k,j}(f(\cdot + \alpha); x) = \Gamma_{0,j}(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_0^{f_\alpha(2^{-k} \cdot)}(u) \varphi(2^k x - ju) du .$$

$u = 2^k x - ju$ dönüşümü yaparsak

$$\begin{aligned}
\Gamma_{k,j}(f(\cdot + \alpha); x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_0^{f_\alpha(2^{-k} \cdot)}(2^k x - ju) \varphi(u) du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} l_0(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k x - ju) \varphi(u) du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k (x + \alpha) - ju) \varphi(u) du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_0^{f(2^{-k} \cdot)}(2^k (x + \alpha) - ju) \varphi(u) du .
\end{aligned}$$

$u = 2^k (x + \alpha) - ju$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}
\Gamma_{k,j}(f(\cdot + \alpha); x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_0^{f(2^{-k} \cdot)}(u) \varphi(2^k (x + \alpha) - ju) du \\
&= \Gamma_{0,j}(f(2^{-k} \cdot); 2^k (x + \alpha)) \\
&= \Gamma_{k,j}(f; x + \alpha)
\end{aligned}$$

olur.

Teorem 3.2.3. $f \in X$, $\delta > 0$, $p \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$ için

$$(i) \quad \tilde{\omega}_p(A_{k,j}f; \delta) \leq \tilde{\omega}_p(f; \delta) \quad (3.2.47)$$

$$(ii) \quad \tilde{\omega}_p(B_{k,j}f; \delta) \leq \tilde{\omega}_p(f; \delta) \quad (3.2.48)$$

$$(iii) \quad \tilde{\omega}_p(L_{k,j}f; \delta) \leq \tilde{\omega}_p(f; \delta) \quad (3.2.49)$$

$$(iv) \quad \tilde{\omega}_p(\Gamma_{k,j}f; \delta) \leq \tilde{\omega}_p(f; \delta) \quad (3.2.50)$$

elde ederiz.

İspat. Teorem 3.2.1.'dekinin aynısıdır. Burada farklı olarak Teorem 3.1.3'ü kullanıyoruz.

(i) $A_{k,j}$ operatörünü ele alalım (φ çift).

$$\left| \Delta_h^p(A_{0,j}(f; x)) \right| = \left| \sum_{i=0}^p (-1)^{p-i} \binom{p}{i} A_{0,j}(f; x + ih) \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \sum_{i=0}^p (-1)^{p-i} \binom{p}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_0^f(u) \varphi(2^k(x+ih) - ju) du \right| \\
&= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^p (-1)^{p-i} \binom{p}{i} \tau_0^f(2^k(x+ih) - ju) \right) \varphi(u) du \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\Delta_h^p \tau_0^f(2^k x - ju)| \varphi(u) du \leq \tilde{\omega}_p(f; h)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
|\Delta_h^p A_{k,j}(f; x)| &= |\Delta_{2^k h}^p A_{0,j}(f(2^{-k} \cdot); 2^k x)| \\
&\leq \tilde{\omega}_p(f(2^{-k} \cdot); 2^k h) = \tilde{\omega}_p(f; h)
\end{aligned}$$

elde edilir. Her iki tarafın $\delta > 0$ için supremumu alınır

$$\tilde{\omega}_p(A_{k,j} f; \delta) \leq \tilde{\omega}_p(f; \delta)$$

olur.

(ii) $B_{k,j}$ operatörünün de ise

$$\begin{aligned}
|\Delta_h^p (B_{0,j}(f; x))| &= \left| \sum_{i=0}^p (-1)^{p-i} \binom{p}{i} B_{0,j}(f; x+ih) \right| \\
&= \left| \sum_{i=0}^p (-1)^{p-i} \binom{p}{i} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \varphi(2^k(x+ih) - ju) du \right| \\
&= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^p (-1)^{p-i} \binom{p}{i} f(2^k(x+ih) - ju) \right) \varphi(u) du \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\Delta_h^p f(2^k x - ju)| \varphi(u) du \leq \tilde{\omega}_p(f; h)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
|\Delta_h^p B_{k,j}(f; x)| &= |\Delta_{2^k h}^p B_{0,j}(f(2^{-k} \cdot); 2^k x)| \\
&\leq \tilde{\omega}_p(f(2^{-k} \cdot); 2^k h) = \tilde{\omega}_p(f; h)
\end{aligned}$$

elde edilir. Her iki tarafın $\delta > 0$ için supremumu alınır

$$\tilde{\omega}_p(B_{k,j}f; \delta) \leq \tilde{\omega}_p(f; \delta)$$

olur.

(iii) $L_{k,j}$ operatörünü alalım.

$$\begin{aligned} |\Delta_h^p(L_{0,j}(f; x))| &= \left| \sum_{i=0}^p (-1)^{p-i} \binom{p}{i} L_{0,j}(f; x + ih) \right| \\ &= \left| \sum_{i=0}^p (-1)^{p-i} \binom{p}{i} \int_{-\infty}^{\infty} c_0^f(u) \varphi(2^k(x + ih) - ju) du \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^p (-1)^{p-i} \binom{p}{i} c_0^f(2^k(x + ih) - ju) \right) \varphi(u) du \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\Delta_h^p c_0^f(2^k x - ju)| \varphi(u) du \leq \tilde{\omega}_p(f; h) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} |\Delta_h^p L_{k,j}(f; x)| &= |\Delta_{2^k h}^p L_{0,j}(f(2^{-k} \cdot); 2^k x)| \\ &\leq \tilde{\omega}_p(f(2^{-k} \cdot); 2^k h) = \tilde{\omega}_p(f; h) \end{aligned}$$

elde edilir. Her iki tarafın $\delta > 0$ için supremumu alınırsa

$$\tilde{\omega}_p(L_{k,j}f; \delta) \leq \tilde{\omega}_p(f; \delta)$$

olur.

(iv) $\Gamma_{k,j}$ operatörünü alalım.

$$\begin{aligned} |\Delta_h^p(\Gamma_{0,j}(f; x))| &= \left| \sum_{i=0}^p (-1)^{p-i} \binom{p}{i} \Gamma_{0,j}(f; x + ih) \right| \\ &= \left| \sum_{i=0}^p (-1)^{p-i} \binom{p}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_0^f(u) \varphi(2^k(x + ih) - ju) du \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^p (-1)^{p-i} \binom{p}{i} \gamma_0^f(2^k(x + ih) - ju) \right) \varphi(u) du \right| \end{aligned}$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \Delta_h^p \gamma_0^f(2^k x - ju) \right| \varphi(u) du \leq \tilde{\omega}_p(f; h)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \left| \Delta_h^p \Gamma_{k,j}(f; x) \right| &= \left| \Delta_{2^k h}^p \Gamma_{0,j}(f(2^{-k} \cdot); 2^k x) \right| \\ &\leq \tilde{\omega}_p(f(2^{-k} \cdot); 2^k h) = \tilde{\omega}_p(f; h). \end{aligned}$$

Her iki tarafın $\delta > 0$ için supremumu alınır

$$\tilde{\omega}_p(\Gamma_{k,j} f; \delta) \leq \tilde{\omega}_p(f; \delta)$$

olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi $p > 1$ olduğunda (3.2.46)-(3.2.49) arasındaki eşitsizlikler $f(x) = x$ için kesindir.

Teorem 3.2.4. (3.2.47)-(3.2.50) arasındaki eşitsizlikler, $f(x) = x \in C_U(R)$ fonksiyonu için kesindir. Yani bu eşitsizlikler için eşitlik durumu gerçekleşir.

İspat. Teorem 2.2.2.'nin ispatında şunları görebiliriz.

$$r_k^f(2^k x - ju) - r_k^f(2^k y - ju) = x - y$$

$$f(2^{-k}(2^k x - ju)) - f(2^{-k}(2^k y - ju)) = x - y$$

$$c_k^f(2^k x - ju) - c_k^f(2^k y - ju) = x - y$$

$$\gamma_k^f(2^k x - ju) - \gamma_k^f(2^k y - ju) = x - y.$$

$$\begin{aligned} A_{k,j}(id; x) - A_{k,j}(id; y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tau_k^f(u) \varphi(2^k x - ju) du - \int_{-\infty}^{\infty} \tau_k^f(u) \varphi(2^k y - ju) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tau_k^f(2^k x - ju) \varphi(u) du - \int_{-\infty}^{\infty} \tau_k^f(2^k y - ju) \varphi(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\tau_k^f(2^k x - ju) - \tau_k^f(2^k y - ju)) \varphi(u) du \\ &= x - y \end{aligned}$$

ifadesinin her iki tarafının $\delta > 0$ için supremumu alınır

$$\sup_{|x-y|\leq\delta} |A_{k,j}(id;x) - A_{k,j}(id;y)| = \sup_{|x-y|\leq\delta} |x-y|$$

yani $\tilde{\omega}_p(A_{k,j}(id);\delta) = \tilde{\omega}_p(id;\delta)$ elde edilir.

$$\begin{aligned} B_{k,j}(id;x) - B_{k,j}(id;y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{u}{2^k}\right)\varphi(2^k x - ju)du - \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{u}{2^k}\right)\varphi(2^k y - ju)du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(2^{-k}(2^k x - ju))\varphi(u)du - \int_{-\infty}^{\infty} f(2^{-k}(2^k y - ju))\varphi(u)du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (f(2^{-k}(2^k x - ju)) - f(2^{-k}(2^k y - ju)))\varphi(u)du \\ &= x - y \end{aligned}$$

ifadesinin her iki tarafının $\delta > 0$ için supremumu alınırsa

$$\sup_{|x-y|\leq\delta} |B_{k,j}(id;x) - B_{k,j}(id;y)| = \sup_{|x-y|\leq\delta} |x-y|$$

yani $\tilde{\omega}_p(B_{k,j}(id);\delta) = \tilde{\omega}_p(id;\delta)$ olur.

$$\begin{aligned} L_{k,j}(id;x) - L_{k,j}(id;y) &= \int_{-\infty}^{\infty} c_k^f(u)\varphi(2^k x - ju)du - \int_{-\infty}^{\infty} c_k^f(u)\varphi(2^k y - ju)du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} c_k^f(2^k x - ju)\varphi(u)du - \int_{-\infty}^{\infty} c_k^f(2^k y - ju)\varphi(u)du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (c_k^f(2^k x - ju) - c_k^f(2^k y - ju))\varphi(u)du \\ &= x - y \end{aligned}$$

ifadesinin her iki tarafının $\delta > 0$ için supremumu alınırsa

$$\sup_{|x-y|\leq\delta} |L_{k,j}(id;x) - L_{k,j}(id;y)| = \sup_{|x-y|\leq\delta} |x-y|$$

yani $\tilde{\omega}_p(L_{k,j}(id);\delta) = \tilde{\omega}_p(id;\delta)$ olur.

$$\begin{aligned} \Gamma_{k,j}(id;x) - \Gamma_{k,j}(id;y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_k^f(u)\varphi(2^k x - ju)du - \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_k^f(u)\varphi(2^k y - ju)du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_k^f(2^k x - ju)\varphi(u)du - \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_k^f(2^k y - ju)\varphi(u)du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\gamma_k^f(2^k x - ju) - \gamma_k^f(2^k y - ju))\varphi(u)du \end{aligned}$$

$$= x - y$$

ifadesinin her iki tarafının $\delta > 0$ için supremumu alınır

$$\sup_{|x-y|\leq\delta} |\Gamma_{k,j}(id;x) - \Gamma_{k,j}(id;y)| = \sup_{|x-y|\leq\delta} |x - y|$$

yani $\tilde{\omega}_p(\Gamma_{k,j}(id);\delta) = \tilde{\omega}_p(id;\delta)$ olur.

Örnek verdiğimiz bu operatörlerin j -ler için yakınsaklığını inceleyelim.

Teorem 3.2.5. $f \in X$, $k \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{N}$ olsun. Burada

$$(i) \quad |A_{k,j}(f,x) - f(x)| \leq \omega_1\left(f; \frac{ja}{2^{k-1}}\right) \quad (3.2.51)$$

$$(ii) \quad |B_{k,j}(f,x) - f(x)| \leq \omega_1\left(f; \frac{ja}{2^k}\right) \quad (3.2.52)$$

$$(iii) \quad |L_{k,j}(f,x) - f(x)| \leq \omega_1\left(f; \frac{ja+1}{2^k}\right) \quad (3.2.53)$$

$$(iv) \quad |\Gamma_{k,j}(f,x) - f(x)| \leq \omega_1\left(f; \frac{ja+1}{2^k}\right). \quad (3.2.54)$$

İspat. (i) $A_{k,j}$ operatörünü ele alalım (φ çift).

