

T.C
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

AĞIRLIKLIL UZAYLARDA İKİ DEĞİŞKENLİ LİNEER
POZİTİF OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

KEZBAN AYAR

HAZİRAN - 2011

Matematik Anabilim Dalında Kezban AYAR tarafından hazırlanan AĞIRLIKLIL UZAYLARDA İKİ DEĞİŞKENLİ LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Ali OLGUN

Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Kerim KOCA

Üye (Danışman) : Yrd. Doç. Dr. Ali OLGUN

Üye : Doç.Dr. Ali ARAL

22/06/2011

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. İhsan ULUER

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

AĞIRLIKLIL UZAYLARDAL İKİ DEĞİŞKENLİ LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

AYAR, KEZBAN

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Yrd. Doç. Dr. ALİ OLGUN

Haziran 2011, 68 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm Giriş ve Kaynak özetlerine ayrıldı. İkinci bölümde konu ile ilgili temel tanımlar ve teoremler verildi. Üçüncü bölüm Araştırma Bulguları adı altında verildi ve tezde temel olarak incelenen operatörler ve yakınsaklık özellikleri incelendi. Dördüncü bölüm tartışma ve sonuç olarak hazırlandı ve genel düşünceler ifade edildi.

Anahtar Kelimeler: Lineer pozitif operatörler Modifie Szasz-Mirakyan Operatörleri, Ağırlıklı uzaylar, Süreklilik modülü, Korovkin Teoremi, Baskakov Teoremi

ABSTRACT

APROXIMATION PROPERTIES OF TWO VARIABLES LINEAR POSITIVE OPERATORS IN WEIGHTED SPACES

AYAR, KEZBAN

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied sciences

Department of Mathematics, M.Sc. Thesis

Advisor: Asst. Prof. Dr. ALİ OLGUN

June 2011, 68 pages

This thesis consists of four basic chapters. In the first chapter, the introduction of the thesis and the summary of the Literature are given. In the second chapter, some Fundamental concepts of subject and theorems are given. In the third chapter,

The results of research are given and the operators which are investigated basically in this thesis and their properties are given. In the fourth chapter, the chapter of discussion and results are prepared and general ideas are given.

Key words: Linear Positive Operators, Modifie Szasz-Mirakyan Operators, Weighted Spaces Modulus of Continuity, Korovkin Theorem, Baskakov Theorem

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması esnasında hiçbir yardımı benden esirgemeyen değerli hocam sayın Yrd. Doç. Dr. ALİ OLGUN' a teşekkürlerimi bir borç bilirim. Ayrıca katkılarından dolayı Kırıkkale Üniversitesi Matematik Bölümü akademik personeline ve beni bugünlere kadar getiren sevgili aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
1. GİRİŞ	1
1.1. Kaynak Özetleri	1
1.2. Çalışmanın Amacı	1
2. MATERYAL VE YÖNTEM	2
2.1. Temel Tanımlar	2
2.2. Lineer Pozitif Operatörlerin Bazı Özellikleri	4
2.3. Korovkin Teoremi	5
2.4. Baskakov Teoremi	7
2.5. Szasz Operatörleri	9
2.6. Szasz Operatörlerinin Yaklaşım Hızı	18
2.6.1. $C[a, b]$ Uzayında Süreklilik Modülü	18
2.6.2. Ağırlıklı Uzaylardaki Süreklilik modülü	19
3. ARAŞTIRMA BULGULARI	27
3.1. Operatörün Tanımlanması Ve Özellikleri	27
3.2. L_n İçin Yaklaşım Teoremleri	45
3.3. Polinom Ağırlıklı Uzaylarda Yaklaşım	51
3.3.1. İki Değişkenli $A_{m,n}$ Operatörünün Tanımlanması	51
3.3.2. $A_{m,n}$ Operatörünün Yaklaşım Özellikleri	55
4. TARTIŞMA VE SONUÇ	67
KAYNAKLAR	68

