

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE
TAMAMLANMIŞ VERİLER İÇİN BAYESYEN YAKLAŞIM İLE
WEIBULL PARAMETRELERİ VE YÜZDELİKLERİ İÇİN
GÜVEN ARALIĞI TAHMİNİ

Meryem YALÇINKAYA

HAZİRAN 2015

Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalında Meryem YALÇINKAYA tarafından hazırlanan GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE TAMAMLANMIŞ VERİLER İÇİN BAYESYEN YAKLAŞIM İLE WEIBULL PARAMETRELERİ VE YÜZDELİKLERİ İÇİN GÜVEN ARALIĞI TAHMİNİ adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr., Burak BİRGÖREN
Endüstri Müh. Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Tez Danışmanı

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Bilal TOKLU (Gazi Üniversitesi)
Üye (Danışman) : Prof. Dr. Burak BİRGÖREN
Üye : Doç. Dr. Ahmet Kürşad TÜRKER

15/6/2015

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Mustafa YİĞİTOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE TAMAMLANMIŞ VERİLER İÇİN BAYESYEN YAKLAŞIMLA WEIBULL PARAMETRELERİ VE YÜZDELİKLERİ İÇİN GÜVEN ARALIĞI TAHMİNİ

YALÇINKAYA, Meryem

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman : Prof. Dr. Burak BİRGÖREN

Haziran 2015, 118 sayfa

Güvenilirlik çalışmalarında seramik ve kompozit malzemelerin mekanik özelliklerinin modellenmesinde Weibull dağılımı yaygın olarak kullanılır. Malzeme bilimi dışında da bu dağılım farklı arıza hızlarını modelleyebildiği için tasarımcılara esnek bir model sunar ve yaygın bir şekilde kullanılır. Bu tez çalışmasında kompozit bir malzemenin kopma mukavemeti güvenilirliği incelenmekte ve model olarak 2 parametrelili Weibull dağılımı kullanılmaktadır. Kopma mukavemetine ilişkin güvenilirlik hesaplamaları için öncelikle modele ait parametre tahminlerinin yapılması gerekir. Uzun süren ve yüksek maliyet gerektiren güvenilirlik çalışmalarında küçük örneklem hacimleri kullanıldığında, Weibull parametreleri güven aralıkları ile alt yüzdeliklerin güven alt sınırlarını olabildiğince az hata ile belirleyebilmek çok önemlidir. Bu tahminler Bayesyen ve klasik olmak üzere iki farklı yaklaşıma göre yapılabilmektedir; fakat Bayesyen yaklaşım eldeki veri haricinde araştırmacının parametreye dair deneyimini ve teorik düşüncelerini de kapsadığından küçük örneklem hacimlerinde klasik yaklaşıma nazaran çok daha iyi sonuçlar verir. Literatürde Weibull parametrelerinin nokta ve güven aralığı tahmini için her iki yaklaşıma göre yapılmış çalışmalar bulunmaktadır; fakat belirli bir p hata olasılığına karşılık gelen Weibull alt yüzdeliklerinin güven alt sınırlarına dair Bayesyen yaklaşımla yapılmış bir çalışmaya rastlanmamıştır. Bu tez çalışmasında

küçük örneklem hacimlerinde Weibull alt yüzdelik güven alt sınırlarının Bayesyen yaklaşıma göre hesaplanabilmesi için C++ ortamında bir algoritma geliştirilmiş, bu algoritma üzerinden örnek bir uygulama ve yüksek tekrarda simulasyon yapılmış ve elde edilen sonuçlara göre Bayesyen ve klasik yaklaşımların tahmin performansları karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Güvenilirlik Analizi, Weibull Dağılımı, Bayesyen Yaklaşım, Weibull Parametreleri ve Yüzdelikleri.

ABSTRACT

CONFIDENCE INTERVAL ESTIMATION VIA BAYESIAN INFERENCE FOR WEIBULL PARAMETERS AND PERCENTILES FOR UNCENSORED DATA IN RELIABILITY ANALYSIS

YALÇINKAYA, Meryem

Kırıkkale University

Graduate School Of Natural and Applied Sciences

Department of Industrial Engineering, M. Sc. Thesis

Supervisor : Prof. Dr. Burak BİRGÖREN

June 2015, 118 pages

In reliability studies of ceramics and composite materials, Weibull distribution is used commonly in modeling the materials' mechanical properties. In many other fields as well as materials science, because of its ability to model different failure rates, Weibull distribution offers a flexible model to designers and is widely used. In this study, the reliability of tensile strength of a composite material has been investigated and the two-parameter Weibull distribution has been used as a model. For reliability calculations related to the tensile strength, firstly, Weibull parameters must be estimated. Reliability studies usually take long times and require high costs; therefore it is a must to work with small sample sizes. In this case, it is very important to estimate confidence intervals of Weibull parameters and lower confidence limits of Weibull lower percentiles, corresponding to predefined failure probabilities, with minimal errors. These inferences can be performed according to two different approaches, namely, Bayesian and classical inferences. In small sample sizes, Bayesian inference gives much better results compared to the classical inference, because Bayesian inference includes researchers' experience and theoretical considerations regarding the parameters except available data. In literature, there are studies performed for point and confidence interval estimation of the Weibull parameters by the both approaches, but no studies have been conducted to estimate confidence intervals of Weibull lower percentiles via Bayesian inference.

For this reason, in this study, an algorithm has been developed in C++ to estimate lower confidence limits of Weibull lower percentiles in small sample sizes. With this algorithm, a sample application and a simulation with high run times have been done and according to the results, estimation performances of Bayesian and classical inferences have been compared.

Key Words: Reliability Analysis, Weibull Distribution, Bayesian Inference, Weibull Parameters and Percentiles.

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması esnasında hiçbir yardımı esirgemeyen ve biz genç araştırmacılara büyük destek olan, tez çalışmalarım esnasında, bilimsel konularda daima yardımını gördüğüm, tez yöneticisi hocam, Sayın Prof. Dr. Burak BİRGÖREN'e, bilgi birikimleri ve değerli görüşleriyle katkı sağlayan değerli hocalarım Doç.Dr. Süleyman ERSÖZ, Doç.Dr. Ahmet Kürşat TÜRKER'e, Doç.Dr. Tamer EREN ve Doç.Dr. Ümit Sami SAKALLI'ya, tezimin birçok aşamasında büyük fedakarlıklarla bana destek olan eşim Sezer YALÇINKAYA'ya ve kıymetli aileme, yaşama enerjim biricik oğlum Ilgar Deniz YALÇINKAYA'ya ve son olarak tez süresince burs desteği sağlayan TÜBİTAK'a çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET.....	i
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ	x
SİMGELER DİZİNİ	xii
KISALTMALAR DİZİNİ	xiv
1. GİRİŞ	1
1.1. Tezin Konusu ve Amacı.....	1
1.2. Tezin Organizasyonu	2
1.3 Literatür Taraması.....	3
2. GÜVENİLİRLİK	6
2.1. Güvenilirlik ve Güvenilirlik Analizi	6
2.2. Güvenilirlik ile İlgili Temel Matematiksel Kavramlar	7
2.2.1. Birikimli Dağılım Fonksiyonu	8
2.2.2. Güvenilirlik Fonksiyonu	8
2.2.3. Hata Oranı Fonksiyonu	10
2.2.4. Birikimli Hata Fonksiyonu.....	11
2.2.5. Ortalama Hata Oranı	11
2.2.6. Ortalama Hata Süresi	12
2.2.7. Ortalama Onarım Süresi.....	12
2.2.8. Hatalar Arası Ortalama Süre	13
2.3. Hata Oranının Zamanla Değişimi-Küvet Eğrisi.....	13
2.4. Güvenilirlik Analizinde A-Temel ve B-Temel Malzeme Özellikleri.....	14
2.5. Güvenilirlik Analizinde Kullanılan Veri Türleri.....	18
3. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE WEIBULL DAĞILIM	
MODELİNİN KULLANILMASI	19

3.1. Güvenilirlik Analizinde Kullanılan İstatistiksel Dağılım Modelleri.....	19
3.2. Weibull Olasılık Dağılımı	20
3.3. Güvenilirlik Analizinde Kullanılan Parametre Tahmin Yaklaşımları	24
3.3.1. Klasik Yaklaşım.....	24
3.3.2. Bayesyen Yaklaşım.....	33
3.4. Weibull Parametreleri ve Yüzdeliklerinin Güven Aralığı Tahmini Üzerine Simülasyon Çalışması.....	44
3.4.1. MB Yöntemi ile Weibull Parametreleri ve Yüzdeliklerinin Güven.. Aralığı Tahmin Simülasyonu	47
3.4.2. BW Yöntemi ile Weibull Parametreleri ve Yüzdeliklerinin Güven . Aralığı Tahmin Simülasyonu	50
4. UYGULAMA VE SİMÜLASYON ÇALIŞMASI	57
4.1. Uygulama Örneği Hakkında	57
4.2. Uygulama için Weibull Parametreleri Güven Aralıkları ve Alt Yüzdeliklerinin Güven Alt Sınırları Tahmini	59
4.3. Simülasyon Çalışması	61
4.3.1. m=2 için Weibull Parametreleri Güven Aralıkları ve Alt Yüzdeliklerinin Güven Alt Sınırları Tahmini.....	62
4.3.2. m=5 için Weibull Parametreleri Güven Aralıkları ve Alt Yüzdeliklerinin Güven Alt Sınırları Tahmini.....	66
4.3.3. m=10 için Weibull Parametreleri Güven Aralıkları ve Alt Yüzdeliklerinin Güven Alt Sınırları Tahmini.....	71
4.3.4. m=20, 40, 60, 80 ve 100 için Weibull Parametreleri Güven Aralıkları ve Alt Yüzdeliklerinin Güven Alt Sınırları Tahmini	75
4.3.5. Weibull Alt Yüzdelikleri Alt Güven Sınırları için BW ve MB Yöntemlerinin Tahmin Performansları.....	90
5. SONUÇ VE TARTIŞMA.....	95
KAYNAKLAR	99
EKLER.....	105
EK.1.	105

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>ŞEKİL</u>	<u>Sayfa</u>
2.1. Olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(t)$ ve birikimli dağılım fonksiyonu $F(t)$	8
2.2. Güvenilirlik fonksiyonu $R(t)$	9
2.3. Güvenilirlik fonksiyonu ve birikimli dağılım fonksiyonu.....	10
2.4. $\sigma_0=1$ değeri için Weibull dağılımının hata oranı fonksiyonu.....	11
2.5. Küvet karakteristiği eğrisi.....	13
2.6. Gerçek 1. yüzdeler için tolerans alt sınırı	15
2.7. Bir örneklem üzerinden 1. yüzdeler için tahmini tolerans alt sınırı	16
2.8. 100 örneklem üzerinden 1. yüzdeler için tahmini tolerans alt sınırı.....	16
2.9. Tek taraflı tolerans sınırları	17
3.1. İki parametrelili Weibull dağılımı olasılık yoğunluk fonksiyonu	22
3.2. İki parametrelili Weibull dağılımı birikimli dağılım fonksiyonu	23
3.3. İki parametrelili Weibull dağılımı güvenilirlik fonksiyonu.....	23
3.4. İki parametrelili Weibull dağılımı hata oranı fonksiyonu.....	24
3.5. SIM1 program akış şeması	46
3.6. “MB için pivotal istatistik tablolarını oluştur” yordamı akış şeması.....	48
3.7. “MB yöntemine göre m ve σ_0 için $1-\alpha$ düzeyinde güven aralıkları ile l_p alt sınırı bul” yordamı akış şeması.....	49
3.8. “BW yöntemine göre m ve σ_0 için $1-\alpha$ düzeyinde güvenilir aralıkları ile l_p alt sınırı bul” yordamı akış şeması	51
3.9. BW yönteminde normalleştirme sabitinin integrasyon hesabı	54
4.1. Kompozit malzemeye ait kırılmış bir numune ve milimetrik ölçüleri	57
4.2. $m=2$ ve farklı n ’ler için Weibull ölçek parametresi güven aralıkları.....	64
4.3. $m=2$ için Weibull alt yüzdelik ($p=0.01$) alt güven sınırı	65
4.4. $m=2$ için Weibull alt yüzdelik ($p=0.1$) alt güven sınırı	66
4.5. $m=2$ ve $m=5$ için olasılık yoğunluk fonksiyonu	67
4.6. $m=5$ ve farklı n ’ler için Weibull ölçek parametresi güven aralıkları.....	69
4.7. $m=5$ için Weibull alt yüzdelik ($p=0.01$) alt güven sınırı	70
4.8. $m=5$ için Weibull alt yüzdelik ($p=0.1$) alt güven sınırı	70

4.9. $m=2, m=5$ ve $m=10$ için olasılık yoğunluk fonksiyonları	71
4.10. $m=10$ ve farklı n 'ler için Weibull ölçek parametresi güven aralıkları.....	73
4.11. $m=10$ için Weibull alt yüzdelik ($p=0.01$) alt güven sınırı	74
4.12. $m=10$ için Weibull alt yüzdelik ($p=0.01$) alt güven sınırı	74
4.13. $m=20, 40, 60, 80$ ve 100 için olasılık yoğunluk fonksiyonları	75
4.14. $m=20$ ve farklı n 'ler için Weibull ölçek parametresi güven aralıkları.....	80
4.15. $m=40$ ve farklı n 'ler için Weibull ölçek parametresi güven aralıkları.....	80
4.16. $m=60$ ve farklı n 'ler için Weibull ölçek parametresi güven aralıkları.....	81
4.17. $m=80$ ve farklı n 'ler için Weibull ölçek parametresi güven aralıkları.....	81
4.18. $m=100$ ve farklı n 'ler için Weibull ölçek parametresi güven aralıkları.....	82
4.19. $m=20$ için Weibull alt yüzdelik ($p=0.01$) alt güven sınırı	85
4.20. $m=20$ için Weibull alt yüzdelik ($p=0.1$) alt güven sınırı	85
4.21. $m=40$ için Weibull alt yüzdelik ($p=0.01$) alt güven sınırı	86
4.22. $m=40$ için Weibull alt yüzdelik ($p=0.1$) alt güven sınırı	86
4.23. $m=60$ için Weibull alt yüzdelik ($p=0.01$) alt güven sınırı	87
4.24. $m=60$ için Weibull alt yüzdelik ($p=0.1$) alt güven sınırı	87
4.25. $m=80$ için Weibull alt yüzdelik ($p=0.01$) alt güven sınırı	88
4.26. $m=80$ için Weibull alt yüzdelik ($p=0.1$) alt güven sınırı	88
4.27. $m=100$ için Weibull alt yüzdelik ($p=0.01$) alt güven sınırı	89
4.28. $m=100$ için Weibull alt yüzdelik ($p=0.1$) alt güven sınırı	89

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>ÇİZELGE</u>	<u>Sayfa</u>
3.1. Weibull dağılımı için bağlantılar	21
4.1. Kompozit tabakaların mekanik özellikleri.....	58
4.2. Kopma mukavemeti değerleri.....	58
4.3. 19 adet numune için MB ve BW yöntemlerine göre programın tahmin çıktıları.....	59
4.4. 9 adet numune için MB ve BW yöntemlerine göre programın tahmin çıktıları.....	60
4.5. 3 adet numune için MB ve BW yöntemlerine göre programın tahmin çıktıları.....	61
4.6. $m=2$ için Weibull şekil parametresinin $1-\alpha=0.95$ güven düzeyindeki güven aralıkları	63
4.7. $m=2$ için Weibull ölçek parametresinin $1-\alpha=0.95$ güven düzeyindeki güven aralıkları	63
4.8. $m=2$ için $p=0.01$ ve $p=0.1$ Weibull alt yüzdeliklerinin güven alt sınır değerleri	65
4.9. $m=5$ için Weibull şekil parametresinin $1-\alpha=0.95$ güven düzeyindeki güven aralıkları	67
4.10. $m=5$ için Weibull ölçek parametresinin $1-\alpha=0.95$ güven düzeyindeki güven aralıkları	68
4.11. $m=5$ için $p=0.01$ ve $p=0.1$ Weibull alt yüzdeliklerinin güven alt sınır değerleri	69
4.12. $m=10$ için Weibull şekil parametresinin $1-\alpha=0.95$ güven düzeyindeki güven aralıkları	72
4.13. $m=10$ için Weibull ölçek parametresinin $1-\alpha=0.95$ güven düzeyindeki güven aralıkları	72
4.14. $m=10$ için $p=0.01$ ve $p=0.1$ Weibull alt yüzdeliklerinin güven alt sınır değerleri	73

4.15. $m=20, 40, 60, 80$ ve 100 için Weibull şekil parametresinin $1-\alpha=0.95$ güven düzeyindeki güven aralıkları.....	76
4.16. $m=20, 40, 60, 80$ ve 100 için Weibull ölçek parametresinin $1-\alpha=0.95$ güven düzeyindeki güven aralıkları.....	78
4.17. $m=20, 40, 60, 80$ ve 100 için $p=0.01$ ve $p=0.1$ Weibull alt yüzdeliklerinin güven alt sınır değerleri	82
4.18. Weibull alt yüzdelik güven alt sınırı l_p ($p=0.01$) için BW ve MB'nin örneklem hacmi açısından kıyaslanması	90
4.19. Weibull alt yüzdelik güven alt sınırı l_p ($p=0.1$) için BW ve MB'nin örneklem hacmi açısından kıyaslanması	92

SİMGELER DİZİNİ

T	Hata zamanı
$f(t)$	T rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu
$F(t)$	T rassal değişkeninin birikimli dağılım fonksiyonu
$R(t)$	T rassal değişkeninin güvenilirlik fonksiyonu
$\lambda(t)$	Hata oranı veya arıza hızı fonksiyonu
$H(t)$	Hata oranlarının birikimli fonksiyonu
$AFR(t_1, t_2)$	$[t_1, t_2]$ zaman aralığındaki hata oranı
n	Örneklem hacmi
$Y[n]$	n örnek hacminde Weibull değişken vektörü
m	Weibull şekil parametresi
σ_0	Weibull ölçek parametresi
$\hat{m}$	Weibull şekil parametresinin tahmini değeri
$\hat{\sigma}_0$	Weibull ölçek parametresinin tahmini değeri
t_0	Weibull konum parametresi
p	Hata yüzdesi veya olasılığı
α	Güven düzeyi
θ	Parametre vektörü
$L(\theta)$	θ parametreleri için benzerlik fonksiyonu
t_p	Küçük bir p hata olasılığına karşılık gelen t değeri
l_p	t_p için güven alt sınırı
$\hat{t}_p$	t_p 'nin tahmini değeri

$d_{\alpha/2}, d_{1-\alpha/2}$	m güven aralıkları için $\hat{m}/m$ pivotal istatistik üzerinden elde edilen tablo değerleri
$s_{\alpha/2}, s_{1-\alpha/2}$	σ_0 güven aralıkları için $\hat{m} \ln(\hat{\sigma}_0/\sigma_0)$ pivotal istatistik üzerinden elde edilen tablo değerleri
$C_{\alpha/2}, C_{1-\alpha/2}$	t_p güven aralıkları için $\hat{m} \ln(\hat{t}_p/t_p)$ pivotal istatistik üzerinden elde edilen tablo değerleri
$P(A/B)$	B için A 'nın koşullu olasılığı
$\propto$	Oransallık işareti
$f(m, \sigma_0 Veri)$	m ve σ_0 için sonsal olasılık
$L(m, \sigma_0)$	Verilen m ve σ_0 için verilerin elde edilme olasılığı
$\varphi(m)$	m için önsel olasılık veya marjinal olasılık.
$\varphi(\sigma_0)$	σ_0 için önsel olasılık veya marjinal olasılık.
$E(m)$	m için beklenen değer
$E(\sigma_0)$	σ_0 için beklenen değer
$f(R Veri, t)$	$R(t)$ 'nin sonsal dağılımı
$f(m Veri)$	m 'nin marjinal sonsal dağılımı
$f(\sigma_0 Veri)$	σ_0 'ın marjinal sonsal dağılımı
T_L	Verilen bir p hata olasılığı için T hata zamanının alt sınırı
T_U	Verilen bir p hata olasılığı için T hata zamanının üst sınırı
R_L	Verilen bir T hata zamanı için $R(t)$ güvenilirliğin alt sınırı
R_u	Verilen bir T hata zamanı için $R(t)$ güvenilirliğin üst sınırı
R	SIM1 için simülasyon tekrar sayısı

R_{MB}	SIM2 için simülasyon tekrar sayısı
$[x_m, y_m]$	m için integrasyon işleminde kullanılacak kapalı aralıklar
$[x_{\sigma_0}, y_{\sigma_0}]$	σ_0 için integrasyon işleminde kullanılacak kapalı aralıklar

KISALTMALAR DİZİNİ

MB	Maksimum benzerlik yöntemi
BW	Bayesyen Weibull yöntemi
AGREE	Advisory group on reliability of electronic equipment
MZMC)	Markov zinciri Monte Carlo
BRD	Bayesyen güvenilirlik gösterimi
RADC	Roma hava gelişim merkezi
EMC	Elektromanyetik uyumluluk
MTTF	Ortalama hata süresi
MTTR	Ortalama onarım süresi
MTBF	Hatalar arası ortalama süre
SIM1	MB ve BW yöntemleri ile tahmin simülasyonu
SIM2	MB yönteminde d_α , S_α ve $C_{p\alpha}$ pivotal istatistik değerleri için simülasyon

1. GİRİŞ

1.1. Tezin Konusu ve Amacı

Güvenilirlik çalışmalarında seramik ve kompozit malzemelerin mekanik özelliklerinin modellenmesi çok önemlidir. Weibull dağılımı bu noktada zamana göre değişen arıza hızlarını modelleyebildiği için tasarımcılara oldukça esnek bir model sunar ve bu özelliği ile literatürde malzeme bilimi de dahil bir çok alanda yaygın bir şekilde kullanılır. Bu tez çalışmasında malzemelerin kopma mukavemeti için Weibull modeli üzerine kurulu bir güvenilirlik çalışması yapılmıştır. Modele ait parametrelerin güven aralıkları tahmini için iki farklı tahmin yaklaşımı kullanılmıştır: Klasik(Frekansçı) ve Bayesyen yaklaşım. Bayesyen yaklaşımın klasik yaklaşıma göre üstünlüğü tahmin işlemlerinde önsel bilgiden faydalanmasıdır. Bayesyen ve klasik yaklaşımdaki karmaşık integral ve simülasyon hesaplamalarının sayısal çözümleri için C++ ortamında algoritmalar geliştirilmiştir. Yöntemlerin karşılaştırması için farklı örneklem hacimlerinde ve farklı şekil parametre değerlerinde üretilen verilerin parametre tahmini üzerine bir simülasyon çalışması yapılmıştır.

Malzeme biliminde parametre tahminlerinin yanı sıra %95 güven düzeyinde kopma mukavemeti gibi malzeme kalite karakteristiklerinin en az %99'u veya %90'ı için güven alt sınırlarının belirlenmesi oldukça önemlidir. Bunlara sırasıyla A ve B temel malzeme özellikleri denir. Literatürde Weibull parametreleri ve alt yüzdelik güven alt sınır tahminleri için klasik yaklaşım yöntemleri ile birçok simülasyon çalışması yapılmıştır. Bunların içinde en iyi yöntemin, tek taraflı güven aralıklarında en küçük yanlış kapsama olasılığını vermesi bakımından maksimum benzerlik (MB) yöntemi olduğu gösterilmiştir. Bununla birlikte literatürde Weibull alt yüzdelikleri için güven alt sınır tahmininde Bayesyen yaklaşımın performansını inceleyen bir çalışmaya rastlanmamıştır. Tezdeki simülasyon çalışmasına alt yüzdelik güven alt sınırı tahmini de dahil edilerek literatürdeki bu eksiklik doldurulmaya çalışılmıştır.

Son olarak, uzun süren ve yüksek maliyet gerektiren güvenilirlik çalışmalarında işletmelerin yükünü azaltmak için küçük örneklem hacimleri ile çalışmak oldukça önemlidir. Küçük örneklem hacimlerinde Bayesyen yaklaşımın klasik yaklaşıma göre daha iyi sonuçlar verdiği bilinen bir gerçektir. Tezde bu doğrultuda, simülasyonda 3 ile 20 arasında değişen örneklem hacimleri ile çalışılarak, Bayesyen yaklaşımın küçük örneklemelerde elde ettiği tahmin sonuçlarını MB yönteminin daha büyük örneklem hacimlerinde yakalayabildiğini göstermek amaçlanmıştır.

1.2. Tezin Organizasyonu

Tezin birinci bölümünde tezin amacı ve önemi açıklanmış, 1950'lerden günümüze kadar güvenilirlik alanında Bayesyen yaklaşım üzerine yapılan akademik çalışmalara yer verilmiş ve bu tez çalışması ile de literatüre yapılacak katkıdan bahsedilmiştir.

İkinci bölümde güvenilirlik ve güvenilirlik analizi kavramları üzerinde durulmuş; güvenilirlik analizinde kullanılan temel matematiksel kavramlara yer verilmiş ve arıza hızının bir başka deyişle hata oranının zaman içinde nasıl değişim gösterdiği açıklanmıştır. Bununla birlikte malzeme bilimine güvenilirlik hesaplamaları için kullanılan A-temel ve B-temel malzeme özelliği kavramlarından bahsedilmiştir. Son olarak güvenilirlik analizinde kullanılan veri türleri anlatılarak çalışmada tamamlanmış veriler üzerine bir uygulama ve simülasyon çalışmasının yapılacağı ifade edilmiştir.

Üçüncü bölümde güvenilirlik analizinde kullanılan istatistiksel dağılımlarından kısaca bahsedilip Weibull olasılık dağılımı üzerinde durulmuştur. Parametre tahmini için istatistikte klasik yaklaşım ve Bayesyen yaklaşım olmak üzere iki farklı yaklaşımın uygulandığı ifade edilip Weibull dağılımına dayalı konu anlatımları yapılmıştır. Son olarak Weibull parametreleri güven aralıkları ve alt yüzdelik güven alt sınırlarının klasik ve Bayesyen yaklaşımla tahmini için tasarlanan ve C++ ortamında geliştirilen simülasyon prosedürü hakkında detaylı bilgi sunulmuştur.

Dördüncü bölümde klasik ve Bayesyen yaklaşıma göre Weibull parametreleri güven aralıkları ve alt yüzdelik güven alt sınır tahmini için geliştirilen algoritma ile bir malzemenin kopma mukavemetine ilişkin üç farklı örneklem hacmi ($n=3,9$ ve 19) üzerinde uygulama yapılmıştır. Uygulama sonuçları doğrultusunda klasik yaklaşım ile Bayesyen yaklaşım grafiksel olarak kıyaslanmıştır. Kıyaslamayı çok daha kapsamlı bir şekilde yapmak için farklı örneklem hacimlerinde ve farklı şekil parametre değerlerinde üretilen Weibull değişkenlerin parametre tahmini üzerine bir simülasyon çalışması yapılmıştır.

Son bölümde, klasik ve Bayesyen yaklaşım yöntemlerine göre elde edilen uygulama ile simülasyon sonuçları özetlenerek değerlendirilmiş ve küçük örnek hacimlerinde Bayesyen yaklaşımın klasik yaklaşıma nazaran daha iyi bir tahmin performansı gösterdiği ifade edilmiştir.

1.3. Literatür Taraması

Güvenilirlik yarım yüzyıldan fazladır üzerinde bilimsel çalışmalar yapılan bir disiplindir. Uygulama alanındaki çalışmaları daha çok mühendisler tarafından yürütülmüştür. 1950'lerin başında ABD'de askeri alanda kullanılan elektronik cihazların güvenilirliği üzerine organize bir şekilde mühendislik çalışmaları yapılmıştır. Daha sonraları füzeden uçağa, helikopterden denizaltı uygulamalarına kadar değişen askeri talepler doğrultusunda Roma Hava Gelişim Merkezinde (RADC) sistemler üzerinde elektromanyetik uyumluluk (EMC) etkileri araştırılmıştır. Bu da 1960'larda güvenilirlikte birçok teorik gelişmelerin gerçekleşmesini sağlamıştır. Bazovsky (1961) ve Mosteller vd. (1961) güvenilirliğin modern matematiksel teorisini ağırlıklı olarak olasılık teorisi üzerine inşa etmişler ve güvenilirlik çalışmalarında Bayes teoreminin kullanımını önermişlerdir. Bayesyen istatistiksel yaklaşımının artan gelişimi ve popüleritesi ile 1960 ve 1970 sonlarında Bayes teorisine dayalı çeşitli felsefi ve deneysel çalışmalar yapılmıştır. Martz ve Waller (1982), çok iyi bilinen kitapları 'Bayesian Reliability Analysis'de Bayesyen güvenilirlik gösterimi (BRD) için önemli bilgiler sunmuştur.

1980’li yılların başlarına gelindiğinde sanayide artan gelişmeler, güvenilirlik alanındaki teorik çalışmaların hızını kesmiş ve kalite ile güvenilirlik alanında mühendislik çalışmalarına ağırlık verilmesine neden olmuştur. Örneğin Hulting ve Robinson (1994), onarılabılır seri sistemlerde Bayesyen yaklaşımını kullanmıştır. Kerscher vd. (1998), gelişmekte olan yeni ürünlerin güvenilirliğini nitelendirmek için Bayes bilgilerini kullanarak yeni bir yöntem geliştirmişlerdir. Lu ve Rudy (2001), otomotiv sektöründeki güvenilirlik çalışmalarını Bayesyen yaklaşım temelinde yürütmüştür.

Birgören ve Dirikolu (2004), Weibull alt yüzdellikleri için güven alt sınırlarının tahmininde geçmişteki simülasyon tabanlı çalışmaların geneli ifade etmede yetersiz olma ve eğri uydurma hatası içermeye ihtimalinden hareketle MB yöntemine dayalı bir simülasyon çalışması yapmışlardır. Bu çalışma ile kullanıcıya güven düzeyi, hata olasılığı ve simülasyon tekrar sayısını kendi belirleme imkanı vererek daha etkin ve hızlı bir simülasyon aracı sunulmuştur. Kompozit malzemeye ait 19 numune üzerinde yapılan bir uygulama ile simülasyonun etkin performansı ispatlanmıştır.

Birgören (2006), güvenilirlik analizinde Weibull alt yüzdelliklerinin klasik yaklaşım takip eden doğrusal regresyon, ağırlıklı doğrusal regresyon ve maksimum benzerlik (MB) yöntemleri ile tahmini üzerine bir simülasyon çalışması yapmıştır. Tek yönlü güven aralıkları oluşturulmasında en iyi yöntemin, en küçük yanlış kapsama olasılığına (false coverage probability) sahip olan tahmin yöntemi olduğunu belirtmiş ve simülasyon sonuçları doğrultusunda bu yöntemin MB olduğunu göstermiştir.

Kundu (2008), ilerleyen durdurulmuş örneklemeler için Weibull şekil parametresinin bilinmesi ve bilinmemesi durumlarına göre Weibull parametrelerinin Bayesyen yaklaşımı ile tahmini üzerine bir simülasyon çalışması yapmıştır. Çalışmasında, Weibull şekil ve ölçek parametrelerinin bilinmemesi durumunda Bayesyen tahminlerinin açık formda elde edilemeyeceğini ifade etmiş ve yaklaşık Bayesyen tahminleri ile ilgili güvenilir aralıkları hesaplanmaları için Lindley yaklaşımı ve Markov zinciri Monte Carlo (MZMC) tekniğini kullanmıştır. Simülasyon sonuçları ile bilgi içermeyen önsellere dayalı Bayesyen tahminleri ve MB tahminleri arasında büyük ölçüde benzerlik bulunduğunu; bilgi içeren önsellere dayalı Bayesyen

tahminler için ise Bayesyen yaklaşımının MB'ye göre çok daha iyi performans sergilediğini göstermiştir.

Literatürde Kundu (2008)'nin çalışması gibi durdurulmuş veri tipleri üzerine uygulanmış birçok Bayesyen yaklaşım çalışmaları bulunmaktadır. Bu çalışmalar Weibull dağılımının farklı tipteki modelleri ile de zenginleştirilmiştir. Bu tez çalışmasında incelenen veri tipinin tamamlanmış veri olması nedeni ile durdurulmuş veri ile ilgili diğer çalışmalardan bahsedilmeyecektir. Bununla birlikte tezde özellikle alt yüzdalık güven alt sınır değerleri ile ilgilenilmektedir. Literatürde her iki tip veri için bu değerlerin Bayesyen yaklaşımla tahmini üzerine bir çalışma bulunmamaktadır.

Aron vd. (2009), çok az sayıda hatanın alındığı bir gözlemde Weibull dağılım parametrelerinin MB ile tahmin edilmesinin tahmin güvenilirliğinde yüksek belirsizlik (geniş güven sınırları) oluşturduğunu ifade etmişlerdir. Bu tahmin belirsizliğinin azaltılması için Bayesyen yaklaşımının kullanılması gerektiğini açıklamışlardır. Çalışmalarında yer alan Bayesyen modeli, şekil parametresi hakkında bir bilgiye sahip olunduğu varsayımıyla 1-parametrelili Weibull dağılımı üzerine kurulmuştur. Bayesyen modele ilişkin örnek bir uygulama ile parametre tahmininde daha dar güven sınırları elde edildiği gösterilmiştir. Bayesyen hesaplamalar için Reliasoft firmasının piyasaya sürdüğü Weibull++ yazılım paketi kullanılmıştır.

2. GÜVENİLİRLİK

2.1. Güvenilirlik ve Güvenilirlik Analizi

Güvenilirlik, sağlık sektöründen üretim sektörüne kadar birçok alanda yaygın olarak kullanılan bir kavramdır. Güvenirliliğin farklı alanlarda farklı ölçütlere göre yorumlanması literatürde genel bir tanıma rastlamayı mümkün kılmamaktadır. Bu çalışmada ise güvenilirlik, 1957 yılında Advisory Group on Reliability of Electronic Equipment (AGREE) tarafından yayınlanan bir tanıma göre ifade edilmiştir (AGREE, 1957).

AGREE (1957)'ye göre güvenilirlik belirli bir zaman aralığında, belirlenmiş koşullar altında bir fonksiyonun hatasız çalışma olasılığıdır. Tanımda beş öğeden bahsedilmektedir. Bunlar;

1. Olasılık: Her cihaz zaman içinde yıpranır ve hata gösterir. Bu hataların rassal olarak meydana gelmesi güvenilirlik kavramını olasılıkla ilişkilendirir. Bu yüzden güvenilirlik sıfır ile bir arasında değer alır.
2. Hata: Bir bileşenin ya da sistemin hatalı çalışıp çalışmadığı, bunlardan beklenen performansa bağlıdır. Örneğin en az 200 galon/dak. akış hızı sağlayabilen bir pompa mevcut durumda en çok 150 galon/dak. akış hızı sağlıyorsa güvenilirlik tanımına göre pompa hatalıdır.
3. Fonksiyon: Güvenilirliği incelenen cihaz belirli bir fonksiyon için kullanılmalıdır. Örneğin benzinle çalışan çim biçme makinası çalılar kesmek için kullanılır ve makinanın bıçağı kırılırsa fonksiyon dışı bir kullanım söz konusu olur. Ayrıca alet fonksiyon dışı kullanıldığından burada bir hata söz konusu da değildir.
4. Koşullar: Her cihazın kendine özgü çevresel çalışma koşulları altında hatasız olarak çalışması beklenir. Örneğin, 0-120 °F ortam sıcaklığında çalışabilen

bir elektrik jeneratörü kış zamanı Alaska’da kullanılmak istenirse cihaz arızalanacaktır. Çevresel çalışma koşulları göz ardı edildiğinden bu durum da hata olarak değerlendirilemez.

5. Zaman: Bir cihazın güvenilirliğinden bahsedebilmemiz için belirli bir zaman aralığı tanımlamamız gerekir. Bu kural yalnızca mühimmat, roket, araçlardaki hava yastıkları gibi bir kez çalışan cihazlar için göz ardı edilebilir (Wasserman, 2002).

Güvenilirlik analizi ise sistem ve bileşenlerinin güvenilirliğinin ölçülmesi ve tahmininde çeşitli matematik teknikleri kullanan bir mühendislik disiplindir. Güvenilirlik analizi sistemin emniyet ve risk analiziyle çok yakından ilgilidir.

2.2. Güvenilirlik ile İlgili Temel Matematiksel Kavramlar

Güvenilirlik analizinde, hataların dağılımlarını karakterize etmek ve böylece uygun dağılımları tanımlamak amacıyla hata oranı, ortalama hata oranı ve güvenilirlik fonksiyonu gibi araçlar geliştirilmiştir. Araştırmacı, hataları bu fonksiyonlar cinsinden ifade ederek güvenilirlik modelini kurar ve analiz işlemlerini gerçekleştirir (Sindu, 2002).

T , $[0, \infty)$ aralığında tanımlı sürekli bir rassal değişken olmak üzere; $f(t)$, T rassal değişkeninin t ile $t + \Delta t$ zaman aralığında meydana gelme olasılığı olsun. Bu durumda T ’nin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(t)$;

$$f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{P(t < T \leq t + \Delta t)}{\Delta t} \right] \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır. Bu bölümde incelenecek fonksiyonlar, $f(t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu üzerinden açıklanacaktır.

2.2.1. Birikimli Dağılım Fonksiyonu

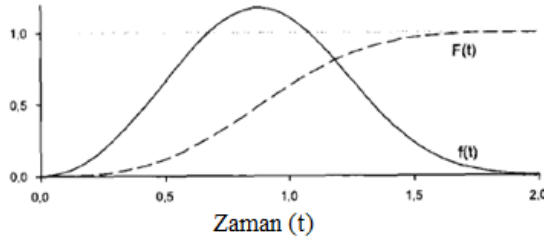
T rassal değişkeninin birikimli dağılım fonksiyonu olan $F(t)$, hata zamanının t 'ye eşit veya altında olma olasılığını gösterir ve ;

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_0^t f(x)dx, \quad 0 \leq t \leq \infty \quad (2.2)$$

şeklinde ifade edilir. Bir başka ifadeyle $F(t)$, bir birimin $[0, t]$ aralığında hata verme olasılığıdır.