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{u,y \in R \\ |u-y| \leq a}} |I_0(f,u) - f(y)| &= \sup_{\substack{u,y \in R \\ |u-y| \leq a}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(u-t)dt - \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\varphi(u-t)dt \right| \\ &\leq \sup_{\substack{u,y \in R \\ |u-y| \leq a}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f(y)| \varphi(u-t)dt \\ &\leq \sup_{\substack{u,y \in R \\ |u-y| \leq a}} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_1(f; |t-y|) \varphi(u-t)dt \\ &= \omega_1(f; 2a) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u-t)dt = \omega_1(f; 2a) \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz.

$$|A_{k,j}(f;x) - f(x)| = |A_{0,j}(f(2^{-k}\cdot); 2^k x) - f(2^{-k}(2^k x))|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \tau_0^{f(2^{-k} \cdot)}(u) \varphi(2^k x - ju) du - f(2^{-k}(2^k x)) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2^k x - ju) du \right| \\
&= \left| \int_{-\infty}^{\infty} [l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x))] \varphi(2^k x - ju) du \right| \\
&\leq \left| \int_{2^k x - ja}^{2^k x + ja} [l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x))] \varphi(2^k x - ju) du \right| \\
&\leq \sup_{2^k x - ja \leq u \leq 2^k x + ja} \left| l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x)) \right| \left(\int_{2^k x - ja}^{2^k x + ja} \varphi(2^k x - ju) du \right)
\end{aligned}$$

olduğundan $g := f(2^{-k} \cdot)$ diyelim,

$$\begin{aligned}
|A_{k,j}(f; x) - f(x)| &= \sup_{|u - 2^k x| \leq ja} |l_0(g; u) - g(2^k x)| \\
&\leq \omega_1(g; 2ja) = \omega_1(f; \frac{ja}{2^{k-1}})
\end{aligned}$$

olur.

(ii) $B_{k,j}$ operatöründe $l_0(f, u) = f(u)$ olduğunu biliyoruz.

$$\sup_{\substack{u, y \in R \\ |u - y| \leq a}} |l_0(f, u) - f(y)| = \sup_{\substack{u, y \in R \\ |u - y| \leq a}} |f(u) - f(y)| = \omega_1(f; a)$$

olur.

$$|B_{k,j}(f; x) - f(x)| = |B_{0,j}(f(2^{-k} \cdot); 2^k x) - f(2^{-k}(2^k x))|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \varphi(2^k x - ju) du - f(2^{-k}(2^k x)) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2^k x - ju) du \right| \\
&= \left| \int_{-\infty}^{\infty} [l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x))] \varphi(2^k x - ju) du \right| \\
&\leq \left| \int_{2^k x - ja}^{2^k x + ja} [l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x))] \varphi(2^k x - ju) du \right| \\
&\leq \sup_{2^k x - ja \leq u \leq 2^k x + ja} \left| l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x)) \right| \left(\int_{2^k x - ja}^{2^k x + ja} \varphi(2^k x - ju) du \right).
\end{aligned}$$

$g := f(2^{-k} \cdot)$ dersek

$$|B_{k,j}(f;x) - f(x)| = \sup_{|u-2^k x| \leq ja} |l_0(g;u) - g(2^k x)| \leq \omega_1(g;ja) = \omega_1\left(f; \frac{ja}{2^k}\right)$$

olur.

(iii) $L_{k,j}$ operatöründe ise

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{u,y \in R \\ |u-y| \leq a}} |l_0(f,u) - f(y)| &= \sup_{\substack{u,y \in R \\ |u-y| \leq a}} \left| \int_u^{u+1} f(t)dt - f(y) \right| \\ &= \sup_{\substack{u,y \in R \\ |u-y| \leq a}} \left| \int_u^{u+1} f(t)dt - f(y) \int_u^{u+1} dt \right| \\ &\leq \sup_{\substack{u,y \in R \\ |u-y| \leq a}} \int_u^{u+1} |f(t) - f(y)| dt \\ &\leq \sup_{\substack{u,y \in R \\ |u-y| \leq a}} \int_u^{u+1} \omega_1(f; |t-y|) dt \\ &\leq \sup_{\substack{u,y \in R \\ |u-y| \leq a}} \int_0^1 \omega_1(f; |t+u-y|) dt \\ &\leq \sup_{\substack{u,y \in R \\ |u-y| \leq a}} \int_0^1 \omega_1(f; t+|u-y|) dt \\ &\leq \sup_{\substack{u,y \in R \\ |u-y| \leq a}} \omega_1(f; 1+|u-y|) \\ &= \omega_1(f; 1+a) \end{aligned}$$

olur.

$$|L_{k,j}(f;x) - f(x)| = |L_{0,j}(f(2^{-k} \cdot); 2^k x) - f(2^{-k}(2^k x))|$$

$$\begin{aligned} &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} c_0^{f(2^{-k} \cdot)}(u) \varphi(2^k x - ju) du - f(2^{-k}(2^k x)) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2^k x - ju) du \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} [l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x))] \varphi(2^k x - ju) du \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left| \int_{2^k x - ja}^{2^k x + ja} [l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x))] \varphi(2^k x - ju) du \right| \\
&\leq \sup_{2^k x - ja \leq u \leq 2^k x + ja} \left| l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x)) \right| \left(\int_{2^k x - ja}^{2^k x + ja} \varphi(2^k x - ju) du \right).
\end{aligned}$$

$g := f(2^{-k} \cdot)$ dersek

$$|L_{k,j}(f; x) - f(x)| = \sup_{|u - 2^k x| \leq ja} |l_0(g; u) - g(2^k x)| \leq \omega_1(g; 1 + ja) = \omega_1\left(f; \frac{ja + 1}{2^k}\right)$$

olur.

(iv) Γ_k operatörünü göz önüne alalım.

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{u, y \in R \\ |u - y| \leq a}} |l_0(f, u) - f(y)| &= \sup_{\substack{u, y \in R \\ |u - y| \leq a}} \left| \sum_{j=0}^n w_j f\left(u + \frac{j}{n}\right) - f(y) \right| \\
&= \sup_{\substack{u, y \in R \\ |u - y| \leq a}} \left| \sum_{j=0}^n w_j f\left(u + \frac{j}{n}\right) - f(y) \sum_{j=0}^n w_j \right| \\
&\leq \sup_{\substack{u, y \in R \\ |u - y| \leq a}} \sum_{j=0}^n w_j |f(u + \frac{j}{n}) - f(y)| \\
&\leq \sup_{\substack{u, y \in R \\ |u - y| \leq a}} \sum_{j=0}^n w_j \omega_1(f; |u + \frac{j}{n} - y|) \\
&\leq \sup_{\substack{u, y \in R \\ |u - y| \leq a}} \sum_{j=0}^n w_j \omega_1(f; \frac{j}{n} + |u - y|) \\
&\leq (\sum_{j=0}^n w_j) \omega_1(f; 1 + a) \\
&= \omega_1(f; a + 1)
\end{aligned}$$

olur. Burada

$$|\Gamma_{k,j}(f; x) - f(x)| = |\Gamma_{0,j}(f(2^{-k} \cdot); 2^k x) - f(2^{-k}(2^k x))|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_0^{f(2^{-k} \cdot)}(u) \varphi(2^k x - ju) du - f(2^{-k}(2^k x)) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2^k x - ju) du \right| \\
&= \left| \int_{-\infty}^{\infty} [l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x))] \varphi(2^k x - ju) du \right| \\
&\leq \left| \int_{2^k x - ja}^{2^k x + ja} [l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x))] \varphi(2^k x - ju) du \right| \\
&\leq \sup_{2^k x - ja \leq u \leq 2^k x + ja} |l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x))| \left(\int_{2^k x - ja}^{2^k x + ja} \varphi(2^k x - ju) du \right).
\end{aligned}$$

$g := f(2^{-k} \cdot)$ dersek

$$|\Gamma_{k,j}(f; x) - f(x)| = \sup_{|u - 2^k x| \leq ja} |l_0(g; u) - g(2^k x)| \leq \omega_1(g; 1 + ja) = \omega_1\left(f; \frac{ja + 1}{2^k}\right)$$

olur.

Sonuç 3.2.2.

(i) Teorem 3.2.2.'a göre (3.2.35)-(3.2.38)'deki $I_{k,q}^A, I_{k,q}^B, I_{k,q}^L, I_{k,q}^\Gamma$ operatörleri ötelemeyi koruyan operatörlerdir.

(ii) Teorem 3.2.3. ve (3.2.35)-(3.2.38)'den $p, q \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$, $f \in X$, $\delta > 0$ için

$$\tilde{\omega}_p(I_{k,q}^A(f); \delta) \leq (2^q - 1) \tilde{\omega}_p(f; \delta) \quad (3.2.55)$$

$$\tilde{\omega}_p(I_{k,q}^B(f); \delta) \leq (2^q - 1) \tilde{\omega}_p(f; \delta) \quad (3.2.56)$$

$$\tilde{\omega}_p(I_{k,q}^L(f); \delta) \leq (2^q - 1) \tilde{\omega}_p(f; \delta) \quad (3.2.57)$$

$$\tilde{\omega}_p(I_{k,q}^\Gamma(f); \delta) \leq (2^q - 1) \tilde{\omega}_p(f; \delta) \quad (3.2.58)$$

elde ederiz. $p > 1$ olduğunda (3.2.55)-(3.2.58) arasındaki eşitsizlikler $f(x) = x \in C_U(R)$ için kesindir.

(iii) (3.2.35)-(3.2.38) arasındaki eşitlikler kullanılarak Teorem 3.2.4. ve Teorem 3.1.7.'den

$$|I_{k,q}^A(f, x) - f(x)| \leq (2^q - 1)\omega_1\left(f; \frac{qa}{2^{k-1}}\right) \quad (3.2.59)$$

$$|I_{k,q}^B(f, x) - f(x)| \leq (2^q - 1)\omega_1\left(f; \frac{qa}{2^k}\right) \quad (3.2.60)$$

$$|I_{k,q}^L(f, x) - f(x)| \leq (2^q - 1)\omega_1\left(f; \frac{qa+1}{2^k}\right) \quad (3.2.61)$$

$$|I_{k,q}^\Gamma(f, x) - f(x)| \leq (2^q - 1)\omega_1\left(f; \frac{qa+1}{2^k}\right) \quad (3.2.62)$$

ifadeleri ispatlanır.

Sonuç 3.2.3. Sonuç 3.1.2.'ye göre φ pozitif ve $[-a, a]$ aralığında sürekli olsun.

$f \in X^i$, $i \geq 0$ tamsayı olsun.

(I) $f^{(i)}$, f 'nin i - defa türevlenebilir olduğunu göstermektedir. Eğer

$f^{(i)} \geq 0$ ise ,

(1)

$$r_0^f(x - ju) = \int_{-a}^a f(x - ju - t)\varphi(t)dt$$

den

$$\frac{d^i(r_0^f(x - ju))}{dx^i} = \int_{-a}^a f^{(i)}(x - ju - t)\varphi(t)dt \geq 0$$

ifadesini elde ederiz. Buradan $(A_{0,j}f)^{(i)}(x) \geq 0$ olur.

(2) $k \in \mathbb{Z}$ için

$$(B_{k,j}f)(x) = \int_{-a}^a f\left(x - \frac{j}{2^k}u\right)\varphi(u)du$$

eşitliğinden $(B_{k,j}f)^{(i)}(x) \geq 0$ ifadesini elde ederiz.

(3)

$$c_0^f(x - ju) = \int_{x-ju}^{x-ju+1} f(t)dt = \int_0^1 f(w + x - ju)du$$

den

$$\frac{d^i(c_0^f(x - ju))}{dx^i} \geq 0$$

ifadesi elde edilir ki bu da $(L_{0,j}f)^{(i)}(x) \geq 0$ olduğunu gösterir.

(4)

$$\gamma_0^f(x - ju) = \sum_{j^*=0}^n w_{j^*} f\left(x - ju + \frac{j^*}{n}\right)$$

dan

$$\frac{d^i(\gamma_0^f(x - ju))}{dx^i} \geq 0$$

elde edilir ki yine $(\Gamma_{0,j}f)^{(i)}(x) \geq 0$ olduğunu gösterir.