SİMGELER DİZİNİ

$C[a,b]$	$[a,b]$ aralığında sürekli olan fonksiyonların uzayı
$B_\rho(\mathbb{R})$	Tüm reel ekseninde tanımlı ve $ f(x) \leq M_f \rho(x)$ koşulunu sağlayan fonksiyonların uzayı
$C_\rho(\mathbb{R})$	$B_\rho(\mathbb{R})$ uzayındaki sürekli fonksiyonların uzayı
$C_{\rho,K_f}[0,\infty)$	$C_\rho[0,\infty)$ dan olan ve $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = K_f < \infty$ koşulunu sağlayan fonksiyon uzayları
$L_n(f; r; x)$	L_n lineer pozitif operatörünün f fonksiyonuna uygulanması
$S_n(f; x)$	Szasz operatörleri
$\omega(f; \delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$\omega_{p,q}(x, y)$	$C_{p,q}$ ağırlıklı uzayında ağırlık fonksiyonunu
$A_{m,n}(f; x) \rightrightarrows f(x)$	$A_{m,n}(f; x)$ operatörünün $f_{h,\delta}$ fonksiyonuna düzgün yakınsaması
$\Omega(f; \delta)$	f fonksiyonunun $C_{\rho,K_f}[0,\infty)$ uzayında süreklilik modülü
$\omega(f, C_{p,q}; t, s)$	f fonksiyonunun $C_{p,q}$ ağırlıklı uzayında süreklilik modülü
$\ \cdot\ _{C[a,b]}$	$C[a,b]$ uzayında $\ f\ _{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} f(x) $ ile tanımlı olan norm
$\ \cdot\ _\rho$	$C_\rho(\mathbb{R})$ ve $B_\rho(\mathbb{R})$ uzaylarındaki $\ \cdot\ _\rho = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{ f(x) }{\rho(x)}$ ile tanımlı norm

1.GİRİŞ

Biz bu tezde bazı Modifie Szasz-Mirakyan operatörlerin yaklaşım özelliklerini inceleyeceğiz. Özellikle de ağırlıklı uzaylardaki yaklaşım özellikleri ve operatörlerin yaklaşım hızları ile ilgili sağladıkları bazı eşitsizliklerden bahsedeceğiz. Bunun için önce lineer pozitif operatörler teorisindeki bazı temel teorem ve tanımları vereceğiz ve bu teoremlerin bir uygulaması olarak Szasz-Mirakyan operatörlerinin yaklaşım özelliklerini inceleyeceğiz.

Daha sonra benzer tanım ve teoremlerin Ağırlıklı uzaylardaki karşılıklarını vereceğiz.

Tezin araştırma bulguları kısmında tezimizin temel operatörünü oluşturan lineer pozitif operatör dizisinin tek değişkenli halinin yaklaşım özelliklerinden daha sonra da benzer operatörün iki değişkenli halinin yaklaşım özelliklerinden bahsedeceğiz.

1.1.Kaynak Özetleri

Bu tezi hazırlarken öncelikle Z. Walczak'ın On Certain Positive Linear Operators İn Polynomial Weight Spaces ve Approximotion of Functions of two variables by Some Linear Positive Operators başlıklı çalışmalarını temel alacağız. Bununla birlikte ağırlıklı uzaylarda daha önce konumuza yakın olarak yapılan çalışmalardan yararlanacağız. Bu çalışmaların başında A. Hacıyev ve H.H. Hacısalıhoğlu kitabını A. Hacıyev'in ders notlarını temel alacağız. Ayrıca konu ile ilgili önceden hazırlanmış tezlerden yararlanacağız.

1.2. Çalışmanın Amacı

Ağırlıklı uzaylarda Modifie Szasz-Mirakyan operatörlerinin bazı operatörlerinin yaklaşım özelliklerinin incelenmesi ve operatörün yakınsaklığı ile ilgili eşitsizliklerin elde edilmesi.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Temel Tanımlar

Tanım 2.1.1: Operatör

Fonksiyonu fonksiyona dönüştüren bağıntılara operatör denir. Bu tanıma göre operatörlerin tanım ve değer kümelerini fonksiyonlar oluşturmaktadır.

Tanım 2.1.2: Lineer Operatör

X ve Y fonksiyon uzayları olsun,

$L: X \rightarrow Y$ şeklindeki L operatörü her $f_1, f_2 \in X$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için

$L(af_1 + bf_2) = aL(f_1) + bL(f_2)$ koşulunu sağlıyor ise L operatörüne lineer operatör denir.

Tanım 2.1.3: Pozitif Operatör

L operatörü pozitif değerli bir fonksiyonu yine pozitif değerli bir fonksiyona dönüştürüyor ise yani $f \geq 0$ iken $L(f; x) \geq 0$ oluyorsa L operatörüne pozitif operatör denir.

Lineer ve pozitif olan operatörlere lineer pozitif operatör denir.