Şekil 2.1'de $[0, \infty)$ aralığında tanımlı sürekli bir rassal değişken için olasılık yoğunluk fonksiyonu ve birikimli dağılım fonksiyonu arasındaki ilişki gösterilmiştir. Bu şekil incelendiğinde birikimli dağılım fonksiyonunun değerinin 0 ile 1 arasında değiştiği, başlangıç noktasında 0 değerini aldığı ve sonsuza doğru gidildiğinde 1'e yaklaştığı görülmektedir.

$$F(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1 \quad (2.3)$$



Şekil 2.1. Olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(t)$ ve birikimli dağılım fonksiyonu $F(t)$

2.2.2. Güvenilirlik Fonksiyonu

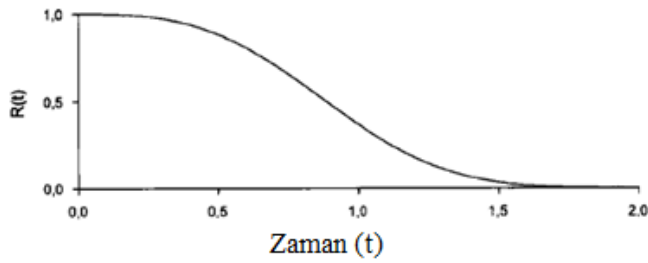
$R(t)$, $[0-t]$ zaman aralığında sistemin başarılı olması, başka bir ifade ile işlevini başarılı olarak sürdürmesi olasılığıdır ve bir cihazın güvenilirlik fonksiyonu,

$$R(t) = 1 - F(t) = P(T > t), t > 0 \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır.

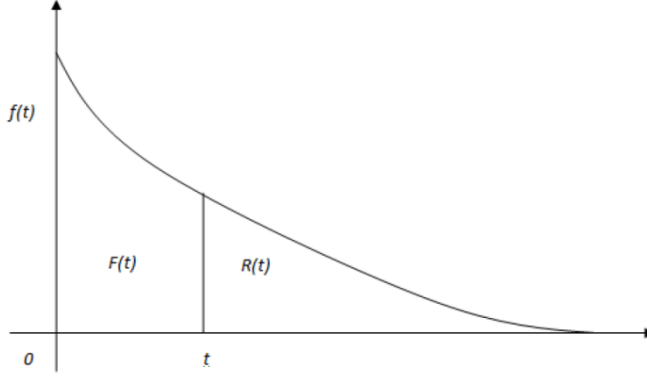
Şekil 2.2’de güvenilirlik fonksiyonunun tanımı gereği 0 ile 1 arasında değer aldığı, başlangıç noktasında (0 anında) değeri 1 iken zaman ilerledikçe değerinin 0’a yaklaştığı görülmektedir.

$$R(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0 \quad (2.5)$$



Şekil 2.2. Güvenilirlik fonksiyonu $R(t)$

Şekil 2.3’te hata sürelerinin dağılımı $f(t)$ için birikimli dağılım fonksiyonu ve güvenilirlik fonksiyonunun ilişkisi gösterilmiştir. Buna göre herhangi bir t zamanı için bu noktanın sağındaki eğrinin altında kalan alan güvenilir olma olasılığını, solunda kalan alan ise hata meydana gelme olasılığını verir.



Şekil 2.3. Güvenilirlik fonksiyonu ve birikimli dağılım fonksiyonu

2.2.3. Hata Oranı Fonksiyonu

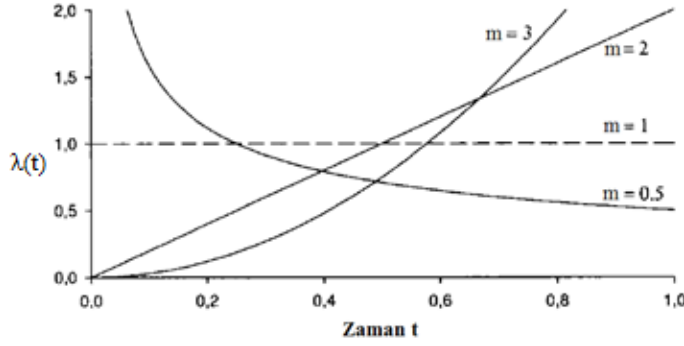
t anından önce bir hatanın gerçekleşmediği biliniyorken $(t, t + \Delta t)$ zaman aralığında ürünün hata vermesi olasılığı $\lambda(t)$ simgesi ile ifade edilir ve buna hata oranı (failure rate) veya arıza hızı (hazard rate) fonksiyonu denir.

$$P(t < T \leq t + \Delta t | T > t) = \frac{P(t < T \leq t + \Delta t)}{P(T > t)} = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{R(t)} \quad (2.6)$$

Bu olasılığı Δt zaman aralığının uzunluğuna bölüp $\Delta t \rightarrow 0$ 'a göre limit aldığımızda;

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t < T \leq t + \Delta t | T > t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \frac{1}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

olur (Danacı, 2005).



Şekil 2.4. $\sigma_0=1$ değeri için Weibull dağılımının hata oranı fonksiyonu

Şekil 2.4’de Weibull dağılımı gösteren bir sürekli değişken ele alınmış, farklı şekil parametresi değerleri için bu değişkenin hata oranı fonksiyonları gösterilmiştir.

2.2.4. Birikimli Hata Fonksiyonu

T zamanı içinde belirli bir t anı için hesaplanmış olan hata oranlarının birikimli fonksiyonu olan $H(t)$, birikimli hata fonksiyonu olarak adlandırılır ve;

$$H(t) = \int_0^t \lambda(t) dt = \int_0^t \frac{f(t)}{R(t)} dt \quad (2.8)$$

şeklinde ifade edilir (Stephens, 2012).

2.2.5. Ortalama Hata Oranı

Zamana bağlı olarak hata oranlarında bir değişim söz konusu ise $[t_1, t_2]$ zaman aralığındaki hata oranı $AFR(t_1, t_2)$ aşağıdaki formülle hesaplanır (Stephens, 2012).

$$AFR(t_1, t_2) = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt}{t_2 - t_1} = \frac{H(t_2) - H(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{[In R(t_1) - In R(t_2)]}{t_2 - t_1} \quad (2.9)$$

2.2.6. Ortalama Hata Süresi

Hata zamanının ortalaması, hataya kadar geçen ortalama süreyi verir ve MTTF (Mean Time To Failure) kısaltması ile gösterilir. MTTF, zamana karşı dayanma süresi için kullanılan rassal değişkeninin beklenen değeri ya da ortalamasıdır (Ireson, 1996 ve Elsayed, 1996).

$$MTTF = \int_0^{\infty} t f(t) dt \quad (2.10)$$

2.2.7. Ortalama Onarım Süresi

Arızalanan bir birimin onarım süresi de tıpkı çalışma süresi gibi rassaldır. Dolayısıyla onarım süresine ilişkin rassal değişken; onarım süresi, onarım yoğunluk fonksiyonu ile temsil edilir. Onarım süresinin ortalaması ise onarıma kadar geçen ortalama süre MTTR (Mean Time To Repair) veya ortalama onarım süresi olarak adlandırılır. Rassal değişken H onarıma kadar geçen süreyi ve $f(h)$ bu değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonunu gösterecek olursa,

$$MTTR = \int_0^{\infty} h f(h) dh \quad (2.11)$$

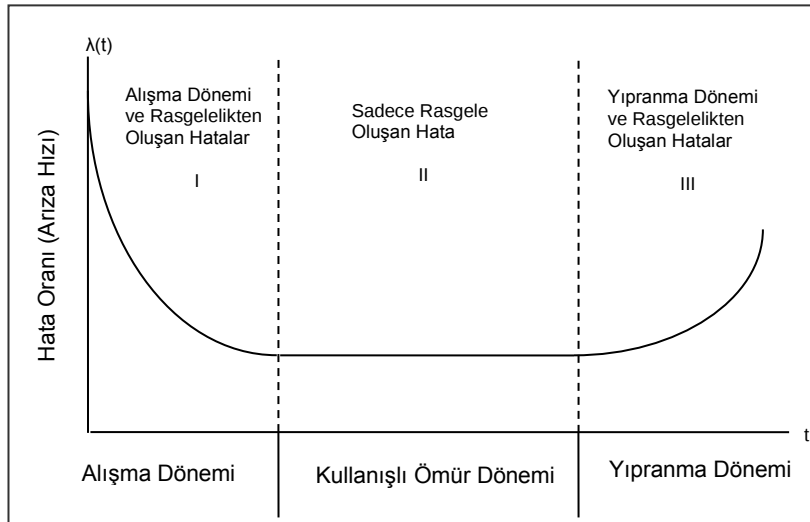
formülü ile elde edilebilir (Danacı, 2005).

2.2.8. Hatalar Arası Ortalama Süre

Hataya kadar geçen ortalama süre ile onarıma kadar geçen ortalama sürenin toplamı iki ardışık hata anı arasındaki ortalama süreyi MTBF (Mean Time Between Failures) verir: $MTBF=MTTF+MTTR$ (Danacı, 2005).

2.3. Hata Oranının Zamanla Değişimi-Küvet Eğrisi

Şekil 2.5 ile bir ürünün yaşamı süresince hata oranının nasıl değişiklik gösterdiği görülmektedir. Hata oranına ilişkin bu eğri küvet eğrisi olarak adlandırılır. Öyle ki eğride üç bölge gözlenir. Bu üç bölge sırasıyla başlangıç hatalarına (I), rastgele hatalara (II) ve yıpranmaya bağlı hatalara (III) karşılık gelir.



Şekil 2.5. Küvet karakteristiği eğrisi

Ürünler yeni olduğunda, özellikle ürün yeni tasarlanmışsa erken hatalar: tasarım kusurlarından, kötü kalite bileşenlerden, imalat kusurlarından, kurulu hatalarından, bakım hatalarından ya da ürünün kullanıcı için alışılmamış olmasından kaynaklanır. Bu durumda kusurlar düzeltilip, zayıf bileşenler değiştirilir. Kullanıcı ürünün

kurulmasına, çalışmasına ve bakımına zamanla alışır. Risk oranı bu bölgede zamanla azalır. İkinci bölgede risk oranı sabittir. Bu bölgede hatalar tahmin edilemeyen çeşitli nedenlere bağlı olarak ortaya çıkar. Üçüncü bölgede ise ürünün yıpranmasına bağlı olarak risk oranı artar (Bentley, 1993 ve Elsayed, 1996). Ireson vd. (1996), şekilde I, II ve III ile gösterilen üç bölgeyi sırasıyla erken ölümlülük periyodu, yararlı ömür periyodu ve yıpranma periyodu olarak adlandırmışlardır.

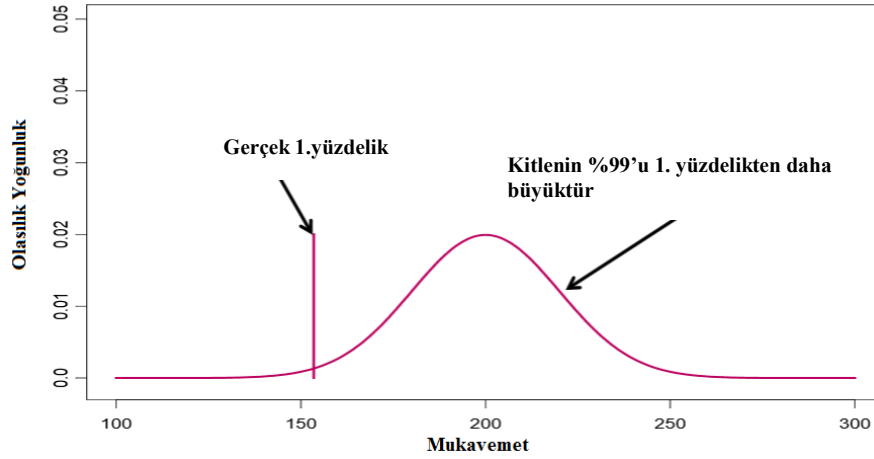
Güvenilirlik analizleri, genellikle kuvvet karakteristiği eğrisinin ikinci kısmı ile ilgilenir. Yani kullanışlı ömür dönemi güvenilirlik çalışmalarının esas konusudur.

2.4. Güvenilirlik Analizinde A-Temel ve B –Temel Malzeme Özellikleri

A-Temel ve B –Temel malzeme özellikleri geçmeden önce istatistikte kullanılan 2 tip aralıktan bahsedilecektir: Güven aralığı ve tolerans aralığı. Güven sınırları ile tolerans sınırları arasında temel bir fark vardır. Güven sınırları bir dağılımın parametresinin aralık tahminini sağlamak için kullanılırken tolerans sınırları bir kitlenin belli bir oranını içermesini bekleyebileceğimiz sınırlarını göstermek için kullanılır (Özdemir, 2000). Tolerans kavramını bir cümle ile örneklendirirsek; T , kitlenin %99'u için %90 güven düzeyinde bir üst tolerans değeri ise o zaman kitlenin %99'u T 'den daha küçük bir değer alır şeklindeki ifadeyi %90 güvenle söyleyebiliriz. Burada kitlenin %100p'nin %100 güvenle belirli bir tolerans sınırları içerisinde olduğunu söyleyebilmemiz için kitlenin gerçek ortalama (μ) ile standart sapma (σ) değerlerini bilmemiz gerekmektedir. Bunun gerçek yaşamda olması genelde mümkün değildir. Tolerans sınırlarının nasıl hesaplandığını açıklamak gerekirse; $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dağıldığı varsayılmak üzere doğal tolerans sınırları olan $\mu \pm Z_{\alpha/2}\sigma$ 'nin tahmini için örneklem üzerinden ortalama $\bar{X}$ ve varyansı s^2 hesaplanır. Burada $\bar{X}$ ve s birer tahmin olup gerçek parametreler değildir. Bu yüzden $\bar{X} \pm Z_{\alpha/2}s$ güven aralığı $1 - \alpha$ olasılıkla gerçek parametreleri içermeyebilir. Bunun için bir k sabiti tanımlanır ve $\bar{X} \pm ks$ tolerans aralığı hesaplanır. Bu aralık $1 - \alpha$ olasılıkla gerçek parametreleri içerecektir.

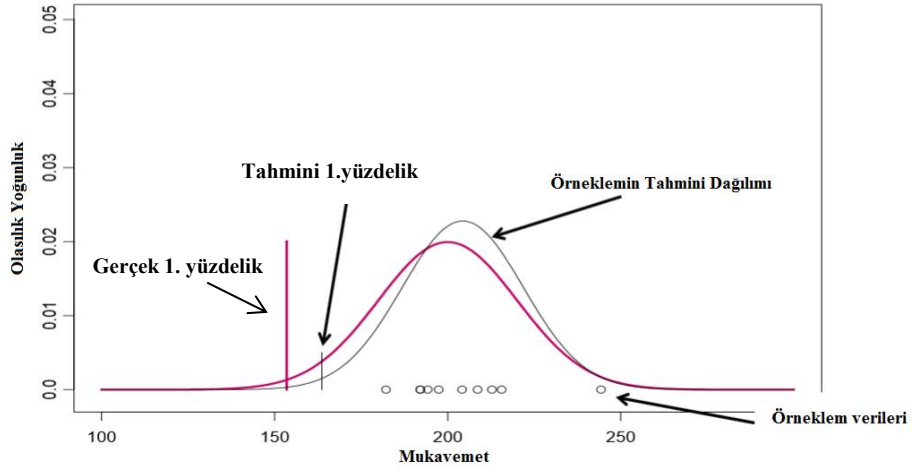
Uygulamalı bir örnekle konuyu pekiştirelim. T 'yi kitlenin %99'u için %90 güven düzeyinde bir alt tolerans değeri olarak alalım. İlk başta kitlenin normal dağıldığını ve parametrelerini ($\mu=200$, $\sigma^2=400$) bildiğimizi varsayalım. Bu durumda 1. yüzdilik için tolerans alt sınırı Şekil 2.6'da gösterildiği gibi $\mu-2.326 \sigma=153.5$ olur.

(Womack, 2011)



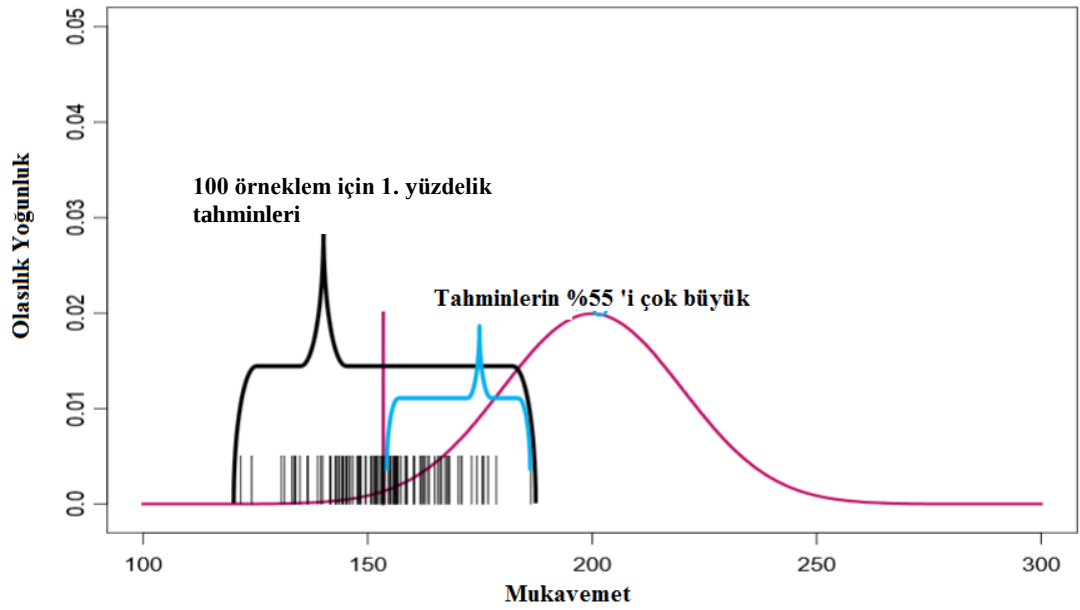
Şekil 2.6. Gerçek 1. yüzdilik için tolerans alt sınırı

Kitlenin ortalama ve varyansı hakkında bilgimiz olmadığı zaman 1. yüzdeliğin tahmini için kitleden bir örneklem almamız gerekir. Aldığımız örneklemin ortalaması $\bar{X}$ ve varyansı s^2 ise 1. yüzdeliğin tahmini tolerans alt sınırı Şekil 2.7'de gösterildiği gibi $\bar{X} - 2.326 s$ olacaktır (Womack, 2011).



Şekil 2.7. Bir örneklem üzerinden 1. yüzdelik için tahmini tolerans alt sınırı

Kitleden 100 örneklem aldığımız zaman 1. yüzdeliklerin tahmini değerleri Şekil 2.8’de gösterildiği gibi olur (Womack, 2011).

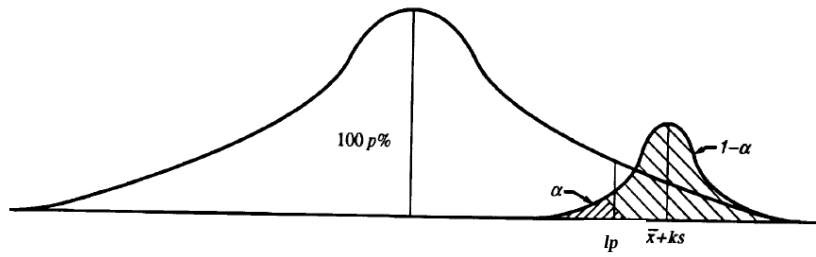


Şekil 2.8. 100 örneklem üzerinden 1. yüzdelik için tahmini tolerans alt sınırı

Tek taraflı güven aralıkları için popülasyonun en az $100p$ yüzdesinin $\bar{X} + ks$ üst sınırının altında kalması olasılığı $1 - \alpha$ 'dır ve bu olasılık Eşitlik 2.12 ile hesaplanmaktadır.

$$P[P(X < \bar{X} + ks) \geq p] = 1 - \alpha \quad (2.12)$$

Eşitlik 2.12'nin grafiksel gösterimi Şekil 2.9'da verilmiştir.



Şekil 2.9. Tek taraflı tolerans sınırları

Aynı şekilde popülasyonun en az $100p$ yüzdesinin $\bar{X} - ks$ alt sınırının üstünde kalması olasılığı $1 - \alpha$ 'dır ve Eşitlik 2.13 ile gösterilmektedir (Wheeler, 1993).

$$P[P(X > \bar{X} - ks) \geq p] = 1 - \alpha \quad (2.13)$$

Genellikle malzeme bilimcilerin kullandığı A ve B temel değerleri, standart tolerans aralıklarının özel bir durumudur. A temel değeri %95 güven düzeyinde 1. yüzdilik için oluşturulan alt güven sınırı değeridir. B temel değeri ise %95 güven düzeyinde 10. yüzdilik için oluşturulan alt güven sınırı değeridir. Standart tolerans aralıkları çift taraflı güven aralığı iken A ve B temel değerleri tek taraflı güven aralıklarıdır. Bununla birlikte standart tolerans limitleri tipik bir normallik varsayımına dayanmakta iken A ve B temel değerleri Weibull, normal veya lognormal dağılımları için hesaplanabilir veya bu dağılımlardan herhangi birine uyumluluk sağlanamıyorsa parametrik olmayan yöntemlerle hesaplanabilir (U.S. Department of Defense, 2002).

2.5. Güvenilirlik Analizinde Kullanılan Veri Türleri

Güvenilirlik analizinde iki tür veri yapısı vardır; tamamlanmış veri türleri ve durdurulmuş veri türleri. Tezde tamamlanmış veri türleri için tahmin çalışmaları yapılacaktır. Veri türleri ile ilgili kısa bir açıklama yaparsak;

Bir analizde örneklemdaki veriler, birimin ömür süresi ile ilgili olarak tam bilgi veriyorsa, bu tür veriler tamamlanmış veri adını alır.

Durdurulmuş (sansürlü) veriler için ise iki tip durdurulmuş veri söz konusudur. Birinci tip durdurulmuş veriler olarak adlandırılan durdurulmuş veri modeli, t_0 gibi önceden belirlenmiş bir zamandan önce sistemde bozulan birimlerin bozulma zamanının gözlenmesi durumudur. Bu zamandan sonra ölçüm alınmaz, gözlem alma süreci sona erdirilir. İkinci tip durdurulmuş veriler olarak adlandırılan durdurulmuş veri modeli, n birimden r 'inci hata ($r \leq n$) gözlenene kadar gözlem alınması durumudur. Kalan $n - r$ birimin hata zamanları gözlenmez, r inci hatayla gözlem alma süreci sona erdirilir (Danacı,2005).

3. GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE WEIBULL DAĞILIM MODELİNİN KULLANILMASI

3.1. Güvenilirlik Analizinde Kullanılan İstatistiksel Dağılım Modelleri

Olasılık dağılımları, aynı özelliğe sahip verilerin istatistiksel analizini kolaylaştırmak için geliştirilmiş modellerdir (Akdeniz, 2002). Bir araştırmacı elindeki verilerin hangi dağılıma uyduğunu tespit ettikten sonra bu dağılımın karakteristik özelliklerini kullanarak analizi kolaylıkla yapabilir.

Bir sistemin veya onu oluşturan alt sistemlerin, parçaların ömür sürelerini gösteren veriler genellikle sürekli rassal değişken özelliğine sahiptir. Dolayısıyla bu tür verilerin ömür dağılımları da sürekli dağılımlardır. Bu verilerin yaygın olarak uyum gösterdiği önemli sürekli dağılımları şöyledir:

- Üstel Dağılım (sabit hata oranları için)
- Weibull Dağılımı (sabit, artan ya da azalan hata oranları için)
- Lognormal Dağılım (artan sonra azalan hata oranları için)
- Normal Dağılım (artan hata oranları için)
- Diğerleri (Gamma, Logistic, Gumbell, Competing Failure Mode)

Hesaplamalarda birçok model için uyum testleri yapılarak hangi model daha iyi sonuç veriyor ise o dağılım modeli seçilir. Bununla birlikte güvenilirlik çalışmalarında en yaygın kullanım alanına sahip olasılık dağılımı Weibull dağılımıdır (Ebelign, 1997). Bu bir bukalemun dağılımıdır, yani değişken ortamlara ayak uydurabilen bir dağılımdır. Özellikle seramiklerin, metallerin, polimerlerin ve kompozit malzemelerin statik ve dinamik mekanik özelliklerinin modellenmesinde yaygın olarak kullanılmaktadır (Birgören ve Dirikolu, 2004). Weibull dağılımı, parametrelerinin belirli değerleri almasıyla normal dağılım ve üstel dağılım fonksiyonlarını da gerçekleştirmektedir (Tahralı ve Dikmen, 1995).

Özellikle başta havacılık sektörü olmak üzere birçok alanda kullanılan alüminyum ve kompozit gibi malzemelerin yorulma test verileri genelde rassallık gösterdiğinden tasarımcı, Weibull dağılımını kullanarak mekanik özelliklerinin modellenmesinde esneklik yaratmış olur. Ayrıca alüminyum ve kompozit yapılarıdaki yorulma verilerinin güvenilirliğinin değerlendirilmesinde Weibull dağılımının daha faydalı olacağı literatürde kanıtlanmıştır (Khashaba, 2003; Haris, 2003).

Bu çalışmada mukavemet sonuç değerlerinin istatistiksel analizi için iki parametrelili Weibull dağılımı kullanıldığından tezde sadece Weibull olasılık dağılımı anlatılacaktır. Diğer olasılık dağılımların anlatımına yer verilmeyecektir.

3.2. Weibull Olasılık Dağılımı

Weibull Dağılımı, adını İsveçli fizikçi Waloddi Weibull'dan almaktadır. Bu dağılım ilk kez Waloddi Weibull tarafından Bofors çeliklerin akma dayanım özelliklerinin modellenmesinde ve akma dayanımına üretim süreçlerinin etkisinin belirlenmesinde kullanılmıştır (Weibull, 1951).

Weibull dağılımı genel olarak ölçek (σ_0) ve biçim (m) parametresi olmak üzere iki parametrelili bir dağılımdır. İki parametrelili Weibull dağılımına sahip T rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(t) = \frac{m}{\sigma_0} \left(\frac{t}{\sigma_0} \right)^{m-1} e^{-\left(\frac{t}{\sigma_0} \right)^m} \quad (3.1)$$

eşitliği ile gösterilmektedir.

Bazı durumlarda dağılıma, hasarın olmadığı veya daha hizmete başlamadan hasarlı olabilme durumunu açıklamak için dağılım konum parametresinin (t_0) de eklenmesi gerekir ve böylece üç parametrelili Weibull dağılımı elde edilir. Üç parametrelili Weibull dağılımına sahip T rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu ise,

$$f(t) = \frac{m}{\sigma_0} \left(\frac{t - t_0}{\sigma_0} \right)^{m-1} e^{-\left(\frac{t-t_0}{\sigma_0}\right)^m} \quad (3.2)$$

eşitliği ile gösterilmektedir.

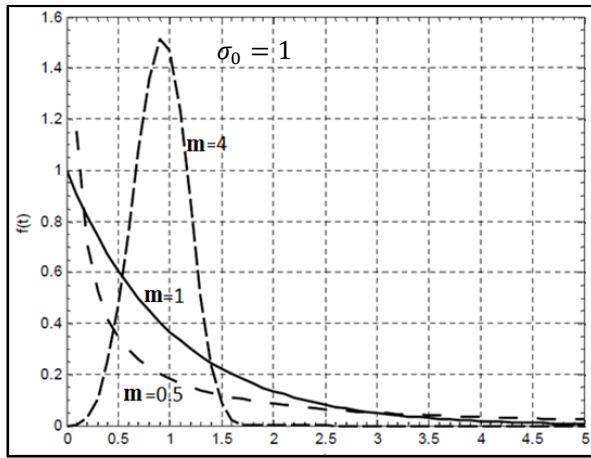
İki ve üç parametrelili Weibull dağılımı için güvenilirlik analizinde kullanılan fonksiyon eşitlikleri Çizelge 3.1’de özetlenmiştir.

Çizelge 3.1. Weibull dağılımı için bağlantılar

2 Parametrelili Weibull Dağılımı:			
Yaşama Olasılığı, Güvenilirlik	$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\sigma_0}\right)^m}$		(3.3)
Hata Olasılığı (Birikimli Dağ. Fonk.)	$F(t) = 1 - R(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\sigma_0}\right)^m}$		(3.4)
Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu	$f(t) = \frac{dF(t)}{d(t)} = \frac{m}{\sigma_0} \left(\frac{t}{\sigma_0}\right)^{m-1} e^{-\left(\frac{t}{\sigma_0}\right)^m}$		(3.5)
Hata Oranı (Arıza Hızı)	$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{m}{\sigma_0} \left(\frac{t}{\sigma_0}\right)^{m-1}$		(3.6)
3 Parametrelili Weibull Dağılımı:			
Yaşama Olasılığı, Güvenilirlik	$R(t) = e^{-\left(\frac{t-t_0}{\sigma_0}\right)^m}$		(3.7)
Hata Olasılığı (Birikimli Dağ. Fonk.)	$F(t) = 1 - R(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t-t_0}{\sigma_0}\right)^m}$		(3.8)
Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu	$f(t) = \frac{dF(t)}{d(t)} = \frac{m}{\sigma_0} \left(\frac{t-t_0}{\sigma_0}\right)^{m-1} e^{-\left(\frac{t-t_0}{\sigma_0}\right)^m}$		(3.9)
Hata Oranı (Arıza Hızı)	$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{m}{\sigma_0} \left(\frac{t-t_0}{\sigma_0}\right)^{m-1}$		(3.10)
Parametreler:			
➤ t statik değişken (yüklenme süresi, yük değişimi, ...)			
➤ σ_0 ölçek parametresi,			
➤ m şekil parametresi			
➤ t_0 hasar olmayan süre. Bu parametre hasarın ilk olduğu zaman noktasını belirler. Zaman eksenini boyunca bir hareket söz konusudur.			

Ölçek parametresi saat, mil gibi formüllerde T ile ifade edilen ve zaman içeren birimlere sahiptir. Şekil parametresi ise dağılımın çarpıklığını belirleyen bir parametredir. Şekil parametresi aynı kalırken, ölçek parametresi artarsa, dağılımın basıklığı artar, dolayısıyla dağılımın yüksekliği azalır. Ölçek parametresi azalırsa, dağılım sivri uçlu olur ve yüksekliği artar (http://reliawiki.org/index.php/The_Weibull_Distribution).

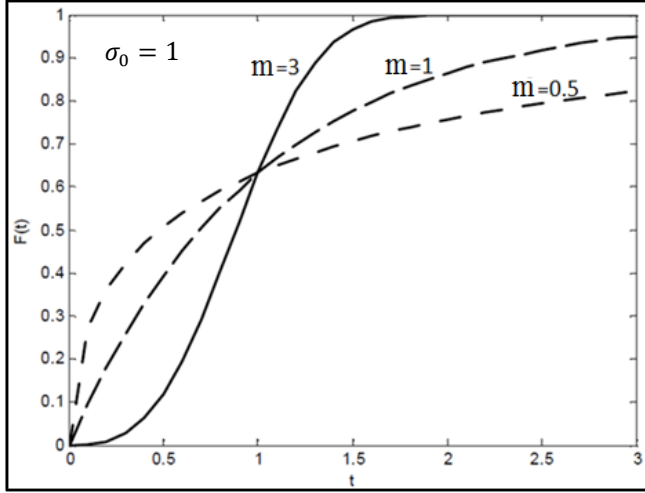
Weibull dağılımının en önemli özelliği şekil parametresine bağlı olarak grafiği farklı şekiller alan oldukça esnek bir dağılım olmasıdır. İki parametrelili Weibull dağılımında $\sigma_0 = 1$ ve $m = 0.5, 1$ ve 3 parametre değerleri için MATLAB paket programı kullanılarak oluşturulan $f(t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının, $F(t)$ dağılım fonksiyonlarının, $R(t)$ güvenilirlik fonksiyonlarının ve $\lambda(t)$ risk fonksiyonlarının grafikleri sırasıyla Şekil 3.1, Şekil 3.2, Şekil 3.3 ve Şekil 3.4’de gösterilmiştir.



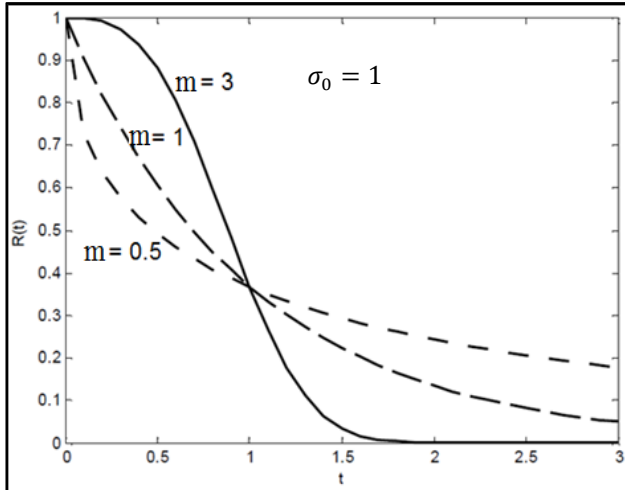
Şekil 3.1. İki parametrelili Weibull dağılımı olasılık yoğunluk fonksiyonu

Şekil 3.1’de olduğu gibi $m > 1$ olduğu zaman Weibull dağılımı normal dağılımına benzerlik göstermekte, $m = 1$ için Weibull dağılımı negatif logaritmik (üstel) dağılıma dönüşmekte ve $m < 1$ olduğu zaman ise Weibull dağılımı hiper logaritmik dağılımına benzerlik göstermektedir.

Şekil 3.2’de gösterildiği gibi ölçek parametresi aynı olduğu halde şekil parametresi değerindeki her bir artış, seçilen belirli bir zaman aralığındaki hata olasılığını da artmaktadır. Diğer bir deyişle, şekil parametresi artıkça belirli bir süre zarfında hata oluşumunu hızlandırmakta ve hata oluşma süresini kısaltarak Şekil 3.3’te gösterildiği gibi güvenilir çalışma ömrünü kısaltmaktadır.



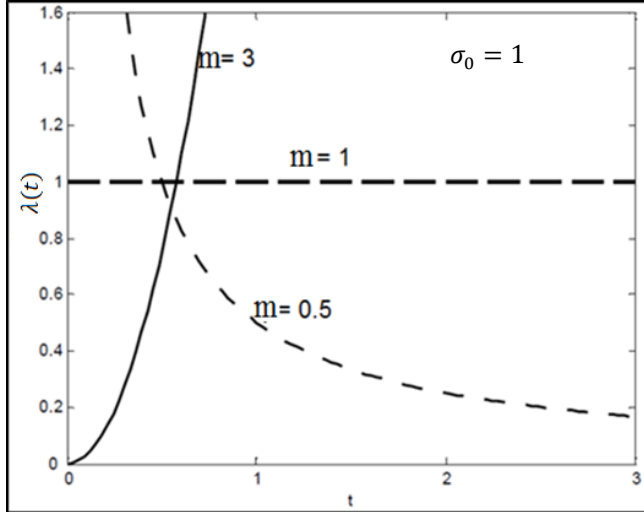
Şekil 3.2. İki parametrelili Weibull dağılımı birikimli dağılım fonksiyonu



Şekil 3.3. İki parametrelili Weibull dağılımı güvenilirlik fonksiyonu

Şekil 3.4'den de kolayca görüleceği;

- $m < 1$ ise $\lambda(t)$ t 'nin azalan bir fonksiyonudur.
- $m = 1$ ise $\lambda(t)$ sabit ve $\frac{1}{\sigma_0}$ 'ye eşittir
- $m > 1$ ise $\lambda(t)$ t 'nin artan bir fonksiyonudur .



Şekil 3.4. İki parametrelili Weibull dağılımı hata oranı fonksiyonu

3.3. Güvenilirlik Analizinde Kullanılan Parametre Tahmin Yaklaşımları

İstatistikte temel olarak iki farklı felsefi yaklaşım bulunmaktadır: Klasik (veya Frekansçı, Berkeley istatistiği) yaklaşım ve Bayesyen yaklaşım.

3.3.1. Klasik Yaklaşım

Klasik yaklaşım olasılığın relatif frekans tanımını kabul eder. Bu tanıma göre olasılık bir olayın sonsuza giden tekrarlar da ne kadar sıklıkla gerçekleştiğinin tündengelimsel bir çıkarımıdır. Burada tüm olayların olasılıkları birbirine eşit varsayılmaktadır. Bununla birlikte klasik yaklaşım olayların marjinal mutlak olasılık dağılımı üzerinde durur. Örneğin Brezilya'nın tüm dünya kupalarındaki

performanslarından dünya kupasını kazanma olasılığının çıkarılması ve olasılığın buradan tanımlanması gibi (Efeler, 2015).

Klasik yaklaşımda parametre, bilinmeyen bir sabit olarak görülür. Parametre tahmini sadece eldeki veriye dayanarak hesaplanır. Dolayısıyla parametrenin kendisi, tekrarlanan gerçek denemelerin sonucu olmadığından, olasılık dağılımının var olduğu düşünülemez. Parametre değeri, bilindiği gibi klasik yaklaşımda sabit bir değerdir ve olasılık dağılımı yoktur. Bu bilinmeyen değeri aralık ya kapsar ya da kapsamaz. Dolayısıyla dikkat edilmelidir ki, rastlantısal olan aralıktır, parametre değildir (Ekici, 2009).