(II) Yukarıdan şu sonucu çıkarabiliriz. Eğer $f^{(i)} \geq 0$ ise herhangi $k \in \mathbb{Z}$,

$j \in \mathbb{N}$ için $(A_{k,j}f)^{(i)} \geq 0$, $(B_{k,j}f)^{(i)} \geq 0$, $(L_{k,j}f)^{(i)} \geq 0$, $(\Gamma_{k,j}f)^{(i)} \geq 0$ olur.

3.3. Ötelemeyi Koruyan Çok Değişkenli İntegral Operatörleri

$f \in X := C_U(R^d)$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ bulunur ki

$\|x - y\| \leq \delta$ şartını sağlayan $x, y \in R^d$ için $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ vardır. $f \in X$ için f

fonksiyonunun birinci dereceden süreklilik modülünü

$$\omega_1(f; \delta) := \sup_{\substack{x, y \in R^d \\ \|x - y\| \leq \delta}} |f(x) - f(y)|, \quad \delta > 0$$

eşitliği ile tanımlayalım. Burada $\|\cdot\|$, R^d üzerinde normdur.

$\{l_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ pozitif lineer operatörler dizisi, her $x \in R^d$ ve $f \in X$ için,

$$l_k(f; x) = l_0(f(2^{-k} \cdot); x) \quad (3.3.1)$$

özelliliği ile $C(R^d)$ uzayından X uzayına dönüşüm yapan operatör olsun.

Sabit bir $a > 0$, $f \in X$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{Z}$ için

$$\sup_{\substack{u, y \in R^d \\ \|u - y\|_\infty \leq a}} |l_0(f; u) - f(y)| \leq \omega_{1, \infty} \left(f; \frac{ma + n}{2^r} \right) \quad (3.3.2)$$

vardır.

φ fonksiyonu, $a_i > 0$ için $\varphi \subseteq \times_{i=1}^d [-a_i, a_i]$ aralığında reel değişkenli

fonksiyon olsun. φ , pozitif ve Lebesgue ölçülebilir olsun. Bütün $(x_1, \dots, x_d) \in R^d$

için

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{d\text{-kez}} \varphi(x_1 - u_1, x_2 - u_2, \dots, x_d - u_d) \cdot du_1 \cdot du_2 \dots du_d = 1 \quad (3.3.3)$$

ifadesi sağlanır. Buradan

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{d\text{-kez}} \varphi(u_1, \dots, u_d) \cdot du_1 \cdot du_2 \dots du_d = 1 \quad (3.3.4)$$

yazabiliriz.

Örnek. (i) $i = 1, \dots, d$ için karakteristik fonksiyon

$$\varphi_i(x) := X_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ 0, & d.y. \end{cases}$$

ifadesini, her $x := (x_1, \dots, x_d) \in R^d$ için $\varphi^*(x) := \prod_{i=1}^d \varphi_i(x_i)$ şeklinde tanımlayabiliriz.

$\varphi^* \subseteq \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d$, φ^* pozitif ve lebesgue ölçülebilirdir. Buradan

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^d \varphi_i(x_i - u_i) du_1 \dots du_d = \prod_{i=1}^d \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i(x_i - u_i) du_i \right) = 1$$

olduğunu görebiliriz. Yani her $x \in R^d$ için

$$\int_{R^d} \varphi^*(x - u) du = 1.$$

(ii) $i = 1, \dots, d$ için

$$\varphi_i(x_i) := \begin{cases} 1 + x_i, & -1 \leq x_i \leq 0 \\ 1 - x_i, & 0 \leq x_i \leq 1 \end{cases}$$

ifadesini $[-1, 1]^d$ aralığında her $(x_1, \dots, x_d) \in R^d$ için $\tilde{\varphi}(x_1, x_2, \dots, x_d) := \prod_{i=1}^d \varphi_i(x_i) \geq 0$

şeklinde tanımlarız.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(x_1 - u_1, \dots, x_d - u_d) \cdot du_1 \dots du_d &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^d \varphi_i(x_i - u_i) du_1 \dots du_d \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i(x_i - u_i) du_i \right)^d = 1. \end{aligned}$$

$\{\mathcal{L}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, X üzerinde pozitif operatörler olsun. Her $(x_1, \dots, x_d) \in R^d$ için

$$\mathcal{L}_k(f; x_1, \dots, x_d) := \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} (l_k f)(u_1, \dots, u_d) \varphi(2^k x_1 - u_1, \dots, 2^k x_d - u_d) \cdot du_1 \dots du_d \quad (3.3.5)$$

ifadesini tanımlayalım. Özel olarak; her $(x_1, \dots, x_d) \in R^d$ için

$$\mathcal{L}_0(f; x_1, \dots, x_d) := \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} l_0(f; u_1, \dots, u_d) \varphi(x_1 - u_1, \dots, x_d - u_d) \cdot du_1 \dots du_d \quad (3.3.6)$$

şeklinde yazılabilir. (3.3.1) ifadesini kullanarak bütün $x \in R^d$ için

$$\mathcal{L}_k(f; x) = \mathcal{L}_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k x) \quad (3.3.7)$$

yazabiliriz.

Tanım 3.3.1. $\alpha \in R^d$ için $f_\alpha(\cdot) := f(\cdot + \alpha)$ ve ϕ bir operatör olsun. Eğer $\phi(f_\alpha) = (\phi f)_\alpha$ ise ϕ 'ye ötelemeyi koruyan operatördür denir.

Teorem 3.3.1. Her $k \in \mathbb{Z}$, sabit $\alpha \in R^d$, her $u \in R^d$ ve herhangi $f \in X$ için

$$l_0(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k u) = l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k (u + \alpha)) \quad (3.3.8)$$

olsun. O halde $\mathcal{L}_k$ ötelemeyi koruyan operatördür.

İspat.

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_0 f)(x_1, \dots, x_d) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} (l_0 f)(u_1, \dots, u_d) \phi(x_1 - u_1, \dots, x_d - u_d) \cdot du_1 \dots du_d \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} (l_0 f)(x_1 - u_1, \dots, x_d - u_d) \phi(u_1, \dots, u_d) \cdot du_1 \dots du_d \end{aligned}$$

için (3.3.7) kullanarak

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k(f(\cdot + \alpha); x) &= \mathcal{L}_k(f_\alpha; x) = \mathcal{L}_0(f_\alpha(2^{-k} \cdot); 2^k x) \\ &= \int_{R^d} l_0(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k x - u) \phi(u) du \\ &= \int_{R^d} l_0(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k (x - 2^{-k} u)) \phi(u) du \end{aligned}$$

yazabiliriz. (3.3.8) ifadesini kullanırsak

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k(f(\cdot + \alpha); x) &= \int_{R^d} l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k (x - 2^{-k} u + \alpha)) \phi(u) du \\ &= \int_{R^d} l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k (x + \alpha) - u)) \phi(u) du \\ &= \mathcal{L}_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k (x + \alpha)) \\ &= \mathcal{L}_k(f; x + \alpha). \end{aligned}$$

Yani $\mathcal{L}_k(f_\alpha) = (\mathcal{L}_k(f))_\alpha$ dır.

Aşağıdaki teoremde $\mathcal{L}_k$ operatörleri ile süreklilik modülünün korunumu özelliği verilecektir.

Teorem 3.3.2. Bütün $u \in R^d$, herhangi $x, y \in R^d$ ve herhangi bir $f \in X$ için kabul edelim ki

$$|l_0(f; x-u) - l_0(f; y-u)| \leq \omega_1(f; \|x-y\|) \quad (3.3.9)$$

olsun. Buradan herhangi $\delta > 0$ için

$$\omega_1(\mathcal{L}_k f; \delta) \leq \omega_1(f; \delta) \quad (3.3.10)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $\mathcal{L}_0(f; x)$ operatörünün tanımından

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_0(f; x) - \mathcal{L}_0(f; y)| &= \left| \int_{R^d} l_0(f; u) \varphi(x-u) du - \int_{R^d} l_0(f; y) \varphi(y-u) du \right| \\ &= \left| \int_{R^d} l_0(f; x-u) \varphi(u) du - \int_{R^d} l_0(f; y-u) \varphi(u) du \right| \\ &\leq \int_{R^d} \varphi(u) |l_0(f; x-u) - l_0(f; y-u)| du \\ &\leq \left(\int_{R^d} \varphi(u) du \right) \sup_{u \in R^d} |l_0(f; x-u) - l_0(f; y-u)| \\ &\leq \omega_1(f; \|x-y\|). \end{aligned}$$

(3.3.7)'yi kullanırsak

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_k(f; x) - \mathcal{L}_k(f; y)| &= |\mathcal{L}_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k x) - \mathcal{L}_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k y)| \\ &\leq \omega_1(f(2^{-k} \cdot); 2^k \|x-y\|) \\ &= \omega_1(f; \|x-y\|) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Her iki tarafın $\delta > 0$ için supremumunu alırsak

$$\sup_{\substack{x, y \in R^d \\ \|x-y\| \leq \delta}} |\mathcal{L}_k(f; x) - \mathcal{L}_k(f; y)| \leq \sup_{\substack{x, y \in R^d \\ \|x-y\| \leq \delta}} \omega_1(f; \|x-y\|)$$

yani $\omega_1(\mathcal{L}_k f; \delta) \leq \omega_1(f; \delta)$ olur.

$d = 1$ olduğunda bütün $u \in R$ için

$$\mathcal{L}_k(f; x) = \int_{-\infty}^{+\infty} l_k(f; u) \varphi(2^k x - u) du .$$

$$l_k(f; u) = l_0(f(2^{-k} \cdot); u)$$

olduğunu biliyoruz.

Sonuç 3.3.1. Bütün $u, x, y \in R$ için

$$l_0(id(2^{-k} \cdot); 2^k x - u) - l_0(id(2^{-k} \cdot); 2^k y - u) = x - y$$

olsun. Buradan bütün $x, y \in R$ için

$$\mathcal{L}_k(id; x) - \mathcal{L}_k(id; y) = x - y$$

yani herhangi $\delta > 0$, bütün $x \in R$ için $id(x) = x$ olduğunda

$$\omega_1(\mathcal{L}_k(id); \delta) = \omega_1(id; \delta)$$

vardır. (3.3.10) eşitsizliği $d = 1$ olduğu durumda kesindir.

İspat.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k(f; x) &:= \int_{-\infty}^{+\infty} l_k(f; u) \varphi(2^k x - u) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} l_0(f(2^{-k} \cdot); u) \varphi(2^k x - u) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k x - u) \varphi(u) du \end{aligned}$$

olduğundan

$$\mathcal{L}_k(f; x) - \mathcal{L}_k(f; y) = \int_{-\infty}^{+\infty} [l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k x - u) - l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k y - u)] \varphi(u) du$$

yazabiliriz. $f(x) = x$ için

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k(id; x) - \mathcal{L}_k(id; y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - y) \varphi(u) du \\ &= (x - y) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) du = x - y \end{aligned}$$

buluruz. Her iki tarafın $\delta > 0$ için supremumunu alırsak

$$\sup_{\substack{x,y \in R^d \\ \|x-y\| \leq \delta}} |\mathcal{L}_k(id;x) - \mathcal{L}_k(id;y)| = \sup_{\substack{x,y \in R^d \\ \|x-y\| \leq \delta}} |x-y|$$

yani $\omega_1(\mathcal{L}_k(id);\delta) = \omega_1(id;\delta)$ olur.

Sonuç 3.3.2. $d \geq 2$ olduğunda $i \in \{1, \dots, d\}$ için $pr_i : R^d \ni (x_1, \dots, x_d) \rightarrow x_i \in R$, i nci

koordinattaki izdüşümü gösterebiliriz. Bütün $x, y, u \in R^d$ ve en az bir i için

$$l_0(pr_i(2^{-k} \cdot); 2^k x - u) - l_0(pr_i(2^{-k} \cdot); 2^k y - u) = x_i - y_i$$

olduğunu kabul edelim. $\delta > 0$ için

$$\omega_1(\mathcal{L}_k pr_i; \delta) = \omega_1(pr_i; \delta)$$

ifadesinden (3.3.10) eşitsizliği $d \geq 2$ için kesindir.