Tanım 2.1.4: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f_n(x)$ e bir fonksiyon dizisi denir ve (f_n) ile gösterilir.

Tanım 2.1.5: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $L_n(f; x)$ e bir operatör dizisi denir ve (L_n) ile gösterilir.

Tanım 2.1.6: Kapalı bir $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli tüm reel değerli fonksiyonlardan oluşan kümeye $C[a, b]$ fonksiyon uzayı denir. Bu uzaydaki norm

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

şeklinde tanımlanır. Bu norm ile birlikte $C[a, b]$, lineer normlu bir uzaydır.

Tanım 2.1.7: Tüm reel ekseninde tanımlı ve $|f(x)| \leq M_f \rho(x)$ koşulunu sağlayan fonksiyonların uzayına $B_\rho(\mathbb{R})$ fonksiyon uzayı denir. Yani

$B_\rho(\mathbb{R}) = \{f: |f(x)| \leq M_f \rho(x)\}$ dir. Burada M_f , $\rho(x)$ fonksiyona bağlı sabit bir sayıdır. $B_\rho(\mathbb{R})$ uzayındaki sürekli fonksiyonların uzayına da $C_\rho(\mathbb{R})$ fonksiyon uzayı denir. Yani ,

$C_\rho(\mathbb{R}) = \{f: f \in B_\rho(\mathbb{R}) \text{ ve } f \text{ sürekli}\}$ dir. $C_\rho(\mathbb{R})$, $B_\rho(\mathbb{R})$ uzaylarına ağırlıklı uzaylar denir. Açıktır ki,

$C_\rho(\mathbb{R}) \subset B_\rho(\mathbb{R})$ dir ve bu uzaydaki norm

$$\|f\|_\rho = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{\rho(x)}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\rho(x)$ monoton artan, sürekli ve $\rho(x) \geq 1$ şartını sağlayan bir fonksiyondur ve bu fonksiyona ağırlık fonksiyonu denir. Tanımlanan bu norm ile $C_\rho(\mathbb{R})$ ve $B_\rho(\mathbb{R})$ lineer normlu uzaylardır.

Tanım 2.1.8: Bir (f_n) fonksiyonlar dizisinin f fonksiyonuna $C_\rho(\mathbb{R})$ normunda düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\rho = 0$$

olmasıdır. Yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|f_n(x) - f(x)|}{\rho(x)} = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Düzgün yakınsama $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.9: L lineer operatörü X uzayından Y uzayına dönüşüm yapıyorsa,

L operatörünün normu;

$$\|L\| = \|L\|_{X \rightarrow Y} = \sup_{\|f\|_X=1} \|L(f)\|_Y$$

şeklinde tanımlanır.

2.2. Lineer Pozitif Operatörlerin Bazı Özellikleri

Lemma 2.2.1: Lineer pozitif operatörler monoton artandır. Yani bir L lineer pozitif operatörü için

$$f \leq g \Rightarrow L(f) \leq L(g)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $f \leq g$ olsun. Bu durumda $g - f \geq 0$ olup L operatörü pozitif olduğundan

$L(g - f) \geq 0$ dir. Ayrıca L operatörü lineer olduğundan

$L(g - f) = L(g) - L(f)$ yazabiliriz.

O halde L operatörü pozitif ve lineer olduğundan $L(f) \leq L(g)$ eşitsizliği sağlanır.

Lemma 2.2.2: Eğer L lineer pozitif bir operatör ise bu durumda

$|L(f)| \leq L(|f|)$ eşitsizliği sağlanır.

İspat: Herhangi bir f fonksiyonu için

$-|f| \leq f \leq |f|$ dir.

L lineer pozitif bir operatör olduğundan yukarıdaki lemmadan dolayı monoton artandır.

$L(-|f|) \leq L(f) \leq L(|f|)$ yazılabilir. L lineer olduğundan

$L(-|f|) = -L(|f|)$ dir. Bu eşitlikten

$-L(|f|) \leq L(f) \leq L(|f|)$

eşitsizliği elde edilir.

Korovkin 1953 yılında ki bir çalışmasında yaklaşımlar teorisindeki temel olan Korovkin teoremini vermiştir.