Literatürde istatistiksel dağılım parametrelerinin belirlenmesi için çeşitli klasik yaklaşım yöntemleri geliştirilmiştir. Bu yöntemler içinde en yaygın kullanılanlar maksimum benzerlik, moment, en küçük kareler yöntemleri ve bu yöntemleri farklı şekilde modifikasyonlarıdır.

Birgören (2003), tek yönlü güven aralıkları oluşturulmasında en iyi yöntemi belirlemek için en küçük yanlış kapsama olasılığını (false coverage probability) bir kriter olarak kullanmış ve maksimum benzerlik, en küçük kareler yöntemi ve ağırlıklı en küçük kareler tahmin yöntemlerini bu doğrultuda yapmış olduğu simülasyon çalışması ile kıyaslayarak en iyi yöntemin maksimum benzerlik (MB) yöntemi olduğunu ispat etmiştir. Bu doğrultuda bu tez çalışmasında Bayesyen yaklaşım ile kıyaslama yapabilmek amacıyla klasik yaklaşım yöntemlerinden sadece MB yöntemi ele alınacaktır. Konu 3.3.1'in alt başlıklarında yer verilen MB yöntemi ile Weibull parametreleri ve yüzdelerinin tahminine yönelik konu anlatımı için Akif (2004)'in tez çalışmasından yararlanılmıştır.

3.3.1.1. MB Yöntemi ile Weibull Parametrelerinin Tahmini

MB yöntemi Gauss ve daha sonra R.A Fisher tarafından geliştirilmiştir. Yöntemin amacı bilinmeyen kitle parametreleri için tahmin ediciler bulmaktır (Rüzgar, 1992).

$L(\theta) = L(t_1, t_2, \dots, t_n; \theta)$, $T_1, T_2, \dots, T_n$ rassal değişkenleri için benzerlik fonksiyonu olsun. Olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(t, \theta)$ kullanılarak $T_1, T_2, \dots, T_n$ rassal değişken değerleri için benzerlik fonksiyonu $L(\theta) = f(t_1; \theta) f(t_2; \theta) \dots f(t_n; \theta)$ şeklinde üretilir. MB tahmin edicisi θ 'nın altındaki verinin birikimli olasılık yoğunluk fonksiyonunu maksimize eden $\hat{\theta}$ 'nın bir fonksiyonudur.

MB tahmin değerleri ise; $\frac{d L(\theta)}{d \theta}$ denkleminin çözümü ile bulunur.

Benzerlik fonksiyonunda k tane parametre varsa,

$$L(\theta) = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = \prod_{i=1}^n f(t_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k). \quad (3.11)$$

olur. $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ parametrelerinin MB tahmincileri $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_k$; $L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ 'yı maksimum yapan değerler olur.

Parametreleri m ve σ_0 olan n adet Weibull rassal değişkenleri $T_1, T_2, \dots, T_n$ olsun. Bu değişkenler için MB fonksiyonu;

$$L(m, \sigma_0) = \prod_{i=1}^n f(t_i; m; \sigma_0) = m^n \sigma_0^n t_1^{\sigma_0-1} t_2^{\sigma_0-1} \dots t_n^{\sigma_0-1} e^{-m \sum_{i=1}^n \sigma_i^{\sigma_0}} \quad (3.12)$$

olur. Her iki tarafın logaritması alınırsa;

$$\ln L = n \ln m - n \ln \sigma_0 + (n-1) \sum_{i=1}^n \ln \frac{t_i}{\sigma_0} - \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{t_i}{\sigma_0} \right)^m \quad (3.13)$$

şeklinde olur. $\ln L$ 'nin, m ve σ_0 'a göre türevi alınıp sıfıra eşitlenirse;

$$\frac{dL(m, \sigma_0)}{dm} = 0 \quad (3.14)$$

$$\frac{dL(m, \sigma_0)}{d\sigma_0} = 0 \quad (3.15)$$

buradan da;

$$\sigma_0^m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^m \quad (3.16)$$

ve

$$\frac{n}{m} - n \ln \sigma_0 + \sum_{i=1}^n t_i - \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\sigma_0} \right)^m \ln \left(\frac{t_i}{\sigma_0} \right) = 0 \quad (3.17)$$

denklemleri elde edilir (Birgören ve Dirikolu, 2004).

Eşitlik 3.16, Eşitlik 3.17’de yerine yazılırsa, bu iki eşitlikten şu iki denklem elde edilir:

$$\sum_{i=1}^n \ln t_i - n \left(\frac{\sum_{i=1}^n \ln t_i (t_i)^{\hat{m}}}{\sum_{i=1}^n (t_i)^{\hat{m}}} \right) + \frac{n}{m} \quad (3.18)$$

$$\hat{\sigma}_0 = \left(\frac{\sum_{i=1}^n (t_i)^{\hat{m}}}{n} \right)^{1/\hat{m}} \quad (3.19)$$

Eşitlik 3.18 sayısal kök bulma yöntemlerinden biriyle yaklaşık olarak çözülebilir. Daha sonra Eşitlik 3.19 $\hat{\sigma}_0$ ’yı doğrudan verir (Birgören ve Dirikolu, 2004). Eşitlik 2.40’ın çözümü için köke en hızlı yaklaşım gösteren sayısal kök bulma yöntemi olan Newton-Raphson yöntemi tercih edilmiştir (Law and Kelton, 1991). Buna göre, Newton-Raphson yinelemeleri için genel döngü denklemi Eşitlik 3.20’de verilmiştir.

$$\hat{m}_{k+1} = \hat{m}_k + \frac{A + (1/\hat{m}_k) - C_k/B_k}{1/\hat{m}_k^2 + (B_k H_k - C_k^2)/B_k^2} \quad (3.20)$$

Burada

$$A = \sum_{i=1}^n Int_i/n, B = \sum_{i=1}^n t_i^{\hat{m}_k}, C_k = \sum_{i=1}^n t_i^{\hat{m}_k} Int_i, H_k = \sum_{i=1}^n t_i^{\hat{m}_k} (Int_i)^2$$

şeklindedir.

Yinelemeler için başlangıç noktası olarak;

$$m_0 = \left[6/(\pi^2(n-1)) \left(\sum_{i=1}^n (Int_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^n Int_i \right)^2 / n \right) \right]^{-1/2} \quad (3.21)$$

eşitliğinin kullanılması önerilir (Thoman vd., 1969).

3.3.1.2. MB Yöntemi ile Weibull Yüzdeliklerinin Tahmini

Yapısal ve mekanik parçaların tasarımında küçük bir p hata olasılığına karşılık gelen t_p değerlerinin belirlenmesi mühendislik çalışmaları açısından çok önemlidir (Barbero vd., 2000).

p hata olasılığı önceden belirlenmek üzere;

$$P(t \leq t_p) = p \quad (3.22)$$

ifadesi; örneğin bir malzemenin kopma mukavemeti değerinin, t_p 'ye eşit veya altında olma olasılığı p 'dir şeklinde yorumlanır ve Eşitlik 3.4'deki dağılım fonksiyonuna göre de;

$$P(t_p) = P(t \leq t_p) = p \quad (3.23)$$

olur. Bu eşitlik çözüldüğünde;

$$t_p = \sigma_0 [In(1/(1-p))]^{1/m} \quad (3.24)$$

elde edilir. Weibull parametreleri m ve σ_0 yerine, bunların tahminçileri olan $\hat{m}$ ve $\hat{\sigma}_0$ kullanılarak, $\hat{t}_p$ tahmini şu şekilde üretilir:

$$\hat{t}_p = \hat{\sigma}_0 [In(1/(1-p))]^{1/\hat{m}} \quad (3.25)$$

Eşitlik 3.25'te MB yönteminden elde edilen $\hat{m}$ ve $\hat{\sigma}_0$ değerleri kullanılabilir.

3.3.1.3. Weibull Parametreleri ve Yüzdelikleri için Güven Aralıkları

Weibull parametreleri ve yüzdelikleri için güven aralıkları konusuna başlamadan önce pivotal istatistik özelliğinden bahsetmek gerekir. Eğer $Q(T, \theta)$ dağılımı $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)^T$ parametrelerinden bağımsız dağılıyorsa, $Q(T, \theta) = Q(t_1, t_2, \dots, t_n, \theta)$ rassal değişkeni pivotal istatistik özelliği gösterir denir.

Tezde klasik yaklaşım yöntemi olarak tercih edilen MB yöntemi Weibull dağılımı için pivotal istatistikleri olan bir yöntemdir. MB yöntemi kullanıldığı zaman $\hat{m}/m$ ve $\hat{m}In(\hat{\sigma}_0/\sigma_0)$ değişkenleri m ve σ_0 'dan bağımsız olarak dağılır, yani birer pivotal istatistiktir (Law ve Kelton, 1991).

3.3.1.4. MB Yöntemi ile Weibull Şekil Parametresi Güven Aralıkları

Pivotal istatistik özelliğinden dolayı $\hat{m}/m$ değişkeni m ve σ_0 'dan bağımsız olarak dağılmaktadır, bu yüzden $m=1$ alınırsa; $\hat{m}/m$, $\hat{m}$ ile aynı dağılıma sahip olur (Thoman vd., 1969).

Thoman vd. (1969), yaptığı çalışmalarında, Monte-Carlo simülasyon prosedürünü takip ederek, MB yöntemiyle $\hat{m}$ dağılımının yüzde noktalarını gösteren bir tablo elde etmişlerdir. Daha sonra da bu tablo ile m için güven aralıkları oluşturmuşlardır. Güven

aralıklarını $(\hat{m}/d_{\alpha/2}, \hat{m}/d_{1-\alpha/2})$ olarak hesaplamışlardır. Burada $d_{\alpha/2}$ ve $d_{1-\alpha/2}$ simülasyon sonucunda elde edilen tablo değerleridir.

Pivotal istatistik $\hat{m}/m$ ile $\hat{m}$ aynı dağılıma sahip olduğuna göre,

$$P\left(d_{1-\alpha/2} < \frac{\hat{m}}{m} < d_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha \quad (3.26)$$

eşitliğinde $\hat{m}/m$ yerine $\hat{m}$ kullanılabilir ve dolayısıyla alt ve üst sınırlar, $d_{1-\alpha/2}$ ve $d_{\alpha/2}$, $\hat{m}$ 'nın simülasyonu ile elde edilebilir. Eşitsizliğin her tarafı $1/\hat{m}$ ile çarpılarak;

$$P\left(\frac{d_{1-\alpha/2}}{\hat{m}} < \frac{1}{m} < \frac{d_{\alpha/2}}{\hat{m}}\right) = 1 - \alpha \quad (3.27)$$

bulunur; ters alma işlemiyle de;

$$P\left(\frac{\hat{m}}{d_{\alpha/2}} < m < \frac{\hat{m}}{d_{1-\alpha/2}}\right) = 1 - \alpha \quad (3.28)$$

haline gelir. Dolayısıyla Weibull şekil parametresi m için $(1 - \alpha)$ güven düzeyinde güven aralığı;

$$\left[\frac{\hat{m}}{d_{\alpha/2}}, \frac{\hat{m}}{d_{1-\alpha/2}} \right] \quad (3.29)$$

şeklinde ifade edilir.

3.3.1.5. MB Yöntemi ile Weibull Ölçek Parametresi Güven Aralıkları

Yine pivotal istatistik özelliğinden bilindiği üzere, $\hat{m} \ln(\hat{\sigma}_0/\sigma_0)$ değişkeni m ve σ_0 'dan bağımsız dağılmaktadır. Bu değişken $m=1$ ve $\sigma_0=1$ durumunda da $\hat{m} \ln(\hat{\sigma}_0)$ ile aynı dağılıma sahip olmaktadır (Thoman vd., 1969).

.

Thoman vd. (1969), $\hat{m} \ln(\hat{\sigma}_0/\sigma_0)$ dağılımının, Monte-Carlo simülasyon tekniği ile simülasyon programını oluşturmuş ve dağılımının yüzde noktalarını gösteren bir tablo hazırlamıştır. Bu tablo ile σ_0 için güven aralıkları oluşturmuştur. Güven aralıkları; $(\hat{\sigma}_0 \exp(-s_{\alpha/2}/\hat{m}), \hat{\sigma}_0 \exp(-s_{1-\alpha/2}/\hat{m}))$ biçimindedir. Buradaki $s_{\alpha/2}$ ve $s_{1-\alpha/2}$ tablo değerleridir.

Pivotal istatistik $\hat{m} \ln(\hat{\sigma}_0/\sigma_0)$ ile $\hat{m} \ln(\hat{\sigma}_0)$ aynı dağılıma sahip olduğuna göre,

$$P(S_{1-\alpha/2} < \hat{m} \ln(\hat{\sigma}_0/\sigma_0) < S_{\alpha/2}) = 1 - \alpha \quad (3.30)$$

eşitliğinde alt ve üst sınırlar, $s_{1-\alpha/2}$ ve $s_{\alpha/2}$, $\hat{m} \ln(\hat{\sigma}_0)$ 'nin simülasyonu ile elde edilir.

Eşitsizlik $\hat{m}$ ile bölünürse;

$$P\left(\frac{S_{1-\alpha/2}}{\hat{m}} < \ln\left(\frac{\hat{\sigma}_0}{\sigma_0}\right) < \frac{S_{\alpha/2}}{\hat{m}}\right) = 1 - \alpha \quad (3.31)$$

haline gelir. σ_0 'ı yalnız bırakmak için işlemlere devam edilirse;

$$P\left(\frac{e^{S_{1-\alpha/2}/\hat{m}}}{\hat{\sigma}_0} < \frac{1}{\sigma_0} < \frac{e^{S_{\alpha/2}/\hat{m}}}{\hat{\sigma}_0}\right) = 1 - \alpha \quad (3.32)$$

elde edilir. Buradan ölçek parametresi σ_0 için güven aralığı formülü;

$$P(\hat{\sigma}_0 e^{-(s_{1-\alpha/2}/\hat{m})} > \sigma_0 > \hat{\sigma}_0 e^{-(s_{\alpha/2}/\hat{m})}) = 1 - \alpha \quad (3.33)$$

olur. Buradan ölçek parametresi σ_0 için $(1-\alpha)$ güven düzeyinde güven aralığı;

$$[\hat{\sigma}_0 e^{-(s_{\alpha/2}/\hat{m})}, \hat{\sigma}_0 e^{-(s_{1-\alpha/2}/\hat{m})}] \quad (3.34)$$

şeklinde elde edilir.

3.3.1.6. MB Yöntemi ile Weibull Yüzdelikleri Güven Aralıkları

Eşitlik 3.24’de verilen alt yüzdelik formülü ve Eşitlik 3.25’te verilen alt yüzdelik tahmin formülü birleştirilerek;

$$\hat{m} \ln(\hat{t}_p/t_p) = \hat{m} \ln(\hat{\sigma}_0/\sigma_0) + (1 - \hat{m}/m) \ln(\ln(1/1 - p)) \quad (3.35)$$

elde edilir (Fernandez-Saez vd., 1993)

$\hat{m} \ln(\hat{t}_p/t_p)$ değişkeni de Eşitlik 3.35’e göre pivotal istatistik özelliğiyle m ve σ_0 ’dan bağımsız olarak dağılmaktadır. Dolayısıyla $\hat{m} \ln(\hat{t}_p/t_p)$ değişkeni benzetilirken $m=1$ ve $\sigma_0=1$ alınabilir. $\hat{m}$ ve $\hat{\sigma}_0$ Weibull parametreleri tahminleri hesaplandıktan sonra, Eşitlik 3.35’ten hesaplanabilir (Fernandez-Saez vd., 1993).

$\hat{m} \ln(\hat{t}_p/t_p)$ değişkeninin yüzdeliklerini bulmak için bir simülasyon programı gerekir. Bu prosedürün sürekli tekrarı, $\hat{m} \ln(\hat{t}_p/t_p)$ değişkeni için simülasyon değerleri elde edilmesini sağlar ve bu değerler kullanılarak Weibull alt yüzdelikleri için güven aralığı oluşturulabilir (Fernandez-Saez vd., 1993).

$\hat{m} \ln(\hat{t}_p/t_p)$ için güven aralıkları şu şekilde oluşturulabilir:

$$P(C_{1-\alpha/2} < \hat{m} \ln(\hat{t}_p/t_p) < C_{\alpha/2}) = 1 - \alpha \quad (3.36)$$

ardından eşitsizlik $\hat{m}$ ile bölünüp t_p ’yi yalnız bırakmak için işlemlere devam edilirse;

$$P(\hat{t}_p e^{-(C_{1-\alpha/2}/\hat{m})} > t_p > \hat{t}_p e^{-(C_{\alpha/2}/\hat{m})}) = 1 - \alpha \quad (3.37)$$

elde edilir (Fernandez-Saez vd., 1993). Dolayısıyla t_p için $(1-\alpha)$ güven düzeyinde güven aralığı Eşitlik 3.38’deki gibi olur.

$$[\hat{t}_p e^{-(C_{\alpha/2}/\hat{m})}, \hat{t}_p e^{-(C_{1-\alpha/2}/\hat{m})}] \quad (3.38)$$

Eşitlik 3.38, alt ve üst güven sınırları olan bir güven aralığıdır. Sadece güven alt sınırının hesaplanması ile ilgileniliyorsa güven alt sınırını veren eşitlik şu şekilde oluşur:

$$\text{Güven Alt Sınırı} = l_p = \hat{\sigma}_p e^{-(C_\alpha/\hat{m})} \quad (3.39)$$

3.3.2. Bayesyen Yaklaşım

Özü Bayes teoremine dayanan Bayesyen yaklaşımda olasılık sübjektiftir ve belirsizliğin bir ölçüsü olarak tanımlanmıştır. Bir olayın olasılığı olayla ilgili ön bilgi ile çalışma verisinden elde edilen bilginin birleştirilmesinden elde edilir. Bayesyen yaklaşım herşeyin birbiri ile etkileşim halinde olduğu bir evrende her olayın bir kısıta bağlı olduğunu ve koşullu olasılıklarla ifade edilmesi gerektiğini söyler ve koşullu olasılık dağılımları üzerinde durur.

Bir parametre Bayesyen yaklaşımda olasılık dağılımı olan bir rassal değişken gibi düşünülmektedir. Bu doğrultuda parametrenin tahmincisi için bir ön olasılık dağılımı belirlenir. Önsel (apriori) bilgi, eldeki veri haricinde araştırmacının parametreye dair deneyimini, algılamasını ve teorik düşüncelerini kapsar, önceki çalışmalardan, deneylerden ve uzman görüşlerinden edinilir. Mevcut veri ile birleştirilerek parametre tahmincisinin son olasılık dağılımı (posterior) elde edilir. Parametre ile ilgili tüm çıkarsama işlemleri son dağılıma dayanarak yapılır (Yörükoğlu vd., 2014)

Bayesyen yaklaşımını daha iyi kavrayabilmek için yaklaşımın temeli olan Bayes teoreminin ne olduğunu bilmemiz gerekmektedir.

3.3.2.1. Bayes Teoremi (Kuralı)

Bayes teoremi, bir olayın gerçekleşme olasılığı ile ilgili öncül olasılık beklentilerinin, olayın gerçekleşmesi durumunda elde edilen yeni bilgilerle güncelleştirilerek, soncul olasılıkların bulunmasını sağlayan maksimum benzerlik ilkesi üzerine kurulu bir

olasılık teoremidir. Bu teorem rastgele ortaya çıkan A ve B olayları için koşullu olasılıklar ve marjinal olasılıklar arasındaki ilişkiyi gösterir.

$$P(A/B) = \frac{P(B/A) P(A)}{P(B)} \quad (3.40)$$

Bayes teoremi formülü içinde bulunan her bir terime özel isimler verilmektedir:

- $P(A)$ terimine A için önsel olasılık veya marjinal olasılık adı verilir. Bu önseldir, çünkü B olayı hakkında önceden herhangi bir bilgiyi içermemektedir.
- $P(A/B)$ terimi verilmiş B için A'nın koşullu olasılığı adını alır.
- $P(B/A)$ terimi verilmiş A için B'nin koşullu olasılığı adını taşır.
- $P(B)$ terimi B olayı için önsel olasılıktır veya B'nin marjinal olasılığıdır. Matematiksel tanımda ise normalleştirme sabiti olarak ifade edilir (http://tr.wikipedia.org/wiki/Bayes_teoremi).

Bir parametrenin önsel dağılımı, veriyi analiz etmeden önce parametre hakkında kesin olmayan bilgileri içeren bir olasılık dağılımıdır. Bayes teoreminin uygulanabilmesi için $P(A)$ olarak verilen önsel olasılığının bilinmesi gerekmektedir. Bu ön bilgi ile önce sonsal dağılım hesaplanmakta sonra parametre ile ilgili her türlü çıkarım tahmini yapılmaktadır. Uygulamada kullanılan Bayes kuralının elde edilmesi ise şu şekilde yapılmaktadır. Eğer $p(\cdot)$ bir olasılık fonksiyonunu, θ parametre vektörünü, y gözlemlere ait vektörü ve $p(y, \theta)$ da ortak olasılık fonksiyonunu gösterirse;

$$P(y, \theta) = P(\theta/y)P(y) = P(y/\theta)P(\theta) \quad (3.41)$$

Buradan da,

$$P(\theta/y) = P(\theta)P(y/\theta)/P(y) \quad (3.42)$$

bulunur. $P(y)$ gözleme ait olasılığı vermektedir ve son dağılımın integralini veya toplamını 1'e eşitleyen bir normalleştirme sabitidir. Eğer ki gözlemler sürekli özellik gösteriyorsa,

$$P(y) = \int P(y/\theta)P(\theta) d\theta \quad (3.43)$$

olur. Kesikli ise

$$P(y) = \sum P(y/\theta)P(\theta) d\theta \quad (3.44)$$

şeklinde yazılır. Eşitlik 3.42'deki normalleştirme sabitini ortadan kaldırsak son olasılık yoğunluk fonksiyonu (oyf) şöyle yazılır;

$$P(\theta/y) \propto P(\theta)L(y/\theta) \quad (3.45)$$

Son bilgi olasılığı $\propto$ ön bilgi olasılığı x maksimum benzerlik olasılığı

Burada $\propto$ işareti oransallığı ifade etmektedir.

Bayesyen yaklaşımda parametreye ait sonsal bilgi dağılımı teorik olarak kolayca belirlenebilmektedir. Fakat parametre sayısı fazla olduğu durumlarda sonsalların elde edilmesi çok zor, hatta çözümü mümkün olmayan çoklu integrallerin hesaplanmasını gerektirir. Bu gibi durumların çözümü için nümerik integrasyon yaklaşımları, Markov zinciri Monte Carlo (MCMC) simülasyonu esasına dayanan Gibbs örnekleme, Metropolis-Hastings vs. algoritmaları gibi bazı yöntemler ortaya konulmuştur (Akar vd, 2014).

Bayesyen yaklaşımının subjektif ve en zor aşaması bilgi içeren ve bilgi içermeyen önsel dağılımlardan hangisinin tercih edileceğidir. Bilgi içermeyen önsel dağılımlar çatısı altında düz (uniform) önseli, Jeffreys önseli, diffüz (belirsiz, zayıf veya bölgesel uniform) önseli, maksimum entropi önseli, içsel önseli ile integral önselini toplayabiliriz. Bilgi içeren önsel dağılımlar için ise eşlenik önsel, subjektif önsel,

Minnesota önseli, kuvvet önseli, g-önseli, ilk fark önseli ve ikinci fark önseli dağılımları örnek olarak verilebilir. Bu çalışmada sadece Jeffreys önselinden bahsedilecektir. Diğer önseller hakkındaki detaylı bilgiyi Ekici (2010) tarafından İstatistik Araştırma dergisinde yayınlanan çalışmada bulabilirsiniz.

Bayesyen yaklaşımda bilgi içermeyen önseller kullanıldığında sonsal yoğunluk, olabilirlik fonksiyonuna benzeyecektir. Bununla birlikte bilgi içermeyen ön bilgi kullanılarak yapılan tahminler ile klasik yöntemle elde edilen tahminler birbirlerine yakın olacaktır.

$$P(\theta/y) \propto L(y/\theta)$$

3.3.2.2. Bayesyen Weibull Yöntemi (BW)

Bayesyen Weibull (BW) yönteminde olabilirlik fonksiyonu için iki parametrelili Weibull dağılımı kullanılmıştır. Yöntemde Weibull şekil ve ölçek parametrelerinin önsel olarak bağımsız olduğu ve bilgi içermeyen önsellere sahip olduğu kabul edilmektedir. İki parametrelili Weibull dağılımı için Bayes kuralı uygulandığında BW yönteminin sonsal olasılık dağılımı Eşitlik 3.46'daki gibi ifade edilir.

$$f(m, \sigma_0 | Veri) = \frac{L(m, \sigma_0) \varphi(m) \varphi(\sigma_0)}{\int_0^\infty \int_0^\infty L(m, \sigma_0) \varphi(m) \varphi(\sigma_0) d\sigma_0 dm} \quad (3.46)$$

- $f(m, \sigma_0 | Veri)$: m ve σ_0 için sonsal olasılık
- $L(m, \sigma_0) = P(Veri | m, \sigma_0)$: verilen m ve σ_0 için verilerin elde edilme olabilirliği
- $\varphi(m)$: m için önsel olasılık veya marjinal olasılık.
- $\varphi(\sigma_0)$: σ_0 için önsel olasılık veya marjinal olasılık.

Bu modelde σ_0 ölçek parametresi, $\varphi(\sigma_0) = \frac{1}{\sigma_0}$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bilgi içermeyen önsel bir dağılım takip etmektedir. Bu önsele Jeffreys önseli

denilmektedir. Jeffreys (1939), ölçek parametresinin logaritmasının birbiriçimli $p(\log \sigma_0) = k$ olduğunu varsaymıştır. Bilindiği üzere σ_0 ölçek parametresi, yayılım ölçüsü olduğundan her zaman pozitif değerlidir ve buna istinaden $\ln(\sigma_0)$ uniform (düzgün) bir dağılım $U(-\infty, +\infty)$ takip eder. Ölçek parametresi için Jeffreys önseli ise $f_y(y) = \frac{1}{y} f_x(\ln y)$ eşitliği kullanılarak $p(\sigma_0) = \frac{k}{\sigma_0}$ ($k > 0$) olarak gösterilir (Jeffreys, 1939).

Weibull şekil parametresinin $\varphi(m)$ ifadesi ile gösterilen önsel dağılımı için ise normal, lognormal, exponential ve uniform dağılımlarından biri seçilebilir. m ve σ_0 önsel dağılımları için daha detaylı bilgiye Gelman vd (2004)'nin "*Bayesian Data Analysis*" adlı kitabı ile ReliaSoft Publication (2007)'nin "*Life Data Analysis Reference*" adlı kitabı üzerinden ulaşılabilir.

3.3.2.3. BW Yöntemi ile Weibull Parametreleri Üzerine İstatistiksel Çıkarımlar

Weibull şekil (m) ve ölçek (σ_0) parametrelerinin marjinal sonsal olasılıkları Eşitlik 3.46 üzerinden sırasıyla Eşitlik 3.47 ve 3.48'deki gibi ifade edilir (http://reliawiki.com/index.php/Bayesian-Weibull_Analysis).

$$f(m|Veri) = \int_0^{\infty} f(m, \sigma_0|Veri) d\sigma_0 \quad (3.47)$$

$$f(\sigma_0|Veri) = \int_0^{\infty} f(m, \sigma_0|Veri) dm \quad (3.48)$$

m ve σ_0 için beklenen değer sırasıyla Eşitlik 3.49 ve 3.50 ile bulunur.

$$E(m) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} m f(m, \sigma_0|Veri) dm d\sigma_0 \quad (3.49)$$

$$E(\sigma_0) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \sigma_0 f(m, \sigma_0|Veri) dm d\sigma_0 \quad (3.50)$$

$\hat{m}$ ve $\hat{\sigma}_0$ için medyan değerleri sırasıyla Eşitlik 3.51 ve 3.52'nin çözümü ile elde edilir. Bilindiği gibi medyan, sıralanmış verileri %50-%50 olarak ikiye bölen noktadır.

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\hat{m}} f(m, \sigma_0 | Veri) dm d\sigma_0 = 0.5 \quad (3.51)$$

$$\int_0^{\hat{\sigma}_0} \int_0^{\infty} f(m, \sigma_0 | Veri) dm d\sigma_0 = 0.5 \quad (3.52)$$

Sonsal dağılım üzerinde diğer yüzdeliklere karşılık gelen noktalar da benzer şekilde hesaplanabilir. Örneğin şekil parametresi için tek taraflı alt %10'luk güvenilir sınır değeri Eşitlik 3.53'ün çözümü ile elde edilir (Aron vd., 2009).

$$\int_0^{\infty} \int_0^{m_{10}} f(m, \sigma_0 | Veri) dm d\sigma_0 = 0.1 \quad (3.53)$$

Bayesyen yaklaşım, klasik yaklaşımın “güven aralığı” (confidence interval) tanımlaması yerine, “güvenilir aralık” (credible interval), “Bayesyen aralık” (Bayesian interval) veya “en yüksek son yoğunluk bölgesi veya aralığı” (highest posterior density region or interval) tanımlamalarını kullanmaktadır (Ekici, 2009).

3.3.2.4. BW Yöntemi ile Güvenilirlik Üzerine İstatistiksel Çıkarımlar

Verilen t zaman dilimi için $R(t)$, m 'nin bir fonksiyonudur; m 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu ile $R(t)$ arasında Eşitlik 3.54'deki gibi bir ilişki vardır

$$f(R | Veri, t) dR = f(R_t | Veri) dR = f(m | Veri) dm \quad (3.54)$$

Eşitlik 3.54'de Eşitlik 3.46 kullanılırsa;

$$f(R|Veri, t)dR = \left(\int_0^\infty f(m, \sigma_0|Veri)d\sigma_0 \right) dm \quad (3.55)$$

buradan da Eşitlik 3.45 ile

$$f(R|Veri, t)dR = \left\{ \frac{\int_0^\infty L(m, \sigma_0)\varphi(m)\varphi(\sigma_0)d\sigma_0}{\int_0^\infty \int_0^\infty L(m, \sigma_0)\varphi(m)\varphi(\sigma_0) d\sigma_0 dm} \right\} dm \quad (3.56)$$

ifadesi elde edilir. Eşitlik 3.56'da;

- $f(R|Veri, t)$: $R(t)$ 'nin sonsal dağılımıdır
- $f(m|Veri)$: m 'nin marjinal sonsal dağılımıdır.

Güvenirliğin beklenen değeri Eşitlik 3.57'nin çözümü ile elde edilir.

$$\begin{aligned} E(R_t) &= \int_0^1 R_t f(R_t|Veri)dR \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty R(t, m, \sigma_0) f(m, \sigma_0|Veri) dm d\sigma_0 \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(\frac{t}{\sigma_0}\right)^m} f(m, \sigma_0|Veri) d\sigma_0 dm \end{aligned} \quad (3.57)$$

Burada

$$R(t, m, \sigma_0) = e^{-\left(\frac{t}{\sigma_0}\right)^m} \quad (3.58)$$

dir.

Güvenirliğin medyan değeri Eşitlik 3.59'un çözümü ile elde edilir.

$$\int_0^{\hat{R}} f(R|Veri, t)dR = 0.5 \quad (3.59)$$

Güvenirliğin tek taraflı alt sınır değeri Eşitlik 3.60'ın çözümü ile elde edilir.

$$\int_0^{R_L(t)} f(R|Veri, t) dR = \int_0^{R_L} f(R_t|Veri) dR = 1 - CL \quad (3.60)$$

$R(t)$ 'nin sonsal dağılımı yerine konulduğunda Eşitlik 3.61 bulunur ve bu eşitlikle R_L değeri için çözümleme yapılır.

$$\frac{\int_0^\infty \int_0^t \exp\left(-\frac{\ln(-\ln R_L)}{m}\right) L(m, \sigma_0) \varphi(m) \varphi(\sigma_0) d\sigma_0 dm}{\int_0^\infty \int_0^\infty L(m, \sigma_0) \varphi(m) \varphi(\sigma_0) d\sigma_0 dm} = 1 - CL \quad (3.61)$$

Güvenirliğin tek taraflı üst sınır değeri Eşitlik 3.62'nin çözümü ile elde edilir.

$$\int_0^{R_U(t)} f(R|Veri, t) dR = \int_0^{R_U} f(R_t|Veri) dR = CL \quad (3.62)$$

$R(t)$ 'nin sonsal dağılımı yerine konulduğunda Eşitlik 3.63 bulunur ve bu eşitlikle R_u değeri için çözümleme yapılır.

$$\frac{\int_0^\infty \int_{\exp\left(-\frac{\ln(-\ln R_u)}{m}\right)}^\infty L(m, \sigma_0) \varphi(m) \varphi(\sigma_0) d\sigma_0 dm}{\int_0^\infty \int_0^\infty L(m, \sigma_0) \varphi(m) \varphi(\sigma_0) d\sigma_0 dm} = CL \quad (3.63)$$

Güvenirliğin çift taraflı sınır değerleri Eşitlik 3.64'ün çözümü ile elde edilir

$$\int_{R_L(t)}^{R_U(t)} f(R|Veri, t) dR = CL \quad (3.64)$$

Eşitlik 3.64, Eşitlik 3.65 ve 3.66 ile de ifade edilebilir.

$$\int_0^{R_U(t)} f(R|Veri, t) dR = \int_0^{R_U} f(R_t|Veri) dR = \frac{1 + CL}{2} \quad (3.65)$$

ve:

$$\int_0^{R_L(t)} f(R|Veri, t) dR = \int_0^{R_L} f(R_t|Veri) dR = \frac{1 - CL}{2} \quad (3.66)$$

Eşitlik 3.65 ve 3.66 ile R_u ve R_L değerleri için çözümleme yapılır.

Ek olarak $t \exp(-\frac{\ln(-\ln R)}{m})$ eşitliği, $R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\sigma_0}\right)^m}$ eşitliğinde t 'yi yalnız bırakacak şekilde gerekli işlemler yapılarak elde edilir. Şöyle ki $R = 1 - p = e^{-\left(\frac{t}{\sigma_0}\right)^m}$ ise her iki tarafın sırasıyla doğal logaritması alındığında $\ln\left(\frac{1}{1-p}\right) = \left(\frac{t}{\sigma_0}\right)^m$, m 'ye göre karekökü alındığında $\left[\ln\left(\frac{1}{1-p}\right)\right]^{1/m} = \frac{t}{\sigma_0}$ ve son olarak doğal logaritmasının exponansiyeli alındığında $\exp\left(\frac{-\ln(-\ln(1-p))}{m}\right) = \frac{\sigma_0}{t}$ olur. Buradan da;

$$t \exp\left(\frac{-\ln(-\ln(1-p))}{m}\right) = \sigma_0 \quad (3.67)$$

eşitliğine ulaşılır.

Eşitlik 3.67, Eşitlik 3.68 şeklinde de yazılabilir (http://reliawiki.com/index.php/Bayesian-Weibull_Analysis).

$$\sigma_0 \left[\ln\left(\frac{1}{1-p}\right)\right]^{1/m} = t = t_p \quad (3.68)$$

Eşitlik 3.68'deki t , belli bir p hata olasılığına karşılık gelen t_p değerini vermektedir.

3.3.2.5. BW Yöntemi ile Hata Zamanı Üzerine İstatistiksel Çıkarımlar

T hata zamanı için sonsal dağılım, Eşitlik 3.69 ile ifade edilir.

$$f(t|Veri) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(t, m, \sigma_0) f(m, \sigma_0|Veri) dm d\sigma_0 \quad (3.69)$$

Burada

$$f(t, m, \sigma_0) = \frac{m}{\sigma_0} \left(\frac{t}{\sigma_0} \right)^{m-1} e^{-\left(\frac{t}{\sigma_0}\right)^m} \quad (3.70)$$

Verilen bir güvenilirlikte T hata zamanı için beklenen değer Eşitlik 3.71'in çözümü ile elde edilir.

$$\begin{aligned} E(t_R) &= \int_0^\infty t_R f(t_R|Data) dt_R \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \sigma_0 \exp\left(\frac{\ln(-\ln(R))}{m}\right) f(m, \sigma_0|Data) d\sigma_0 dm \end{aligned} \quad (3.71)$$

Verilen bir güvenilirlikte $T(R)$ için tek taraflı alt sınır değeri Eşitlik 3.72'nin çözümü ile elde edilir.

$$\int_0^{t_L(R)} f(t|Veri, R) dt = 1 - CL \quad (3.72)$$

$T(R)$ için tek taraflı alt sınır değeri Eşitlik 3.72 ile 3.22 arasındaki notasyon eşleniğini anlamak amacıyla şu işlemleri göstermekte fayda bulunmaktadır. Şöyle ki;

$P(T_L \leq T) = P(l_p \leq t_p) = 1 - \alpha$ yi arıyoruz. $P(T \leq T_L) + P(T_L \leq T) = 1$ olduğuna göre; $P(T_L \leq T) = 1 - P(T \leq T_L) = 1 - \alpha = CL$ veya $P(T \leq T_L) = \alpha = 1 - CL$ idir. Burada $P(T \leq T_L)$ değeri bilindiği gibi Eşitlik 3.72 ile çözümlenmektedir.