İspat. pr_i , R^d uzayında düzgün sürekli fonksiyondur. Bununla birlikte (3.3.4)'ü

kullanarak

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k(pr_i; x) - \mathcal{L}_k(pr_i; y) &= \int_{R^d} [l_0(pr_i(2^{-k} \cdot); 2^k x - u) - l_0(pr_i(2^{-k} \cdot); 2^k y - u)] \varphi(u) du \\ &= \int_{R^d} (x_i - y_i) \varphi(u) du = x_i - y_i \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Yani

$$|\mathcal{L}_k(pr_i; x) - \mathcal{L}_k(pr_i; y)| = |x_i - y_i| = |pr_i(x) - pr_i(y)|$$

olur. Bu ifadenin her iki tarafının $\delta > 0$ için supremumu alınırsa

$$\sup_{\substack{x,y \in R^d \\ \|x-y\| \leq \delta}} |\mathcal{L}_k(pr_i; x) - \mathcal{L}_k(pr_i; y)| = \sup_{\substack{x,y \in R^d \\ \|x-y\| \leq \delta}} |pr_i(x) - pr_i(y)|$$

yani $\omega_1(\mathcal{L}_k pr_i; \delta) = \omega_1(pr_i; \delta)$ olur.

Teorem 3.3.3. $f \in X$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $k, r \in \mathbb{Z}$ ve $a := \max(a_i)$, $i = 1, \dots, n$ için

(3.3.2) önermesi doğru olsun. Bu durumda

$$|\mathcal{L}_k(f; x) - f(x)| \leq \omega_{1,\infty}\left(f; \frac{ma+n}{2^{k+r}}\right) \quad (3.3.11)$$

dır.

İspat. $\varphi \subseteq \prod_{i=1}^d [-a_i, a_i]$ aralığında olsun. (3.3.7) ve (3.3.3) ifadelerini kullanalım.

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_k(f; x) - f(x)| &= |\mathcal{L}_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k x) - f(2^{-k}(2^k x))| \\ &= \left| \int_{R^d} l_0(f(2^{-k} \cdot); u) \varphi(2^k x - u) du - \int_{R^d} f(2^{-k}(2^k x)) \varphi(2^k x - u) du \right| \\ &= \left| \int_{R^d} [l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x))] \varphi(2^k x - u) du \right| \\ &\leq \int \dots \int_{i=1, \dots, d}^{2^k x_i + a_i} \left| l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x)) \right| \varphi(2^k x - u) du \\ &\leq \sup_{u \in \prod_{i=1}^d [2^k x_i - a_i, 2^k x_i + a_i]} \left| l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x)) \right| \cdot \int \dots \int_{2^k x_i - a_i}^{2^k x_i + a_i} \varphi(2^k x - u) du. \end{aligned}$$

(3.3.3) kullanırsak

$$|\mathcal{L}_k(f; x) - f(x)| \leq \sup_{u \in \prod_{i=1}^d [2^k x_i - a_i, 2^k x_i + a_i]} \left| l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x)) \right| \quad (3.3.12)$$

ifadesi sağlanır. $g := f(2^{-k} \cdot) \in X$ ve $y_i := 2^k x_i$ alırsak (3.3.12)'nin sağ tarafı

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{\text{her } u \in R^d \\ u - 2^k x \in \prod_{i=1}^d [-a_i, a_i]}} \left| l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x)) \right| &= \sup_{\substack{\text{her } u \in R^d \\ |u_i - 2^k x_i| \leq a_i}} \left| l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x)) \right| \\ &\leq \sup_{\substack{\text{her } u \in R^d \\ |u_i - 2^k x_i| \leq \max_{i=1, \dots, d} (a_i) =: a}} \left| l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x)) \right| \\ &= \sup_{|u_i - y_i| \leq a} |l_0(g; u) - g(y)| \\ &= \sup_{\|u - y\| \leq a} |l_0(g; u) - g(y)| \end{aligned}$$

$$\leq \omega_{1,\infty} \left(g; \frac{ma+n}{2^r} \right)$$

$$= \omega_{1,\infty} \left(f; \frac{ma+n}{2^{k+r}} \right)$$

yazılabilir. Yani

$$| \mathcal{L}_k (f;x) - f(x) | \leq \omega_{1,\infty} \left(f; \frac{ma+n}{2^{k+r}} \right).$$

Sonuç 3.3.3 $(\underline{O}, A, \mu)$ ölçü uzayı olsun. U , $d \geq 1$ için R^d uzayının açık bir alt kümesi ve $f : U \times \underline{O} \rightarrow R$ fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahip bir fonksiyon olsun.

- (a) Tüm $x \in U$ için $\omega \rightarrow f(x, \omega)$, μ - integrallenebilir.
- (b) $\omega \rightarrow f(x, \omega)$ 'in x_i 'ye göre U 'nun her bir noktası için kısmi türevi alınabilir.
- (c) Tüm $(x, \omega) \in U \times \underline{O}$ için $\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \omega) \right| \leq h(\omega)$ olacak şekilde $\underline{O}$ 'da $h \geq 0$

sağlayan bir μ -integrallenebilen fonksiyon vardır.

Bundan sonra φ fonksiyonu U kümesinde

$$\varphi(x) = \int_{\underline{O}} f(x, \omega) \mu(d\omega)$$

olarak tanımlanır. Bu fonksiyonun tüm U 'larda x_i 'ye göre kısmi türevi alınabilir.

μ -integrallenebilen ise

$$\omega \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \omega)$$

dönüşümü yapılabilir ve her $x \in U$ için

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \int_{\underline{O}} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \omega) \mu(d\omega)$$

yazılabilir.

Sonuç 3.3.4 (1) φ 'nin sınırlı olduğunu kabul edelim. $(O, A, \mu) := (X_{i=1}^d [-a_i, a_i],$

σ - lebesgue ölçülebilir alt kümelerinin alanı) nin ölçüm alanı olduğunu düşünelim.

W 'nin R^d 'nin içinde bir bölüm olduğunu ve $(x_1, \dots, x_d)$ 'nin $(W) := W^0 := U$ 'nun içinde bir nokta olsun.

$$\bar{f}(x_1, \dots, x_d; u_1, \dots, u_d) := (l_0 f)(x_1 - u_1, x_2 - u_2, \dots, x_d - u_d) \varphi(u_1, \dots, u_d)$$

dir.

(a) Elde ettiğimiz fonksiyon

$$\gamma(u_1, \dots, u_d) := (l_0 f)(x_1 - u_1, x_2 - u_2, \dots, x_d - u_d) \varphi(u_1, \dots, u_d)$$

tüm $(x_1, \dots, x_d) \in U$ için lebesgue integrali alınabilir.

$$(b) \lambda(x_1, \dots, x_d) := \lambda_u(x) := (l_0 f)(x_1 - u_1, x_2 - u_2, \dots, x_d - u_d) \varphi(u_1, \dots, u_d)$$

fonksiyonu $i \in \{1, \dots, d\}$ için x_i 'ye göre R^d üzerinde kısmi türevi alınabilir. Burada

$$\frac{\partial}{\partial x_i} l_0(f, x_1, \dots, x_d) \text{ olduğu kabul edilmiştir.}$$

(c) $\frac{\partial}{\partial x_i} l_0(f, x_1, \dots, x_d)$ ifadesinin sürekli olduğunu kabul edelim. Tüm

$(x, u) \in U \times X_{i=1}^d [-a_i, a_i]$ için

$$\left| \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}(x, u) \right| = \left| \frac{\partial}{\partial x_i} l_0(f, x - u) \cdot \varphi(u) \right| \leq M \cdot \varphi(u)$$

vardır ve

$$M := \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} l_0(f, x - u) \right\|_{\infty, W \times X_{i=1}^d[-a_i, a_i]} < +\infty$$

olarak tanımlanır. φ sınırlı olduğundan $M \cdot \varphi(u)$ lebesgue integrali alınabilen bir fonksiyondur. Bundan dolayı doğal olarak Sonuç 3.3.3.'den

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{L}_0(f, x) = \int_{-a_i}^{a_i} \dots \int_{-a_d}^{a_d} \frac{\partial}{\partial x_i} l_0(f; x - u) \cdot \varphi(u) du \quad (3.3.13)$$

elde edilir. Bunun için φ sınırlı ve $i \in \{1, \dots, d\}$ için $\frac{\partial}{\partial x_i} l_0(f, x)$ ifadesinin sürekli

olduğunu kabul edersek $\frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{L}_k(f, x)$ vardır.

(2) (1) de olduğu gibi φ sınırlı, $\frac{\partial}{\partial x_i} l_0(f, x)$ kısmi türevi mevcut ve $i \in \{1, \dots, d\}$ de sürekli olduğunu kabul edersek $\mathcal{L}_k(f, x)$ operatörünün kısmi türevlerinin varlığı araştırılacaktır. Burada $(0, A, \mu)$ ölçü uzayını yine (1) de olduğu gibi seçersek,

$$\bar{f}(x, u) := \frac{\partial}{\partial x_i} l_0(f; x - u) \cdot \varphi(u)$$

olur.

(a) $\frac{\partial}{\partial x_i} l_0(f, x - u)$ kısmi türevi, $x \in U$ ve u noktalarında sürekli olsun. O halde

$$\gamma(u) := \frac{\partial}{\partial x_i} l_0(f, x - u) \cdot \varphi(u)$$

integrellenebilendir.

(b) $\lambda(x) := \lambda_u(x) := \frac{\partial}{\partial x_i} l_0(f, x - u) \cdot \varphi(u)$

fonksiyonunun x_j 'ye göre R^d 'nin her bir noktasında $j \in \{1, \dots, d\}$ için

$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} l_0(f, x)$ kısmi türevi sürekli olsun. O halde

$$\left| \frac{\partial \bar{f}(x, u)}{\partial x_j} \right| = \left| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} l_0(f, x - u) \varphi(u) \right| \leq M^* \cdot \varphi(u),$$

yazılabilir. Burada

$$M^* := \left\| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} l_0(f, x - u) \right\|_{\infty, W \times X_{i=1}^d[-a_i, a_i]} < +\infty$$

olarak tanımlanır. $M^* \cdot \varphi(u)$ integrali alınabilen bir fonksiyondur. Sonuç 3.3.3.'den

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \mathcal{L}_0(f, x) = \int_{-a_1}^{a_1} \dots \int_{-a_d}^{a_d} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} l_0(f, x - u) \cdot \varphi(u) du \quad (3.3.14)$$

elde edebiliriz. Bu yüzden φ sınırlı, $i, j \in \{1, \dots, d\}$ için $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} l_0(f, x)$ mevcut ve

sürekli olduğunu kabul edersek $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \mathcal{L}_k(f, x)$ vardır. Buradan aşağıdaki sonuca

varabiliriz.

Teorem 3.3.4. φ nin sınırlı ve $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, d\}$, $i_1 < \dots < i_k$ ve $j_1, \dots, j_d \in \mathbb{Z}_+$

olduğunu kabul edelim. $p \geq \sum_{k=1}^k j_{\bar{k}}$ olsun ve l_0 operatörünün kendi içinde

$C^{(p)}(R^d)$ 'ye dönüştüğünü kabul edelim. (Yani; $\frac{\partial \sum_{\bar{k}=1}^k j_{\bar{k}}}{\partial x_{i_1}^{j_{i_1}} \dots \partial x_{i_k}^{j_{i_k}}} l_0(f, x)$ vardır ve tüm

$x \in R^d$ için süreklidir.) Buradan

$$\frac{\partial \sum_{\bar{k}=1}^k j_{\bar{k}}}{\partial x_{i_1}^{j_{i_1}} \dots \partial x_{i_k}^{j_{i_k}}} \mathcal{L}_0(f, x) = \int_{-a_1}^{a_1} \dots \int_{-a_d}^{a_d} \frac{\partial \sum_{\bar{k}=1}^k j_{\bar{k}}}{\partial x_{i_1}^{j_{i_1}} \dots \partial x_{i_k}^{j_{i_k}}} l_0(f, x - u) \cdot \varphi(u) du \quad (3.3.15)$$

vardır. Bu yüzden $\frac{\partial \sum_{\bar{k}=1}^k j_{\bar{k}}}{\partial x_{i_1}^{j_1} \dots \partial x_{i_k}^{j_k}} \mathcal{L}_k(f, x)$ vardır.

Sonuç 3.3.5. Eğer, her $x \in R^d$ için

$$\frac{\partial \sum_{\bar{k}=1}^k j_{\bar{k}}}{\partial x_{i_1}^{j_1} \dots \partial x_{i_k}^{j_k}} l_0(f, x) \geq 0$$

olduğunu kabul edersek

$$\frac{\partial \sum_{\bar{k}=1}^k j_{\bar{k}}}{\partial x_{i_1}^{j_1} \dots \partial x_{i_k}^{j_k}} \mathcal{L}_0(f, x) \geq 0$$

ve

$$\frac{\partial \sum_{\bar{k}=1}^k j_{\bar{k}}}{\partial x_{i_1}^{j_1} \dots \partial x_{i_k}^{j_k}} \mathcal{L}_k(f, x) \geq 0$$

vardır.