2.3. Korovkin Teoremi

$$f \in C[a, b] \text{ ve tüm reel ekseninde } |f(x)| \leq M_f \quad (2.3.1)$$

olsun. Her $x \in [a, b]$ için $L_n(f; x)$ lineer pozitif operatör olmak üzere

$L_n(f; x) \rightrightarrows f(x)$ olması için gerek ve yeter koşul

$$i) L_n(1; x) \rightrightarrows 1$$

$$ii) L_n(t; x) \rightrightarrows x$$

$$iii) L_n(t^2; x) \rightrightarrows x^2$$

koşullarının sağlanmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki $f \in C[a, b]$ olsun. f fonksiyonu sürekli olduğundan her pozitif ϵ sayısına karşılık öyle bir δ bulunabilir ki $|t - x| < \delta$ olduğunda

$|f(t) - f(x)| < \epsilon$ olur. $|t - x| > \delta$ olduğunda ise (2.3.1) den ve üçgen eşitsizliğinden ;

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)| \leq 2M_f \quad (2.3.2)$$

olur. Ayrıca $|t - x| > \delta$ iken $\frac{|t - x|}{\delta} > 1$ olacağından;

$$\frac{(t - x)^2}{\delta^2} > 1 \quad (2.3.3)$$

sağlanır. (2.3.1) ve (2.3.2) den

$$|f(t) - f(x)| \leq 2M_f \leq 2M_f \frac{(t - x)^2}{\delta^2}$$

yazabiliriz. Bu işlemler sonucunda

$$|t - x| < \delta \text{ için } |f(t) - f(x)| < \epsilon$$

$$|t - x| > \delta \text{ için } |f(t) - f(x)| < 2M_f \frac{(t - x)^2}{\delta^2}$$

sonuçları elde edilir. Yani her $t \in \mathbb{R}$ ve her $x \in [a, b]$ için

$$|f(t) - f(x)| < \epsilon + 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \quad (2.3.4)$$

dir. Şimdi (i), (ii), (iii) koşullarını sağlayan L_n operatör dizisinin,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f(t); x) - f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliğini sağladığını gösterelim. L_n lineer olduğundan

$$\begin{aligned} |L_n(f(t); x) - f(x)| &= |L_n(f(t); x) - f(x) + L_n(f(x); x) - L_n(f(x); x)| \\ &= |L_n(f(t); x) - L_n(f(x); x) + L_n(f(x); x) - f(x)| \\ &= |L_n((f(t) - f(x)); x) + f(x)(L_n(1; x) - 1)| \end{aligned}$$

dir. Üçgen eşitsizliğinden

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq |L_n((f(t) - f(x)); x)| + |f(x)| |L_n(1; x) - 1|$$

yazılabilir. L_n lineer pozitif bir operatör olduğundan ve Lemma 2.2.2 den

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq L_n(|f(t) - f(x)|; x) + |f(x)| |L_n(1; x) - 1|$$

eşitsizliği sağlanır. (2.3.1.) den

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq L_n(|f(t) - f(x)|; x) + M_f |L_n(1; x) - 1|$$

yazılabilir. Lemma 2.2.1 den L_n monoton artan olup (2.3.4)

kullanılırsa

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq \left| L_n \left(\epsilon + \frac{2M_f}{\delta^2} (t-x)^2; x \right) \right| + M_f |L_n(1; x) - 1| \quad (2.3.5)$$

bulunur. Ayrıca L_n nin lineerliğinden

$$\begin{aligned} L_n \left(\epsilon + \frac{2M_f}{\delta^2} (t-x)^2; x \right) &= L_n(\epsilon; x) + L_n \left(\frac{2M_f}{\delta^2} (t-x)^2; x \right) \\ &= \epsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} L_n(t^2 - 2xt + x^2; x) \\ &= \epsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} [L_n(t^2; x) - x^2 - x^2 + 2x^2 - 2xL_n(t; x) + x^2 L_n(1; x)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \epsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} [L_n(t^2; x) - x^2 + 2x^2 - 2xL_n(t; x) + x^2L_n(1; x) - x^2] \\
&= \epsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} [(L_n(t^2; x) - x^2) + 2x(x - L_n(t; x)) + x^2(L_n(1; x) - 1)]
\end{aligned}$$

yazılabilir. (2.3.5) in kullanılmasıyla

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq \epsilon L_n(1; x) + M_f |L_n(1; x) - 1| +$$

$$\frac{2M_f}{\delta^2} [(L_n(t^2; x) - x^2) + 2x(x - L_n(t; x)) + x^2(L_n(1; x) - 1)]$$

eşitliği elde edilir. (i), (ii), (iii) koşullarının kullanılmasıyla

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| < \epsilon$$

elde edilir. Buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |L_n(f(t); x) - f(x)| = 0$$

sonucu elde edilir, ki bu ispatı tamamlar.