$T(R)$ 'nin sonsal dağılım eşitliği Eşitlik 3.69, Eşitlik 3.72'deki yerine konulduğunda Eşitlik 3.73 elde edilir ve bu eşitlikle $T_L(R)$ değeri için çözümleme yapılır.

$$P(T_L \leq T) = \frac{\int_0^\infty \int_{t_L}^\infty \exp\left(-\frac{\ln(-\ln R)}{m}\right) L(m, \sigma_0) \varphi(m) \varphi(\sigma_0) d\sigma_0 dm}{\int_0^\infty \int_0^\infty L(m, \sigma_0) \varphi(m) \varphi(\sigma_0) d\sigma_0 dm} = CL \quad (3.73)$$

$T_L(R)$ değeri Eşitlik 3.74 ile de çözümlenebilir

$$P(T \leq T_L) = \frac{\int_0^\infty \int_0^{t_L} \exp\left(-\frac{\ln(-\ln R)}{m}\right) L(m, \sigma_0) \varphi(m) \varphi(\sigma_0) d\sigma_0 dm}{\int_0^\infty \int_0^\infty L(m, \sigma_0) \varphi(m) \varphi(\sigma_0) d\sigma_0 dm} = 1 - CL \quad (3.74)$$

Verilen bir güvenilirlikte $T(R)$ için tek taraflı üst sınır değeri Eşitlik 3.75'in çözümü ile elde edilir.

$$\int_0^{t_U(R)} f(t|Data, R) dt = CL \quad (3.75)$$

$T(R)$ 'nin sonsal dağılım eşitliği Eşitlik 3.69, Eşitlik 3.75'teki yerine konulduğunda Eşitlik 3.76 elde edilir ve bu eşitlikle $T_U(R)$ değeri için çözümleme yapılır.

$$\frac{\int_0^\infty \int_0^{t_U} \exp\left(-\frac{\ln(-\ln R)}{m}\right) L(m, \sigma_0) \varphi(m) \varphi(\sigma_0) d\sigma_0 dm}{\int_0^\infty \int_0^\infty L(m, \sigma_0) \varphi(m) \varphi(\sigma_0) d\sigma_0 dm} = CL \quad (3.76)$$

Verilen bir güvenilirlikte $T(R)$ için çift taraflı sınır değerleri Eşitlik 3.77'nin çözümü ile elde edilir.

$$\int_{t_L(R)}^{t_U(R)} f(t|Veri, R) dt = CL \quad (3.77)$$

Eşitlik 3.77 şu şekilde de ifade edilebilir.

$$\int_0^{t_L(R)} f(t|Veri, R) dt = \frac{1 - CL}{2} \quad (3.78)$$

ve:

$$\int_0^{t_U(R)} f(t|Veri, R) dt = \frac{1 + CL}{2} \quad (3.79)$$

Eşitlik 3.78 ve 3.79 ile T_u ve T_L değerleri için çözümleme yapılır.

Son olarak t zamanındaki hata oranı Eşitlik 3.80'nin çözümü ile elde edilir.

$$\lambda(t|Veri) = \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty \lambda(t, m, \sigma_0) L(m, \sigma_0) \varphi(m) \varphi(\sigma_0) d\sigma_0 dm}{\int_0^\infty \int_0^\infty L(m, \sigma_0) \varphi(m) \varphi(\sigma_0) d\sigma_0 dm} \quad (3.80)$$

Burada

$$\lambda(t, m, \sigma_0) = \frac{m}{\sigma_0} \left(\frac{t}{\sigma_0} \right)^{m-1} \quad (3.81)$$

dir.

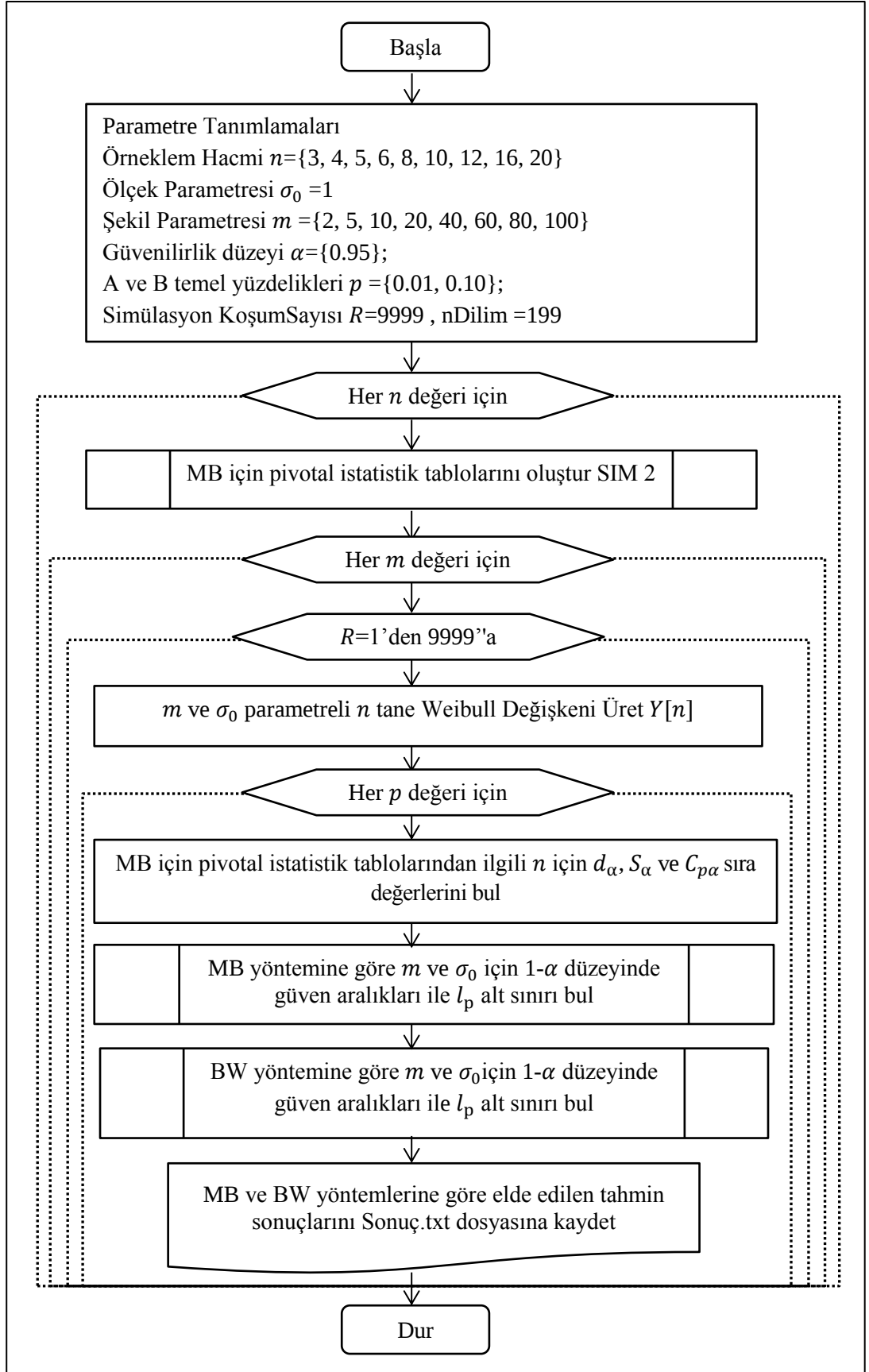
3.4. Weibull Parametreleri ve Yüzdeliklerinin Güven Aralığı Tahmini Üzerine Simülasyon Çalışması

Çalışmanın özgün yanını oluşturan bu kısmında, konu 3.3'te açıklanan BW ve MB yöntemlerine göre Weibull parametreleri ve alt yüzdeliklerinin güven aralığı tahminlerinin yapılabilmesi ve tahmin performanslarının değerlendirilmesi amacıyla C++ ortamında Monte Carlo tekniğine dayalı geliştirilen bir simülasyon prosedürü anlatılacaktır. Simülasyonda kullanılan tahmin yöntemleri için geliştirilen algoritmalar aynı ortak arayüz altında birleştirilmiştir. Şekil 3.5'te programın akış şeması görülmektedir. Algoritmaların kodları için **Ek-1**'e bakınız.

Tahminlerde simülasyon çalışmasına gerek duyulmasının nedeni yüksek tekrar sayılarıyla istenilen bir sonucu bir olasılık dağılımıyla modelleyebilmek ve bu dağılım

modeli ile belli güven düzeylerinde istatistiksel sonuç çıkarımı yapabilmektedir. Bu tez çalışmasında da BW ve MB yöntemleri ile elde edilen tahmin sonuçlarını belli bir anlamlılık düzeyinde yorumlayabilmek için bir simülasyon yapılmıştır. Tez içerisinde bu simülasyona kısaca SIM1 adı verilmiştir. Şekil 3.5'te görüldüğü gibi SIM1 için iki parametrelili Weibull dağılımına ait olmak üzere ölçek parametresi sabit tutularak farklı şekil parametre değerlerine göre farklı örnek hacimlerinde R kez örnek veriler üretilmiştir. Üretilen bu veriler her iki yöntemde de kullanılarak her biri için %95 güven düzeyinde şekil ve ölçek parametreleri için güven aralıkları ile her bir güven düzeyi için %1 ve %10 hata olasılığına karşılık gelen güven alt sınır değerleri tahmin edilmiştir. Tahmin sonuçları da SQL üzerinde analizi yapılmak üzere txt dosyası olarak bilgisayar ortamında saklanmıştır.

Bununla birlikte MB yöntemi için gerekli olan d_α , S_α ve $C_{p\alpha}$ sıra değerlerinin bulunabilmesi için yöntemin kendi içinde bir simülasyon yapması gerekmektedir. Bu simülasyon tez içerisinde kısaca SIM2 olarak adlandırılmıştır. Şekil 3.5'te “*MB için pivotal istatistik tablolarını oluştur*” adı ile gösterilen yordam, ilgili her n için $R=999$ kez ürettiği Weibull değişkeni üzerinden $\hat{m}/m$, $\hat{m} \ln(\hat{\sigma}_0/\sigma_0)$ ve $\hat{m} \ln(\hat{t}_p/t_p)$ simülasyon değerlerini hesaplamakta ve bu değerleri sıralayarak bir pivotal istatistik tablosu oluşturmaktadır. Bu simülasyonun ayrıntıları için Danacı (2005)'in tez çalışması ile Birgören (2006)'in makalesi incelenebilir.



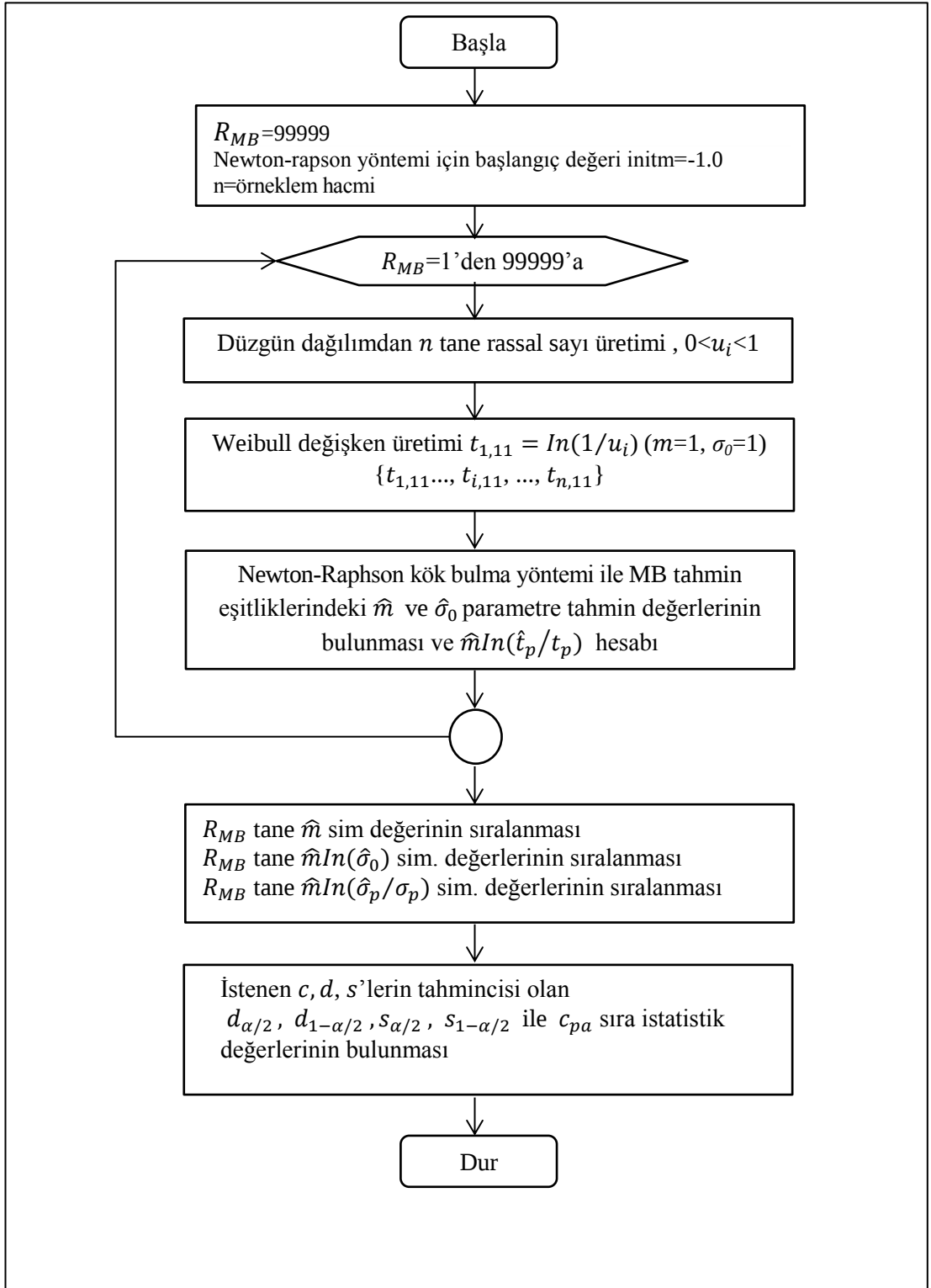
Şekil 3.5. SIM1 program akış şeması

3.4.1. MB Yöntemi ile Weibull Parametreleri ve Yüzdeliklerinin Güven Aralığı Tahmin Simülasyonu

Danacı (2004), yüksek lisans tez çalışmasında Weibull parametreleri ve alt yüzdelikleri için güven aralığı oluşturmak amacı ile d_α, S_α ve $C_{p\alpha}$ simülasyonuna dayalı standart C++ programlama dilinde bir algoritma (SIM2) geliştirmiştir. Geliştirilen bu algoritma, Bayesyen ve klasik yaklaşım tahmin sonuçlarının karşılıklı analizinde kullanılmak üzere bu tez çalışmasında geliştirilen algoritmaya göre düzenlenip uyarlanmıştır. Şekil 3.5'te program akış şemasında yer alan “*MB için pivotal istatistik tablolarını oluştur*” ve “*MB yöntemine göre m ve σ_0 için $1-\alpha$ düzeyinde güven aralıkları ile t_p alt sınırı bul*” yordamları ile SIM1'in MB yöntemi ile ilgili hesaplamaları yapılmaktadır.

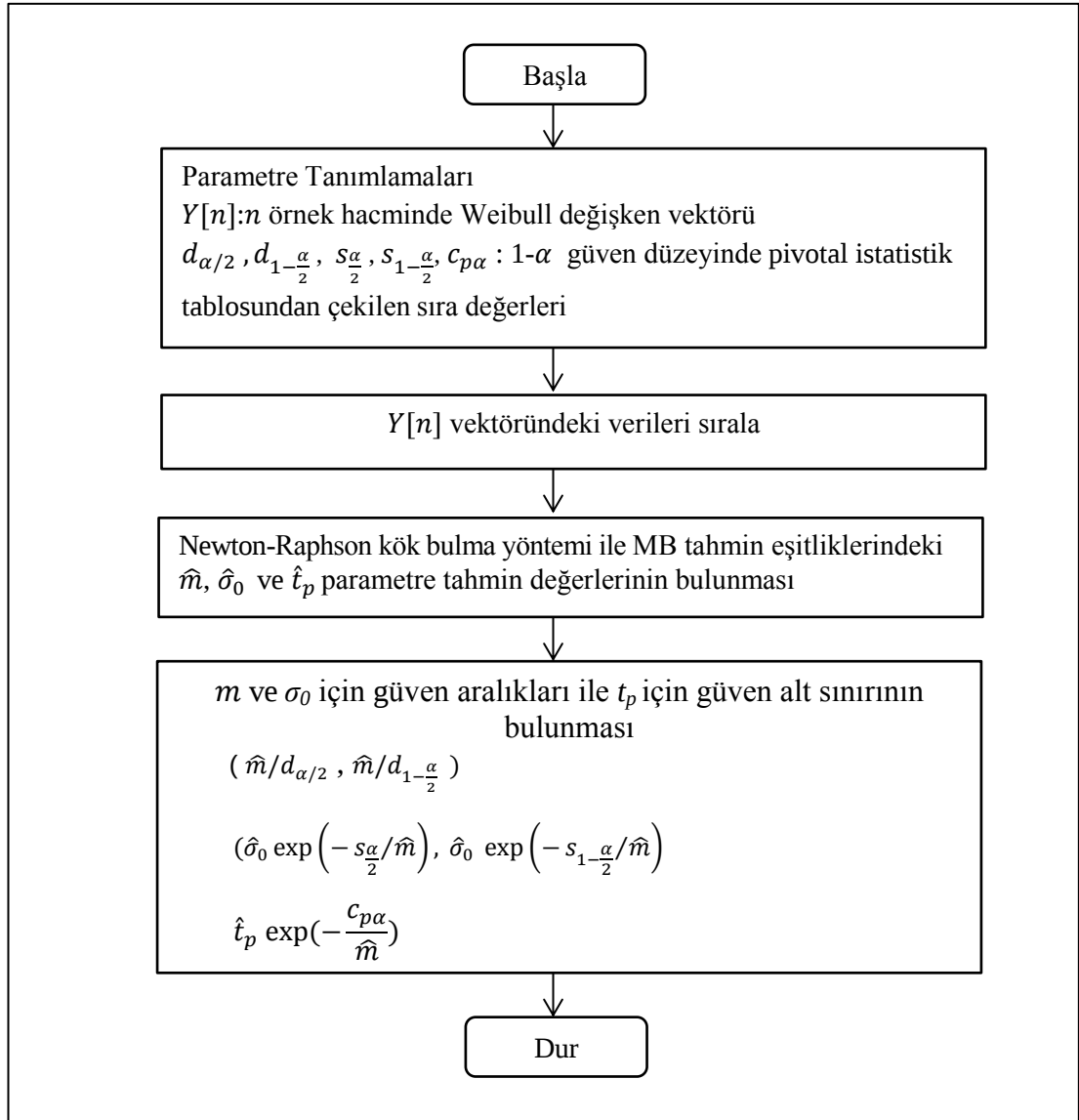
SIM1 simülasyonunda ilk önce her n için bir kez SIM2 simülasyonun yapılması yani “*MB için pivotal istatistik tablolarını oluştur*” yordamının çalıştırılması gerekmektedir. Bu yordam ile daha önce de bahsedildiği gibi d_α, S_α ve $C_{p\alpha}$ sıra değerleri bulunur. “*MB için pivotal istatistik tablolarını oluştur*” yordamının akış şeması Şekil 3.6'da gösterilmektedir.

Şekil 3.6 programın akış şemasında gösterildiği gibi n örnek hacmini göstermek üzere, Monte-Carlo simülasyon yöntemi ile n adet $m=1, \sigma_0=1$ parametre değerleri üzerinden Weibull değişkeni üretilir: $U \sim (0,1)$ arasında düzgün dağılmış rassal bir değişken ise $t_{i11} = \ln(1/U)$, $m=1, \sigma_0=1$ parametrelili Weibull değişkenidir (Law ve Kelton, 1991) Üretilen veriler için Eşitlik 3.20'de gösterilen Newton-Raphson kök bulma yöntemi ile MB yönteminin $\hat{m}$ ve $\hat{\sigma}_0$ tahmin değerleri elde edilir. Bir sonraki aşamada bu değerler pivotal istatistik değerlerinin hesaplanmasında kullanılır. Böylece m 'nin güven aralığını oluşturmak için $\hat{m}$; σ_0 'nın güven aralığı oluşturmak için $\hat{m} \ln(\hat{\sigma}_0)$ ve t_p 'nin güven alt sınırı oluşturmak için $\hat{m} \ln(\hat{\sigma}_0/t_p)$ tahmin değerleri elde edilir. R_{MB} defa bu işlemler tekrarlanarak bu değişkenlerin R_{MB} simülasyon değerleri ayrı ayrı hesaplanarak, küçükten büyüğe sıralanır. $[(R_{MB} + 1)(1 - \alpha)]$ 'inci değerleri $d_\alpha, S_\alpha, C_{p\alpha}$ 'nın tahmini değerleri olarak kullanılır. Benzer şekilde $[(R_{MB} + 1)\alpha]$ 'inci değerleri $d_{1-\alpha}$ ve $S_{1-\alpha}$ değerlerini verir.



Şekil 3.6. “MB için pivotal istatistik tablolarını oluştur” yordamı akış şeması

İlgili n değeri için SIM2 simülasyonu yapıldıktan sonra SIM1 için üretilen n adet Weibull değişkeni için MB yöntemi ile Şekil 3.7’deki prosedüre göre verilere ait $\hat{m}$ ve $\hat{\sigma}_0$ parametre nokta tahminleri yapılır. SIM2 ile elde edilen sıra değerleri, m için güven aralığı oluşturmak amacıyla Eşitlik 3.29’da; σ_0 için güven aralığı oluşturmak için de Eşitlik 3.34’de yerlerine konarak m ve σ_0 için $1-\alpha$ güven düzeyinde güven aralıkları oluşturulur. $\hat{m}$ ve $\hat{\sigma}_0$ değerleri Eşitlik 3.25’te yerlerine konarak $\hat{t}_p$ elde edilir ve Eşitlik 3.38 ile de güven aralığı oluşturulur ya da Eşitlik 3.39 ile güven alt sınır değeri bulunur.

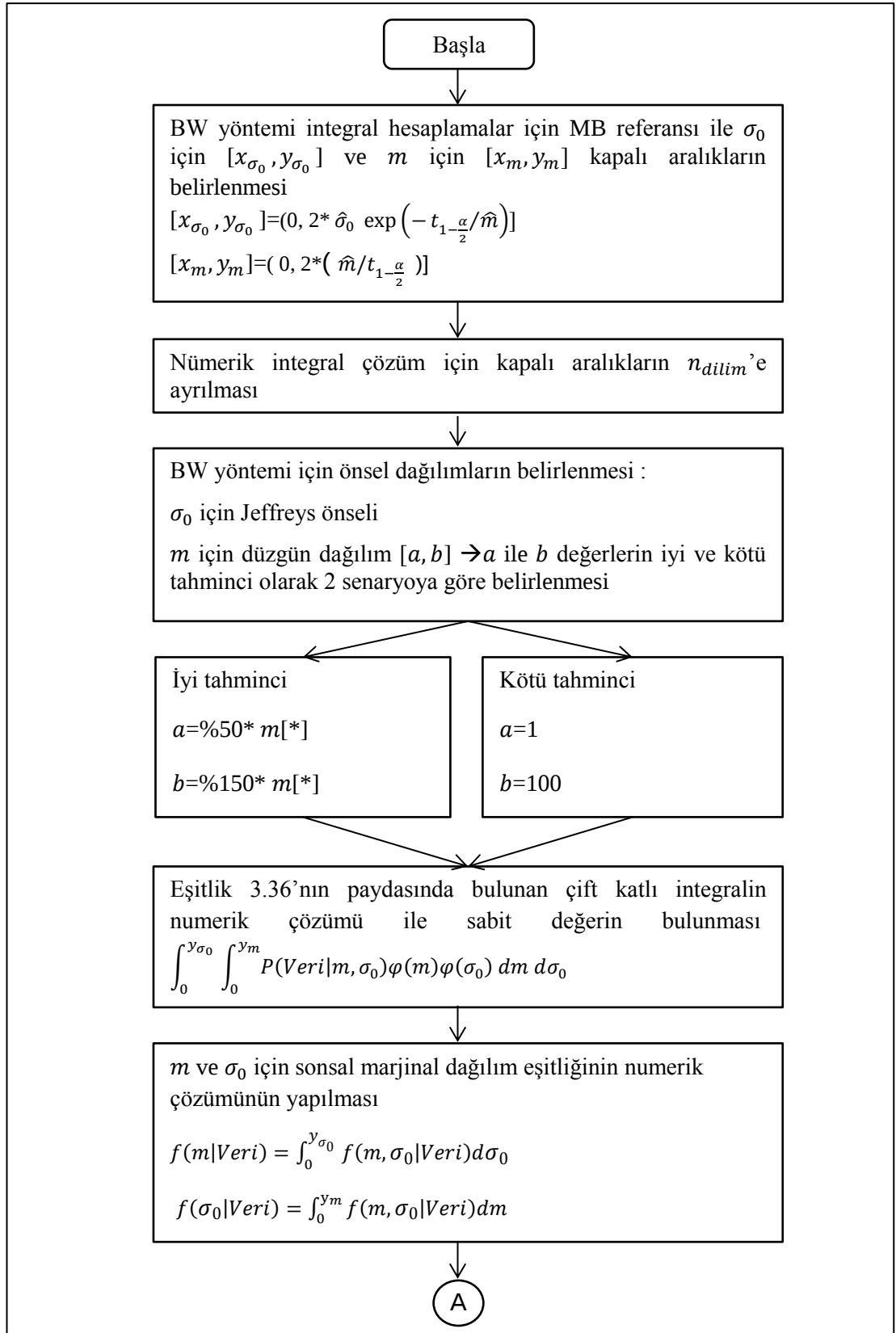


Şekil 3.7. “MB yöntemine göre m ve σ_0 için $1-\alpha$ düzeyinde güven aralıkları ile t_p alt sınırı bul” yordamı akış şeması

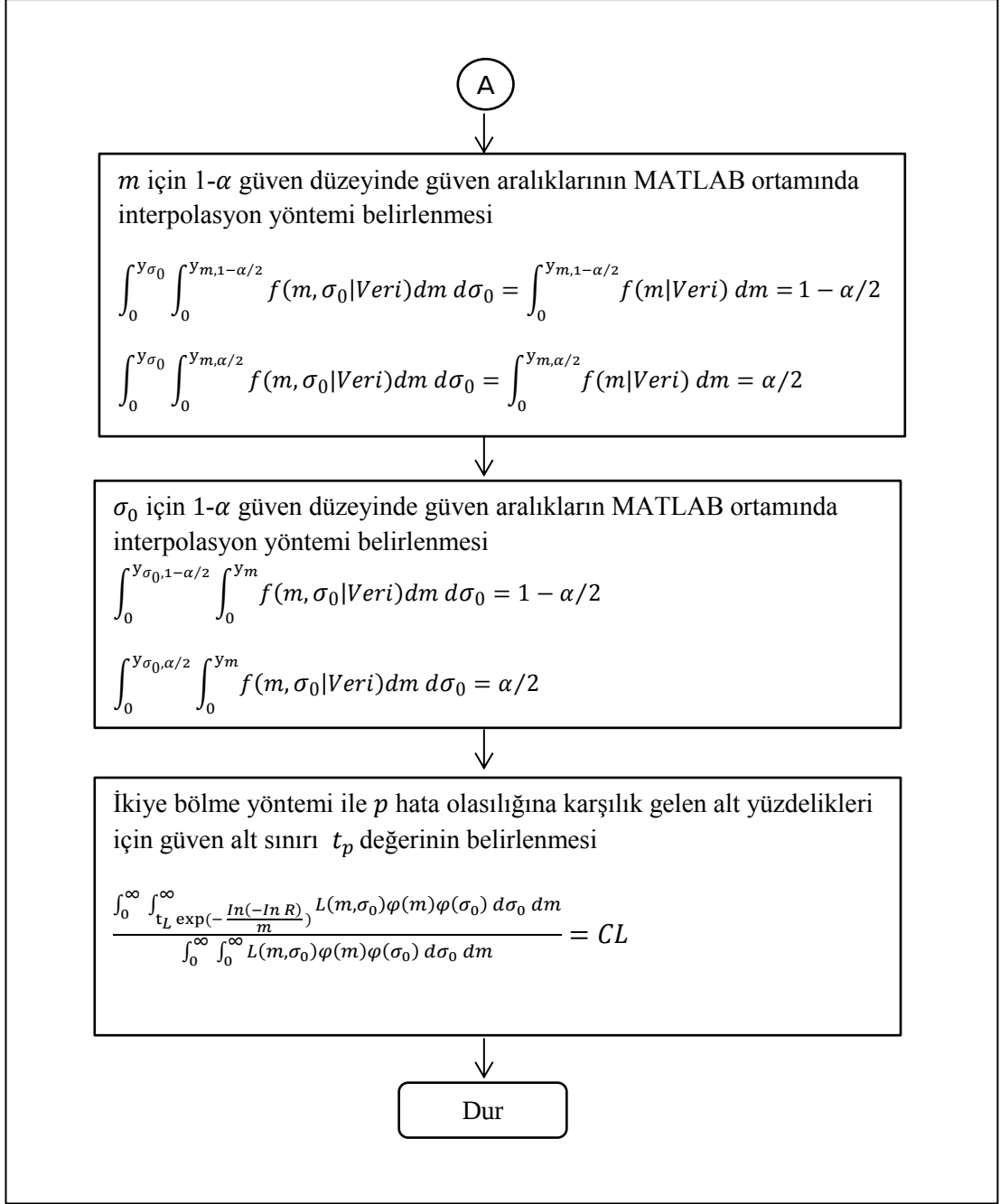
3.4.2. BW Yöntemi ile Weibull Parametreleri ve Yüzdeliklerinin Güven Aralığı Tahmin Simülasyonu

Şekil 3.5’te “BW yöntemine göre m ve σ_0 için $1-\alpha$ düzeyinde güvenilir aralıkları ile l_p alt sınırı bul” yordamı ile gösterilen, BW yöntemi ile Weibull parametreleri ve yüzdeliklerinin güvenilir aralık tahminleri için geliştirilen simülasyon algoritması Şekil 3.8’de gösterilmektedir. Algoritmanın nasıl çalıştığına dair gerekli açıklamalar alt başlıklarda sunulmuştur. Bununla birlikte genel olarak algoritma akışını özetlersek;

- Adım 1: BW yöntemi çift katlı integral hesaplamaları için şekil ve ölçek parametreleri kapalı aralıklarının belirlenmesi
- Adım 2: Senaryoya göre şekil ve ölçek parametreleri için önsel olasılıklarının belirlenmesi
- Adım 3: BW yönteminde çift katlı integral hesaplamaları için dikdörtgen yönteminin uygulanması ve normalleştirme sabitinin bulunması
- Adım 4: m ve σ_0 için marjinal sonsal olasılıklarının bulunması
- Adım 5: m ve σ_0 için $1-\alpha$ güven düzeyinde güvenilir aralıkların MATLAB ortamında interpolasyon yöntemi belirlenmesi
- Adım 6: İkiye bölme yöntemi ile p hata olasılığına karşılık gelen alt yüzdelikleri için güvenilir alt sınırı t_p değerinin belirlenmesi



Şekil 3.8. “BW yöntemine göre m ve σ_0 için $1-\alpha$ düzeyinde güvenilir aralıkları ile l_p alt sınırı bul” yordamı akış şeması



Şekil 3.8. (devam)

3.4.2.1. BW Yöntemi için Önsel Olasılıklarının Belirlenmesi

Konu 3.3.2'de anlatıldığı gibi BW yönteminin uygulanabilmesi için bir ön bilginin olması gerekmektedir. SIM1'de BW yönteminde şekil parametresine ait ön bilgisi için 2 farklı senaryo düşünülmüştür: Kötü tahmin ve iyi tahmin. Ölçek parametresi içinse

SIM1’de bilgi içermeyen Jeffreys önseli kullanılmaktadır.

Şekil parametresi kötü tahmini için ön bilgi, literatürdeki malzeme mekanik özellikleri üzerine yapılan çalışmalardan birtakım çıkarımlar yapılarak elde edilmiştir. Öncelikle malzeme mukavemeti gibi karakteristik özellikler için m şekil parametresinin 1’den büyük olduğunu söyleyebiliriz. Çünkü hata oranı $\lambda(t)$, $m>1$ için artan fonksiyonudur ve bir malzemenin kopma mukavemeti için $\lambda(t)$, t ’nin yani uygulanan basıncın artan fonksiyonudur Askeland vd (2010), şekil parametresini malzemenin mukavemet değişkenliğinin bir ölçütü olarak yorumlayıp metal ve alaşımlar için bu değerin yaklaşık 100’e kadar çıkabileceğini ifade etmiştir. Bourhis (2007), ise cam kap ve düz camlar için 3-7 arasında bir değer, cam elyafı için 10-30 arasında bir değer, seramikler ve metaller için ise sırasıyla yaklaşık 10 ve 40 değerini vermiştir. Bu bilgiler doğrultusunda şu şekilde bir kötü tahmin yapabiliriz: Şekil parametresi 1-100 aralığında düzgün bir dağılım seyretmektedir. Bu çok gerçekçi bir tahmindir; kötü denmesinin nedeni çok geniş tutulmasıdır.

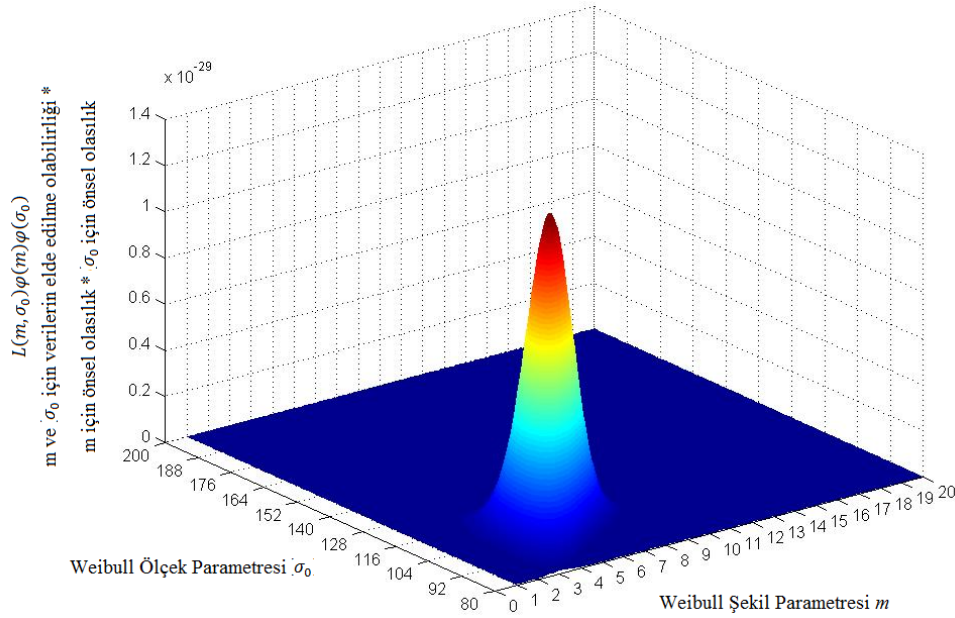
Orta tahmin için ise şekil parametresine ilişkin şöyle bir varsayım yapılmıştır: Tasarımcı, şekil parametresinin SIM1’de üzerine atandığı değerin $\pm\%50$ aralıkları arasında düzgün bir dağılım seyrettiğini bilmektedir.

3.4.2.2. BW Yöntemi için Normalleştirme Sabitinin Bulunması

SIM1 simülasyonunda Bayesyen Weibull modeli ile yapılacak tahmin işlemleri için öncelikle sonsal olasılık Eşitlik 3.46’nın payda kısmındaki normalleştirme sabitini veren integral hesabının yapılması gerekmektedir. Bu tezde ele alınan BW yöntemi, şekil ve ölçek olmak üzere 2 parametre üzerine kurulu olduğu için sonsalın elde edilmesinde çift katlı integrallerin hesaplanması gerekir. Bu aşamada integrasyon boyutunun yüksek olmaması sayesinde integralin çözümü için sayısal integrasyon yaklaşımları kolaylıkla uygulanabilir. Tezde çift katlı integral çözümü için dikdörtgen yöntemi tercih edilmiştir. İntegrasyonda Weibull şekil ve ölçek parametreleri için verilen aralıklar arasındaki alan çok küçük dikdörtgenlere bölünerek, bunların hacimleri hesap edilip toplanır. Dikdörtgen sayısı arttıkça toplam eğri altındaki hacim, gerçek hacim değerine yaklaşır

ve integralin tam değeri bulunmuş olur. Bu amaçla tezde $200 \times 200 = 40000$ tane dikdörtgen oluşturulmuştur.

Şekil 3.9’da değerleri 62, 69, 73, 76, 87, 89, 90, 93, 100, 107, 125, 100, 125, 126 olan 13 tane örnek veri için Weibull şekil parametresinin $(0,20]$ ve ölçek parametresinin $[80,200]$ kapalı aralıklarında $L(m, \sigma_0) \varphi(m) \varphi(\sigma_0)$ eşitliğinin grafiksel gösterimi verilmiştir. Şekil 3.9’da Weibull şekil (m) ve ölçek (σ_0) parametresi için verilen her bir aralık 10 eşit parçaya bölünür ve her bir alan için eğri parçası altında kalan hacim dikdörtgenler yöntemi ile hesaplanarak toplanır. Böylece normalleştirme sabitini veren $\int_0^\infty \int_0^\infty L(m, \sigma_0) \varphi(m) \varphi(\sigma_0) d\sigma_0 dm$ eşitliği çözümlenir.