3.4. Örnekler

Aşağıda l_k yardımıyla verilen çok değişkenli integral operatörlerin yer aldığı dört örnek verilecektir. Bölüm 3.3 de geçen teorilerin bu operatörler tarafından tam olarak doğrulandığı gösterilecektir. φ temel fonksiyonu Bölüm 3.3 deki gibi olacaktır. Ek olarak φ sürekli ve çift fonksiyon kabul edilecektir. Özel çok değişkenli operatörlerin özellikleri Bölüm 3.3 deki genel çok değişkenli $k \in \mathbb{Z}$ için $\mathcal{L}_k$ operatörlerinin özelliklerinin sırasına göre verilecektir. İlk olarak her bir $k \in \mathbb{Z}$ için çok değişkenli operatörleri tanımlayalım.

$$1. \quad (A_k f)(x) := \int_{R^d} \tau_k^f(u) \cdot \varphi(2^k x - u) du \quad (3.4.20)$$

operatörünü alalım. Burada

$$\tau_k^f(u) := 2^{kd} \cdot \int_{R^d} f(t) \varphi(2^k t - u) dt \quad (3.4.21)$$

olarak tanımlanır. Yani $\forall u \in R$ için

$$l_k(f; u) = \tau_k^f(u). \quad (3.4.22)$$

$$2. \quad (B_k f)(x) := \int_{R^d} f\left(\frac{u}{2^k}\right) \varphi(2^k x - u) du \quad (3.4.23)$$

Şeklinde tanımlı operatör için

$$l_k(f; u) = f\left(\frac{u}{2^k}\right) \quad (3.4.24)$$

olur.

$$3. \quad (L_k f)(x) := \int_R c_k^f(u) \varphi(2^k x - u) du \quad (3.4.25)$$

olarak alınır

$$c_k^f(u) := 2^{kd} \cdot \int_{2^{-k}u_i}^{2^{-k}(u_i+1)} f(t) dt \quad (3.4.26)$$

olur. Burada $\forall u \in R$ için

$$l_k(f; u) = c_k^f(u) \quad (3.4.27)$$

olur.

$$4. \quad (\Gamma_k f)(x) := \int_{R^d} \gamma_k^f(u) \varphi(2^k x - u) du \quad (3.4.28)$$

olarak alınır $(n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d$, $w_{j_1, \dots, j_d} \geq 0$, $\sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_d=0}^{n_d} w_{j_1, \dots, j_d} = 1$ için

$$\gamma_k^f := \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_d=0}^{n_d} w_{j_1, \dots, j_d} \cdot f\left(\frac{u_1}{2^k} + \frac{j_1}{2^k \cdot n_1}, \dots, \frac{u_d}{2^k} + \frac{j_d}{2^k \cdot n_d}\right) \quad (3.4.29)$$

dir. Burada

$$l_k(f; u) = \gamma_k^f(u) \quad (3.4.30)$$

dir.

(3.3.1) ifadesi $k \in \mathbb{Z}$ için bütün l_k 'lar için geçerlidir ((3.4.22), (3.4.24), (3.4.27) ve (3.4.30) için geçerlidir). (3.3.7) eşitliği bütün A_k, B_k, L_k, Γ_k için doğrudur. Yani, $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in R^d$ için

$$\begin{aligned} A_k(f; x) &= A_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k x) \\ B_k(f; x) &= B_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k x) \\ L_k(f; x) &= L_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k x) \\ \Gamma_k(f; x) &= \Gamma_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k x) \end{aligned} \quad (3.4.31)$$

yazılabilir. Ayrıca

$$A_k(1) = B_k(1) = L_k(1) = \Gamma_k(1) = 1 \quad (3.4.32)$$

olduğu açıktır.

Teorem 3.4.1. A_k, B_k, L_k, Γ_k operatörleri ötelemeyi koruyan operatörlerdir.

İspat. Her bir operatörün ötelemeyi koruduğunu göstermek için her $k \in \mathbb{Z}, \alpha \in R^d$

sabit, her $u \in R^d$, herhangi $f \in X$ için

$$l_0(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k u) = l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k(u + \alpha))$$

olduğunu kabul edeceğiz.

1. A_k operatörünü alalım (φ çift).

$$\begin{aligned} l_0(f; x) &= \tau_0^f(x) = \int_{R^d} f(t) \varphi(t-x) dt \\ &= \int_{R^d} f(t) \varphi(x-t) dt = \int_{R^d} f(x-t) \varphi(t) dt. \end{aligned} \quad (3.4.32)$$

şeklinde yazabiliriz. $\alpha \in R^d$ için

$$\begin{aligned} l_0(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k u) &= \int_{R^d} f(2^{-k}(2^k u - t) + \alpha) \varphi(t) dt \\ &= \int_{R^d} f(u + \alpha - 2^{-k} t) \varphi(t) dt \\ &= \int_{R^d} f(2^{-k} 2^k (u + \alpha) - 2^{-k} t) \varphi(t) dt \\ &= \int_{R^d} f(2^{-k} [2^k (u + \alpha) - t]) \varphi(t) dt \\ &= l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k (u + \alpha)) \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada τ_0^f , (3.3.8) ifadesini sağlar. Şimdi A_k operatörünün ötelemeyi koruduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} A_k(f(\cdot + \alpha); x) &= A_0(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k x) \\ &= \int_{R^d} \tau_0^{f_{\alpha}(2^{-k} \cdot)}(u) \varphi(2^k x - u) du. \end{aligned}$$

$u = 2^k x - u$ dönüşümü yaparsak

$$\begin{aligned} A_k(f(\cdot + \alpha); x) &= \int_{R^d} \tau_0^{f_{\alpha}(2^{-k} \cdot)}(2^k x - u) \varphi(u) du \\ &= \int_{R^d} l_0(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k x - u) \varphi(u) du \\ &= \int_{R^d} l_0(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k (x - 2^{-k} u)) \varphi(u) du \\ &= \int_{R^d} l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k (x - 2^{-k} u + \alpha)) \varphi(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k (x + \alpha) - u) \varphi(u) du \end{aligned}$$

$$= \int_{R^d} \tau_0^{f(2^{-k} \cdot)} (2^k (x + \alpha) - u) \varphi(u) du$$

olur. Yine $u = 2^k (x + \alpha) - u$ dönüşümü yaparsak

$$\begin{aligned} A_k(f(\cdot + \alpha); x) &= \int_{R^d} \tau_0^{f(2^{-k} \cdot)} (u) \varphi(2^k (x + \alpha) - u) du \\ &= A_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k (x + \alpha)) \\ &= A_k(f(\cdot + \alpha); x) \end{aligned}$$

olur.

2. B_k operatöründe $l_0 f = f$ olduğunu biliyoruz.

$$\begin{aligned} l_0(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k u) &= f(2^{-k} 2^k u + \alpha) \\ &= f(u + \alpha) \\ &= l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k (u + \alpha)) \end{aligned}$$

olur. Şimdi de B_k nın ötelemeyi koruduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} B_k(f(\cdot + \alpha); x) &= B_0(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k x) \\ &= \int_{R^d} f(u) \varphi(2^k x - u) du . \end{aligned}$$

$u = 2^k x - u$ dönüşümü yapalım.

$$\begin{aligned} B_k(f(\cdot + \alpha); x) &= \int_{R^d} f(2^k x - u) \varphi(u) du \\ &= \int_{R^d} l_0(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k x - u) \varphi(u) du \end{aligned}$$

1. örnekteki işlemler tekrarlanırsa

$$\begin{aligned} B_k(f(\cdot + \alpha); x) &= \int_{R^d} l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k (x + \alpha) - u) \varphi(u) du \\ &= \int_{R^d} f(2^k (x + \alpha) - u) \varphi(u) du . \end{aligned}$$

$u = 2^k (x + \alpha) - u$ dönüşümünü uygularsak

$$\begin{aligned}
B_k(f(\cdot + \alpha); x) &= \int_{R^d} f(u) \varphi(2^k(x + \alpha) - u) du \\
&= B_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k(x + \alpha)) \\
&= B_k(f; x + \alpha).
\end{aligned}$$

3. L_k operatörünü göz önüne alalım. $x = (x_1, \dots, x_d)$, $t = (t_1, \dots, t_d)$ için

$$l_0(f; x) = c_0^f(x) = \int_{x_1}^{x_1+1} \dots \int_{x_d}^{x_d+1} f(t) dt$$

dir. Burada $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ için

$$\begin{aligned}
l_0(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k u) &= \int_{2^k u_1}^{2^k u_1+1} \dots \int_{2^k u_d}^{2^k u_d+1} f(2^{-k} t + \alpha) dt \\
&= \int_{2^k(u_1+\alpha_1)}^{2^k(u_1+\alpha_1)+1} \dots \int_{2^k(u_d+\alpha_d)}^{2^k(u_d+\alpha_d)+1} f(2^{-k} t) dt \\
&= l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k(u + \alpha)).
\end{aligned}$$

Şimdi L_k operatörünün ötelemeyi koruduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
L_k(f(\cdot + \alpha); x) &= L_0(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k x) \\
&= \int_{R^d} c_0^{f_\alpha(2^{-k} \cdot)}(u) \varphi(2^k x - u) du.
\end{aligned}$$

$u = 2^k x - u$ dönüşümü yapalım.

$$\begin{aligned}
L_k(f(\cdot + \alpha); x) &= \int_{R^d} c_0^{f_\alpha(2^{-k} \cdot)}(2^k x - u) \varphi(u) du \\
&= \int_{R^d} l_0(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k x - u) \varphi(u) du
\end{aligned}$$

olur. Önceki örneklerdeki işlemleri tekrar edersek

$$\begin{aligned}
L_k(f(\cdot + \alpha); x) &= \int_{R^d} l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k(x + \alpha) - u) \varphi(u) du \\
&= \int_{R^d} c_0^{f(2^{-k} \cdot)}(2^k(x + \alpha) - u) \varphi(u) du.
\end{aligned}$$

$u = 2^k (x + \alpha) - u$ dönüşümünü uygularsak

$$\begin{aligned} L_k(f(\cdot + \alpha); x) &= \int_{R^d} c_0^{f(2^{-k} \cdot)}(u) \varphi(2^k (x + \alpha) - u) du \\ &= L_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k (x + \alpha)) \\ &= L_k(f; x + \alpha). \end{aligned}$$

4. Γ_k operatörü için

$$l_0(f; u) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_d=0}^{n_d} w_{j_1, \dots, j_d} \cdot f(u_1 + \frac{j_1}{n_1}, \dots, u_d + \frac{j_d}{n_d})$$

şeklindedir. Buradan

$$\begin{aligned} l_0(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k u) &= \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_d=0}^{n_d} w_{j_1, \dots, j_d} \cdot f(2^{-k} (2^k u_1 + \frac{j_1}{n_1}) + \alpha_1, \\ &\quad \dots, 2^{-k} (2^k u_d + \frac{j_d}{n_d}) + \alpha_d) \\ &= \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_d=0}^{n_d} w_{j_1, \dots, j_d} \cdot f(2^{-k} (2^k (u_1 + \alpha_1) + \frac{j_1}{n_1}), \\ &\quad \dots, 2^{-k} (2^k (u_d + \alpha_d) + \frac{j_d}{n_d})) \\ &= l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k (u + \alpha)) \end{aligned}$$

olur. Şimdi Γ_k operatörünün ötelemeyi koruduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \Gamma_k(f(\cdot + \alpha); x) &= \Gamma_0(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k x) \\ &= \int_{R^d} \gamma_0^{f_\alpha(2^{-k} \cdot)}(u) \varphi(2^k x - u) du. \end{aligned}$$

$u = 2^k x - u$ dönüşümü yaparsak

$$\begin{aligned} \Gamma_k(f(\cdot + \alpha); x) &= \int_{R^d} \gamma_0^{f_\alpha(2^{-k} \cdot)}(2^k x - u) \varphi(u) du \\ &= \int_{R^d} l_0(f(2^{-k} \cdot + \alpha); 2^k x - u) \varphi(u) du \end{aligned}$$

olur. Diğer örneklerdeki işlemleri tekrarlırsak

$$\begin{aligned}\Gamma_k(f(\cdot + \alpha); x) &= \int_{R^d} l_0(f(2^{-k}\cdot); 2^k(x + \alpha) - u) \varphi(u) du \\ &= \int_{R^d} \gamma_0^{f_\alpha(2^{-k}\cdot)}(2^k(x + \alpha) - u) \varphi(u) du.\end{aligned}$$

$u = 2^k(x + \alpha) - u$ dönüşümünü uygularsak

$$\begin{aligned}\Gamma_k(f(\cdot + \alpha); x) &= \int_{R^d} \gamma_0^{f_\alpha(2^{-k}\cdot)}(u) \varphi(2^k(x + \alpha) - u) du \\ &= \Gamma_0(f(2^{-k}\cdot); 2^k(x + \alpha)) \\ &= \Gamma_k(f; x + \alpha).\end{aligned}$$

A_k , B_k , L_k , Γ_k operatörlerinin süreklilik modülünü koruduğunu gösterelim.