2.4. Baskakov Teoremi

$f \in C[a, b]$ ve tüm reel ekseninde $|f(x)| \leq M_f(1 + x^2)$ olsun. $L_n(f; x)$

lineer pozitif operatör dizisi olmak üzere her $x \in [a, b]$ için

$$i) L_n(1; x) \rightrightarrows 1$$

$$ii) L_n(t; x) \rightrightarrows x$$

$$iii) L_n(t^2; x) \rightrightarrows x^2$$

koşullarının sağlanması için gerek ve yeter koşul $[a, b]$ aralığında

$L_n(f; x) \rightrightarrows f(x)$ olmasıdır.

İspat: $1, x, x^2 \in [a, b]$ ve

$$|f(x)| \leq M_f(1 + x^2) \tag{2.4.1}$$

koşulunu sağladıklarından dolayı

$L_n(f; x) \rightrightarrows f(x)$ olması durumunda (i), (ii), (iii) koşulları sağlanır.

(i), (ii), (iii) nin sağlanması halinde $L_n(f; x) \rightrightarrows f(x)$ olduğunu göstermemiz ispat için yeterlidir.

$f \in C[a, b]$ olsun. f fonksiyonu sürekli olduğundan $\forall \epsilon > 0$ için $\exists \delta$ vardır öyle ki $|t - x| < \delta$ olduğunda

$$|f(t) - f(x)| < \epsilon \quad (2.4.2)$$

sağlanır. Eğer $|t - x| \geq \delta$ ise $\frac{|t-x|}{\delta} > 1$ olacağından $\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1$

eşitsizliği geçerlidir. (2.4.1) den ve üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |f(t) - f(x)| &\leq M_f(1 + t^2 + 1 + x^2) \\ &= M_f(2 + (t - x + x)^2 + x^2) \\ &= M_f(2 + (t - x)^2 + 2x(t - x) + x^2 + x^2) \\ &\leq M_f(2 + (t - x)^2 + 2x|t - x| + 2x^2) \\ &\leq M_f\left(2\frac{(t-x)^2}{\delta^2} + (t-x)^2 + 2x\frac{(t-x)^2}{\delta} + 2x^2\frac{(t-x)^2}{\delta^2}\right) \\ &= M_f(t-x)^2\left(\frac{2}{\delta^2} + 1 + \frac{2x}{\delta} + \frac{2x^2}{\delta^2}\right) \\ &= M_f(t-x)^2K(x) \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

$\forall x \in C[a, b]$ için $K(x)$ sınırlı olduğu açıktır. $\forall \epsilon > 0$ için (2.4.2) ve (2.4.3) ten

$$|f(t) - f(x)| \leq \epsilon + M_f(t-x)^2K(x) \quad (2.4.4)$$

yazılabilir. L_n operatörü (2.4.4) eşitsizliğine uygulanıp, basit düzenlemeler yapılırsa

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq L_n(|f(t) - f(x)|; x)$$

$$\leq L_n(\epsilon; x) + M_f K(x) L_n((t-x)^2; x)$$

$$= L_n(\epsilon; x) + M_f K(x) [L_n(t^2; x) - 2xL_n(t; x) + x^2L_n(1; x) - 2x^2 + 2x^2]$$

$$= L_n(\epsilon; x) + M_f K(x)[(L_n(t^2; x) - x^2) - 2x(L_n(t; x) - x) + x^2(L_n(1; x) - 1)]$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq \epsilon(L_n(1; x) - 1) + \epsilon + M_f K(x)[(L_n(t^2; x) - x^2)$$

$$- 2x(L_n(t; x) - x) + x^2(L_n(1; x) - 1)] \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

(i), (ii), (iii) den dolayı eşitsizliğin sağ tarafı $n \rightarrow \infty$ için ϵ a eşit olur ki bu da istenilendir.

Şimdi Korovkin teoreminin basit bir uygulaması olarak, 1950 yılında Otto Szasz tarafından tanımlanan Szasz operatörünün tanımını verelim ve yakınsaklık özelliklerini inceleyelim. Bu operatörler Literatürde Szasz-Mirakyan operatörleri olarak bilinmektedir.

Tanım 2.5.1: (Szasz Operatörleri)

$$S_n(f, x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (2.5.1)$$

şeklinde tanımlanan lineer pozitif operatörlere Szasz Operatörleri denir.