Şekil 3.9. BW yönteminde normalleştirme sabitinin integrasyon hesabı

3.4.2.3. BW Yöntemi için İntegrasyon İşlemlerinde Kapalı Aralıkların Belirlenmesi

İntegrasyon çözümünde dikdörtgen yönteminin uygulanabilmesi için şekil ve ölçek parametrelerine ait kapalı aralıklarının belirlenmesi gerekmektedir. Weibull şekil ve

ölçek parametreleri her zaman sıfırdan büyük olduğu için kapalı aralıklarının alt değeri için pozitif yönde sıfıra çok yakın bir değer belirlenmiştir. Şekil parametresi için bu alt sınır değeri 0.05 olarak sabitlenmiştir. Ölçek parametresi için alt değer ise C++ programlama dilinin 10^{308} üzeri hesaplamalara izin vermemesinden dolayı geliştirilen basit bir alt yordamla belirlenmektedir. Söz konusu yordam ile ölçek parametresi için Eşitlik 3.46'daki $L(m, \sigma_0)$ benzerlik fonksiyon değerini 10^{308} 'den büyük yapmayan bir alt değer aranır. Ayrıca bu kapalı aralıkların üst sınırları öyle seçilmelidir ki bu aralık dışında yer alan değerlerin sonsal dağılım üzerinde etkisi yok sayılacak kadar az olmalıdır. Bu aşamada ise MB yöntemi ile elde edilen Weibull parametreleri güven aralıklarının üst sınırları referans alınmaktadır. Sonra bunların da yetersiz olması olasılığına karşı bu veriler iki ile çarpılmaktadır. Weibull şekil ve ölçek parametreleri için kapalı aralıklar belirlendikten sonra bu aralıklar 199 dilime bölünerek çift katlı integrallerin dikdörtgen yöntemi ile çözümü için gerekli noktalar oluşturulmaktadır.

Özet olarak BW yöntem formülünün paydasında bulunan çift katlı integral, şekil ve ölçek parametreleri için verilen kapalı aralıktaki nokta değerleri ile dikdörtgen yöntemine göre nümerik olarak çözümlenir. Böylece BW normalleştirme sabiti bulunur. Bu sabit bilindiği gibi sonsal dağılım olasılıkları hesaplanabilmesi için gereklidir.

3.4.2.4. BW Yöntemi ile Şekil ve Ölçek Parametreleri Güvenilir Aralıklarının Tahmini

BW yöntemi ile şekil ve ölçek parametrelerinin güvenilir aralıklarını oluşturulabilmek için sırasıyla Eşitlik 3.47 ve 3.48 ile kapalı aralıklarındaki her bir nokta değerleri için birikimli olarak marjinal sonsal dağılım olasılıkları hesaplanmaktadır. Şekil parametresinin birikimli marjinal sonsalları bulunduktan sonra Eşitlik 3.53 ile C++ programlamanın interpolasyon Matlab kodları kullanılarak %95 güven düzeyinde güvenilir alt ve üst sınırları belirlenir. Aynı şekilde ölçek parametresinin %95 güven düzeyindeki güvenilir alt ve üst sınırları Eşitlik 3.53'ün ölçek parametresine göre uyarlanmış hali ile çözümlenir.

3.4.2.5. BW Yöntemi ile Weibull Alt Yüzdelik Güvenilir Alt Sınırın Belirlenmesi

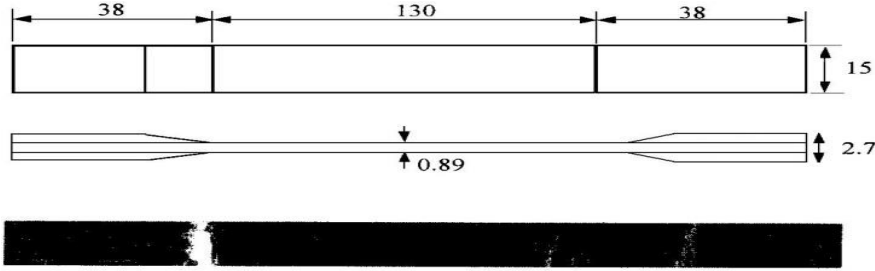
BW yönteminde p hata olasılığına karşılık gelen t_p değeri Eşitlik 3.76'nın ikiye bölme yöntemi ile nümerik olarak çözümlenmesi ile bulunur. İkiye bölme yöntemi hakkında detaylı bilgi için Wikipedia internet sitesindeki konu anlatımı incelenebilir (http://en.wikipedia.org/wiki/Bisection_method).

4. UYGULAMA VE SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Bu bölümde, üçüncü bölümde teorik olarak anlatılan Weibull parametrelerinin ve alt yüzdeliklerinin MB ve BW yöntemleriyle tahmin edilmesi ve güven aralıklarının oluşturulması gerçek veriler üzerinde izah edilecek ve sonuçları yorumlanacaktır. Bununla birlikte yüksek tekrarda yapılacak simülasyon çalışması ile hangi durumda hangi tekniğin daha iyi sonuç vereceği belirlenecektir.

4.1. Uygulama Örneği Hakkında

Yapılan çalışmada daha önceden gerçekleştirilmiş bir kopma mukavemeti deneyinin verileri değerlendirilmiştir (Birgören ve Dirikolu, 2004). Bu deneyde 2.95 gr/cm^2 ağırlığında 0.89 mm kalınlığında $(0^\circ)_3$ konfigürasyonunda kompozit bir malzemeye ait 19 özdeş numune hazırlanmıştır. Numunelerin boyutları Şekil 4.1’de gösterilmektedir (Danacı, 2005).



Şekil 4.1. Kompozit malzemeye ait kırılmış bir numune ve milimetrik ölçüleri

Gerilim ölçme yöntemi ile numunelere ait elde edilen elastik mekanik özellikleri Çizelge 4.1’de verilmiştir (Danacı, 2005).

Çizelge 4.1. Kompozit tabakaların mekanik özellikleri

E_L [GPa]	E_T [GPa]	GLT [GPa]	V_{LT}	Karbon [%]
40.74	39.6	4.62	0.25	28

Çizelgedeki E_L ve E_T sırasıyla fiber yönü doğrultusunda (L) ve bu doğrultuya dik yöndeki (T) elastik modülleridir. G_{LT} ve V_{LT} sırasıyla kayma modülünün ve tabakaların $L - T$ doğrultusundaki poisson oranıdır (Danacı, 2005).

Kompozit bir malzemeye ait 19 özdeş numune Instron 8516+ universal test makinesinde gerilme deneyine tabi tutulmuştur. Deney, 1.33 mm/dakika ilerleme hızı ile normal oda sıcaklığında gerçekleştirilmiş ve elde edilen kopma mukavemeti değerleri Çizelge 4.2’de gösterilmiştir. Malzemelerin hepsinde kopma mukavemeti ölçüldüğü için yani kopmanın gerçekleştiği basınç değerine kadar ölçülmeye devam edildiği için veriler tamamlanmış verilerdir (Danacı, 2005).

Çizelge 4.2. Kopma mukavemeti değerleri

Test No	1	2	3	4	5	6	7
Kopma Mukavemeti [MPa]	532.7	502.5	442	473	519	502.7	477
Test No	8	9	10	11	12	13	14
Kopma Mukavemeti [MPa]	510	522	522	552	439	513.6	497.5
Test No	15	16	17	18	19		
Kopma Mukavemeti [MPa]	521.6	450.9	476.5	507.3	463.5		

4.2. Uygulama için Weibull Parametreleri Güven Aralıkları ve Alt Yüzdeliklerinin Güven Alt Sınırları Tahmini

19 özdeş numune için Weibull şekil ve ölçek parametrelerinin güven aralıkları tahminleri C++ ortamında geliştirilen algoritma aracılığıyla MB ve BW yöntemlerine göre yapılmış ve tahmin sonuçları Çizelge 4.3'te özetlenmiştir.

Çizelge 4.3. 19 adet numune için MB ve BW yöntemlerine göre programın tahmin çıktıları

Tahmin Yöntemi	$1 - \alpha$	m için G.A	σ_0 için G.A	p	t_p Güven Alt Sınırı	Malzeme Özelliği
MAKSİMUM BENZERLİK YÖNTEMİ (MB)	0.95	11,9677	496,16	0.10	423,46	B Temel
		-	-	0.01	353,248	A Temel
		25,1226	524,612			
BAYESYEN WEIBULL YÖNTEMİ (BW)	0.95	12,4519	493,946	0.10	424,855	B Temel
		-	-	0.01	357,671	A Temel
		25,5502	521,683			

Çizelge 4.3'te gösterildiği gibi 19 adet nümune için BW modeli ve MB tahmin sonuçları arasında küçük de olsa bir fark bulunmaktadır. BW modeli MB'ye göre ölçek parametresi güven aralıklarında 0.715 birim MPa kadar daha dar ve $\hat{t}_p$ güven alt sınırı l_p 'de ise $p=0.01$ için 4.423 birim MPa ve $p=0.1$ için 1.395 birim MPa kadar üstte bir sonuç vermektedir. Burada $\hat{t}_p$ güven alt sınırının daha yukarıda bir sonuç vermesi istenir. Çünkü gerçek t_p 'ye daha yakın bir sonuç aranır.

Örnekleme hacmini 19'dan daha yukarılara çıkardığımızda (örneğin 50, 80, 100 vb) BW modeli ile MB tahmin sonuçları arasındaki farkın daha da azaldığını ve belli bir örnekleme hacminde eşitlendiğini ve hatta MB'nin biraz daha iyi sonuç verdiğini

görürüz. Tez çalışmasında küçük örneklem hacimleri ile ilgilenildiği için büyük örneklem hacimleri üzerinde bir inceleme yapılmayacaktır.

Örneklem hacmini 9'a indirdiğimizde ve bu doğrultuda 19 özdeş numune için yapılan hesaplamaları sadece ilk 9 numune için tekrarladığımızda elde edilen tahmin sonuçları Çizelge 4.4'de özetlenmiştir.

Çizelge 4.4. 9 adet numune için MB ve BW yöntemlerine göre programın tahmin çıktıları

Tahmin Yöntemi	$1 - \alpha$	m için G.A	σ_0 için G.A	p	t_p Güven Alt Sınırı	Malzeme Özelliği
MAKSİMUM BENZERLİK YÖNTEMİ (MB)	0.95	7,77154	467,843	0.10	374,474	B Temel
		-	-	0.01	287,85	A Temel
		24,6868	519,618			
BAYESYEN WEIBULL YÖNTEMİ (BW)	0.95	8,82239	467,632	0.10	384,604	B Temel
		-	-	0.01	305,171	A Temel
		25,9726	515,479			

Çizelge 4.4'de gösterildiği gibi ilk 9 veri için BW modeli ve MB tahmin sonuçları arasındaki fark belirginleşmeye başlamış ve örneklem hacminin küçülmesi ile BW modeli daha iyi sonuçlar çıkarmıştır. Şöyle ki; ölçek parametresi güven aralıklarında 19 veride elde edilen 0.715 birim MPa aralık farkı burada 3.928 birim MPa'a çıkmıştır. t_p güven alt sınırında ise $p=0.01$ için öncesinde 4.423 birim MPa olan fark 17.321 birim MPa'a ve $p=0.1$ için öncesinde 1.395 birim MPa olan fark 10.13 birim MPa'a çıkmıştır. Diğer bir deyişle BW modeli ölçek parametresi güven aralıklarında MB'ye göre 3.928 birim MPa daha dar ve t_p güven alt sınırında $p=0.01$ için 17.321 birim MPa ve $p=0.1$ için 10.13 birim MPa kadar üstte bir sonuç vermiştir.

Şimdi örneklem hacmini iyice düşürelim ve $n=3$ olarak aldığımızda sonuçların nasıl değiştiğine bakalım. 19 verinin ilk 3 değeri alınarak hesaplamalar tekrarlandığında tahmin sonuçları Çizelge 4.5'teki gibi olmuştur.

Çizelge 4.5. 3 adet numune için MB ve BW yöntemlerine göre programın tahmin çıktıları

Tahmin Yöntemi	$1 - \alpha$	m için G.A	σ_0 için G.A	p	t_p Güven Alt Sınırı	Malzeme Özelliği
MAKSİMUM BENZERLİK YÖNTEMİ (MB)	0.95	2,56226	449,61	0.10	273,805	B Temel
		-	-	0.01	138,017	A Temel
		35,9651	601,46			
BAYESYEN WEIBULL YÖNTEMİ (BW)	0.95	4,83663	462,381	0.10	352,818	B Temel
		-	-	0.01	252,393	A Temel
		46,4733	567,926			

Çizelge 4.5'te gösterildiği gibi örneklem hacmini 3'e indirdiğimizde BW ve MB tahmin sonuçları arasındaki fark oldukça büyümüştür. BW modeli ölçek parametresi güven aralıklarında MB'ye göre 46.305 birim MPa daha dar ve t_p güven alt sınırında ise $p=0.01$ için 114.376 birim MPa ve $p=0.1$ için 79.013 birim MPa kadar üstte bir sonuç vermiştir.

4.3. Simülasyon Çalışması

Çalışmanın bu bölümünde MB ve BW yöntemleri ile elde edilen Weibull parametreleri güven aralıkları ile alt yüzdelik güven alt sınırı tahmin sonuçlarını farklı açılardan karşılaştırabilmek için bir simülasyon çalışması yapılmıştır. Simülasyonda kullanılan girdi ve varsayımlar şu şekilde belirlenmiştir;

- 3 ile 20 arasında değişen örneklem hacimleri incelenmiştir. Örneklem hacminin 3 ile başlatılmasının nedeni istatistiksel açıdan $n=2$ 'nin çok yetersiz olması ve ASTM (American Society for Testing and Materials) standartlarında birçok test için en az 3 nümune isteniyor olmasıdır.
- Her bir örneklem hacmi için $\sigma_0=1$ sabit bir değer olmak üzere 1-100 arasında değeri değişen farklı şekil parametreleri ile Weibull değişkenleri üretilmiştir.
- Bayesyen hesaplamalar için şekil parametresinin önsel dağılımına yönelik 2 farklı senaryo düşünülmüştür: İyi ve kötü senaryo. İyi senaryo ile Weibull şekil parametresinin gerçek değerinin $\pm\%50$ aralığında düzgün dağılım takip ettiği; kötü senaryo ile de 1-100 arasında düzgün dağılım takip ettiği varsayılmıştır.

Verilen bu girdilerle, tez kapsamında geliştirilen algoritma örneklem hatasını ihmal edilebilir düzeye indirecek şekilde yüksek tekrarda ($R=10000$) çalıştırılmıştır. Tahmin sonuçları bir txt dosyasında tutularak daha sonra analiz işlemleri için SQL'e aktarılmıştır. SQL üzerinden elde edilen bilgiler, her bir şekil parametre değeri için açılmış alt başlıklar altında analiz edilip yorumlanmıştır.

4.3.1. $m=2$ için Weibull Parametreleri Güven Aralıkları ve Alt Yüzdeliklerinin Güven Alt Sınırları Tahmini

Weibull şekil parametresinin 2 değeri için farklı örneklem hacimleri üzerinden her iki yöntemle elde edilen Weibull şekil ve ölçek parametrelerinin güven aralıkları sırasıyla Çizelge 4.6 ve Çizelge 4.7'de verilmiştir. Burada ilgili parametrelerin tahmini değerleri için simülasyonda her bir n ve m için hesaplanan 10000 adet tahmin sonuçlarının medyan değeri kullanılmıştır. Medyan, verideki uç değerlerden etkilenmediği için verilerin merkezi eğiliminin belirlenmesinde ortalamaya göre daha doğru bilgi vermektedir.

Çizelge 4.6. $m=2$ için Weibull şekil parametresinin $1-\alpha=0.95$ güven düzeyindeki güven aralıkları

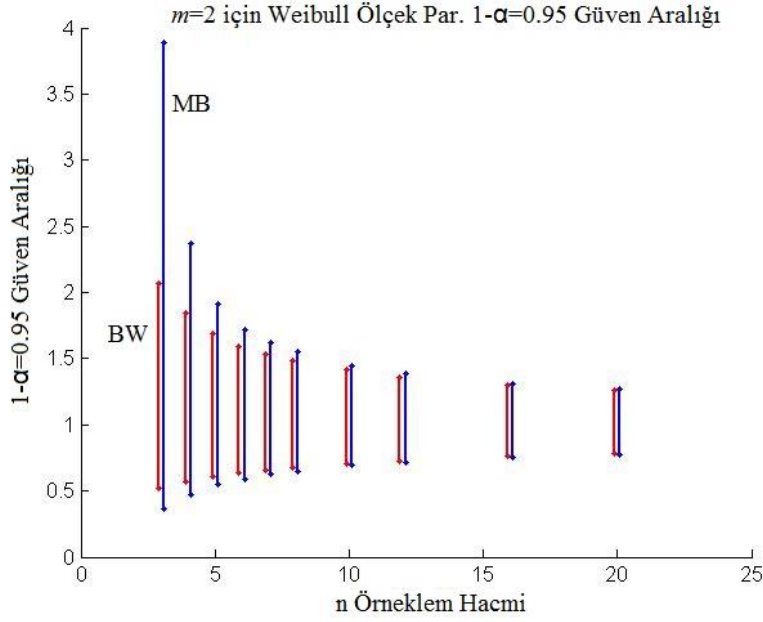
$m=2$		Kötü Senaryo		İyi Senaryo	
$1 - \alpha$	n	BW m için G.A.	MB m için G.A.	BW m için G.A.	MB m için G.A.
0,95	3	[0,777 6,388]	[0,371 5,371]	[0,778 6,388]	[0,371 5,371]
	4	[0,874 5,045]	[0,573 4,425]	[0,874 5,045]	[0,573 4,425]
	5	[0,962 4,469]	[0,728 4,046]	[0,962 4,469]	[0,728 4,046]
	6	[1,025 4,065]	[0,828 3,754]	[1,025 4,065]	[0,828 3,754]
	7	[1,079 3,812]	[0,914 3,567]	[1,079 3,812]	[0,914 3,567]
	8	[1,124 3,615]	[0,985 3,427]	[1,124 3,615]	[0,985 3,427]
	10	[1,197 3,362]	[1,082 3,21]	[1,197 3,362]	[1,082 3,21]
	12	[1,261 3,209]	[1,172 3,088]	[1,261 3,209]	[1,172 3,088]
	16	[1,336 2,972]	[1,274 2,893]	[1,336 2,972]	[1,274 2,893]
	20	[1,4 2,843]	[1,352 2,786]	[1,4 2,843]	[1,352 2,786]

Çizelge 4.6’da gösterildiği gibi MB yöntemi ile elde edilen şekil parametresinin güven aralıkları BW’ye göre biraz daha dardır; fakat burada dikkat edilmesi gereken güven alt sınır değerinin BW yönteminde daha yüksek çıkması ve gerçek $m=2$ değerine daha yakın olmasıdır. Buna bağlı olarak BW yöntemi Çizelge 4.7’deki gibi ölçek parametresi güven aralıklarında MB’ye göre daha dar aralıklar verecektir.

Çizelge 4.7. $m=2$ için Weibull ölçek parametresinin $1 - \alpha=0.95$ güven düzeyindeki güven aralıkları

$m=2$		Kötü Senaryo		İyi Senaryo	
$1 - \alpha$	n	BW σ_0 için G.A.	MB σ_0 için G.A.	BW σ_0 için G.A.	MB σ_0 için G.A.
0,95	3	[0,518 2,073]	[0,368 3,888]	[0,518 2,073]	[0,368 3,888]
	4	[0,569 1,844]	[0,475 2,369]	[0,569 1,844]	[0,475 2,369]
	5	[0,613 1,685]	[0,552 1,909]	[0,613 1,685]	[0,552 1,909]
	6	[0,633 1,595]	[0,59 1,719]	[0,633 1,595]	[0,59 1,719]
	7	[0,658 1,535]	[0,623 1,62]	[0,658 1,535]	[0,623 1,62]
	8	[0,678 1,487]	[0,651 1,549]	[0,678 1,487]	[0,651 1,549]
	10	[0,709 1,412]	[0,691 1,446]	[0,709 1,412]	[0,691 1,446]
	12	[0,728 1,361]	[0,714 1,384]	[0,728 1,361]	[0,714 1,384]
	16	[0,761 1,301]	[0,753 1,311]	[0,761 1,301]	[0,753 1,311]
	20	[0,782 1,259]	[0,778 1,265]	[0,782 1,259]	[0,778 1,265]

Çizelge 4.7’deki sayısal verileri Şekil 4.2 üzerine aktardığımızda; örneklem hacmi küçüldükçe BW’nin ölçek parametresi güven aralıklarında MB’ye nazaran daha dar aralık verdiğini kolaylıkla görebiliriz. Şekil 4.2’de yan yana olan çubuklardan soldaki BW, sağdaki ise MB yöntemi ile elde edilen güven aralıklarını göstermektedir.

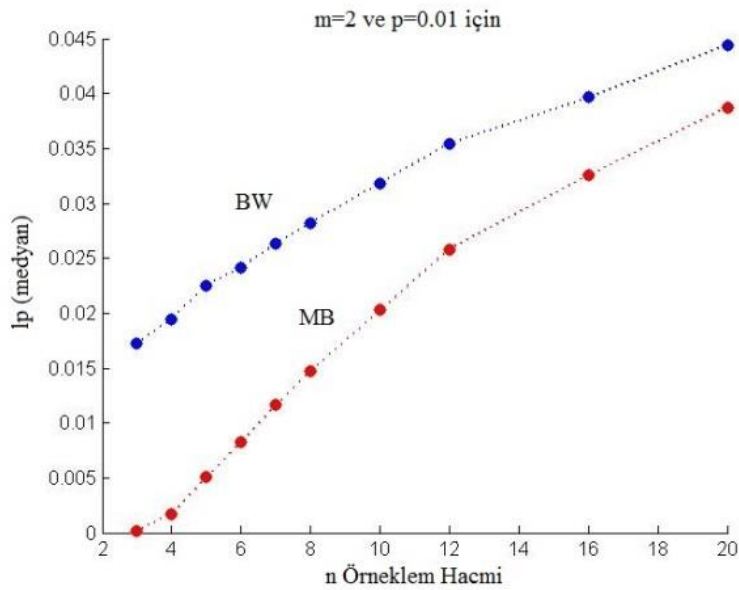


Şekil 4.2. $m=2$ ve farklı n ’ler için Weibull ölçek parametresi güven aralıkları

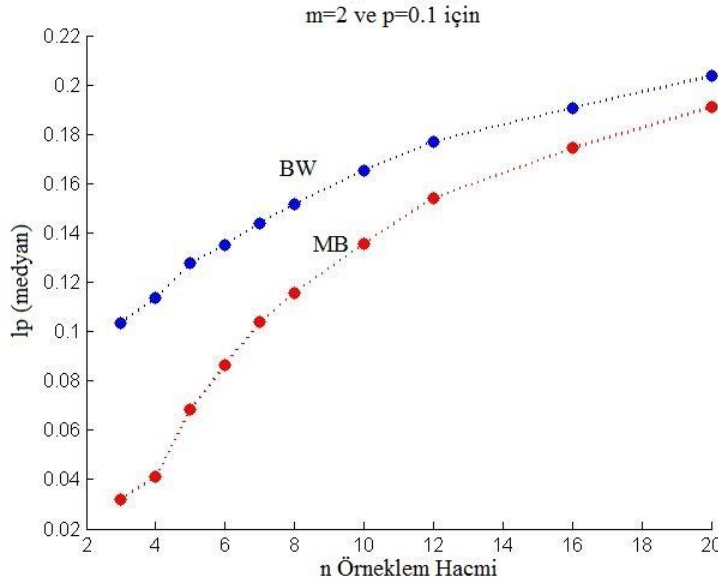
Çizelge 4.8’de $m=2$ için $p=0.01$ ve $p=0.1$ alt yüzdeliklerinin güven alt sınır değerleri verilmiştir. Burada da l_p için tahmini değer olarak medyan alınmıştır. Çizelge 4.8’de dikkat edilmesi gereken l_p değerinin tahmininde örneklem hacmi küçüldükçe BW yönteminin daha iyi sonuç veriyor olmasıdır. Örneklem hacmi büyüdükçe tahmini l_p ’ler arasında fark azalmakta fakat yine de BW yöntemi MB yöntemine göre daha yukarıda bir l_p değeri bulmaktadır. Bu durum $p=0.01$ ve $p=0.1$ için sırasıyla Şekil 4.3 ve Şekil 4.4’de görsel olarak ifade edilmiştir. Şekil 4.3 ve Şekil 4.4’de için BW ile tahmin edilen l_p noktaları birleştirilerek BW eğrisi, MB ile tahmin edilen l_p noktaları birleştirilerek de MB eğrisi elde edilmiştir.

Çizelge 4.8. $m=2$ için $p=0.01$ ve $p=0.1$ Weibull alt yüzdeliklerinin güven alt sınır değerleri

$m=2$			Kötü Senaryo		İyi Senaryo	
$1 - \alpha$	p	n	BW $\text{med}(l_p)$	MB $\text{med}(l_p)$	BW $\text{med}(l_p)$	MB $\text{med}(l_p)$
0,95	0,01	3	0,01729	0,00017	0,01741	0,00017
		4	0,01947	0,00173	0,01947	0,00173
		5	0,02255	0,00509	0,02255	0,00509
		6	0,02416	0,00832	0,02416	0,00832
		7	0,02632	0,01162	0,02632	0,01162
		8	0,02824	0,01478	0,02824	0,01478
		10	0,03185	0,02026	0,03185	0,02026
		12	0,03543	0,02579	0,03543	0,02579
		16	0,03968	0,03257	0,03968	0,03257
		20	0,04442	0,03874	0,04442	0,03874
	0,1	3	0,10347	0,03192	0,10348	0,03192
		4	0,11356	0,04103	0,11356	0,04103
		5	0,12758	0,06865	0,12758	0,06865
		6	0,13522	0,08622	0,13522	0,08622
		7	0,14398	0,10378	0,14398	0,10378
		8	0,15178	0,11573	0,15178	0,11573
		10	0,16537	0,13574	0,16537	0,13574
		12	0,17698	0,15418	0,17698	0,15418
		16	0,19068	0,17445	0,19068	0,17445
		20	0,20364	0,19093	0,20364	0,19093



Şekil 4.3. $m=2$ için Weibull alt yüzdelik ($p=0.01$) alt güven sınırı



Şekil 4.4. $m=2$ için Weibull alt yüzdelik ($p=0.1$) alt güven sınırı

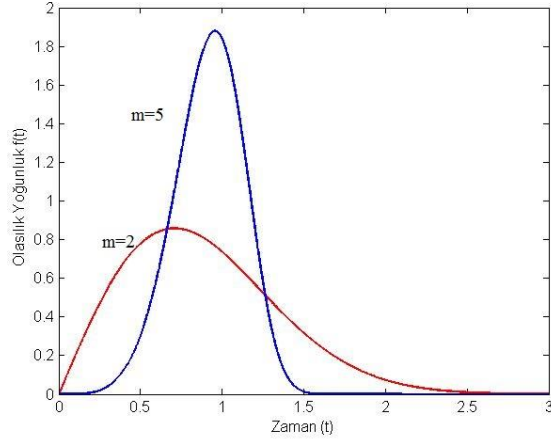
Çizelge 4.8’i başka bir şekilde yorumlamak gerekirse; $p=0.1$ için BW yöntemi ile 3 örneklem hacmi üzerinden bulunan $l_p = 0.10347$ değeri, MB yöntemi ile ancak örneklem hacmi 7 alınarak yakalanabilmiştir. Burada BW yöntemi kullanılarak 4 adet nümune kazancı oluşmuştur. Bu %57 maliyet tasarrufu anlamına gelir. Özellikle uzun süren ve yüksek maliyet gerektiren deneylerde bu çok ciddi bir kazanımdır.

Çizelge 4.6, 4.7, 4.8 ve gelecek diğer çizelgelerde gösterildiği gibi iyi ve kötü senaryolar için elde edilen tahmin sonuçlarında bir farklılık bulunmamaktadır. Bunun nedeni Weibull parametreleri için kullanılan bilgi içermeyen önsel dağılımların sonsal dağılım üzerinde bir etkisinin olmamasıdır. Bu çalışmada sonsal dağılıma etki eden etmenler ise örneklemde kullanılan veri değerleri ve hacmidir.

4.3.2. $m=5$ için Weibull Parametreleri Güven Aralıkları ve Alt Yüzdeliklerinin Güven Alt Sınırları Tahmini

Weibull şekil parametresinin 5 değeri için örneklem dağılımı Şekil 4.7’de gösterildiği gibi normale benzeyecektir ve veriler şekil parametresinin 2 değerini

aldığı durumdaki gibi geniş bir yayılım göstermeyecektir. Bilindiği gibi Weibull dağılımı $m=2.5$ değerinde lognormal dağılıma; 3.5 ve üzeri değerlerinde normale dağılıma benzemekte ve m 'nin artan değerlerinde daha çok çan şeklini almaktadır. (Liptak, 2002)



Şekil 4.5. $m=2$ ve $m=5$ için olasılık yoğunluk fonksiyonu

Çizelge 4.9. $m=5$ için Weibull şekil parametresinin $1 - \alpha=0.95$ güven düzeyindeki güven aralıkları

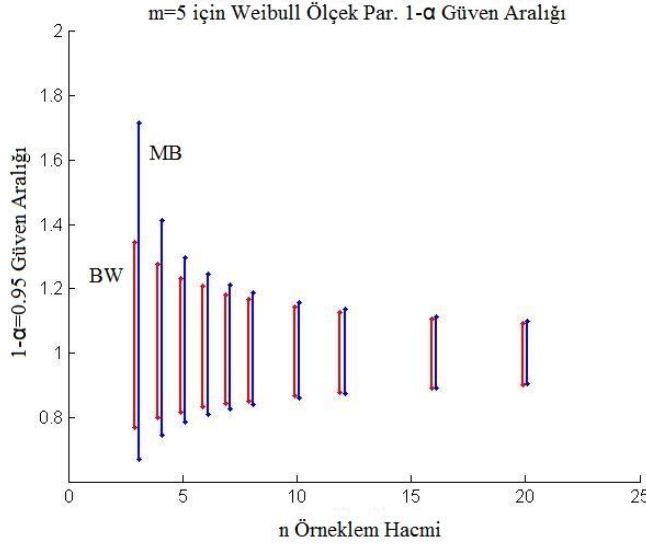
$m=5$		Kötü Senaryo		İyi Senaryo	
$1 - \alpha$	n	BW m için G.A.	MB m için G.A.	BW m için G.A.	MB m için G.A.
0,95	3	[1,908 16,029]	[0,927 13,432]	[1,912 16,029]	[0,927 13,432]
	4	[2,146 12,601]	[1,428 11,024]	[2,15 12,601]	[1,428 11,024]
	5	[2,383 11,124]	[1,811 10,062]	[2,385 11,124]	[1,811 10,062]
	6	[2,542 10,112]	[2,06 9,34]	[2,542 10,112]	[2,06 9,34]
	7	[2,691 9,477]	[2,279 8,897]	[2,691 9,477]	[2,279 8,897]
	8	[2,788 8,996]	[2,444 8,506]	[2,788 8,996]	[2,444 8,506]
	10	[2,979 8,389]	[2,698 8,004]	[2,979 8,389]	[2,698 8,004]
	12	[3,148 7,99]	[2,923 7,699]	[3,148 7,99]	[2,923 7,699]
	16	[3,333 7,425]	[3,185 7,232]	[3,333 7,425]	[3,185 7,232]
	20	[3,492 7,096]	[3,377 6,957]	[3,492 7,096]	[3,377 6,957]

Çizelge 4.6’da olduğu gibi Çizelge 4.9 için de şekil parametresinin güven alt sınır değerleri BW yönteminde gerçek m değerine daha yakın çıkmıştır. Buna bağlı olarak da Çizelge 4.10’da ölçek parametresi güven aralıklarında BW yöntemi daha dar aralıklar vermiştir.

Çizelge 4.10. $m=5$ için Weibull ölçek parametresinin $1 - \alpha=0.95$ güven düzeyindeki güven aralıkları

$m=5$		Kötü Senaryo		İyi Senaryo	
$1 - \alpha$	n	BW σ_0 için G.A.	MB σ_0 için G.A.	BW σ_0 için G.A.	MB σ_0 için G.A.
0,95	3	[0,77 1,343]	[0,67 1,717]	[0,771 1,343]	[0,67 1,717]
	4	[0,798 1,277]	[0,744 1,412]	[0,798 1,277]	[0,744 1,412]
	5	[0,817 1,234]	[0,786 1,298]	[0,817 1,234]	[0,786 1,298]
	6	[0,832 1,208]	[0,811 1,246]	[0,832 1,208]	[0,811 1,246]
	7	[0,843 1,182]	[0,826 1,211]	[0,843 1,182]	[0,826 1,211]
	8	[0,851 1,167]	[0,839 1,188]	[0,851 1,167]	[0,839 1,188]
	10	[0,868 1,144]	[0,861 1,158]	[0,868 1,144]	[0,861 1,158]
	12	[0,878 1,127]	[0,874 1,137]	[0,878 1,127]	[0,874 1,137]
	16	[0,892 1,107]	[0,891 1,114]	[0,892 1,107]	[0,891 1,114]
	20	[0,903 1,093]	[0,903 1,098]	[0,903 1,093]	[0,903 1,098]

Çizelge 4.10’da verilen ölçek parametresi güven aralıkları Şekil 4.6 üzerinde görsel olarak ifade edilmiştir. $m=5$ için $p=0.01$ ve $p=0.1$ alt yüzdeliklerinin güven alt sınır değerleri ise Çizelge 4.11’de verilmiştir. Çizelge 4.11 sonuçlarına göre BW yöntemi MB yöntemine nazaran daha iyi sonuç vermektedir. Çizelge 4.11’de dikkat edilecek bir diğer nokta da; örneğin $n=3$ örneklem hacminde $m=2$ için BW tahmini l_p değeri 0,01729 iken $m=5$ için bu değerin 0,18160’a çıkmasıdır. Daha öncede ifade edildiği gibi bunun nedeni $m=5$ için veri yayılımının $m=2$ ’ye göre daha az olmasıdır.

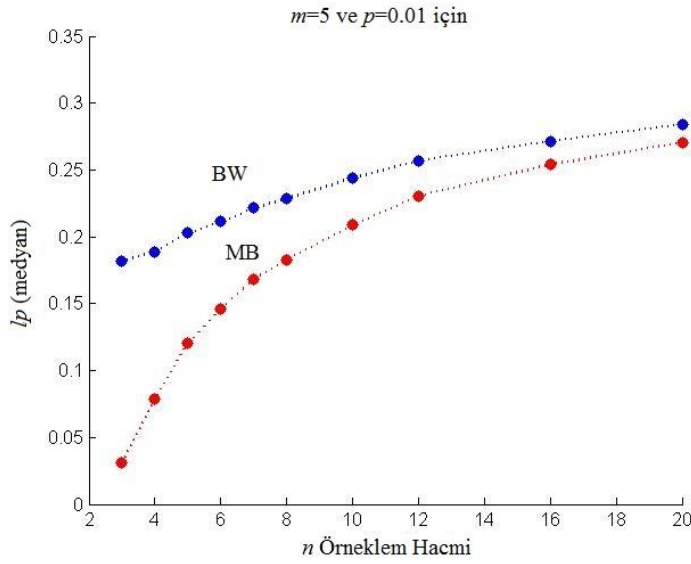


Şekil 4.6. $m=5$ ve farklı n 'ler için Weibull ölçek parametresi güven aralıkları

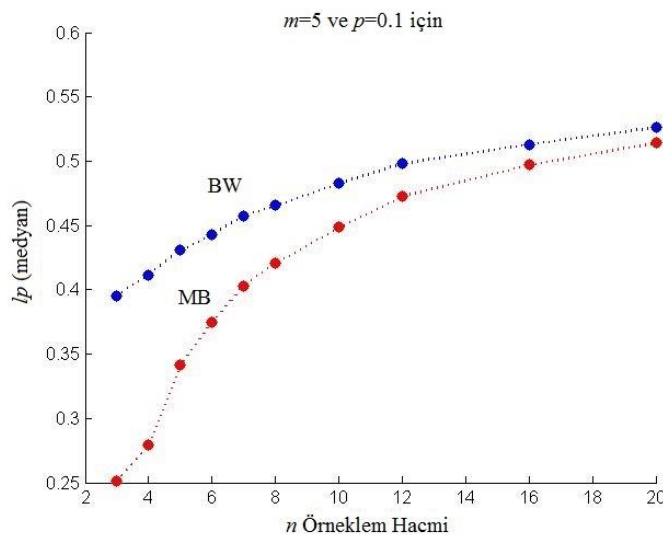
Çizelge 4.11. $m=5$ için $p=0.01$ ve $p=0.1$ Weibull alt yüzdeliklerinin güven alt sınır değerleri

$m=5$			Kötü Senaryo		İyi Senaryo	
α	p	n	BW $\text{med}(l_p)$	MB $\text{med}(l_p)$	BW $\text{med}(l_p)$	MB $\text{med}(l_p)$
0,95	0,01	3	0,18160	0,03140	0,18158	0,03140
		4	0,18891	0,07842	0,18889	0,07842
		5	0,20296	0,12016	0,20295	0,12016
		6	0,21147	0,14607	0,21147	0,14607
		7	0,22175	0,16799	0,22175	0,16799
		8	0,22853	0,18294	0,22853	0,18294
		10	0,24380	0,20895	0,24380	0,20895
		12	0,25713	0,23065	0,25713	0,23065
		16	0,27146	0,25384	0,27146	0,25384
		20	0,28421	0,27080	0,28421	0,27080
	0,1	3	0,39513	0,25141	0,39512	0,25141
		4	0,41151	0,27904	0,41149	0,27904
		5	0,43086	0,34124	0,43085	0,34124
		6	0,44270	0,37442	0,44270	0,37442
		7	0,45744	0,40295	0,45744	0,40295
		8	0,46571	0,42067	0,46571	0,42067
		10	0,48274	0,44861	0,48274	0,44861
		12	0,49794	0,47263	0,49794	0,47263
		16	0,51277	0,49697	0,51277	0,49697
		20	0,52601	0,51401	0,52601	0,51401

Çizelge 4.11'deki tahmini l_p 'lerin örneklem hacmine göre değişen değerleri $p=0.01$ ve $p=0.1$ için sırasıyla Şekil 4.7 ve Şekil 4.8 üzerinde gösterilmiştir. Burada da örneklem hacmi küçüldükçe tahmini l_p noktaları arasında mesafenin arttığı görülmektedir.