Teoreme 3.4.2. $d \geq 1$ için her $f \in C_U(R^d)$ ve her $\delta > 0$ için

$$(i) \quad \omega_1(A_k f; \delta) \leq \omega_1(f; \delta)$$

$$(ii) \quad \omega_1(B_k f; \delta) \leq \omega_1(f; \delta)$$

$$(iii) \quad \omega_1(L_k f; \delta) \leq \omega_1(f; \delta) \tag{3.4.34}$$

$$(iv) \quad \omega_1(\Gamma_k f; \delta) \leq \omega_1(f; \delta).$$

İspat. Burada (3.4.9) eşitliğini ve Teorem 3.4.1.' i kullanacağız.

(i) A_k operatörünü alalım(φ çift). (3.4.4) ve (3.5.33)'den

$$\begin{aligned}|l_0(f; x - u) - l_0(f; y - u)| &= \left| \int_{R^d} (f(x - u - t) - f(y - u - t)) \varphi(t) dt \right| \\ &\leq \int_{R^d} |f(x - u - t) - f(y - u - t)| \varphi(t) dt \\ &\leq \int_{R^d} \omega_1(f; \|x - y\|) \varphi(t) dt \\ &= \omega_1(f; \|x - y\|)\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
& |A_k(f; x-u) - A_k(f; y-u)| \\
&= |A_0(f(2^{-k}\cdot); 2^k(x-u)) - A_0(f(2^{-k}\cdot); 2^k(y-u))| \\
&= \left| \int_{R^d} \tau_0^{f(2^{-k}\cdot)}(v) \varphi(2^k(x-u)-v) dv - \int_{R^d} \tau_0^{f(2^{-k}\cdot)}(v) \varphi(2^k(y-u)-v) dv \right|.
\end{aligned}$$

Burada $v = 2^k(x-u) - v$ ve $v = 2^k(y-u) - v$ dönüşümü yaparsak

$$\begin{aligned}
& |A_k(f; x-u) - A_k(f; y-u)| \\
&= \left| \int_{R^d} [\tau_0^{f(2^{-k}\cdot)}(2^k(x-u)-v) - \tau_0^{f(2^{-k}\cdot)}(2^k(y-u)-v)] \varphi(v) dv \right| \\
&\leq \int_{R^d} \left| \tau_0^{f(2^{-k}\cdot)}(2^k(x-u)-v) - \tau_0^{f(2^{-k}\cdot)}(2^k(y-u)-v) \right| \varphi(v) dv \\
&= \int_{R^d} |l_0(f(2^{-k}\cdot); 2^k(x-u)-v) - l_0(f(2^{-k}\cdot); 2^k(y-u)-v)| \varphi(v) dv \\
&\leq \omega_1(f(2^{-k}\cdot); 2^k\|x-y\|) \cdot \int_{R^d} \varphi(v) dv, \quad v = (v_1, \dots, v_d) \\
&= \omega_1(f; \|x-y\|)
\end{aligned}$$

olur. Her iki tarafın $\delta > 0$ için supremumunu alırsak

$$\sup_{\|x-y\| \leq \delta} |A_k(f; x-u) - A_k(f; y-u)| = \sup_{\|x-y\| \leq \delta} \omega_1(f; \|x-y\|)$$

yani $\omega_1(A_k f; \delta) \leq \omega_1(f; \delta)$ elde edilir.

(ii) B_k operatöründe $l_0 f = f$ olduğunu biliyoruz. (3.3.9) eşitliğini kullanırsak

$$\begin{aligned}
& |l_0(f; x-u) - l_0(f; y-u)| = |f(x-u) - f(y-u)| \\
&\leq \omega_1(f; \|x-y\|)
\end{aligned}$$

olduğunu görebiliriz.

$$|B_k(f; x-u) - B_k(f; y-u)|$$

$$\begin{aligned}
&= |B_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k(x-u)) - B_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k(y-u))| \\
&= \left| \int_{R^d} [f(v)\varphi(2^k(x-u)-v) - f(v)\varphi(2^k(y-u)-v)] dv \right|
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Burada $v = 2^k(x-u) - v$ ve $v = 2^k(y-u) - v$ dönüşümü yaparsak

$$\begin{aligned}
&|B_k(f; x-u) - B_k(f; y-u)| \\
&= \left| \int_{R^d} [f(2^k(x-u)-v) - f(2^k(y-u)-v)] \varphi(v) dv \right| \\
&\leq \int_{R^d} |f(2^k(x-u)-v) - f(2^k(y-u)-v)| \varphi(v) dv \\
&= \int_{R^d} |l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k(x-u)-v) - l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k(y-u)-v)| \varphi(v) dv \\
&\leq \omega_1(f(2^{-k} \cdot); 2^k \|x-y\|) \cdot \int_{R^d} \varphi(v) dv, \quad v = (v_1, \dots, v_d)
\end{aligned}$$

olur. (3.3.4) ifadesini kullanırsak

$$|B_k(f; x-u) - B_k(f; y-u)| \leq \omega_1(f; \|x-y\|)$$

olur. Her iki tarafın $\delta > 0$ için supremumunu alalım.

$$\sup_{\|x-y\| \leq \delta} |B_k(f; x-u) - B_k(f; y-u)| = \sup_{\|x-y\| \leq \delta} \omega_1(f; \|x-y\|)$$

yani $\omega_1(B_k f; \delta) \leq \omega_1(f; \delta)$ olur.

(iii) L_k operatörünü göz önüne alalım.

$$\begin{aligned}
|l_0(f; x-u) - l_0(f; y-u)| &= |c_0^f(x-u) - c_0^f(y-u)| \\
&= \left| \int_{x-u}^{x-u+1} f(t) dt - \int_{y-u}^{y-u+1} f(t) dt \right| \\
&= \left| \int_0^1 \dots \int_0^1 (f(x-u+t) - f(y-u+t)) dt \right| \\
&\leq \int_0^1 \dots \int_0^1 |f(x-u+t) - f(y-u+t)| dt
\end{aligned}$$

$$\leq \int_0^1 \dots \int_0^1 \omega_1(f; \|x - y\|) dt$$

$$= \omega_1(f; \|x - y\|)$$

olduğundan

$$|L_k(f; x - u) - L_k(f; y - u)|$$

$$= |L_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k(x - u)) - L_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k(y - u))|$$

$$= \left| \int_{R^d} [c_0^{f(2^{-k} \cdot)}(v) \varphi(2^k(x - u) - v) - c_0^{f(2^{-k} \cdot)}(v) \varphi(2^k(y - u) - v)] dv \right|$$

yazabiliriz. Burada $v = 2^k(x - u) - v$ ve $v = 2^k(y - u) - v$ dönüşümü yaparsak

$$|L_k(f; x - u) - L_k(f; y - u)|$$

$$= \left| \int_{R^d} [c_0^{f(2^{-k} \cdot)}(2^k(x - u) - v) - c_0^{f(2^{-k} \cdot)}(2^k(y - u) - v)] \varphi(v) dv \right|$$

$$\leq \int_{R^d} \left| c_0^{f(2^{-k} \cdot)}(2^k(x - u) - v) - c_0^{f(2^{-k} \cdot)}(2^k(y - u) - v) \right| \varphi(v) dv$$

$$= \int_{R^d} |l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k(x - u) - v) - l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k(y - u) - v)| \varphi(v) dv$$

$$\leq \omega_1(f(2^{-k} \cdot); 2^k \|x - y\|)$$

$$= \omega_1(f; \|x - y\|)$$

olur. Her iki tarafın $\delta > 0$ supremumunu alırsak

$$\sup_{\|x-y\| \leq \delta} |L_k(f; x - u) - L_k(f; y - u)| = \sup_{\|x-y\| \leq \delta} \omega_1(f; \|x - y\|)$$

yani $\omega_1(L_k f; \delta) \leq \omega_1(f; \delta)$ elde ederiz.

(iv) Γ_k operatörünü alalım.

$$|l_0(f; x - u) - l_0(f; y - u)| = |\gamma_0^f(x - u) - \gamma_0^f(y - u)|$$

$$= \left| \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_d=0}^{n_d} w_{j_1, \dots, j_d} \cdot f \left(x_1 - u_1 + \frac{j_1}{n_1}, \dots, x_d - u_d + \frac{j_d}{n_d} \right) \right|$$

$$\begin{aligned}
& \frac{j_d}{n_d} \Big) - \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_d=0}^{n_d} w_{j_1, \dots, j_d} \cdot f \left(y_1 - u_1 + \frac{j_1}{n_1}, \dots, y_d - \right. \\
& \left. u_d + \frac{j_d}{n_d} \right) \\
& \leq \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_d=0}^{n_d} w_{j_1, \dots, j_d} \cdot \omega_1(f; \|x - y\|) \\
& = \omega_1(f; \|x - y\|)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
& |\Gamma_k(f; x - u) - \Gamma_k(f; y - u)| \\
& = |\Gamma_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k(x - u)) - \Gamma_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k(y - u))| \\
& = \left| \int_{R^d} [\gamma_0^{f(2^{-k} \cdot)}(v) \varphi(2^k(x - u) - v) - \gamma_0^{f(2^{-k} \cdot)}(v) \varphi(2^k(y - u) - v)] dv \right|
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Burada $v = 2^k(x - u) - v$ ve $v = 2^k(y - u) - v$ dönüşümü yaparsak

$$\begin{aligned}
& |\Gamma_k(f; x - u) - \Gamma_k(f; y - u)| \\
& = \left| \int_{R^d} [\gamma_0^{f(2^{-k} \cdot)}(2^k(x - u) - v) - \gamma_0^{f(2^{-k} \cdot)}(2^k(y - u) - v)] \varphi(v) dv \right| \\
& \leq \int_{R^d} \left| \gamma_0^{f(2^{-k} \cdot)}(2^k(x - u) - v) - \gamma_0^{f(2^{-k} \cdot)}(2^k(y - u) - v) \right| \varphi(v) dv \\
& = \int_{R^d} \left| l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k(x - u) - v) - l_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k(y - u) - v) \right| \varphi(v) dv \\
& \leq \omega_1(f(2^{-k} \cdot); 2^k \|x - y\|) = \omega_1(f; \|x - y\|)
\end{aligned}$$

olur. Her iki tarafın supremumunu alırsak

$$\sup_{\|x-y\| \leq \delta} |\Gamma_k(f; x - u) - \Gamma_k(f; y - u)| = \sup_{\|x-y\| \leq \delta} \omega_1(f; \|x - y\|)$$

yani $\omega_1(\Gamma_k f; \delta) \leq \omega_1(f; \delta)$ elde edilir.

Teorem 3.4.3. $f(x) = x \in C_U(R^d)$ olduğu zaman (3.4.34)'deki eşitsizlikler kesindir.