Teorem 2.5.1: (2.5.1) ile verilen

$$S_n(f, x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

şeklinde ki Szasz Operatörleri $A \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $[0, A]$ kapalı aralığında sürekli ve tüm pozitif yarı ekseninde de sınırlı olan bir f fonksiyonuna bu aralıkta düzgün yakınsar. Yani $f \in C[0, A]$ için

$$L_n(f; x) \rightrightarrows f(x) \quad , x \in [0, A] \text{ dir.}$$

İspat: İspat için (2.5.1) operatörlerinin Korovkin teoreminin şartlarını gerçeklediğini göstermek yeterlidir. Önce $S_n(f, x)$ in lineer ve pozitif olduğunu gösterelim.

Lineerlik:

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C[0, A]$ için

$$\begin{aligned}
S_n(af(t) + bg(t); x) &= e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \left(af\left(\frac{k}{n}\right) + bg\left(\frac{k}{n}\right) \right) \frac{(nx)^k}{k!} \\
&= e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} (af)\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} + e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} (bg)\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} \\
&= ae^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} + be^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} g\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} \\
&= aS_n(f(t); x) + bS_n(g(t); x)
\end{aligned}$$

olduğundan (S_n) lineer bir operatördür.

Pozitiflik: $k \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0, A]$ için

$$0 \leq e^{-nx} \frac{(nx)^k}{k!}$$

olduğundan $f \geq 0$ ise $S_n(f, x) \geq 0$ dır. Böyle (S_n) pozitif operatördür. Şimdi;

$$i) S_n(1; x) \rightrightarrows 1$$

$$ii) S_n(t; x) \rightrightarrows x$$

$$iii) S_n(t^2; x) \rightrightarrows x^2$$

olduğunu gösterirsek $S_n(f; x) \rightrightarrows f(x)$ olduğunu göstermiş oluruz.

$$i) S_n(1; x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} 1 = e^{-nx} e^{nx} = 1$$

$$S_n(1; x) = 1 \tag{2.5.2}$$

$$ii) S_n(t; x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} \frac{k}{n} = e^{-nx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nx)^k}{n(k-1)!}$$

bu eşitlikte $k \rightarrow k + 1$ yazarsak

$$= \frac{e^{-nx}}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^{k+1}}{k!} = \frac{nx}{n} e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} = x$$

olur. O halde

$$S_n(t; x) = x \quad (2.5.3)$$

dir.

$$\begin{aligned} \text{iii) } S_n(t^2, x) &= e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} \frac{k^2}{n^2} \\ &= e^{-nx} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} \frac{k(k-1)}{n^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} \frac{k}{n^2} \right] \\ &= e^{-nx} \left[\frac{1}{n^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(nx)^k}{(k-2)!} + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nx)^k}{(k-1)!} \right] \end{aligned}$$

ilk toplamda $k \rightarrow k+2$, 2. toplamda $k \rightarrow k+1$ yazarsak;

$$\begin{aligned} &= \frac{e^{-nx}}{n^2} (nx)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} + \frac{e^{-nx}}{n^2} (nx) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} \\ &= x^2 + \frac{x}{n} \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

olduğundan $n \rightarrow \infty$ için

$$S_n(t^2, x) = x^2 + \frac{x}{n}$$

olarak elde edilir. O halde (2.5.1) operatörleri Korovkin Teoreminin şartlarını gerçeklediğinden (i), (ii), (iii) şartları sağlandığından Korovkin Teoremi gereğince

$$S_n(f; x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$$

olur.

$f \in C[a, b]$ için Korovkin ve Baskakov teoremlerinin geçerli olduğunu biliyoruz. Ancak sınırsız bölgelerde Baskakov teoreminin geçerli olmadığını yani Baskakov

teoreminin koşullarının sağlandığı halde düzgün yakınsamanın sağlanmadığı bilinmektedir. O halde sınırsız bölgelerde yakınsaklık teoremini verebilmek için önce aşağıdaki önermeleri verelim, arkasından da yakınsaklık teoremini ifade edelim.

Önerme 1: $C_\rho(\mathbb{R})$ de tanımlı lineer pozitif bir operatörün $C_{\rho_1}(\mathbb{R})$ den $B_{\rho_2}(\mathbb{R})$ ye dönüşüm yapması için gerek ve yeter şart $\|L_{\rho_1}(\mathbb{R})\|_{\rho_2} \leq M_1$ olacak şekilde bir $M_1 \geq 0$ sabitinin bulunmasıdır. Burada $\rho_1(x)$ ve $\rho_2(x)$ fonksiyonları 1 den büyük, monoton artan fonksiyonlardır.