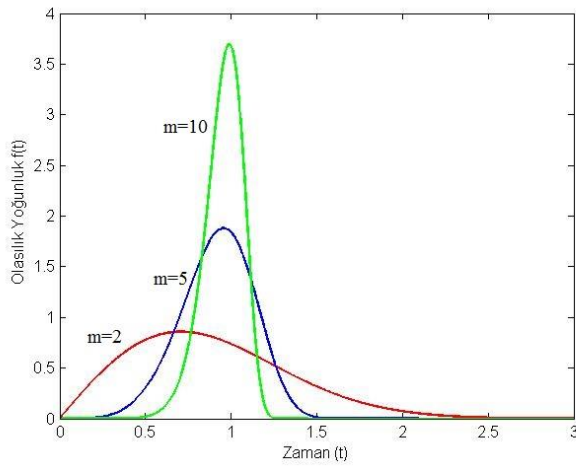
Şekil 4.7. $m=5$ için Weibull alt yüzdelik ($p=0.01$) alt güven sınırı



Şekil 4.8. $m=5$ için Weibull alt yüzdelik ($p=0.1$) alt güven sınırı

4.3.3. $m=10$ için Weibull Parametreleri Güven Aralıkları ve Alt Yüzdeliklerinin Güven Alt Sınırları Tahmini

Weibull şekil parametresinin 10 değeri için örneklemin dağılımı Şekil 4.9’da gösterildiği gibi normal dağılıma göre daha diktir ve $m=5$ ’e göre yayılımı ise daha azdır. Buna bağlı olarak $m=10$ ’da simülasyon için üretilen veriler $m=5$ ’e göre birbirine daha yakın olacaktır.



Şekil 4.9. $m=2, m=5$ ve $m=10$ için olasılık yoğunluk fonksiyonları

$m=10$ ile üretilen Weibull değişkenleri için şekil ve ölçek parametrelerinin güven aralıkları sırasıyla Çizelge 4.12 ve Çizelge 4.13’te verilmiştir.

Çizelge 4.12. $m=10$ için Weibull şekil parametresinin $1-\alpha=0.95$ güven düzeyindeki güven aralıkları

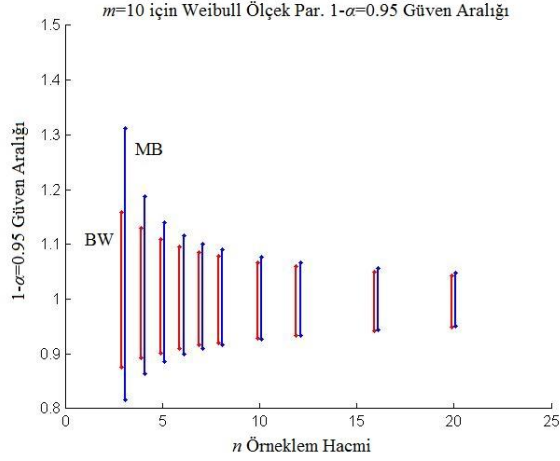
$m=10$		Kötü Senaryo		İyi Senaryo	
α	n	BW m için G.A.	MB m için G.A.	BW m için G.A.	MB m için G.A.
0,95	3	[3,784 31,899]	[1,844 26,726]	[3,786 31,9]	[1,844 26,726]
	4	[4,327 25,442]	[2,886 22,28]	[4,327 25,442]	[2,886 22,28]
	5	[4,753 22,247]	[3,622 20,121]	[4,753 22,247]	[3,622 20,121]
	6	[5,073 20,282]	[4,124 18,696]	[5,073 20,282]	[4,124 18,696]
	7	[5,37 19,009]	[4,558 17,795]	[5,37 19,009]	[4,558 17,795]
	8	[5,609 18,124]	[4,919 17,122]	[5,609 18,124]	[4,919 17,122]
	10	[5,96 16,697]	[5,391 15,993]	[5,96 16,697]	[5,391 15,993]
	12	[6,252 15,94]	[5,818 15,323]	[6,252 15,94]	[5,818 15,323]
	16	[6,659 14,794]	[6,35 14,415]	[6,659 14,794]	[6,35 14,415]
	20	[7,002 14,228]	[6,776 13,959]	[7,002 14,228]	[6,776 13,959]

Çizelge 4.13. $m=10$ için Weibull ölçek parametresinin $1-\alpha=0.95$ güven düzeyindeki güven aralıkları

$m=10$		Kötü Senaryo		İyi Senaryo	
α	n	BW σ_0 için G.A.	MB σ_0 için G.A.	BW σ_0 için G.A.	MB σ_0 için G.A.
0,95	3	[0,875 1,158]	[0,817 1,312]	[0,875 1,158]	[0,817 1,312]
	4	[0,893 1,129]	[0,864 1,188]	[0,893 1,129]	[0,864 1,188]
	5	[0,902 1,108]	[0,886 1,139]	[0,902 1,108]	[0,886 1,139]
	6	[0,909 1,095]	[0,9 1,116]	[0,909 1,095]	[0,9 1,116]
	7	[0,916 1,085]	[0,909 1,101]	[0,916 1,085]	[0,909 1,101]
	8	[0,921 1,078]	[0,917 1,09]	[0,921 1,078]	[0,917 1,09]
	10	[0,929 1,067]	[0,928 1,076]	[0,929 1,067]	[0,928 1,076]
	12	[0,934 1,059]	[0,934 1,067]	[0,934 1,059]	[0,934 1,067]
	16	[0,942 1,05]	[0,945 1,056]	[0,942 1,05]	[0,945 1,056]
	20	[0,948 1,043]	[0,951 1,048]	[0,948 1,043]	[0,951 1,048]

Şekil 4.10’da gösterildiği gibi küçük örneklem hacimlerinde BW yöntemi ölçek parametresi güven aralıklarında daha dar sonuçlar vermiştir. $m=10$ şekil parametre değerinde BW ve MB yöntemleri ile hesaplanan tahmini l değerleri ise Çizelge 4.14’de sunulmuş ve BW yöntemi ile daha iyi sonuçlar elde edilmiştir. Çizelge

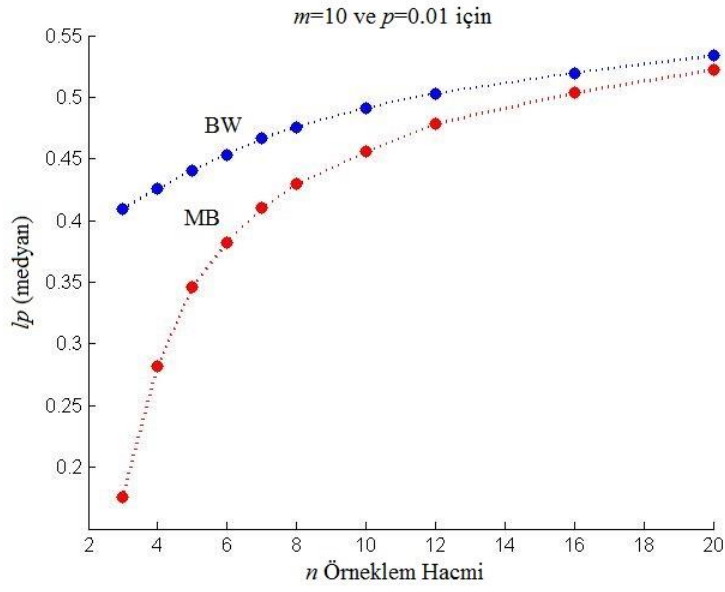
4.14'ün görsel olarak anlatımı $p=0.01$ ve $p=0.1$ için sırasıyla ise Şekil 4.11 ve Şekil 4.12'de verilmiştir.



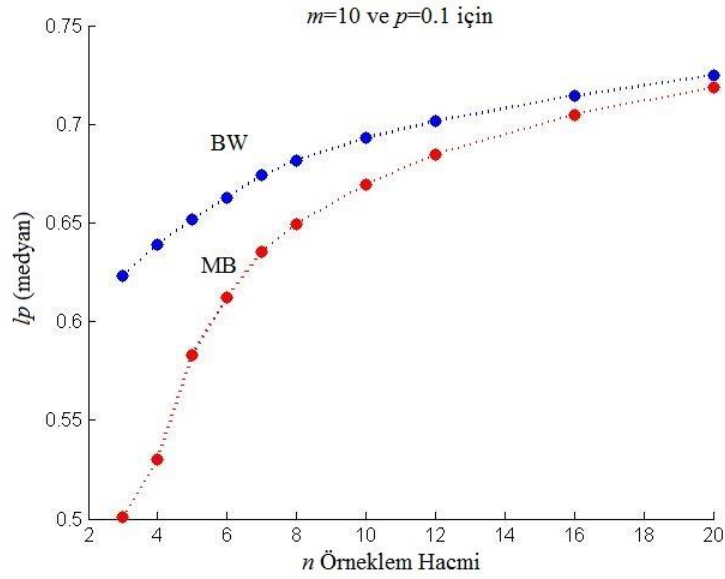
Şekil 4.10. $m=10$ ve farklı n 'ler için Weibull ölçek parametresi güven aralıkları

Çizelge 4.14. $m=10$ için $p=0.01$ ve $p=0.1$ Weibull alt yüzdeliklerinin güven alt sınır değerleri

			Kötü Senaryo		İyi Senaryo	
α	p	n	BW $\text{med}(l_p)$	MB $\text{med}(l_p)$	BW $\text{med}(l_p)$	MB $\text{med}(l_p)$
0,95	0,01	3	0,40930	0,17559	0,40929	0,17559
		4	0,42561	0,28217	0,42561	0,28217
		5	0,44055	0,34658	0,44055	0,34658
		6	0,45347	0,38234	0,45347	0,38234
		7	0,46670	0,40998	0,46670	0,40998
		8	0,47578	0,42943	0,47578	0,42943
		10	0,49118	0,45583	0,49118	0,45583
		12	0,50283	0,47819	0,50283	0,47819
		16	0,51944	0,50364	0,51944	0,50364
		20	0,53362	0,52208	0,53362	0,52208
	0,1	3	0,62340	0,50085	0,62339	0,50085
		4	0,63917	0,53026	0,63917	0,53026
		5	0,65167	0,58321	0,65167	0,58321
		6	0,66297	0,61200	0,66297	0,61200
		7	0,67408	0,63564	0,67408	0,63564
		8	0,68175	0,64937	0,68175	0,64937
		10	0,69291	0,66949	0,69291	0,66949
		12	0,70158	0,68491	0,70158	0,68491
		16	0,71441	0,70498	0,71441	0,70498
		20	0,72486	0,71869	0,72486	0,71869



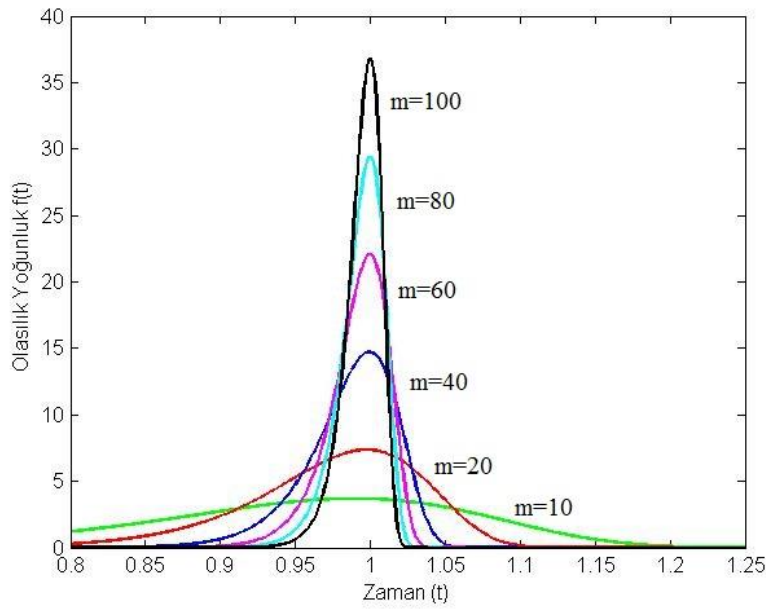
Şekil 4.11. $m=10$ için Weibull alt yüzdelik ($p=0.01$) alt güven sınırı



Şekil 4.12. $m=10$ için Weibull alt yüzdelik ($p=0.01$) alt güven sınırı

4.3.4. $m=20,40,60,80$ ve 100 için Weibull Parametreleri Güven Aralıkları ve Alt Yüzdeliklerinin Güven Alt Sınırları Tahmini

$m=20, 40, 60,80$ ve 100 şekil parametre değerleri için ilgili örneklemelerin dağılımı Şekil 4.13'te toplu olarak gösterilmiştir. Şekil parametresi büyüdükçe dağılımdaki sivrileşme daha da artmakta ve buna bağlı olarak yayılım da azalmaktadır.



Şekil 4.13. $m=20, 40, 60,80$ ve 100 için olasılık yoğunluk fonksiyonları

$m=20, 40, 60,80$ ve 100 değerleri ile üretilen Weibull değişkenleri üzerinden hesaplanmış şekil ve ölçek parametre güven aralıkları sırasıyla Çizelge 4.15 ve Çizelge 4.16'da verilmiştir.

Çizelge 4.15. $m=20, 40, 60, 80$ ve 100 için Weibull şekil parametresinin $1-\alpha=0.95$ güven düzeyindeki güven aralıkları

m	α	n	Kötü Senaryo		İyi Senaryo	
			WB	MB	WB	MB
			m için G.A.	m için G.A.	m için G.A.	m için G.A.
20	0,95	3	[7,562 63,63]	[3,687 53,442]	[7,562 63,63]	[3,687 53,442]
		4	[8,656 50,629]	[5,755 44,434]	[8,656 50,629]	[5,755 44,434]
		5	[9,49 44,315]	[7,222 40,115]	[9,49 44,315]	[7,222 40,115]
		6	[10,276 40,951]	[8,334 37,784]	[10,276 40,951]	[8,334 37,784]
		7	[10,763 38,218]	[9,165 35,779]	[10,763 38,218]	[9,165 35,779]
		8	[11,208 36,096]	[9,793 34,083]	[11,208 36,096]	[9,793 34,083]
		10	[11,94 33,557]	[10,81 32,07]	[11,94 33,557]	[10,81 32,07]
		12	[12,535 31,926]	[11,676 30,752]	[12,535 31,926]	[11,676 30,752]
		16	[13,433 29,906]	[12,819 29,104]	[13,433 29,906]	[12,819 29,104]
		20	[14,074 28,547]	[13,595 28,006]	[14,074 28,547]	[13,595 28,006]
40	0,95	3	[15,104 125,316]	[7,374 106,89]	[15,104 125,316]	[7,374 106,89]
		4	[17,384 102,34]	[11,57 89,329]	[17,384 102,34]	[11,57 89,329]
		5	[18,992 88,946]	[14,452 80,274]	[18,992 88,946]	[14,452 80,274]
		6	[20,276 81,02]	[16,451 74,586]	[20,276 81,02]	[16,451 74,586]
		7	[21,498 75,942]	[18,223 71,144]	[21,498 75,942]	[18,223 71,144]
		8	[22,465 72,13]	[19,689 68,53]	[22,465 72,13]	[19,689 68,53]
		10	[23,855 67,159]	[21,574 64,001]	[23,855 67,159]	[21,574 64,001]
		12	[25,116 64,182]	[23,356 61,513]	[25,116 64,182]	[23,356 61,513]
		16	[26,714 58,887]	[25,484 57,856]	[26,714 58,887]	[25,484 57,856]
		20	[27,903 56,34]	[27,011 55,642]	[27,903 56,34]	[27,011 55,642]
60	0,95	3	[22,587 188,694]	[10,992 159,332]	[22,587 188,694]	[10,992 159,332]
		4	[25,943 151,689]	[17,353 133,969]	[25,943 151,689]	[17,353 133,969]
		5	[28,65 134,1]	[21,487 121,658]	[28,65 134,1]	[21,487 121,658]
		6	[30,287 122,666]	[24,617 111,612]	[30,287 122,666]	[24,617 111,612]
		7	[32,192 111,051]	[27,422 107,057]	[32,192 111,051]	[27,422 107,057]
		8	[33,373 108,895]	[29,272 101,882]	[33,373 108,895]	[29,272 101,882]
		10	[35,877 98,41]	[32,401 96,122]	[35,877 98,41]	[32,401 96,122]
		12	[37,243 93,966]	[34,845 91,769]	[37,243 93,966]	[34,845 91,769]
		16	[40,161 91,353]	[38,17 86,657]	[40,161 91,353]	[38,17 86,657]
		20	[42,389 84,141]	[40,464 83,354]	[42,389 84,141]	[40,464 83,354]

Çizelge 4.15. (devam)

m	α	n	Kötü Senaryo		İyi Senaryo	
			BW m için G.A.	MB m için G.A	BW m için G.A	MB m için G.A
80	0,95	3	[29,595 244,942]	[14,529 210,588]	[29,595 244,942]	[14,529 210,588]
		4	[34,727 199,148]	[23,094 178,297]	[34,727 199,148]	[23,094 178,297]
		5	[37,993 174,938]	[28,568 161,752]	[37,993 174,938]	[28,568 161,752]
		6	[40,46 160,092]	[32,934 149,316]	[40,46 160,092]	[32,934 149,316]
		7	[42,715 149,173]	[36,183 141,26]	[42,715 149,173]	[36,183 141,26]
		8	[44,922 143,83]	[39,501 137,484]	[44,922 143,83]	[39,501 137,484]
		10	[47,476 132,851]	[43,274 128,379]	[47,476 132,851]	[43,274 128,379]
		12	[50,187 125,159]	[46,508 122,486]	[50,187 125,159]	[46,508 122,486]
		16	[52,239 117,67]	[51,03 115,854]	[52,239 117,67]	[51,03 115,854]
		20	[55,925 111,944]	[53,914 111,061]	[55,925 111,944]	[53,914 111,061]
100	0,95	3	[37,807 304,978]	[18,456 267,518]	[37,807 304,978]	[18,456 267,518]
		4	[43,054 244,468]	[28,857 222,789]	[43,054 244,468]	[28,857 222,789]
		5	[47,719 216,929]	[35,85 202,985]	[47,719 216,929]	[35,85 202,985]
		6	[50,81 197,98]	[41,314 187,312]	[50,81 197,98]	[41,314 187,312]
		7	[53,276 184,006]	[45,419 177,316]	[53,276 184,006]	[45,419 177,316]
		8	[55,524 174,963]	[48,783 170,732]	[55,524 174,963]	[48,783 170,732]
		10	[59,648 163,695]	[54,332 161,184]	[59,648 163,695]	[54,332 161,184]
		12	[62,618 155,182]	[58,487 154,033]	[62,618 155,182]	[58,487 154,033]
		16	[66,019 144,19]	[63,644 144,492]	[66,019 144,19]	[63,644 144,492]
		20	[68,656 137,444]	[67,514 138,463]	[68,656 137,444]	[67,514 138,463]

Çizelge 4.16. $m=20, 40, 60, 80$ ve 100 için Weibull ölçek parametresinin $1-\alpha=0.95$ güven düzeyindeki güven aralıkları

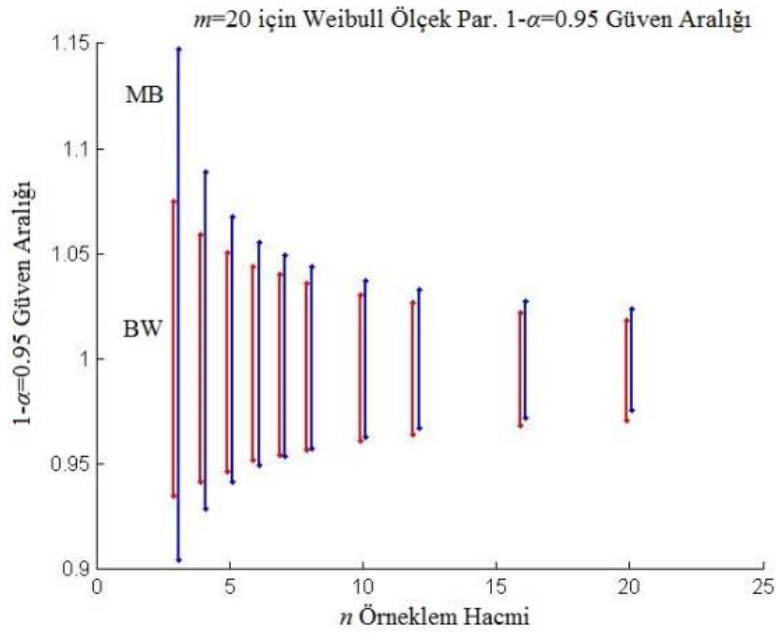
m	α	n	Kötü Senaryo		İyi Senaryo	
			BW	MB	BW	MB
			σ_0 için G.A.	σ_0 için G.A.	σ_0 için G.A.	σ_0 için G.A.
20	0,95	3	[0,935 1,075]	[0,905 1,147]	[0,935 1,075]	[0,905 1,147]
		4	[0,942 1,059]	[0,929 1,089]	[0,942 1,059]	[0,929 1,089]
		5	[0,947 1,05]	[0,941 1,068]	[0,947 1,05]	[0,941 1,068]
		6	[0,952 1,044]	[0,949 1,056]	[0,952 1,044]	[0,949 1,056]
		7	[0,955 1,04]	[0,954 1,05]	[0,955 1,04]	[0,954 1,05]
		8	[0,957 1,036]	[0,957 1,044]	[0,957 1,036]	[0,957 1,044]
		10	[0,961 1,03]	[0,963 1,037]	[0,961 1,03]	[0,963 1,037]
		12	[0,964 1,027]	[0,967 1,033]	[0,964 1,027]	[0,967 1,033]
		16	[0,968 1,022]	[0,972 1,027]	[0,968 1,022]	[0,972 1,027]
		20	[0,971 1,018]	[0,976 1,024]	[0,971 1,018]	[0,976 1,024]
40	0,95	3	[0,964 1,035]	[0,951 1,07]	[0,964 1,035]	[0,951 1,07]
		4	[0,968 1,027]	[0,964 1,044]	[0,968 1,027]	[0,964 1,044]
		5	[0,97 1,023]	[0,97 1,033]	[0,97 1,023]	[0,97 1,033]
		6	[0,973 1,02]	[0,974 1,027]	[0,973 1,02]	[0,974 1,027]
		7	[0,974 1,018]	[0,977 1,025]	[0,974 1,018]	[0,977 1,025]
		8	[0,975 1,016]	[0,978 1,022]	[0,975 1,016]	[0,978 1,022]
		10	[0,977 1,014]	[0,981 1,019]	[0,977 1,014]	[0,981 1,019]
		12	[0,979 1,012]	[0,983 1,017]	[0,979 1,012]	[0,983 1,017]
		16	[0,98 1,009]	[0,986 1,014]	[0,98 1,009]	[0,986 1,014]
		20	[0,982 1,008]	[0,988 1,012]	[0,982 1,008]	[0,988 1,012]
60	0,95	3	[0,974 1,022]	[0,967 1,047]	[0,974 1,022]	[0,967 1,047]
		4	[0,976 1,017]	[0,976 1,029]	[0,976 1,017]	[0,976 1,029]
		5	[0,978 1,014]	[0,98 1,022]	[0,978 1,014]	[0,98 1,022]
		6	[0,98 1,012]	[0,983 1,018]	[0,98 1,012]	[0,983 1,018]
		7	[0,98 1,011]	[0,984 1,016]	[0,98 1,011]	[0,984 1,016]
		8	[0,982 1,01]	[0,986 1,015]	[0,982 1,01]	[0,986 1,015]
		10	[0,982 1,008]	[0,988 1,012]	[0,982 1,008]	[0,988 1,012]
		12	[0,984 1,007]	[0,989 1,011]	[0,984 1,007]	[0,989 1,011]
		16	[0,984 1,005]	[0,991 1,009]	[0,984 1,005]	[0,991 1,009]
		20	[0,987 1,004]	[0,992 1,008]	[0,987 1,004]	[0,992 1,008]

Çizelge 4.16. (devam)

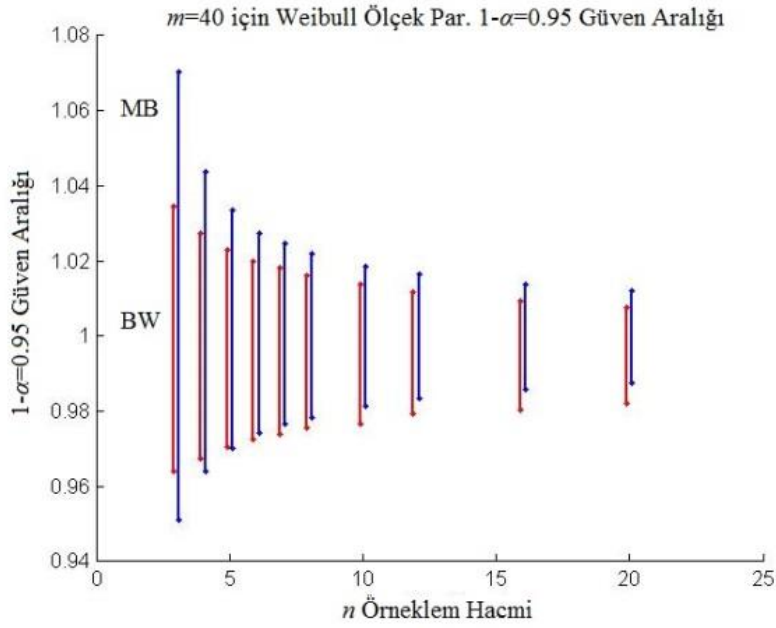
m	α	n	Kötü Senaryo		İyi Senaryo	
			BW σ_0 için G.A.	MB σ_0 için G.A.	BW σ_0 için G.A.	MB σ_0 için G.A.
80	0,95	3	[0,979 1,016]	[0,975 1,035]	[0,979 1,016]	[0,975 1,035]
		4	[0,981 1,012]	[0,981 1,022]	[0,981 1,012]	[0,981 1,022]
		5	[0,982 1,01]	[0,985 1,017]	[0,982 1,01]	[0,985 1,017]
		6	[0,983 1,008]	[0,987 1,014]	[0,983 1,008]	[0,987 1,014]
		7	[0,984 1,007]	[0,988 1,012]	[0,984 1,007]	[0,988 1,012]
		8	[0,985 1,006]	[0,989 1,011]	[0,985 1,006]	[0,989 1,011]
		10	[0,986 1,005]	[0,991 1,009]	[0,986 1,005]	[0,991 1,009]
		12	[0,986 1,004]	[0,992 1,008]	[0,986 1,004]	[0,992 1,008]
		16	[0,987 1,003]	[0,993 1,007]	[0,987 1,003]	[0,993 1,007]
		20	[0,988 1,002]	[0,994 1,006]	[0,988 1,002]	[0,994 1,006]
100	0,95	3	[0,983 1,012]	[0,98 1,028]	[0,983 1,012]	[0,98 1,028]
		4	[0,984 1,009]	[0,985 1,017]	[0,984 1,009]	[0,985 1,017]
		5	[0,985 1,007]	[0,988 1,013]	[0,985 1,007]	[0,988 1,013]
		6	[0,986 1,006]	[0,99 1,011]	[0,986 1,006]	[0,99 1,011]
		7	[0,986 1,005]	[0,99 1,01]	[0,986 1,005]	[0,99 1,01]
		8	[0,986 1,004]	[0,991 1,009]	[0,986 1,004]	[0,991 1,009]
		10	[0,987 1,003]	[0,993 1,007]	[0,987 1,003]	[0,993 1,007]
		12	[0,988 1,003]	[0,993 1,006]	[0,988 1,003]	[0,993 1,006]
		16	[0,988 1,002]	[0,994 1,005]	[0,988 1,002]	[0,994 1,005]
		20	[0,989 1,002]	[0,995 1,005]	[0,989 1,002]	[0,995 1,005]

Çizelge 4.16’da verilen ölçek parametresi güven aralıkları Şekil 4.14, 4.15, 4.16, 4.17 ve 4.18 üzerinde görsel olarak ifade edilmiştir.

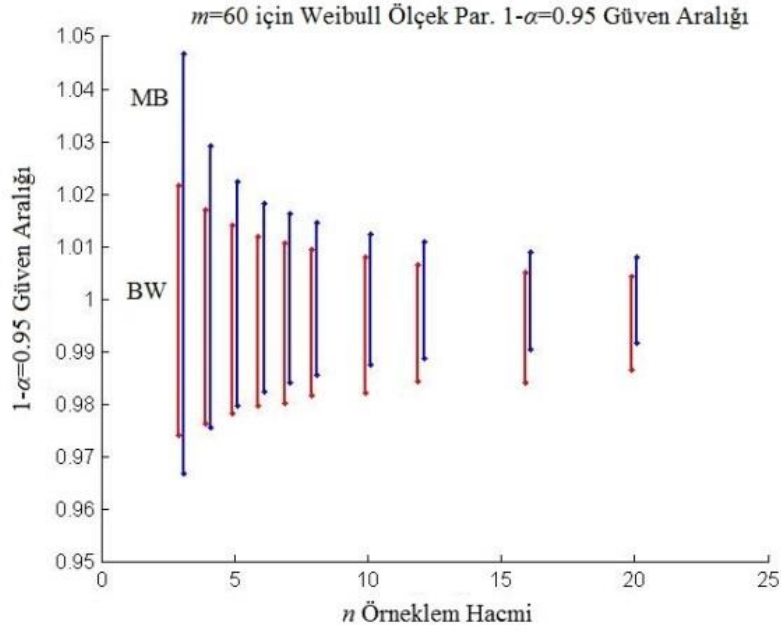
İlgili şekil parametre değerleri için BW ve MB yöntemleri ile hesaplanan tahmini lp değerleri ise Çizelge 4.17’de sunulmuştur.



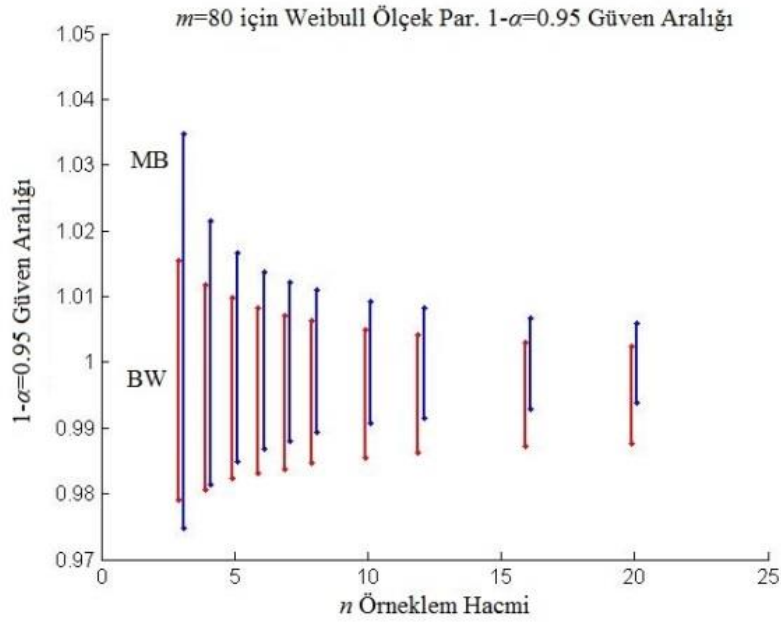
Şekil 4.14. $m=20$ ve farklı n 'ler için Weibull ölçek parametresi güven aralıkları



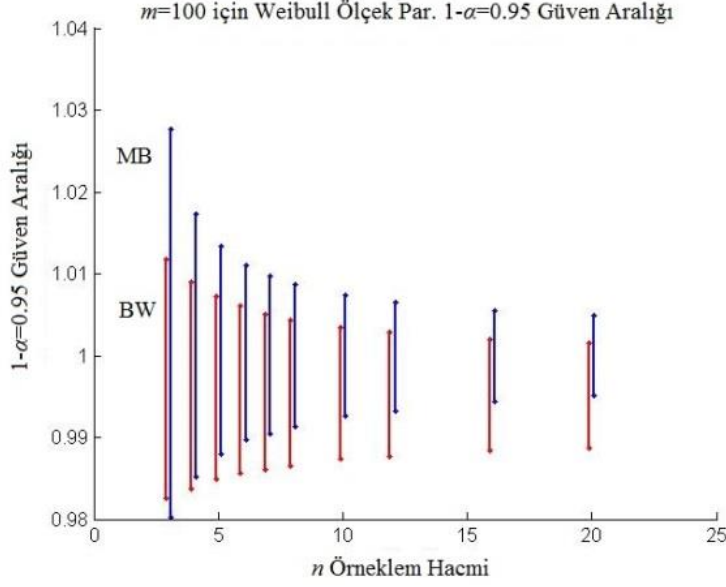
Şekil 4.15. $m=40$ ve farklı n 'ler için Weibull ölçek parametresi güven aralıkları



Şekil 4.16. $m=60$ ve farklı n 'ler için Weibull ölçek parametresi güven aralıkları



Şekil 4.17. $m=80$ ve farklı n 'ler için Weibull ölçek parametresi güven aralıkları



Şekil 4.18. $m=100$ ve farklı n 'ler için Weibull ölçek parametresi güven aralıkları

Çizelge 4.17. $m=20, 40, 60, 80$ ve 100 için $p=0.01$ ve $p=0.1$ Weibull alt yüzdeliklerinin güven alt sınır değerleri

m	α	p	n	Kötü Senaryo		İyi Senaryo	
				BW med (l_p)	MB med (l_p)	BW med (l_p)	MB med (l_p)
20	0,95	0,01	3	0,63197	0,42048	0,63197	0,42048
			4	0,64541	0,53007	0,64541	0,53007
			5	0,66023	0,58780	0,66023	0,58780
			6	0,67385	0,62185	0,67385	0,62185
			7	0,68165	0,64184	0,68165	0,64184
			8	0,68817	0,65514	0,68817	0,65514
			10	0,69915	0,67591	0,69915	0,67591
			12	0,70811	0,69229	0,70811	0,69229
			16	0,72084	0,71200	0,72084	0,71200
			20	0,72937	0,72351	0,72937	0,72351
		0,1	3	0,78741	0,70960	0,78741	0,70960
			4	0,79643	0,72716	0,79643	0,72716
			5	0,80614	0,76430	0,80614	0,76430
			6	0,81429	0,78472	0,81429	0,78472
			7	0,81960	0,79742	0,81960	0,79742
			8	0,82341	0,80587	0,82341	0,80587
			10	0,83035	0,81843	0,83035	0,81843
			12	0,83585	0,82854	0,83585	0,82854
			16	0,84403	0,84071	0,84403	0,84071
			20	0,84930	0,84794	0,84930	0,84794

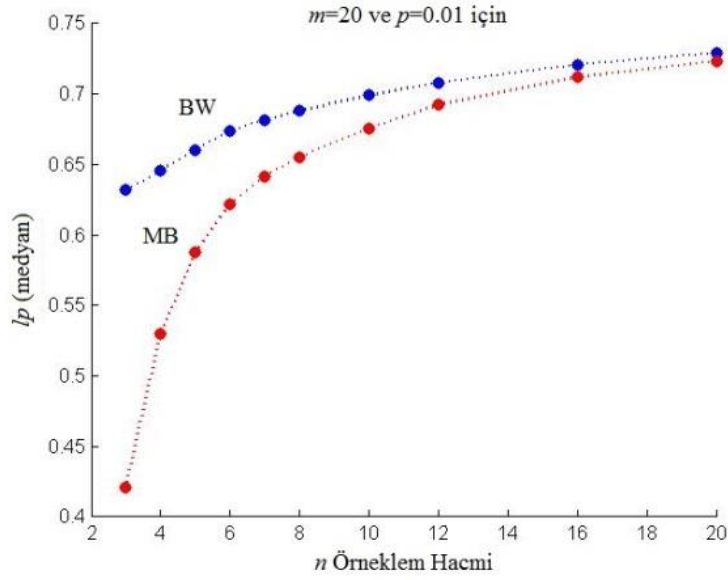
Çizelge 4.17. (devam)

m	α	p	n	Kötü Senaryo		İyi Senaryo	
				BW med (l_p)	MB med (l_p)	BW med (l_p)	MB med (l_p)
40	0,95	0,01	3	0,78946	0,64699	0,78946	0,64699
			4	0,80187	0,72934	0,80187	0,72934
			5	0,81020	0,76630	0,81020	0,76630
			6	0,81646	0,78628	0,81646	0,78628
			7	0,82299	0,80060	0,82299	0,80060
			8	0,82781	0,81034	0,82781	0,81034
			10	0,83397	0,82194	0,83397	0,82194
			12	0,83979	0,83258	0,83979	0,83258
			16	0,84560	0,84244	0,84560	0,84244
			20	0,85057	0,84966	0,85057	0,84966
		0,1	3	0,88393	0,84144	0,88393	0,84144
			4	0,89040	0,85330	0,89040	0,85330
			5	0,89533	0,87379	0,89533	0,87379
			6	0,89914	0,88483	0,89914	0,88483
			7	0,90260	0,89274	0,90260	0,89274
			8	0,90514	0,89795	0,90514	0,89795
			10	0,90857	0,90455	0,90857	0,90455
			12	0,91247	0,91074	0,91247	0,91074
			16	0,91555	0,91622	0,91555	0,91622
			20	0,91852	0,92038	0,91852	0,92038
60	0,95	0,01	3	0,85242	0,74691	0,85242	0,74691
			4	0,86133	0,81078	0,86133	0,81078
			5	0,86803	0,83594	0,86803	0,83594
			6	0,87218	0,85183	0,87218	0,85183
			7	0,87683	0,86207	0,87683	0,86207
			8	0,87916	0,86788	0,87916	0,86788
			10	0,88484	0,87771	0,88484	0,87771
			12	0,88727	0,88416	0,88727	0,88416
			16	0,89274	0,89215	0,89274	0,89215
			20	0,89767	0,89702	0,89767	0,89702
		0,1	3	0,91952	0,89125	0,91952	0,89125
			4	0,92411	0,89974	0,92411	0,89974
			5	0,92745	0,91451	0,92745	0,91451
			6	0,92958	0,92127	0,92958	0,92127
			7	0,93223	0,92720	0,93223	0,92720
			8	0,93351	0,93024	0,93351	0,93024
			10	0,93661	0,93560	0,93661	0,93560
			12	0,93820	0,93882	0,93820	0,93882
			16	0,94081	0,94349	0,94081	0,94349
			20	0,94381	0,94617	0,94381	0,94617

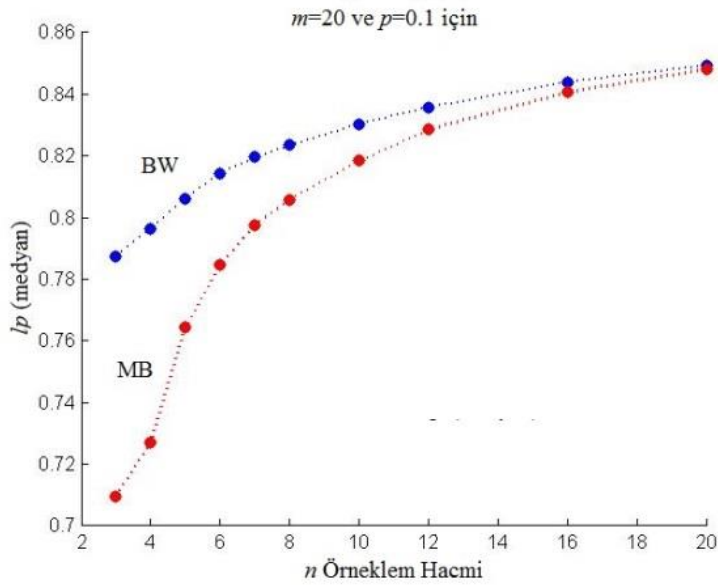
Çizelge 4.17. (devam)

m	α	p	n	Kötü Senaryo		İyi Senaryo	
				BW med (l_p)	MB med (l_p)	BW med (l_p)	MB med (l_p)
80	0,95	0,01	3	0,88489	0,80183	0,88489	0,80183
			4	0,89275	0,85398	0,89275	0,85398
			5	0,89811	0,87436	0,89811	0,87436
			6	0,90122	0,88650	0,90122	0,88650
			7	0,90420	0,89386	0,90420	0,89386
			8	0,90752	0,90017	0,90752	0,90017
			10	0,91099	0,90703	0,91099	0,90703
			12	0,91358	0,91197	0,91358	0,91197
			16	0,91635	0,91817	0,91635	0,91817
			20	0,91996	0,92157	0,91996	0,92157
		0,1	3	0,93729	0,91638	0,93729	0,91638
			4	0,94082	0,92359	0,94082	0,92359
			5	0,94378	0,93501	0,94378	0,93501
			6	0,94553	0,94027	0,94553	0,94027
			7	0,94727	0,94450	0,94727	0,94450
			8	0,94897	0,94769	0,94897	0,94769
			10	0,95075	0,95129	0,95075	0,95129
			12	0,95209	0,95398	0,95209	0,95398
			16	0,95407	0,95736	0,95407	0,95736
			20	0,95562	0,95926	0,95562	0,95926
100	0,95	0,01	3	0,90780	0,84149	0,90780	0,84149
			4	0,91237	0,88112	0,91237	0,88112
			5	0,91707	0,89877	0,91707	0,89877
			6	0,91983	0,90890	0,91983	0,90890
			7	0,92179	0,91420	0,92179	0,91420
			8	0,92366	0,91895	0,92366	0,91895
			10	0,92700	0,92482	0,92700	0,92482
			12	0,92913	0,92940	0,92913	0,92940
			16	0,93156	0,93385	0,93156	0,93385
			20	0,93335	0,93699	0,93335	0,93699
		0,1	3	0,94984	0,93384	0,94984	0,93384
			4	0,95163	0,93831	0,95163	0,93831
			5	0,95430	0,94818	0,95430	0,94818
			6	0,95565	0,95239	0,95565	0,95239
			7	0,95656	0,95525	0,95656	0,95525
			8	0,95755	0,95768	0,95755	0,95768
			10	0,95935	0,96090	0,95935	0,96090
			12	0,96046	0,96316	0,96046	0,96316
			16	0,96176	0,96571	0,96176	0,96571
			20	0,96276	0,96743	0,96276	0,96743

$m=20$ için Çizelge 4.17’de verilen BW ve MB yöntemlerinin tahmini l_p ’leri $p=0.01$ ve $p=0.1$ için sırasıyla Şekil 4.19 ve Şekil 4.20’da görsel olarak ifade edilmiştir..