İspat. (i) A_k operatörünü alalım (φ çift).

$$l_0(f; u) = \int_{R^d} f(t) \varphi(t-u) dt = \int_{R^d} f(s+u) \varphi(s) ds .$$

Burada $s = t - u$ dönüşümü yapıldı. $i \in \{1, \dots, d\}$ için

$$\begin{aligned} l_0(pr_i(2^{-k} \cdot); 2^k x - u) - l_0(pr_i(2^{-k} \cdot); 2^k y - u) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [(x_i - 2^{-k} u_i) - (y_i - 2^{-k} u_i)] \cdot \varphi(s) ds \\ = (x_i - y_i) \cdot \int_{R^d} \varphi(s) ds = x_i - y_i \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz.

$$\begin{aligned} A_k(pr_i; x) - A_k(pr_i; y) &= A_0(pr_i(2^{-k} \cdot); 2^k x) - A_0(pr_i(2^{-k} \cdot); 2^k y) \\ &= \int_{R^d} \tau_0^{pr_i(2^{-k} \cdot)}(u) \varphi(2^k x - u) du - \int_{R^d} \tau_0^{pr_i(2^{-k} \cdot)}(u) \varphi(2^k y - u) du . \end{aligned}$$

$u = 2^k x - u$ ve $u = 2^k y - u$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} A_k(pr_i; x) - A_k(pr_i; y) &= \int_{R^d} \tau_0^{pr_i(2^{-k} \cdot)}(2^k x - u) \varphi(u) du - \int_{R^d} \tau_0^{pr_i(2^{-k} \cdot)}(2^k y - u) \varphi(u) du \\ &= \int_{R^d} [\tau_0^{pr_i(2^{-k} \cdot)}(2^k x - u) - \tau_0^{pr_i(2^{-k} \cdot)}(2^k y - u)] \varphi(u) du \\ &= \int_{R^d} [l_0(pr_i(2^{-k} \cdot); 2^k x - u) - l_0(pr_i(2^{-k} \cdot); 2^k y - u)] \varphi(u) du \\ &= (x_i - y_i) \cdot \int_{R^d} \varphi(u) du = x_i - y_i = pr_i(x) - pr_i(y) \end{aligned}$$

olur. Her iki tarafın $\delta > 0$ supremumunu alırsak

$$\sup_{\substack{x, y \in R^d \\ \|x-y\| \leq \delta}} |A_k(pr_i; x) - A_k(pr_i; y)| = \sup_{\substack{x, y \in R^d \\ \|x-y\| \leq \delta}} |pr_i(x) - pr_i(y)|$$

yani $\omega_1(A_k pr_i; \delta) \leq \omega_1(pr_i; \delta)$ elde edilir.

(ii) B_k operatöründe $l_0(f; x) = f(x)$ dir. Burada

$$l_0(pr_i(2^{-k} \cdot); 2^k x - u) - l_0(pr_i(2^{-k} \cdot); 2^k y - u)$$

$$= pr_i(2^{-k} \cdot)(2^k x - u) - pr_i(2^{-k} \cdot)(2^k y - u)$$

$$= x_i - 2^{-k} u_i - (y_i - 2^{-k} u_i) = x_i - y_i.$$

Teorem 3.3.2 'yi kullanalım. $i \in \{1, \dots, d\}$ için

$$B_k(pr_i; x) - B_k(pr_i; y) = B_0(pr_i(2^{-k} \cdot); 2^k x) - B_0(pr_i(2^{-k} \cdot); 2^k y)$$

$$= \int_{R^d} pr_i(2^{-k} \cdot)(u) \varphi(2^k x - u) du - \int_{R^d} pr_i(2^{-k} \cdot)(u) \varphi(2^k y - u) du$$

yazabiliriz. Burada $u = 2^k x - u$ ve $u = 2^k y - u$ dönüşümü yapılırsa

$$B_k(pr_i; x) - B_k(pr_i; y) = \int_{R^d} pr_i(2^{-k} \cdot)(2^k x - u) \varphi(u) du - \int_{R^d} pr_i(2^{-k} \cdot)(2^k y - u) \varphi(u) du$$

$$= \int_{R^d} [pr_i(2^{-k} \cdot)(2^k x - u) - pr_i(2^{-k} \cdot)(2^k y - u)] \varphi(u) du$$

$$= (x_i - y_i) \cdot \int_{R^d} \varphi(u) du = x_i - y_i = pr_i(x) - pr_i(y).$$

Her iki tarafın $\delta > 0$ supremumunu alırsak

$$\sup_{\substack{x, y \in R^d \\ \|x - y\| \leq \delta}} |B_k(pr_i; x) - B_k(pr_i; y)| = \sup_{\substack{x, y \in R^d \\ \|x - y\| \leq \delta}} |pr_i(x) - pr_i(y)|$$

yani $\omega_1(B_k pr_i; \delta) \leq \omega_1(pr_i; \delta)$ olur.

(iii) L_k operatörüne ele alalım. Burada $l_0(f; u) = \int_u^{u+1} f(t) dt$ dir.

$$l_0(pr_i(2^{-k} \cdot); 2^k x - u) - l_0(pr_i(2^{-k} \cdot); 2^k y - u)$$

$$= \int_{2^k x - u}^{2^k x - u + 1} pr_i(2^{-k} \cdot)(t) dt - \int_{2^k y - u}^{2^k y - u + 1} pr_i(2^{-k} \cdot)(t) dt$$

$$= \int_{2^k x - u}^{2^k x - u + 1} 2^{-k} \cdot t_i \cdot dt - \int_{2^k y - u}^{2^k y - u + 1} 2^{-k} \cdot t_i \cdot dt$$

$$= \int_0^1 \dots \int_0^1 2^{-k} \cdot (2^k x_i - u_i + t_i) dt - \int_0^1 \dots \int_0^1 2^{-k} \cdot (2^k y_i - u_i + t_i) dt$$

$$= \int_0^1 \dots \int_0^1 (x_i - y_i) dt = x_i - y_i = pr_i(x) - pr_i(y)$$

olduğundan Teorem 3.3.2.'yi kullanarak

$$\begin{aligned} L_k(pr_i; x) - L_k(pr_i; y) &= L_0(pr_i(2^{-k} \cdot); 2^k x) - L_0(pr_i(2^{-k} \cdot); 2^k y) \\ &= \int_{R^d} c_0^{pr_i(2^{-k} \cdot)}(u) \varphi(2^k x - u) du - \int_{R^d} c_0^{pr_i(2^{-k} \cdot)}(u) \varphi(2^k y - u) du \end{aligned}$$

yazabiliriz. Burada $u = 2^k x - u$ ve $u = 2^k y - u$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} L_k(pr_i; x) - L_k(pr_i; y) &= \int_{R^d} c_0^{pr_i(2^{-k} \cdot)}(2^k x - u) \varphi(u) du - \int_{R^d} c_0^{pr_i(2^{-k} \cdot)}(2^k y - u) \varphi(u) du \\ &= \int_{R^d} [c_0^{pr_i(2^{-k} \cdot)}(2^k x - u) - c_0^{pr_i(2^{-k} \cdot)}(2^k y - u)] \varphi(u) du \\ &= \int_{R^d} [l_0(pr_i(2^{-k} \cdot); 2^k x - u) - l_0(pr_i(2^{-k} \cdot); 2^k y - u)] \varphi(u) du \\ &= (x_i - y_i) \cdot \int_{R^d} \varphi(u) du = x_i - y_i = pr_i(x) - pr_i(y). \end{aligned}$$

Her iki tarafın $\delta > 0$ supremumunu alırsak

$$\sup_{\substack{x, y \in R^d \\ \|x - y\| \leq \delta}} |L_k(pr_i; x) - L_k(pr_i; y)| = \sup_{\substack{x, y \in R^d \\ \|x - y\| \leq \delta}} |pr_i(x) - pr_i(y)|$$

yani $\omega_1(L_k pr_i; \delta) \leq \omega_1(pr_i; \delta)$ elde ederiz.

(iv) Γ_k operatörü için

$$l_0(f; u) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_d=0}^{n_d} w_{j_1, \dots, j_d} \cdot f(u_1 + \frac{j_1}{n_1}, \dots, u_d + \frac{j_d}{n_d}).$$

Burada

$$\begin{aligned} l_0(pr_i(2^{-k} \cdot); 2^k x - u) - l_0(pr_i(2^{-k} \cdot); 2^k y - u) \\ &= \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_d=0}^{n_d} w_{j_1, \dots, j_d} \cdot [(x_i - 2^{-k} u_i + 2^{-k} \frac{j_i}{n_i}) - (y_i - 2^{-k} u_i + \frac{j_i}{n_i})] \\ &= \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_d=0}^{n_d} w_{j_1, \dots, j_d} \cdot (x_i - y_i) = x_i - y_i \end{aligned}$$

olur. Teorem 3.3.2.'yi kullanırsak

$$\begin{aligned}\Gamma_k(pr_i; x) - \Gamma_k(pr_i; y) &= \Gamma_0(pr_i(2^{-k} \cdot); 2^k x) - \Gamma_0(pr_i(2^{-k} \cdot); 2^k y) \\ &= \int_{R^d} \gamma_0^{pr_i(2^{-k} \cdot)}(u) \varphi(2^k x - u) du - \int_{R^d} \gamma_0^{pr_i(2^{-k} \cdot)}(u) \varphi(2^k y - u) du\end{aligned}$$

yazabiliriz. $u = 2^k x - u$ ve $u = 2^k y - u$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}\Gamma_k(pr_i; x) - \Gamma_k(pr_i; y) &= \int_{R^d} \gamma_0^{pr_i(2^{-k} \cdot)}(2^k x - u) \varphi(u) du - \int_{R^d} \gamma_0^{pr_i(2^{-k} \cdot)}(2^k y - u) \varphi(u) du \\ &= \int_{R^d} [\gamma_0^{pr_i(2^{-k} \cdot)}(2^k x - u) - \gamma_0^{pr_i(2^{-k} \cdot)}(2^k y - u)] \varphi(u) du \\ &= \int_{R^d} [l_0(pr_i(2^{-k} \cdot); 2^k x - u) - l_0(pr_i(2^{-k} \cdot); 2^k y - u)] \varphi(u) du \\ &= (x_i - y_i) \cdot \int_{R^d} \varphi(u) du = x_i - y_i = pr_i(x) - pr_i(y)\end{aligned}$$

olur. Her iki tarafın $\delta > 0$ supremumunu alırsak

$$\sup_{\substack{x, y \in R^d \\ \|x - y\| \leq \delta}} |\Gamma_k(pr_i; x) - \Gamma_k(pr_i; y)| = \sup_{\substack{x, y \in R^d \\ \|x - y\| \leq \delta}} |pr_i(x) - pr_i(y)|$$

yani $\omega_1(\Gamma_k pr_i; \delta) \leq \omega_1(pr_i; \delta)$ elde ederiz.

$k \rightarrow +\infty$ için A_k , B_k , L_k , Γ_k operatörlerinin $k \in \mathbb{Z}$ için I birim fonksiyonuna yakınsadığını gösterelim.

Teorem 3.4.4. $k \in \mathbb{Z}$, $a := \max_{1 \leq i \leq d} (a_i)$ iken

$$|A_k(f; x) - f(x)| \leq \omega_{1, \infty} \left(f; \frac{a}{2^{k-1}} \right) \quad (3.4.35)$$

$$|B_k(f; x) - f(x)| \leq \omega_{1, \infty} \left(f; \frac{a}{2^k} \right) \quad (3.4.36)$$

$$|L_k(f; x) - f(x)| \leq \omega_{1, \infty} \left(f; \frac{a+1}{2^k} \right) \quad (3.4.37)$$

$$|\Gamma_k(f; x) - f(x)| \leq \omega_{1, \infty} \left(f; \frac{a+1}{2^k} \right). \quad (3.4.38)$$

İspat. m, n, r 'nin uygun değerleri için

$$\sup_{\substack{u, y \in R^d \\ \|u-y\|_\infty \leq a}} |l_0(f; u) - f(y)| \leq \omega_{1,\infty} \left(f; \frac{ma+n}{2^r} \right)$$

eşitsizliğinden yararlanarak Teorem 3.3.2.'ye göre ispatlayabiliriz.