İspat: Gerekliklik: $L: C_{\rho_1}(IR) \rightarrow B_{\rho_2}(IR)$ bir dönüşüm olsun. O halde $\forall f \in C_{\rho_1}(\mathbb{R})$ için $L(f; x) \in B_{\rho_2}$ dir. Ayrıca $|\rho_1(x)| \leq M_1 \rho_2(x)$ sağlandığından $\rho_1(t) \in C_{\rho_1}$ dir.

Bu durumda;

$$L(\rho_1(t); x) \in B_{\rho_2}$$

O halde,

$$L(\rho_1(t); x) \leq M_1 \rho_2(x)$$

$$\Rightarrow \frac{L(\rho_1(t); x)}{\rho_2(x)} \leq M_1$$

Her iki tarafın $x \in \mathbb{R}$ üzerinden supremumu alınırsa sağ taraf x ten bağımsız olduğundan

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|L(\rho_1(t); x)|}{\rho_2(x)} \leq M_1$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

Yeterlilik: Şimdi kabul edelim ki $\|L(\rho_1)\|_{\rho_2} \leq M_1$ olsun. $L: C_{\rho_1}(\mathbb{R}) \rightarrow B_{\rho_2}(IR)$

olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır. $\forall f \in C_{\rho_1}$ için $\|f\|_{\rho_1} \leq M_1 = M$ vardır.

L lineer pozitif operatörü monoton olduğundan

$$L(f; x) \leq L(|f|; x) = L\left(\frac{|f|}{\rho_1(t)} \rho_1(t); x\right) \leq \|f\|_{\rho_1} L(\rho_1(t); x)$$

yazabiliriz. Dolayısıyla

$|L(f; x)| \leq M L(\rho_1(t); x)$ elde edilir. Bu son eşitsizliğin $\rho_2(x)$ e bölünmesiyle

$$\frac{L(f; x)}{\rho_2(x)} \leq M \frac{L(\rho_1(t); x)}{\rho_2(x)}$$

elde edilir. Her iki tarafın $x \in \mathbb{R}$ üzerinden supremumu alınırsa

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|L(f; x)|}{\rho_2(x)} \leq M \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|L(\rho_1(t); x)|}{\rho_2(x)}$$

bulunur. O halde

$\|L(f)\|_{\rho_2} \leq M \|L(\rho_1)\|_{\rho_2}$ olup hipotezden $\|L(f)\|_{\rho_2} \leq M \cdot M_1$ yazabiliriz.

$M \cdot M_1 = M_2$ dersek $\|L(f)\|_{\rho_2} \leq M_2$ sağlanır. Yani $L(f; x) \in B_{\rho_2}$ dir.

Önerme 2: $L: C_{\rho_1}(\mathbb{R}) \rightarrow B_{\rho_2}(\mathbb{R})$ lineer pozitif bir operatör olsun. Bu durumda

$\|L\|_{C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_2}} = \|L(\rho_1)\|_{\rho_2}$ dir.

İspat: $L: C_{\rho_1}(\mathbb{R}) \rightarrow B_{\rho_2}(\mathbb{R})$ lineer pozitif operatörü için

$$\begin{aligned} \|L\|_{C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_2}} &= \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \|L(f)\|_{\rho_2} = \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|L(f; x)|}{\rho_2(x)} \\ &= \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\left| L\left(\frac{|f|}{\rho_1} \cdot \rho_1; x\right) \right|}{\rho_2(x)} \leq \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \|f\|_{\rho_1} \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|L(\rho_1(t); x)|}{\rho_2(x)} \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|L(\rho_1(t); x)|}{\rho_2(x)} \end{aligned}$$

yazılabilir. O halde

$$\|L\|_{C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_2}} \leq \|L(\rho_1)\|_{\rho_2} \tag{2.5.5}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca

$$\|L\|_{C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_2}} = \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \|L(f)\|_{\rho_2} \geq \sup_{\|\rho_1\|_{\rho_1}=1} \|L(\rho_1)\|_{\rho_2} = \|L(\rho_1)\|_{\rho_2}$$

$$\text{olduğundan } \|L\|_{C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_2}} \geq \|L(\rho_1)\|_{\rho_2} \quad (2.5.6)$$

elde edilmiş olup (2.5.5) ve (2.5.6) ten $\|L\|_{C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_2}} = \|L(\rho_1)\|_{\rho_2}$ olur.