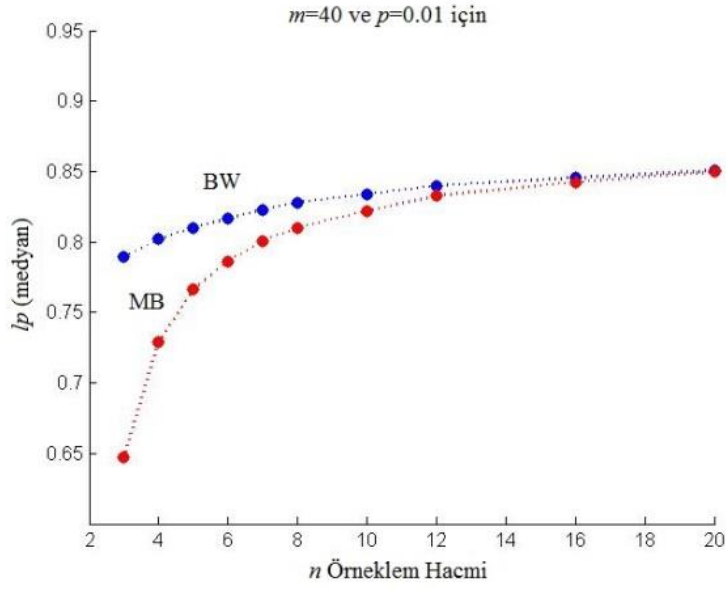


Şekil 4.19. $m=20$ için Weibull alt yüzdelik ($p=0.01$) alt güven sınırı

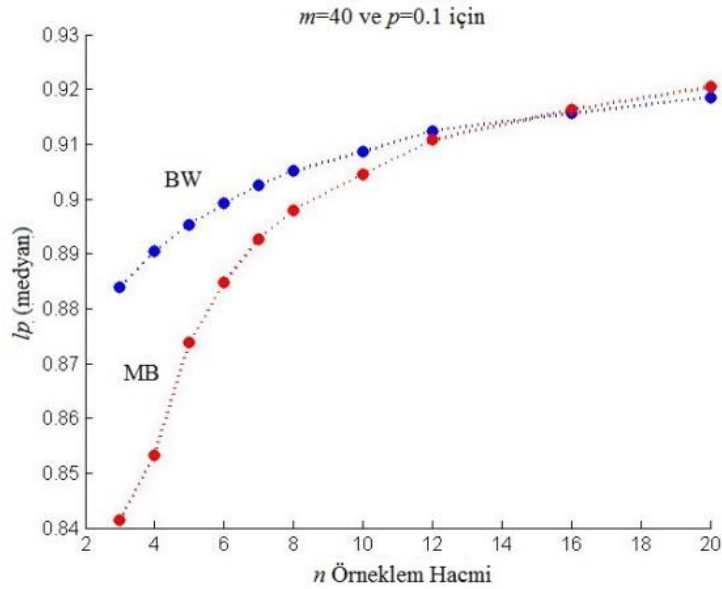


Şekil 4.20. $m=20$ için Weibull alt yüzdelik ($p=0.1$) alt güven sınırı

$m=40$ için Çizelge 4.17’de verilen BW ve MB yöntemlerinin tahmini l_p ’leri $p=0.01$ ve $p=0.1$ için sırasıyla Şekil 4.21 ve Şekil 4.22’de görsel olarak ifade edilmiştir..

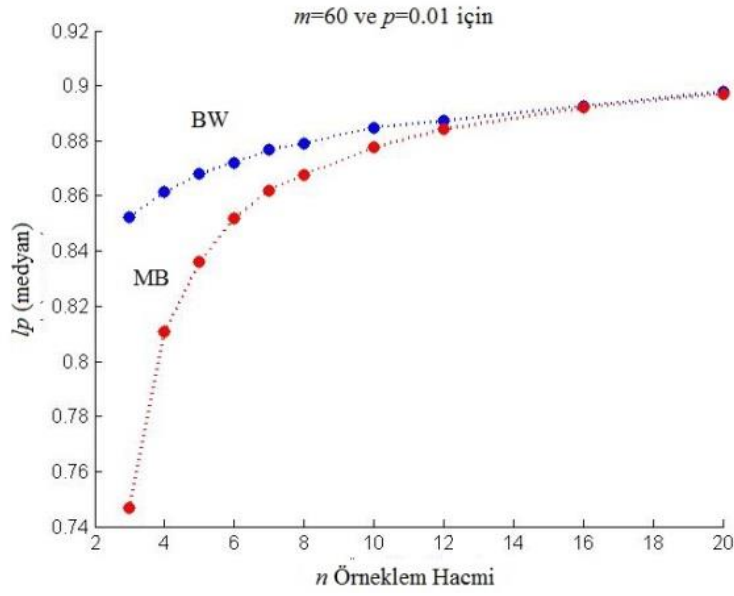


Şekil 4.21. $m=40$ için Weibull alt yüzdelik ($p=0.01$) alt güven sınırı

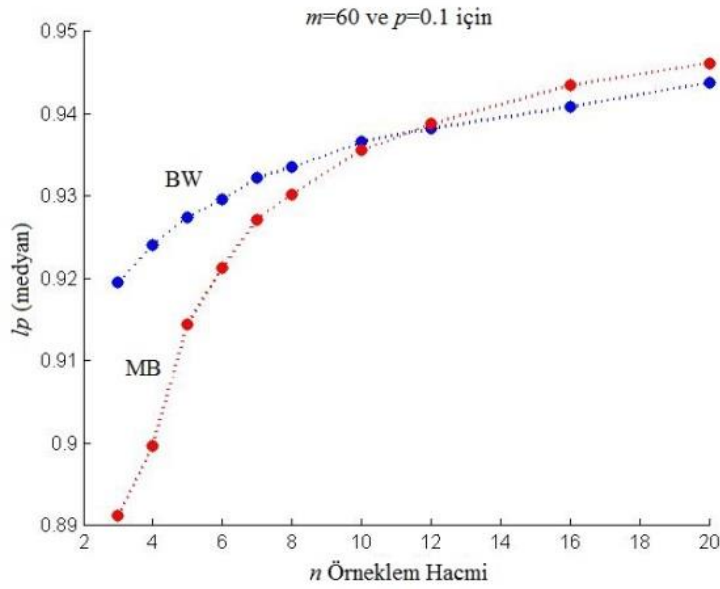


Şekil 4.22. $m=40$ için Weibull alt yüzdelik ($p=0.1$) alt güven sınırı

$m=60$ için Çizelge 4.17’de verilen BW ve MB yöntemlerinin tahmini l_p ’leri $p=0.01$ ve $p=0.1$ için sırasıyla Şekil 4.23 ve Şekil 4.24’de görsel olarak ifade edilmiştir..

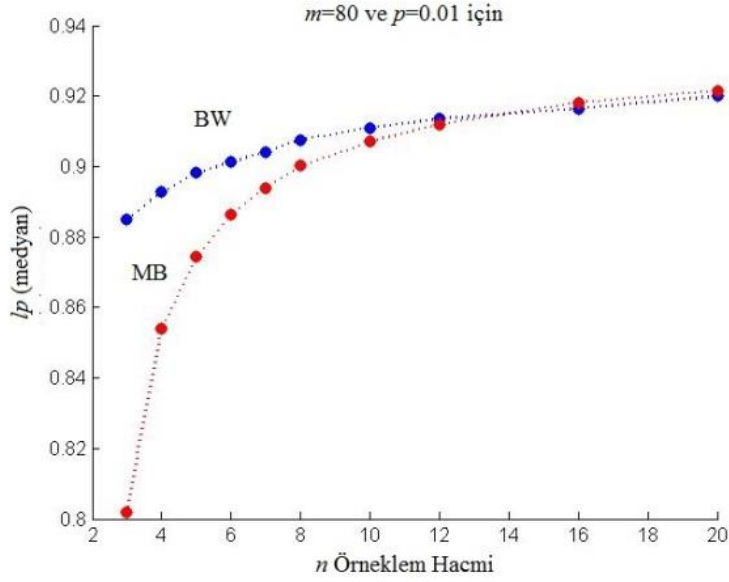


Şekil 4.23. $m=60$ için Weibull alt yüzdelik ($p=0.01$) alt güven sınırı

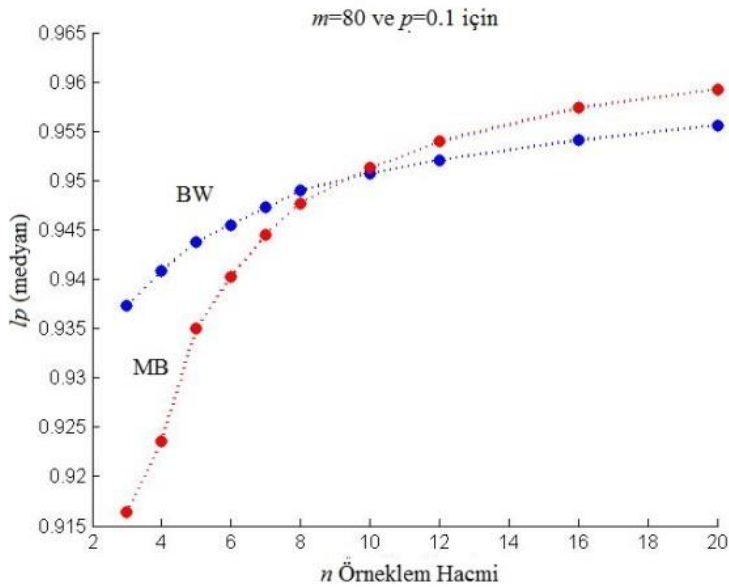


Şekil 4.24. $m=60$ için Weibull alt yüzdelik ($p=0.1$) alt güven sınırı

$m=80$ için Çizelge 4.17’de verilen BW ve MB yöntemlerinin tahmini l_p ’leri $p=0.01$ ve $p=0.1$ için sırasıyla Şekil 4.25 ve Şekil 4.26’da görsel olarak ifade edilmiştir..

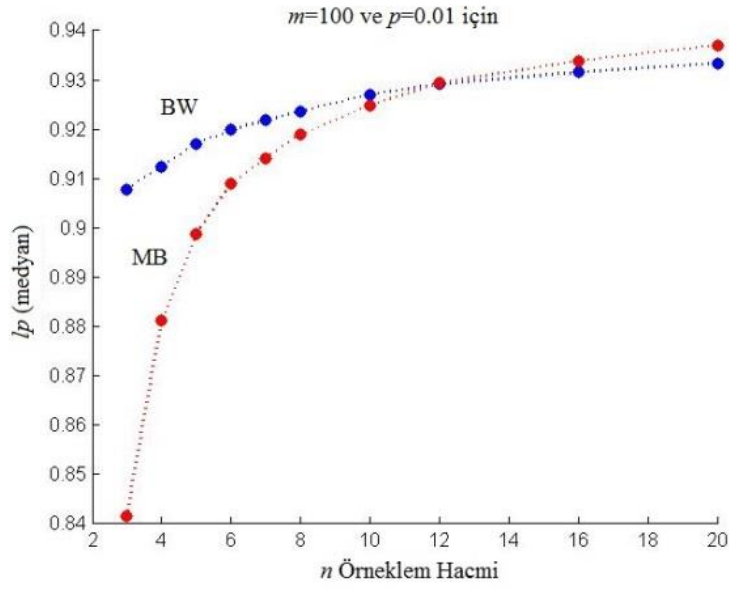


Şekil 4.25. $m=80$ için Weibull alt yüzdelik ($p=0.01$) alt güven sınırı

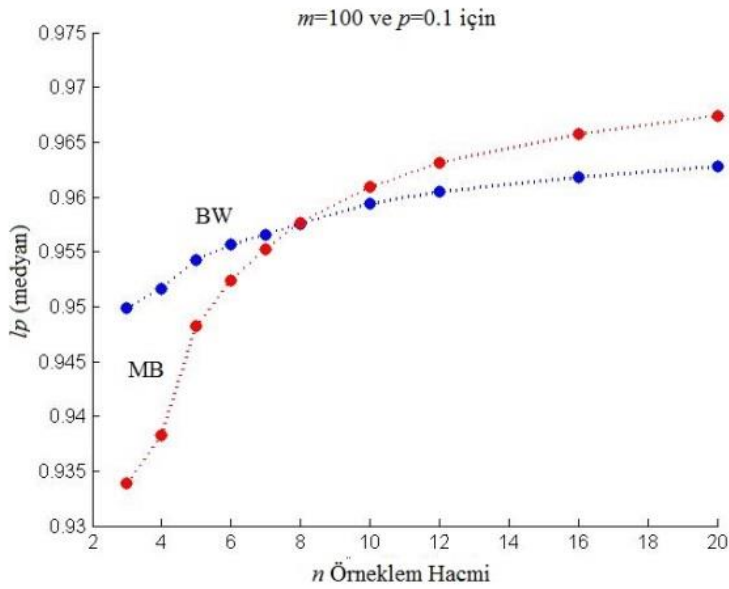


Şekil 4.26. $m=80$ için Weibull alt yüzdelik ($p=0.1$) alt güven sınırı

$m=100$ için Çizelge 4.17’de verilen BW ve MB yöntemlerinin tahmini l_p ’leri $p=0.01$ ve $p=0.1$ için sırasıyla Şekil 4.27 ve Şekil 4.28’de görsel olarak ifade edilmiştir..



Şekil 4.27. $m=100$ için Weibull alt yüzdelik ($p=0.01$) alt güven sınırı



Şekil 4.28. $m=100$ için Weibull alt yüzdelik ($p=0.1$) alt güven sınırı

4.3.5. Weibull Alt Yüzdelikleri Alt Güven Sınırları için BW ve MB Yöntemlerinin Tahmin Performansları

Çizelge 4.18’de BW yöntemi ile n örneklem hacminde $p=0.01$ için tahmin edilen Weibull alt yüzdelik alt güven sınırını MB yönteminin kaç örneklem hacminde yakalayabildiği gösterilmektedir. Örneğin Çizelge 4.18’e göre; $n=3$ örneklem hacminde BW yöntemi ile $p=0.01$ için tahmin edilen $l_p=0,0173$ değerini MB yöntemi ancak 9 örneklem hacminde yakalayabilmektedir. Burada BW yöntemi ile 6 örneklem üzerinden kazanç sağlanmıştır.

Çizelge 4.18. Weibull alt yüzdelik güven alt sınırı l_p ($p=0.01$) için BW ve MB’nin örneklem hacmi açısından kıyaslanması

m	BW l_p	BW n	MB n	Kazanç	% Kazanç
2	0,0173	3	9	6	0,67
2	0,0195	4	10	6	0,6
2	0,0226	5	11	6	0,55
2	0,0242	6	11	5	0,45
2	0,0263	7	12	5	0,42
2	0,0282	8	13	5	0,38
2	0,0319	10	16	6	0,38
2	0,0354	12	18	6	0,33
5	0,1816	3	8	5	0,63
5	0,1889	4	8	4	0,5
5	0,203	5	10	5	0,5
5	0,2115	6	10	4	0,4
5	0,2218	7	11	4	0,36
5	0,2285	8	12	4	0,33
5	0,2438	10	14	4	0,29
5	0,2571	12	17	5	0,29
10	0,4093	3	7	4	0,57
10	0,4256	4	8	4	0,5
10	0,4405	5	9	4	0,44
10	0,4535	6	10	4	0,4
10	0,4667	7	11	4	0,36
10	0,4758	8	12	4	0,33
10	0,4912	10	14	4	0,29
10	0,5028	12	16	4	0,25
10	0,5194	16	19	3	0,16

Çizelge 4.18. (devam)

m	BW l_p	BW n	MB n	Kazanç	% Kazanç
20	0,632	3	7	4	0,57
20	0,6454	4	7	3	0,43
20	0,6602	5	8	3	0,38
20	0,6738	6	10	4	0,4
20	0,6816	7	11	4	0,36
20	0,6882	8	11	3	0,27
20	0,6991	10	13	3	0,23
20	0,7081	12	15	3	0,2
20	0,7208	16	19	3	0,16
40	0,7895	3	6	3	0,5
40	0,8019	4	7	3	0,43
40	0,8102	5	8	3	0,38
40	0,8165	6	9	3	0,33
40	0,823	7	10	3	0,3
40	0,8278	8	11	3	0,27
40	0,834	10	13	3	0,23
40	0,8398	12	15	3	0,2
40	0,8456	16	18	2	0,11
60	0,8524	3	6	3	0,5
60	0,8613	4	7	3	0,43
60	0,868	5	8	3	0,38
60	0,8722	6	9	3	0,33
60	0,8768	7	10	3	0,3
60	0,8792	8	10	2	0,2
60	0,8848	10	12	2	0,17
60	0,8873	12	14	2	0,14
60	0,8927	16	16	0	0
80	0,8849	3	6	3	0,5
80	0,8928	4	7	3	0,43
80	0,8981	5	8	3	0,38
80	0,9012	6	8	2	0,25
80	0,9042	7	9	2	0,22
80	0,9075	8	10	2	0,2
80	0,911	10	12	2	0,17
80	0,9136	12	13	1	0,08
80	0,9163	16	15	-1	-0,07
100	0,9078	3	6	3	0,5
100	0,9124	4	7	3	0,43
100	0,9171	5	8	3	0,38
100	0,9198	6	8	2	0,25
100	0,9218	7	9	2	0,22
100	0,9237	8	10	2	0,2
100	0,927	10	11	1	0,09
100	0,9291	12	12	0	0
100	0,9316	16	14	-2	-0,14

Çizelge 4.19, Çizelge 4.18'deki hesaplama ve kıyaslamaların $p=0.1$ için yapılmış halini göstermektedir.

Çizelge 4.19. Weibull alt yüzdelik güven alt sınırı l_p ($p=0.1$) için BW ve MB'nin örneklem hacmi açısından kıyaslanması

m	BW l_p	BW n	MB n	Kazanç	% Kazanç
2	0,1035	3	7	4	0,57
2	0,1136	4	8	4	0,5
2	0,1276	5	9	4	0,44
2	0,1352	6	10	4	0,4
2	0,144	7	11	4	0,36
2	0,1518	8	12	4	0,33
2	0,1654	10	14	4	0,29
2	0,177	12	17	5	0,29
2	0,1907	16	20	4	0,2
5	0,3951	3	7	4	0,57
5	0,4115	4	7	3	0,43
5	0,4309	5	9	4	0,44
5	0,4427	6	10	4	0,4
5	0,4574	7	11	4	0,36
5	0,4657	8	11	3	0,27
5	0,4827	10	14	4	0,29
5	0,4979	12	16	4	0,25
5	0,5128	16	20	4	0,2
10	0,6234	3	6	3	0,5
10	0,6392	4	7	3	0,43
10	0,6517	5	8	3	0,38
10	0,663	6	9	3	0,33
10	0,6741	7	11	4	0,36
10	0,6818	8	12	4	0,33
10	0,6929	10	14	4	0,29
10	0,7016	12	15	3	0,2
10	0,7144	16	19	3	0,16
20	0,7874	3	6	3	0,5
20	0,7964	4	7	3	0,43
20	0,8061	5	8	3	0,38
20	0,8143	6	9	3	0,33
20	0,8196	7	10	3	0,3
20	0,8234	8	11	3	0,27
20	0,8304	10	13	3	0,23
20	0,8358	12	14	2	0,14
20	0,844	16	18	2	0,11

Çizelge 4.19. (devam)

m	BW l_p	BW n	MB n	Kazanç	% Kazanç
40	0,8839	3	6	3	0,5
40	0,8904	4	7	3	0,43
40	0,8953	5	7	2	0,29
40	0,8991	6	8	2	0,25
40	0,9026	7	9	2	0,22
40	0,9051	8	10	2	0,2
40	0,9086	10	11	1	0,09
40	0,9125	12	13	1	0,08
40	0,9156	16	16	0	0
40	0,9185	20	18	-2	-0,11
60	0,9195	3	6	3	0,5
60	0,9241	4	6	2	0,33
60	0,9275	5	7	2	0,29
60	0,9296	6	8	2	0,25
60	0,9322	7	9	2	0,22
60	0,9335	8	9	1	0,11
60	0,9366	10	11	1	0,09
60	0,9382	12	12	0	0
60	0,9408	16	14	-2	-0,14
60	0,9438	20	16	-4	-0,25
80	0,9373	3	5	2	0,4
80	0,9408	4	6	2	0,33
80	0,9438	5	7	2	0,29
80	0,9455	6	7	1	0,14
80	0,9473	7	8	1	0,13
80	0,949	8	9	1	0,11
80	0,9507	10	10	0	0
80	0,9521	12	11	-1	-0,09
80	0,9541	16	12	-4	-0,33
80	0,9556	20	14	-6	-0,43
100	0,9498	3	5	2	0,4
100	0,9516	4	6	2	0,33
100	0,9543	5	7	2	0,29
100	0,9557	6	7	1	0,14
100	0,9566	7	8	1	0,13
100	0,9576	8	8	0	0
100	0,9594	10	9	-1	-0,11
100	0,9605	12	10	-2	-0,2
100	0,9618	16	11	-5	-0,45
100	0,9628	20	12	-8	-0,67

Çizelge 4.18 ve 4.19’da kazanç yüzde değeri negatif olanlar için şu şekilde bir yorum yapılabilir. Birincisi simülasyon tekrar sayısının yeteri büyüklükte olmamasından

dolayı kazanç yüzdesi negatif olabilir. İkincisi tahmin edici olarak medyan değerlerinin kullanılması yeterli olmayabilir. Üçüncüsü normalleştirme sabitinin nümerik integrasyonunda parametreler için verilen kapalı aralıkları yeterli bölgeye ayrılmamış olmasından ötürü önemli bir hata payı verilmiş olunabilir.

5. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu tez çalışması, güvenilirlik çalışmalarında seramik ve kompozit malzemelerin kopma mukavemeti gibi karakteristik özelliklerinin iki parametrelili Weibull dağılımı ile modellenmesi üzerinedir. Bilindiği gibi Weibull dağılımı farklı arıza hızlarını modelleyebildiği için güvenilirlik çalışmalarında yaygın olarak kullanılır. Bu tez çalışmasında iki parametrelili Weibull olasılık dağılımı üzerinden güvenilirlik analizinde kullanılan hata fonksiyonu, arıza hızı fonksiyonu gibi temel kavramlar açıklanmış ve bu fonksiyonların eşitliklerinde yer alan Weibull parametreleri ile yüzdeliklerinin tahmini için klasik ve Bayesyen yaklaşım yöntemleri ele alınmıştır.

Klasik yaklaşım yöntemi olarak tek yönlü güven aralıklarında en küçük yanlış kapsama olasılığını veren maksimum benzerlik yöntemi kullanılmıştır. Bayesyen yaklaşım ise bilgi içermeyen önsellere sahip iki parametrelili Weibull dağılımı üzerine kurgulanmıştır. Weibull ölçek parametresi için Jeffreys önseli; Weibull şekil parametresi için de düzgün dağılım önseli kullanılmıştır. Weibull şekil parametresinin önseli üzerinde iyi ve kötü tahmin olmak üzere 2 farklı senaryo düşünülmüştür. Malzemelerin kopma mukavemeti için artan arıza hızı söz konusu olduğundan Weibull şekil parametresinin 1'den büyük olduğu bilgisi, bu tez çalışmasında şekil parametresi için bir ön bilgi olarak kullanılmıştır. Klasik ve Bayesyen yaklaşımlardaki karmaşık ve zor simülasyon ve integral hesaplamaları için C++ ortamında aynı ortak arayüz altında algoritmalar geliştirilmiştir. Geliştirilen algoritmalar ile Weibull parametreleri ve yüzdelikleri için güven aralığı tahminleri yapılmıştır.

Bu çalışmada esas olarak uzun süren ve yüksek maliyet gerektiren güvenilirlik çalışmaları ile ilgilenildiği için Weibull parametreleri ve yüzdeliklerinin küçük örneklem hacimleri üzerinden tahmin edilmesi amaçlanmıştır. Bu noktada Bayesyen yaklaşımın eldeki veri haricinde araştırmacının parametreye dair deneyimi ve teorik düşünceleri de kullandığından küçük örneklem hacimlerinde klasik yaklaşıma nazaran çok daha iyi sonuçlar vereceği ifade edilmiştir. Kompozit bir malzemenin kopma mukavemeti üzerine yapılan örnek bir uygulama ve çok kapsamlı bir

simülasyon çalışması ile birlikte küçük örneklem hacimlerinde Bayesyen Weibull yönteminin (BW) maksimum benzerlik yöntemine (MB) göre çok daha iyi tahmin performansı gösterdiği ispatlanmıştır.

Simülasyon çalışmasında, 3 ile 20 arasında değişen örneklem hacimleri için şekil parametresinin 2 ve 100 arasındaki farklı değerlerinde yüksek tekrarda üretilen Weibull değişkenleri üzerinden tahminler yapılmıştır. Tahminde kullanılan örneklem hacmi küçüldükçe BW yöntemi Weibull ölçek parametresine ait güven aralıklarında daha dar sonuçlar vermiştir. Belirli bir n örneklem hacminde şekil parametresi m 'nin değeri arttıkça ölçek parametresi güven aralığı için iki yöntemin sonuçları arasındaki fark, Weibull değişkenlerinin yayılımının azalmasına bağlı olarak azalmış; m 'nin en yüksek değerlerinde de yok denilecek seviyeye gelmiştir. Belirli bir p hata olasılığına karşılık gelen Weibull alt yüzdelik güven alt sınırlarında (l_p 'lerde) ise BW yöntemi ile gerçek t_p değerine (gerçek alt yüzdelik değerine) daha yakın sonuçlar elde edilmiştir. Örneklem hacmi küçüldükçe yöntemlere ait l_p 'ler arasındaki fark büyümüş; belli bir n örneklem hacminde m değeri arttıkça da l_p 'ler arasındaki fark azalmıştır. Bununla birlikte, BW yöntemi şekil parametresi güven aralıklarında MB yöntemine göre daha geniş sonuçlar vermiştir; fakat burada önemli olan şekil parametresine ait güven alt sınırının BW yönteminde daha yüksek çıkmasıdır. Çünkü m 'nin artan değerlerinde dağılımın yayılımı daha da azalacaktır. Özet olarak bu tez çalışmasında simülasyon sonuçları üzerinden, tahminde kullanılan örneklem hacmi küçüldükçe BW yönteminin MB yöntemine daha iyi tahminler yapabildiği çizelgelenmiş, grafiksel olarak gösterilmiş ve yorumlanmıştır.

Örnek uygulama için kompozit bir malzemeye ait 19 özdeş numune Instron 8516+ universal test makinesinde gerilme deneyine tabi tutulmuş ve her numunenin kopma mukavemet değerleri ölçülmüştür. Ölçümlerin sırayla 19'u, ilk 9'u ve ilk 3'ü alınarak farklı büyüklüklerde örneklem hacimleri oluşturulmuş ve bu her bir örneklem hacmi üzerinden MB ve BW yöntemleri ile tahmin işlemleri yapılmıştır. Uygulama sonuçlarına göre Weibull parametreleri güven aralıkları ile alt yüzdeliklerinin güven alt sınır değerlerinde $n=19$ için yöntemler arasında ciddi bir farklılık görülmezken $n=9$ 'da BW yöntemi MB yöntemine göre ölçek parametresi güven aralıklarında daha dar, 1. ve 10. yüzdelik alt güven sınırlarında ise daha yukarıda bir sonuç elde

etmiştir. Örneklem hacminin 3 olduğu durumda ise BW yönteminin tahmin performansı katlanarak artmış; MB yöntemine çok daha iyi sonuçlar vermiştir.

Weibull alt yüzdelikleri için BW yönteminin MB yöntemine ait tahmin performansını n 'nin daha küçük değerlerinde yakalayabilmesi araştırmacıya örneklem hacmi üzerinde kayda değer kazançlar sunmaktadır. Örneğin 1. yüzdelik için simülasyon sonuçlarına göre $n=3$ 'de şekil parametresinin en küçük değeri 2 için %67 kazanç sağlanırken en büyük değeri 100 için %50 kazanç sağlanmıştır. Bu yüzde kazançlar $n=4$ için %7 puan düşerek sırasıyla %60 ve %43, $n=5$ için %12 puan düşerek %55 ve %38, $n=6$ için ise %45 ve %25 olmuştur. Örneklem hacminin 7,8, 10 ve 12 olduğu durumlar için ortalama kazançlar sırasıyla %32, %27, %23 ve %19 olarak hesaplanmıştır. Bütün bu kazançlar özellikle uzun süren ve yüksek maliyet gerektiren güvenilirlik çalışmalarında işletmeler açısından oldukça önemlidir.

İşletmeler pahalı ve uzun süren deneylerde küçük örneklem hacimleri üzerinde BW yöntemi ile çalışarak hem maliyetten hem de zamandan tasarruf sağlayabilirler. Aynı zamanda MB yönteminin daha büyük örneklem hacimlerindeki tahmin performanslarını da yakalamış olurlar.

Bununla birlikte güvenilirlik çalışmalarında küçük örneklem hacimleri ile çalışmanın getireceği bazı dezavantajlar bulunmaktadır. Her ne kadar küçük örneklem hacimlerinde BW yöntemi ile daha iyi tahminler yapılabilir olsa da; eğer örneklemin ait olduğu kitle Weibull dağılımı takip etmiyorsa Weibull dağılım temelinde yapılan MB ve BW yöntem hesaplamaları baştan itibaren yanlış olacaktır. Diğer bir dezavantaj da BW yöntemindeki eşitliklerinin nümerik çözümü için hazır kodların olmamasından dolayı mühendislerin hesaplama işlemlerinde oldukça zorlanmaları ve hatta içinden çıkılmaz bir durum ile karşı karşıya kalabilmeleridir. Hazır kodların olmamasıyla birlikte Reliasoft tarafından piyasaya sürülen Weibull++ programı, güvenilirlik hesaplamalarında mühendislere bazı kolaylıklar sunmaktadır; fakat tezde geliştirilen algoritmaların kullanılacak alana göre uyarlanması ile Weibull++'ın yapacağı tahmin işlemleri ve hatta daha fazlası ücretsiz bir şekilde çok kısa bir sürede yapılabilmektedir.

Literatürde güvenilirlik analizi çalışmaları için Bayesyen yaklaşım yöntemi ile Weibull parametrelerinin tahmini üzerine birçok çalışma mevcuttur. Bu çalışmalar farklı veri tipleri ve Weibull dağılımının farklı tipteki modelleri ile zenginleştirilmiştir; fakat Bayesyen yaklaşım yöntemi ile Weibull alt yüzdelikleri güven alt sınırlarının tahminine yönelik literatürde bir çalışmaya rastlanılmamıştır. Bu tez çalışması ile literatürdeki bu eksiklik doldurulmaya çalışılmıştır.

KAYNAKLAR

Advisory Group of Reliability of Electronic Equipment (AGREE), Reliability of Military Electronic Equipment, Office of The Assistant Secretary of Defense Research and Engineering, Washington, DC., 1957.

Akar, M., Gündoğdu, S., Bayes Teorisinin Su Ürünlerinde Kullanım Olanakları, JFisheriesSciences.com, DOI: 10.3153/jfscom.2014002, 8(1), 8-16, 2014.

Akdeniz, F., Olasılık ve İstatistik, Baki Kitapevi, Adana, 2002.

Anonim, Bayesian-Weibull Analysis, http://reliawiki.com/index.php/Bayesian-Weibull_Analysis, (Erişim Tarihi: 05.03.2015).

Anonim, Bayes Teoremi, http://tr.wikipedia.org/wiki/Bayes_teoremi, (Erişim Tarihi: 05.03.2015).

Anonim, Bisection Method, http://en.wikipedia.org/wiki/Bisection_method, (Erişim Tarihi: 05.03.2015).

Anonim, The Weibull Distribution, http://reliawiki.org/index.php/The_Weibull_Distribution, (Erişim Tarihi: 05.03.2015).

Aron, A., Guo, H., Mettas, A., Ogden, D., Improving The 1-Parameter Weibull: A Bayesian Approach, Reliability and Maintainability Symposium RAMS, DOI: 10.1109/RAMS.2009.4914644, 25 - 30, 2009.

Askeland, D.R., Fulay ,P.P., Wrigh, W.J., The Science and Engineering of Materials, 6th Edition, Cengage Learning, Inc, 2010.