(i) A_k operatörünü ele alalım (φ çift).

$$l_0(f; u) = \tau_0^f(u) = \int_{R^d} f(t) \varphi(t-u) dt = \int_{R^d} f(t) \varphi(u-t) dt .$$

Burada

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{u, y \in R^d \\ \|u-y\|_\infty \leq a}} |l_0(f; u) - f(y)| &= \sup_{\substack{u, y \in R^d \\ \|u-y\|_\infty \leq a}} \left| \int_{R^d} f(t) \varphi(u-t) dt - \int_{R^d} f(y) \varphi(u-t) dt \right| \\ &= \sup_{\substack{u, y \in R^d \\ \|u-y\|_\infty \leq a}} \left| \int_{R^d} (f(t) - f(y)) \varphi(u-t) dt \right| \\ &\leq \sup_{\substack{u, y \in R^d \\ \|u-y\|_\infty \leq a}} \int_{R^d} |f(t) - f(y)| \varphi(u-t) dt \\ &\leq \sup_{\substack{u, y \in R^d \\ \|u-y\|_\infty \leq a}} \int_{R^d} \omega_{1,\infty}(f; \|t-y\|_\infty) \varphi(u-t) dt \\ &\leq \int_{R^d} \omega_{1,\infty}(f; 2a) \varphi(u-t) dt = \omega_{1,\infty}(f; 2a) \end{aligned}$$

olduğundan aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz.

$$|A_k(f; x) - f(x)| = |A_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k x) - f(2^{-k}(2^k x))|$$

$$\begin{aligned} &= \left| \int_{R^d} \tau_0^{f(2^{-k} \cdot)}(u) \varphi(2^k x - u) du - f(2^{-k}(2^k x)) \int_{R^d} \varphi(2^k x - u) du \right| \\ &= \left| \int_{R^d} [\tau_0^{f(2^{-k} \cdot)}(u) - f(2^{-k}(2^k x))] \varphi(2^k x - u) du \right| \\ &= \left| \int_{R^d} [l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x))] \varphi(2^k x - u) du \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int \dots \int_{i=1, \dots, d}^{2^k x_i + a_i} \int_{2^k x_i - a_i}^{2^k x_i + a_i} \left| l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x)) \right| \varphi(2^k x - u) du \\
&\leq \sup_{u \in \prod_{i=1}^d [2^k x_i - a_i, 2^k x_i + a_i]} \left| l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x)) \right| \cdot \int \dots \int_{i=1, \dots, d}^{2^k x_i + a_i} \varphi(2^k x - u) du \\
&\leq \sup_{u \in \prod_{i=1}^d [2^k x_i - a_i, 2^k x_i + a_i]} \left| l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x)) \right| \\
&= \sup_{\substack{her \\ u \in R^d \\ u - 2^k x \in \prod_{i=1}^d [-a_i, a_i]}} \left| l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x)) \right| \\
&= \sup_{\substack{her \\ u \in R^d \\ |u_i - 2^k x_i| \leq a_i}} \left| l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x)) \right| \\
&\leq \sup_{\substack{her \\ u \in R^d \\ |u_i - 2^k x_i| \leq \max_{i=1, \dots, d} (a_i) =: a}} \left| l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x)) \right|.
\end{aligned}$$

$g := f(2^{-k} \cdot) \in X$ ve $y_i := 2^k x_i$ alırsak

$$\begin{aligned}
|A_k(f; x) - f(x)| &\leq \sup_{|u_i - y_i| \leq a} |l_0(g; u) - g(y)| = \sup_{\|u - y\| \leq a} |l_0(g; u) - g(y)| \\
&\leq \omega_{1, \infty}(g; 2a) = \omega_{1, \infty}\left(f; \frac{2a}{2^k}\right)
\end{aligned}$$

olur. Aynı yolu diğer örneklerde de uygulayabiliriz.

(ii) B_k operatöründe $l_0(f; u) = f(u)$ dir.

$$\sup_{\substack{u, y \in R^d \\ \|u - y\|_{\infty} \leq a}} |l_0(f; u) - f(y)| = \sup_{\substack{u, y \in R^d \\ \|u - y\|_{\infty} \leq a}} |f(u) - f(y)| = \omega_{1, \infty}(f; a)$$

yazabiliriz. Teorem 3.3.2 .'yi kullanarak (3.4.36)'nın doğru olduğunu gösterebiliriz.

$$\begin{aligned}
|B_k(f; x) - f(x)| &= |B_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k x) - f(2^{-k}(2^k x))| \\
&= \left| \int_{R^d} f(2^{-k} \cdot)(u) \varphi(2^k x - u) du - f(2^{-k}(2^k x)) \int_{R^d} \varphi(2^k x - u) du \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_{R^d} [f(2^{-k} \cdot)(u) - f(2^{-k}(2^k x))] \varphi(2^k x - u) du \right| \\
&= \left| \int_{R^d} [l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x))] \varphi(2^k x - u) du \right|
\end{aligned}$$

olur. Önceki örnekteki işlemler tekrarlanırsa

$$|B_k(f; x) - f(x)| \leq \omega_{1,\infty}(g; a) = \omega_{1,\infty}\left(f; \frac{a}{2^k}\right)$$

elde ederiz.

(iii) L_k operatörünü göz önüne alalım. Burada

$$l_0(f; u) = c_0^f(u) = \int_u^{u+1} f(t) dt$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{u, y \in R^d \\ \|u-y\|_\infty \leq a}} |l_0(f; u) - f(y)| &= \sup_{\substack{u, y \in R^d \\ \|u-y\|_\infty \leq a}} \left| \int_u^{u+1} f(t) dt - f(y) \right| \\
&= \sup_{\substack{u, y \in R^d \\ \|u-y\|_\infty \leq a}} \left| \int_u^{u+1} (f(t) - f(y)) dt \right| \\
&\leq \sup_{\substack{u, y \in R^d \\ \|u-y\|_\infty \leq a}} \int_u^{u+1} |f(t) - f(y)| dt \\
&= \sup_{\substack{u, y \in R^d \\ \|u-y\|_\infty \leq a}} \int_0^1 \dots \int_0^1 |f(u+t) - f(y)| dt \\
&\leq \sup_{\substack{u, y \in R^d \\ \|u-y\|_\infty \leq a}} \int_0^1 \dots \int_0^1 \omega_{1,\infty}(f; \|u+t-y\|_\infty) dt \\
&\leq \sup_{\substack{u, y \in R^d \\ \|u-y\|_\infty \leq a}} \int_0^1 \dots \int_0^1 \omega_{1,\infty}(f; \|t\|_\infty + \|u-y\|_\infty) dt \\
&\leq \sup_{\substack{u, y \in R^d \\ \|u-y\|_\infty \leq a}} \int_0^1 \dots \int_0^1 \omega_{1,\infty}(f; 1 + \|u-y\|_\infty) dt
\end{aligned}$$

$$= \omega_{1,\infty}(f; 1+a)$$

yazabiliriz. Böylece sonuca aşağıdaki işlemlerle ulaşabiliriz.

$$\begin{aligned} |L_k(f; x) - f(x)| &= |L_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k x) - f(2^{-k}(2^k x))| \\ &= \left| \int_{R^d} c_0^{f(2^{-k} \cdot)}(u) \varphi(2^k x - u) du - f(2^{-k}(2^k x)) \int_{R^d} \varphi(2^k x - u) du \right| \\ &= \left| \int_{R^d} [c_0^{f(2^{-k} \cdot)}(u) - f(2^{-k}(2^k x))] \varphi(2^k x - u) du \right| \\ &= \left| \int_{R^d} [l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x))] \varphi(2^k x - u) du \right|. \end{aligned}$$

(i) deki işlemler tekrarlanırsa

$$|L_k(f; x) - f(x)| \leq \omega_{1,\infty}(g; 1+a) = \omega_{1,\infty}\left(f; \frac{1+a}{2^k}\right)$$

elde edilir.

(iv) Γ_k operatöründe $w_{j_1, \dots, j_d} \geq 0$, $\sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_d=0}^{n_d} w_{j_1, \dots, j_d} = 1$ için

$$l_0(f; u) = \gamma_0^f(u) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_d=0}^{n_d} w_{j_1, \dots, j_d} \cdot f\left(u_1 + \frac{j_1}{n_1}, \dots, u_d + \frac{j_d}{n_d}\right)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{u, y \in R^d \\ \|u-y\|_\infty \leq a}} |l_0(f; u) - f(y)| &= \sup_{\substack{u, y \in R^d \\ \|u-y\|_\infty \leq a}} \left| \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_d=0}^{n_d} w_{j_1, \dots, j_d} \cdot f\left(u_1 + \frac{j_1}{n_1}, \dots, u_d + \frac{j_d}{n_d}\right) - f(y) \right| \\ &= \sup_{\substack{u, y \in R^d \\ \|u-y\|_\infty \leq a}} \left| \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_d=0}^{n_d} w_{j_1, \dots, j_d} \cdot \left(f\left(u_1 + \frac{j_1}{n_1}, \dots, u_d + \frac{j_d}{n_d}\right) - f(y) \right) \right| \\ &\leq \sup_{\substack{u, y \in R^d \\ \|u-y\|_\infty \leq a}} \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_d=0}^{n_d} w_{j_1, \dots, j_d} \cdot \left| f\left(u_1 + \frac{j_1}{n_1}, \dots, u_d + \frac{j_d}{n_d}\right) - f(y) \right| \end{aligned}$$

$$\leq \sup_{\substack{u, y \in R^d \\ \|u-y\|_\infty \leq a}} \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_d=0}^{n_d} w_{j_1, \dots, j_d} \cdot \omega_{1, \infty} \left(f; \left\| u + \frac{j}{n} - y \right\|_\infty \right)$$

yazılabilir. Burada $\frac{j}{n} := (\frac{j_1}{n_1}, \dots, \frac{j_d}{n_d})$ dir. İşleme devam edersek

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{u, y \in R^d \\ \|u-y\|_\infty \leq a}} |l_0(f; u) - f(y)| &\leq \sup_{\substack{u, y \in R^d \\ \|u-y\|_\infty \leq a}} \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_d=0}^{n_d} w_{j_1, \dots, j_d} \cdot \omega_{1, \infty} \left(f; \left\| \frac{j}{n} \right\|_\infty + \|u - y\|_\infty \right) \\ &\leq \sup_{\substack{u, y \in R^d \\ \|u-y\|_\infty \leq a}} \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_d=0}^{n_d} w_{j_1, \dots, j_d} \cdot \omega_{1, \infty}(f; 1+a) \\ &= \omega_{1, \infty}(f; 1+a) \end{aligned}$$

olur.

$$|\Gamma_k(f; x) - f(x)| = |\Gamma_0(f(2^{-k} \cdot); 2^k x) - f(2^{-k}(2^k x))|$$

$$\begin{aligned} &= \left| \int_{R^d} \mathcal{V}_0^{f(2^{-k} \cdot)}(u) \varphi(2^k x - u) du - f(2^{-k}(2^k x)) \int_{R^d} \varphi(2^k x - u) du \right| \\ &= \left| \int_{R^d} [\mathcal{V}_0^{f(2^{-k} \cdot)}(u) - f(2^{-k}(2^k x))] \varphi(2^k x - u) du \right| \\ &= \left| \int_{R^d} [l_0(f(2^{-k} \cdot); u) - f(2^{-k}(2^k x))] \varphi(2^k x - u) du \right|. \end{aligned}$$

(i) deki ara işlemleri tekrar edersek

$$|\Gamma_k(f; x) - f(x)| \leq \omega_{1, \infty}(g; 1+a) = \omega_{1, \infty} \left(f; \frac{1+a}{2^k} \right)$$

elde ederiz.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Genelleştirilmiş integral operatörlerin yaklaşım hızı, süreklilik modülü yardımı ile genelleştirilmiş singüler integrallerin fonksiyonlarının yaklaşım hızından daha iyidir. Yani 2. Bölümde $\mathcal{L}_k(f, x)$ operatörünün f fonksiyonuna $\frac{1}{2^k}$ 'nin yaklaşım hızından daha hızlı 0' a yaklaştığını

$$|\mathcal{L}_k(f; x) - f(x)| \leq \omega_1\left(f; \frac{ma + n}{2^{k+r}}\right)$$

ifadesinden söyleyebiliriz. 3. Bölümde $\mathcal{L}_{k,j}$ operatörü için yaklaşım hızının korunduğunu

$$|\mathcal{L}_{k,j}(f; x) - f(x)| \leq \omega_1\left(f; \frac{mja + n}{2^{k+r}}\right)$$

ifadesinden görebiliriz. Yine bu sonuçların n -boyutlu integral operatörler içinde geçerli olduğunu söyleyebiliriz.

KAYNAKLAR

1. George A. Anastassiou and Sorin G. Gal, Approximation Theory, Birhauser Verlag A6 (2000)
2. G. Anastassiou, C. Cottin and H. Gonska, Global smoothness of approximating functions, Analysis 11, 43-57 (1991)
3. G. Anastassiou and H. Gonska, On some shift-invariant integral operators, univariate case, Ann. Pol. Math. L $\times$ L3, 225-243 (1995)
4. A. D. Hacıyev, Deltasal çekirdekli integral operatörler ailesi ve yaklaşım teorisi, Lisans üstü ders notları, Ankara Üniversitesi, Ankara (1999)