Barbero, E., Fernandez-Saez, J., Navarro, C., Statistical Analysis of the Mechanical Properties of Composite Materials, Composites, 31, 375, 2000.

Bazovsky, I., Reliability Theory and Practice, Prentice Hall, New Jersey, 1961.

Bentley, J.P., An introduction to Reliability and Quality Engineering, Logman Scientific and Technical, John Wiley & Sons, Inc. New York, 1993.

Birgören, B., Estimating Confidence Lower-Bounds for Weibull Percentiles, Journal of Materials Science Letters, 22, 1121, 2003.

Birgören, B., Dirikolu, M.H., A Computer Simulation for Estimating Lower-Bound Fracture Strength of Composites Using Weibull Distribution, Composites Part B: Engineering, 35, 263-266, 2004.

Birgören, B., Effect of Sample Size and Distribution Parameters in Estimation of Confidence Lower Bounds for Weibull Percentiles, Ceramics and Composite Materials: New Research, ed B. M. Caruta, Nova Science Publishers, New York, 215-236, 2006.

Bourhis, E.L., Glass: Mechanics and Technology, Wiley-VCH, Weinheim, 2007.

Danacı, M.A., Güvenilirlik Analizinde Tamamlanmış Veriler İçin Weibull Dağılımının Kullanılması, Yüksek Lisans Tezi, Kırıkkale Üniversitesi, Kırıkkale, 2005.

Ebelign, C.E., Reliability and Maintainability Engineering, McGraw Hill International Editions, 1997.

Efeler, C., Bayesci İstatistiğe Giriş, <http://cenkefeler.blogspot.com.tr/2013/01/bayesci-istatistige-giris-2.html>, (Erişim Tarihi: 05.03.2015).

Ekici, O., İstatistikte Bayesyen Ve Klasik Yaklaşımın Kavramsal Farklılıkları, Balıkesir Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, 12/21, 89-101, 2009.

- Ekici,O., Prior Distribution Classes with Comprehensive Coverage, İstatistik Araştırma Dergisi, Cilt: 07, Sayı: 01, Kategori: 02, 41-54, 2010.
- Elsayed, E.A., Reliability Engineering, Addison Wesley Longman Inc., 1996.
- Fernandez-Saez, J., Chao, J., Duran, J., Amo, J.M., Estimating Lower-Bound Fracture Parameters for Brittle Materials, Journal of Materials Science Letters, 12, 1493, 1993.
- Gelman, A., Carlin, J., Stern, H., Rubin, D., Bayesian Data Analysis, Chapman &Hall/CRC, 2nd Edition, New York, 2004.
- Hahn, G.J., Shapiro, S.S., Statistical Models in Engineering, John Wiley & Sons, New York, 1967.
- Haris, B., A Parametric Constant-Life Model for Prediction of The Fatigue Lives of Fibrereinforced Plastics, Fatigue in Composites, Woodhead Publishing, Abington, 546-568, 2003.
- Hulting, F.L., Robinson, J.A., The Reliability of a Series System of Repairable Subsystems:A Bayesian Approach, Naval Research Logistics, Vol. 41, 483-506, 1994.
- Ireson, W.G., Coombs, C.F., Moss, R.Y., Handbook of Reliability Engineering and Management, McGraw Hill, 1996.
- Jeffreys, H., Theory of Probability, Oxford University Press. 1st Ed., 1939.
- Kerscher III, W.J., Booker, J.M., Bement,T.R., Meyer, M.A., Characterizing Reliability in a Product/Process Design-Assurance Program, Proc. RAMS, 105-112, 1998.
- Khashaba, U.A., Fatigue and Reliability Analysis of Unidirectional GFRP

Composites Under Rotating Bending Loads, Journal of Composite Materials, 37, 4, 317-331, 2003.

Kundu, D., Bayesian Inference and Life Testing Plan for the Weibull Distribution in Presence of Progressive Censoring, Technometrics, Vol. 50, No. 2, 144-154, 2008.

Law, A.M., Kelton ,W.D., Simulation Modeling & Analysis, McGraw-Hill, Inc. 1991.

Liptak, B.G., Instrument Engineers' Handbook, Process Software and Digital Networks, Baskı 3, FL:CRC Press/ISA, 2002.

Lu, M.W., Rudy, R.J., Reliability Demonstration Test for a Finite Population, Quality and Reliability Engineering International, 17: 33–38, 2001.

Martz, H.F., Waller, R.A., Bayesian Reliability Analysis, Wiley, NewYork, 1982.

Mosteller, F., Rourke, R.E., Thomas, JR.G.B., Probability with Statistical Applications, Addison-Wesley, Massachusetts, 1961.

Özdemir, T., İstatistiksel Kalite Kontrol, A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, Ankara, 2000.

Rausand, M., Hoyland, A., System Reliability Theory: Models, Statistical methods, and Applications, Baskı 2, Wiley, Hoboken, 2004.

ReliaSoft, Life Data Analysis Reference, ReliaSoftPublication, 2007.

Rüzgar, B., Sürekli Yapıda İki Parametrelili Bir Model ve Uygulaması, Doktora Tezi, Marmara Üniversitesi, İstanbul, 1992.

- Sindu, T.K., An Extended Pearson System Useful in Reliability Analysis, Cochin University of Science and Technology, Department of Statistics, Hindistan, 2002.
- Stephens, K.S., Reliability Data Analysis with Excel and Minitab, Wis: ASQ Quality Press, Milwaukee, 2012.
- Tahralı, N., Dikmen, F., Konstrüksiyon Elemanlarında Güvenirlik ve Ömür Hesapları, Yıldız Teknik Üniversitesi Basım-Yayın Merkezi, İstanbul, 2004.
- Thoman, D.R., Bain, L.J., Antle, C.E., Inferences on the Parameters of the Weibull Distribution, Technometrics, 11, 445, 1969.
- U.S. Department of Defense, Polymer Matrix Composites Guidelines for Characterization of Structural Materials, Military Handbook - MIL-HDBK-17-1F: Composite Materials Handbook, Washington, DC, 2002.
- Wasserman, G., Reliability Verification, Testing, and Analysis in Engineering Design, Marcel Dekker Inc, New York, 2002.
- Weibull, W., A Statistical Distribution Function of Wide Applicability, Journal of Applied Mechanics, 18: 293-297, 1951.
- Wheeler, J.T., Statistical Computation of Tolerance Limits, 1993, <http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19940011062.pdf>, (Erişim Tarihi: 05.04.2015).
- Womack, J., Statistical Tolerance Bounds: Overview and Applications to Space Systems, The Aerospace Corporation, 2011, http://engineering.larc.nasa.gov/2011%20NSES%20Proceedings/S2B_-_Womack_-_Statistical_Tolerance_Bounds_Overview_and_Applications_to_Space_Systems.pdf, (Erişim Tarihi: 05.04.2015).

Yörükoğlu, M., Kayakutlu, G., Ercan., S., Tedarik Zinciri Yönetiminde Bilgi Sistemleri: Havacılık Yer Hizmetlerinde Uçuş Zamanlaması İçin Bilgi Paylaşım Modeli, Havacılık ve Uzay Teknolojileri, Cilt 7, Sayı, 1-23, 2014.

EKLER

EK 1. SİMULASYON PROGRAMI STANDART C++ PROGRAM KODU

```
#include "stdafx.h"
#include <iostream>
#include "engine.h"
#include <cstdlib>
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>
#include <math.h>
#include <ctime>
#include <random>
#include <iomanip>
#include <fstream>
#include <vector>
#include <algorithm>
#include <string>
#include <sstream>
#define PI 3.14159265358979
#define PIsq 9.869604401089338271
#define TINY 1.0e-50
#define VERYLARGE 1.0e+50
#define array_bsize 8
#define array_psize 2
#define array_asize 2
#define array_nsize 10
using namespace std;
//for round
int round (double d)
{ return (d-floor(d)) >= 0.5 ? ceil(d): d;}
double round(int i,double d)
{
return floor(d)+round(pow(10.0,i)*(d-floor(d)))/pow(10.0,i);
}
void lhfunc(double *weibullv, double pointbv, double pointev,int n, vector<double> &X);
void unfd(double *uniformv, double unfa, double unfb);
void mle (double *mhat,double *s0hat,vector<double> &X,int n,double initm);
void bayesianweib (double *betamedian,double *etamedian,vector<double>
&betalowerv, vector<double> &betauppervec, vector<double> &etalowerv, vector<double>
&etauppervec, vector< double> > &etaphatvec, vector<double> &Data,int n,long int
nSegments,double betaL,double etaL,double betaF,double etaF,double pvalue[],double CL[],double
unfa,double unfb,int senaryoselection,double simshapev);
void polyt(double *presult1,double *presult2,double *presult3,long double dvalue,vector<double>
&X,vector<double> &Y);
void mlebetatarange(double *c_palpa,double *t_palpa1,double *t_palpa2,double
*s_palpa1,double *s_medalpha,double *t_medalpha, double *s_palpa2,double p, double conflev,int
n)
;
void bisection(double *TL,vector< vector<double>> &X,vector<double> &Y,vector<double>
&Z,double CL,double p,int nsegment);
void f(double *resultf,vector<vector<double>> &X,vector<double> &Y,vector<double> &Z,double
TL,double CL,double p,int nSegments);
void etalowervfunc(double *etalowerv,double pointbeta,int n, vector<double> &X)
;
void normd (double *normv, double norm, double nors,double betavalue);
```

```

//for main code
int main()
{
    clock_t startsim=clock();
    int i,bcount,acount,pcount,ncount,sencount, senaryoselection;
    double totalvalue=0.0,Gtotal=0.0,GtotalE=0.0;
    double betaL,etaL ,betaF,etaF,p,conflev,y,betamedian,etamedian;
    long int nSegments,rowcounter;
    double fbetaL, fbetaF, fetaL, fetaF,lp,simscale,simshape;
    double etalowerv,initm;
    double c_palpa, t_palpa1, t_palpa2, s_palpa1, s_palpa2,s_medalpha,t_medalpha,mhat,s0hat;
    double m_true1,m_true2,s0_true1,s0_true2,s0_medtrue,m_medtrue,percentile,unfa,unfb;
    double resultbi1,weibullv;
    int array_n[array_nsize]={3,4,5,6,7,8,10,12,16,20};
    double array_beta[array_bsize]={2,5,10,20,40,60,80,100};
    double array_p[array_psize]={0.01,0.10};
    double array_alfa[array_asize]={0.95,0.99};
    long double pageno;
    vector<double> betalowervec (2);
    vector<double> betauppervec (2);
    vector<double> etalowervvec (2);
    vector<double> etauppervec (2);
    vector< vector<double> > etaphatvec(array_asize, vector<double>(array_psize));
    vector< vector<double> > t_palpa_1(array_asize, vector<double>(array_psize));
    vector< vector<double> > t_palpa_2(array_asize, vector<double>(array_psize));
    vector< vector<double> > s_palpa_1(array_asize, vector<double>(array_psize));
    vector< vector<double> > s_palpa_2(array_asize, vector<double>(array_psize));
    vector< vector<double> > c_palpahav(array_asize, vector<double>(array_psize));
    vector< vector<double> > s_medalphav(array_asize, vector<double>(array_psize));
    vector< vector<double> > t_medalphav(array_asize, vector<double>(array_psize));
    ostringstream str;
    initm=-1.0;
    nSegments=199;
    string senaryo;
    pageno=0.0;
    simscale=1.0;
    rowcounter=1;
    srand( (unsigned)time(NULL));
    ofstream out("tezsonucu.txt");
    if(!out) {          cout<<"cannot open file.\n";
    }

    for (ncount=0;ncount<1;ncount++)
    {
        vector<double> Y(array_n[ncount]);
        //ifstream in("data.txt"); //Data.txt dosyasında kayıtlı veriler okutuluyor ve diziye
        aktarılıyor
        //if(!in) {          cout<<"cannot open file.\n";
        //return 1;}
        //for (i=0;i<array_n[ncount];i++)
        //in>>Y[i];
        //in.close();
        //sort(Y.begin(), Y.end()); //Veriler sıralanıyor

    for (acount=0;acount<1;acount++)
    {
        conflev=array_alfa[acount];
        for (pcount=0;pcount<2;pcount++)

```

```

        {
            p=array_p[pcount];
            mlebetaetarange(&c_palpa,&t_palpa1,&t_palpa2,&s_palpa1,
&s_palpa2,&s_medalpa,&t_medalpa,p, conflev, array_n[ncount])
            ;
            t_palpa_1[acount][pcount]=t_palpa1;
            t_palpa_2[acount][pcount]=t_palpa2;
            s_palpa_1[acount][pcount]=s_palpa1;
            s_palpa_2[acount][pcount]=s_palpa2;
            c_palphav[acount][pcount]=c_palpa;
            s_medalphav[acount][pcount]=s_medalpa;
            t_medalphav[acount][pcount]=t_medalpa;
        }
    }

for (bcount=0;bcount<1;bcount++)
{
    simshape=array_beta[bcount];

    for (y=0;y<1;y++)

    {

        for(i=0;i<array_n[ncount];i++)
        {
            Y[i]= simscale * pow((-log( ((double)rand()+1.00)/(RAND_MAX+2) )) ,(1/simshape)); //n
adet Weibull dağılımından değer üretiliyor
            str << Y[i]<<"\t";
        }
        for(i=0;i<21-array_n[ncount]-1;i++)
        {
            str<<"\t";}

        sort(Y.begin(), Y.end());
        string strweibull = str.str();
        strweibull.substr( 0, strweibull.end()-strweibull.begin()+1);

        mle(&mhat,&s0hat,Y,array_n[ncount],initm);
        fbetaL=mhat/t_palpa_1[0][0];
        fbetaF=mhat/t_palpa_2[0][0];
        fetaL=s0hat*exp(-(s_palpa_1[0][0]/mhat));
        fetaF=s0hat*exp(-(s_palpa_2[0][0]/mhat));
        betaL=0.05;
        betaF=2.0 *fbetaF;
        etaF=2.0 *fetaF;
        etalowerfunc(&etalowerv,betaF,array_n[ncount],Y);

        for (sencount=0;sencount<1;sencount++)
        {
            switch(sencount){
            case 0:
                etaL=etalowerv;
                unf=1.0;
                unfb=100.0;
                senaryo="K";
                senaryoselection=0;
                lhfunc(&weibullv, betaL,etaL,array_n[ncount],Y);
                resultbi1=(weibullv*(1/(unfb-unfa))*(1/etaL));
            do

```

```

    {
    if ( resultbi1>0.015 )
    {etaL= (weibullv*(1/(unfb-unfa)))/1e-2;
    lhfunc(&weibullv, betaL,etaL,array_n[ncount],Y);
    resultbi1=(weibullv*(1/(unfb-unfa))*(1/etaL));
    }
    }
    while ( round(2,resultbi1)>0.01 );
    if (etaL>1)
    {etaL=1e-10;
    }

```

```

bayesianweib(      &betamedian,&etamedian,betalowervect,      betauppervec,      etalowervect,
etauppervec,etaphatvec,Y,array_n[ncount],nSegments,betaL,etaL,betaF,etaF,array_p,array_alfa,unfa,u
nfb, senaryoselection,simshape);

```

```

    for (account=0;account<1;account++)
    {
        conflev=array_alfa[account];

        for (pcount=0;pcount<2;pcount++)
        {
            p=array_p[pcount];
            t_palpa1=t_palpa_1[account][pcount];
            t_palpa2=t_palpa_2[account][pcount];
            s_palpa1=s_palpa_1[account][pcount];
            s_palpa2=s_palpa_2[account][pcount];
            c_palpa=c_palpahv[account][pcount];
            s_medalpha=s_medalphav[account][pcount];
            t_medalpha=t_medalphav[account][pcount];
            m_true1=mhat/t_palpa1;
            m_true2=mhat/t_palpa2;
            s0_true1=s0hat*exp(-(s_palpa1/mhat));
            s0_true2=s0hat*exp(-(s_palpa2/mhat));
            s0_medtrue=s0hat*exp(-(s_medalpha/mhat));
            m_medtrue=mhat/t_medalpha;
            percentile=s0hat*pow(log(1/(1-p)),1/mhat);
            lp=percentile*exp(-c_palpa/mhat);

            out<<rowcounter<<"\t"<<senaryo<<"\t"<<array_n[ncount]<<"\t"<<strweibull<<"\t"<<simsh
ape<<"\t"<<simscale<<"\t"<<conflev<<"\t"<<p<<"\t"<<betaL<<"\t"<<betaF<<"\t"<<
etaL<<"\t"<<etaF<<"\t"<<betalowervect[account]<<"\t"<<
            betauppervec[account]<<"\t"<<
etalowervect[account]<<"\t"<<
            etauppervec[account]
            <<"\t"<<etaphatvec[account][pcount]<<"\t"<<
m_true1<<"\t"<<
            m_true2<<"\t"<<
            s0_true1<<"\t"<<
            s0_true2
            <<"\t"<<lp<<"\t"<<etaphatvec[account][pcount]/lp<<"\t"<<betamedian<<"\t"<<etamedian<<"\t"<<m_
medtrue<<"\t"<<s0_medtrue<<"\t"<<percentile<<"\n";
            rowcounter=rowcounter+1;
        } // pcount
    } // account

    break;

    case 1:
    unfa=simshape*0.5;
    unfb=simshape*1.5;
    etaL=etalowerv;
    senaryo="O";
    senaryoselection=1;
    lhfunc(&weibullv, betaL,etaL,array_n[ncount],Y);

```

```

resultbi1=(weibullv*(1/(unfb-unfa))*(1/etaL));
do
{
if ( resultbi1>0.015 )
{etaL= (weibullv*(1/(unfb-unfa)))/1e-2;
lhfunc(&weibullv, betaL,etaL,array_n[ncount],Y);
resultbi1=(weibullv*(1/(unfb-unfa))*(1/etaL));
}
}
while ( round(2,resultbi1)>0.01 );
    if (etaL>1)
{etaL=1e-10;
}

bayesianweib( &betamedian,&etamedian,betalowervec, betauppervec, etalowervec,
etauppervec,etaphatvec,Y,array_n[ncount],nSegments,betaL,etaL,betaF,etaF,array_p,array_alfa,unfa,u
nfb, senaryoselection,simshape);

for (account=0;account<1;account++)
{
    conflev=array_alfa[account];

    for (pcount=0;pcount<2;pcount++)
    {
        p=array_p[pcount];
        t_palpa1=t_palpa_1[account][pcount];
        t_palpa2=t_palpa_2[account][pcount];
        s_palpa1=s_palpa_1[account][pcount];
        s_palpa2=s_palpa_2[account][pcount];
        c_palpa=c_palphav[account][pcount];
        s_medalpha=s_medalphav[account][pcount];
        t_medalpha=t_medalphav[account][pcount];
        m_true1=mhat/t_palpa1;
        m_true2=mhat/t_palpa2;
        s0_true1=s0hat*exp(-(s_palpa1/mhat));
        s0_true2=s0hat*exp(-(s_palpa2/mhat));
        s0_medtrue=s0hat*exp(-(s_medalpha/mhat));
        m_medtrue=mhat/t_medalpha;
        percentile=s0hat*pow(log(1/(1-p)),1/mhat);
        lp=percentile*exp(-c_palpa/mhat);

        out<<rowcounter<<"\t"<<senaryo<<"\t"<<array_n[ncount]<<"\t"<<strweibull<<"\t"<<simsh
ape<<"\t"<<simscale<<"\t"<<conflev<<"\t"<<p<<"\t"<<betaL<<"\t"<<betaF<<"\t"<<
etaL<<"\t"<<etaF<<"\t"<<betalowervec[account]<<"\t"<<
        betauppervec[account]<<"\t"<<
etalowervec[account]<<"\t"<< etauppervec[account] <<"\t"<<etaphatvec[account][pcount]<<"\t"<<
m_true1<<"\t"<< m_true2<<"\t"<< s0_true1<<"\t"<< s0_true2
<<"\t"<<lp<<"\t"<<etaphatvec[account][pcount]/lp<<"\t"<<betamedian<<"\t"<<etamedian<<"\t"<<m_
medtrue<<"\t"<<s0_medtrue<<"\t"<<percentile<<"\n";
        rowcounter=rowcounter+1;

    }

}

break;

}

} // sencount

strs.str("");
strs.clear();

```

```

} // Rcount
} // bcount
} // ncount
    out.close();
    clock_t endsim =clock();
    cout<<"simulation time in sec: "<<(double)(endsim-startsim)/CLOCKS_PER_SEC<<"\n";

    return 0;
}

void bayesianweib (double *betamedian,double *etamedian,vector<double>
&betalowervec,vector<double> &betauppervec,vector<double> &etalowervec,vector<double>
&etauppervec,vector<double>>> &etaphatvec,vector<double> &Data,int n,long int
nSegments,double betaL,double etaL,double betaF,double etaF,double pvalue[],double CL[],double
unfa,double unfb,int senaryoselection,double simshapev)
{
    int i,j;
    long int k;
    double totalvalue;
    double distvalueBeta ,distvalueEta ;
    double uniformv,pointbv,pointev,weibully;
    double outvalue;
    double Gtotal;
    double GtotalE;
    double presult1,presult2,presult3;
    vector<double>Pointb(nSegments+1);
    vector<double>Pointe(nSegments+1);
    vector<double>PolyPointb(nSegments+1);
    vector<double>PolyPointe(nSegments+1);
    vector<double>PolyBeta(nSegments+1);
    vector<double>PolyEta(nSegments+1);
    vector< vector<double> > Sim((nSegments+1), vector<double>(nSegments+1));
    vector< vector<double> > GeneralData((nSegments+1), vector<double>(3));
    vector<double>SimBeta(nSegments+1);
    vector<double>SimEta(nSegments+1);
    vector<double>CumEta(nSegments+1);
    vector<double>CumBeta(nSegments+1);
    vector<double>PolyCumBeta(nSegments+1);
    vector<double>PolyCumEta(nSegments+1);
    vector<double>BayesianBeta(nSegments+1);
    vector<double>BayesianEta(nSegments+1);
    vector< vector<double> > GeneralDataEta((nSegments+1), vector<double>(3));
    vector< vector<double> > BetaEtaMarg((nSegments+1), vector<double>(nSegments+1));
    vector<double>BetaMarg(nSegments+1);
    int Pdatarow=1;
    //for insert bound values of beta & eta
    totalvalue=0.0;
    distvalueBeta = (betaF-betaL)/nSegments;
    distvalueEta = (etaF-etaL)/nSegments;
    Pointb[0]=betaL;
    Pointe[0]=etaL;
    for (int i = 1; i <= nSegments; ++i)
    {
        Pointb[i]= Pointb[i-1] + distvalueBeta ;
        Pointe[i]= Pointe[i-1] + distvalueEta ;
    }

    //ofstream out1("outreport.txt");
    //if(!out1) {      cout<<"cannot open file.\n";

```

```

//      }

//for select uniform distribution of beta

        if((senaryoselection==0) || (senaryoselection==1))
        {
unfd (&uniformv, unfb,unfb);

                for(j=0;j<= nSegments;j++)
        {
                        for(i=0;i<= nSegments;i++)
                        {

                                pointbv=      Pointb[i];
                                pointev=Pointe[j];
                                lhfunc(&weibullv, pointbv, pointev,n, Data);

                                Sim[i][j]= weibullv * uniformv* (1.0/ pointev);
                                totalvalue=totalvalue+Sim[i][j];

                        }

                }

                else if(senaryoselection==2)
                {

                        //nothing

                }

                outvalue=( totalvalue)*(distvalueBeta*distvalueEta);

//for inform before exit
        //srand( (unsigned)time(NULL));
        //sort(Sim.begin(),Sim.end());      //Benzetim değerleri üretiliyor
        clock_t endsim =clock();
        double btahmini;
        btahmini=0.0;
        Gtotal=0.0;

//for      write      simbeta
        *****
                for(i=0;i<= nSegments;i++)
        {
                SimBeta[i]=0.0;
                        for(j=0;j<= nSegments;j++)
                        {
                                if ((i==0) && (j==0))
                                { SimBeta[i]=SimBeta[i]+((Sim[i][j])/2.0);

                                        }
                                else if((i==nSegments) && (j==nSegments))
                                        { SimBeta[i]=SimBeta[i]+((Sim[i][j])/2.0);

                                                }
                                else
                                        { SimBeta[i]=SimBeta[i]+Sim[i][j];

                                                }

                        }

                BetaMarg[i]=SimBeta[i]*(distvalueBeta*distvalueEta);

```

```

BetaEtaMarg[i][j]=BetaMarg[i]/outvalue;

}
SimBeta[i]=SimBeta[i]*(distvalueBeta*distvalueEta);
BayesianBeta[i]=SimBeta[i]/outvalue;
btahmini=btahmini+BayesianBeta[i]*Pointb[i];
GeneralData[i][0]=Pointb[i];
GeneralData[i][1]=BayesianBeta[i];
Gtotal=Gtotal+BayesianBeta[i];
CumBeta[i]=Gtotal;
GeneralData[i][2]=Gtotal;

}
double etahmini;
etahmini=0.0;
GtotalE=0.0;
for(j=0;j<= nSegments;j++)
{
    SimEta[j]=0.0;
    for(i=0;i<=nSegments;i++)
    {
        if ((i==0) && (j==0))

            { SimEta[j]=SimEta[j]+((Sim[i][j])/2.0);

            }
        else if((i==nSegments) && (j==nSegments))
            { SimEta[j]=SimEta[j]+((Sim[i][j])/2.0);

            }
        else
            { SimEta[j]=SimEta[j]+Sim[i][j];

            }

    }

    SimEta[j]=SimEta[j]*(distvalueBeta*distvalueEta);
    BayesianEta[j]=SimEta[j]/outvalue;
    etahmini=etahmini+BayesianEta[j]*Pointe[j];
    GeneralDataEta[j][0]=Pointe[j];
    GeneralDataEta[j][1]=BayesianEta[j];
    GtotalE=GtotalE+BayesianEta[j];
    CumEta[j]=GtotalE;
    GeneralDataEta[j][2]=GtotalE;

}

PolyCumEta[0]=CumEta[0];
PolyPointe[0]=Pointe[0];
    k=0;
    for (int j = 0; j < nSegments; j++)
    {

        if (CumEta[j+1] != CumEta[j])
        {
            PolyCumEta[k+1] =CumEta[j+1];
            PolyPointe[k+1] =Pointe[j+1];
            k=k+1;
        }
    }
}

```

```

        PolyCumEta.resize(k);
        PolyPointe.resize(k);

        PolyCumBeta[0]=CumBeta[0];
        PolyPointb[0]=Pointb[0];
        k=0;
        for (int i = 0; i < nSegments; i++)
        {

            if (CumBeta[i+1] != CumBeta[i])
            {
                PolyCumBeta[k+1] =CumBeta[i+1];
                PolyPointb[k+1] =Pointb[i+1];
                k=k+1;
            }
        }
        PolyCumBeta.resize(k);
        PolyPointb.resize(k);

        for (int i = 0; i < 1; i++)
        {

            polyt(&presult1,&presult2,&presult3, CL[i],PolyPointb,PolyCumBeta);
            betalowervec[i]=presult1;
            betauppervec[i]=presult2;
            *betamedian = presult3;
            polyt(&presult1,&presult2,&presult3, CL[i],PolyPointe,PolyCumEta);
            etalowervec[i]=presult1;
            etauppervec[i]=presult2;
            *etamedian = presult3;
        }

        double TL;
        for (int i = 0; i < 1; i++)
        {

            for (int j = 0; j < 2; j++)
            {

                bisection(&TL,BetaEtaMarg,Pointb,Pointe,CL[i],pvalue[j],nSegments);
                sort(GeneralData.begin(),GeneralData.end());
                etaphatvec[i][j]=TL;
            }
        }

    }

    //for uniform distribution of beta
    void unfd(double *uniformmv, double unfb, double unfb)
    {
        double unffuncvalue;
        unffuncvalue=1/( unfb- unfb);
        *uniformmv = unffuncvalue;
    }

    //for likelihood funciton
    void lhfunc(double *weibullv, double pointbv, double pointev,int n, vector<double> &X)
    {
        int i;
        double A,B,C;
        double D=1.0;

```

```

A=pointbv/pointev;
for(i=0;i<n;i++)
{
B= pow((X[i]/pointev), (pointbv-1));
C= exp (-pow((X[i]/pointev), pointbv));
D=D*C*B*A;
}
* weibullv =D;
}

void polyt(double *presult1,double *presult2,double *presult3, long double dvalue,vector<double>
&X,vector<double> &Y)
{
long double dvaluelower,dvalueupper;
dvaluelower=(1-dvalue)/2;
dvalueupper=1-dvaluelower;
Engine *ep;
mxArray *xm = NULL, *ym=NULL,*result1 = NULL,*result2 = NULL,*result3 = NULL;
double *cresult;
double *XX = new double[X.size()];
for(int i = 0; i <X.size(); i++)
XX[i] = X[i];
double *YY = new double[Y.size()];
for(int i = 0; i <Y.size(); i++)
YY[i] = Y[i];
if (!(ep = engOpen("\0"))) {
fprintf(stderr, "\nCan't start MATLAB engine\n");
}
engEvalString(ep, "clc;");
engEvalString(ep, "clear;");
engEvalString(ep, "format compact;");
xm = mxCreateDoubleMatrix(1, X.size(), mxREAL);
memcpy(mxGetPr(xm), (void *)XX, X.size()*sizeof(XX));
engPutVariable(ep, "xm", xm);
engEvalString(ep, "xm;");
ym = mxCreateDoubleMatrix(1, Y.size(), mxREAL);
memcpy((void *)mxGetPr(ym), (void *)YY, Y.size()*sizeof(YY));
engPutVariable(ep, "ym", ym);
engEvalString(ep, "ym;");
string mpart1 = to_string(dvaluelower);
string str1="a=interp1(ym,xm," +mpart1 + ");";
const char * mtlcommand1 = str1.c_str();
string mpart2 = to_string(dvalueupper);
string str2="b=interp1(ym,xm," +mpart2 + ");";
const char * mtlcommand2 = str2.c_str();
engEvalString(ep,mtlcommand1);
engEvalString(ep,mtlcommand2);
engEvalString(ep,"c=interp1(ym,xm,0.5 );");
result1 = engGetVariable(ep,"a");
result2 = engGetVariable(ep,"b");
result2 = engGetVariable(ep,"c");
//
//fgetc(stdin);
//system("pause");
if ((result1 = engGetVariable(ep,"a")) == NULL)
cout << "not found \n\n";
else {
cresult = mxGetPr(result1);
*presult1=cresult[0];

```

```

    }

    if ((result2 = engGetVariable(ep, "b")) == NULL)
        cout << "not found \n\n";
    else {
        cresult = mxGetPr(result2);
        *presult2=cresult[0];
    }

    if ((result3 = engGetVariable(ep, "c")) == NULL)
        cout << "not found \n\n";
    else {
        cresult = mxGetPr(result3);
        *presult3=cresult[0];
    }
    delete[] XX;
    delete[] YY;
    mxDestroyArray(xm);
    mxDestroyArray(ym);
    engEvalString(ep, "close;");
    //engClose(ep);
}

void mlebetaetarange(double *c_palpa,double *t_palpa1,double *t_palpa2,double *s_palpa1,
double *s_palpa2,double *s_medalpha,double *t_medalpha,double p, double conflev,int n)
{
    long int R;
    int i,j;
    double k,mhat,s0hat;
    R=99999;
    vector<double> Sim00(R);
    vector<double> Sim01(R);
    vector<double> Sim02(R);
    vector<double> Y(n);
    k=(1-conflev)/2;
    double initm;
    initm=-1.0;
    //srand( (unsigned)time(NULL));
    double g=log(log(1/(1-p)));
    for(j=0;j<R;j++){
        for(i=0;i<n;i++)
            {Y[i]=-log( ((double)rand()+1.00)/(RAND_MAX+2) ); //n adet Weibull
dağılımından
            //cout<< Y[i]<<"\n";
            }//değer üretiliyor

        mle(&mhat,&s0hat,Y,n,-1.00);
        Sim00[j]=mhat*log(s0hat)+(1-mhat)*g; //R adet benzetim değeri üretiliyor ( )
        Sim01[j]=mhat; //R adet değeri üretiliyor
        Sim02[j]=mhat*log(s0hat); //R adet değerleri üretiliyor
    }

    sort(Sim00.begin(),Sim00.end()); //Benzetim değerleri üretiliyor
    sort(Sim01.begin(),Sim01.end());
    sort(Sim02.begin(),Sim02.end());

    *c_palpa=Sim00[round((R+1)*(conflev))-1]; //Cp? değerleri hesaplanıyor
    *t_palpa1=Sim01[round((R+1)*((1-k))-1)];//m için tablo degerleri (alpha)/2

```

```

*t_alpha2=Sim01[round((R+1)*(k))-1]; //m icin tablo degerleri (1-alpha)/2
*s_alpha1=Sim02[round((R+1)*(1-k))-1]; //s0 icin tablo degerleri alpha/2
*s_alpha2=Sim02[round((R+1)*(k))-1]; //s0 icin tablo degerleri (1-alpha)/2
*s_medalpha=Sim02[round((R+1)*(0.5))]; //s0med icin tablo degerleri
*t_medalpha=Sim01[round((R+1)*(0.5))]; //mmed icin tablo degerleri
//cout<<Sim02[round((R+1)*(k))-1]<<"\n";
//cout<<round((R+1)*(2*k))<<"\n";
}

void mle(double *mhat,double *s0hat,vector<double> &X,int n,double initm) //Maksimum
Benzerlik
{
int i;
double A,B,C,H,t,p,pt,m,s0,delta;
double sumXi=0, sumlnXi=0, sumlnXisq=0;

for(i=0;i<n;i++){
t=log(X[i]);
sumXi+=X[i];
sumlnXi+=t;
sumlnXisq+=t*t;
}
if(initm<0)
{
m=(6.00/(PIsq))*(sumlnXisq-sumlnXi*sumlnXi/n)/(n-1);
if(fabs(m)<0.000001)
m=0.0001;
m=1.00/sqrt(m);
}
else
m=initm;
do{
A=sumlnXi/n;
B=0; C=0; H=0;
for(i=0;i<n;i++){
t=log(X[i]);
p=pow(X[i],m);
B+=p;
pt=p*t;
C+=pt;
H+=pt*t;
}
delta=(A+1.00/m-C/B)/(1.00/(m*m)+(B*H-(C*C))/(B*B));
m=m+delta;
}while(fabs(delta)>0.00001);
s0=pow(B/n,1.00/m);

*mhat=m;
*s0hat=s0;

}

void f(double *resultf,vector<vector<double>> &X,vector<double> &Y,vector<double> &Z,double
TL,double CL,double p,int nSegments)
{

double etaust,Intotal,a,b;
long int i,j;
vector<double>BetaIntegral(nSegments+1);

```

```

vector<double> CumBetaIntegral(nSegments+1);
    Intotal=0.0;

    for(i=0;i<=nSegments;i++)
    {
        etaust=TL * exp (-(log(-log(1-p)) / Y [i])) ;

        {
            for(j=0;j< nSegments;j++)
            {
                if (((Z [j] <= etaust) & (Z [j+1] > etaust)) || ((Z [j] < etaust) &
(Z [j+1] >= etaust)))

                    {
                        a= (X[i][j+1]-X[i][j])/(Z [j+1]-Z [j]);
                        b= X[i][j]-a*Z[j];

                        BetaIntegral [i]=a*etaust+b;
                        Intotal=Intotal+BetaIntegral [i];
                        CumBetaIntegral [i]=Intotal;

                    }
            }
        }

        *resultf=Intotal;
    }

void bisection(double *TL,vector< double>> &X,vector<double> &Y,vector<double>
&Z,double CL,double p,int nsegment)
{

    double x1,x2,x3;
    double resultf1,resultf2,resultf3;
    double resultf;
    int count = 0;
    int iter;
    long int i;
    i=1;
    iter=999999;

    x1=Z[0];
    f(&resultf,X,Y,Z,x1,CL,p,nsegment);
    resultf1=resultf-(1-CL);
    do
    {

        if(i == nsegment)
        {
            cout<<"Çık"<< "\n";
            break;
        }

        x2=Z[i];

        f(&resultf,X,Y,Z,x2,CL,p,nsegment);
        resultf2=resultf-(1-CL);
        i++;

    }

```

```

        while ( (resultf1 * resultf2 > 0) || resultf2 == 0 );
        x1=Z[i-2];
        f(&resultf,X,Y,Z,x1,CL,p,nsegment);
        resultf1=resultf-(1-CL);
do
{
    if(count == iter)
    {
        break;
    }

    x3 = (x1 + x2)/2;

    f(&resultf,X,Y,Z,x3,CL,p,nsegment);
    resultf3=resultf-(1-CL);

    if( resultf1 * resultf3 < 0 )
    {
        x2 = x3;
        resultf2=resultf3;
    }
    else
    {
        x1 = x3;
        resultf1=resultf3;
    }
    count++;
}

while ( abs(x1 - x2) > 0.0000001 || resultf3 < 0 );
*TL=x3;
}

void etalowerfunc(double *etalowerv,double pointbeta,int n, vector<double> &X)
{
    int i;
    double A;
    double B=1.0;
    vector<double>Pointelower(n);
    for(i=0;i<n;i++)
    {
        A=X[i]/ pow(10.0,(307/(pointbeta-1)));
        Pointelower[i]=A;
    }
    sort(Pointelower.begin(), Pointelower.end());
    * etalowerv =Pointelower[n-1];
}

void normd (double *normv, double norm, double nors,double betavalue)
{
    double A,B,C,D,E,F;
    A= 1/(nors* sqrt(2*PI));
    B= betavalue -norm;
    C= - (pow(B,2));
    D=2*pow(nors,2);
    E=exp(C/D);
    F=A * E;
    *normv=F;}

```