Bu da ispatı tamamlar.

Önerme 3: Kabul edelim ki : $C_{\rho_1}(\mathbb{R})$ den $B_{\rho_2}(\mathbb{R})$ ye dönüşüm yapan (L_n) lineer pozitif operatörler dizisi için aşağıdaki şartlar geçerli olsun.

a) $\forall x \in \mathbb{R}$ için $\rho_1 \leq M\rho_2(x)$ olacak şekilde bir M sayısı mevcut olsun.

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(\rho_1) - \rho_1\|_{\rho_2} = 0$$

sağlansın. O takdirde (L_n) düzgün sınırlıdır. Yani $\|L_n\|_{C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_2}} \leq K$ olacak şekilde bir pozitif K sabiti vardır.

İspat: $\|L_n(\rho_1) - \rho_1\|_{\rho_2} = 0$ ise $\forall \epsilon > 0$ için $\exists N = N(\epsilon)$ vardır öyle ki $\forall n \geq N$

için $\|L_n(\rho_1) - \rho_1\|_{\rho_2} < \epsilon$ olur. Diğer yandan $\rho_1(x) \leq M\rho_2(x)$ olduğundan $\|\rho_1\|_{\rho_2} \leq M$ dir. Dolayısıyla $\forall n \in \mathbb{N}$ için önerme 2 den dolayı

$$\|L_n\|_{C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_2}} = \|L_n(\rho_1)\|_{\rho_2} = \|L_n(\rho_1) - \rho_1 + \rho_1\|_{\rho_2}$$

$$\leq \|L_n(\rho_1) - \rho_1\|_{\rho_2} + \|\rho_1\|_{\rho_2} < \epsilon + M \text{ yazılabilir.}$$

$$K = \max \left\{ \|L_1\|_{C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_2}}, \|L_2\|_{C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_2}}, \|L_3\|_{C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_2}}, \dots, \epsilon + M \right\} \text{ seçilirse}$$

$\|L_n\|_{C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_2}} \leq K$ elde edilmiş olur ki bu da ispatı tamamlar.

Önerme 4: $L_n: C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_2}$ lineer pozitif operatörler dizisi düzgün sınırlı ve

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)} = 0$$

olsun.

$$\varphi_n(s) = \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{|x| \leq s} \frac{|L_n(f; x)|}{\rho_1(x)}$$

olmak üzere $\forall s$ için

$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(s) = 0$ ise o takdirde $\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n\|_{C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_2}} = 0$ dir.

ispat: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)} = 0$ olduğundan $\forall \epsilon > 0$ için öyle bir s_0 vardır ki $|x| > s_0$

için

$\frac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)} < \epsilon$ olur. Ayrıca $\rho_1(x)$ ve $\rho_2(x)$ sürekli ve $\rho_2(x)$, 1 den büyük olduğundan

$\frac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)}$ de sürekli dir. Sürekli her fonksiyon sonlu aralıkta sınırlı olacağından

$|x| < s_0$ için $\frac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)} \leq C^*$ olacak şekilde bir C^* sabiti vardır. O halde

$$\|L_n\|_{C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_2}} = \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \|L_n(f)\|_{\rho_2}$$

$$= \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|L_n(f; x)|}{\rho_2(x)}$$

$$= \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \left\{ \sup_{|x| > s_0} \frac{|L_n(f; x)|}{\rho_2(x)} + \sup_{|x| \leq s_0} \frac{|L_n(f; x)|}{\rho_2(x)} \right\}$$

$$\leq \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \left\{ \sup_{|x| > s_0} \frac{|L_n(f; x)|}{\rho_1(x)} \frac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)} + \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \frac{|L_n(f; x)|}{\rho_1(x)} \frac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)} \right\}$$

$\leq \|L_n\|_{C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_2}} \epsilon + C \varphi_n(S_0)$ yazılabilir. $L_n: C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_1}$ düzgün sınırlı olduğundan

$\|L_n\|_{C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_2}} \leq K\epsilon + C \varphi_n(S_0)$ bulunur. Ayrıca hipotezden $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(s) = 0$ dır.

Dolayısıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n\|_{C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_2}} = 0$ elde edilir.

Teorem 2.5.2: $L_n: C_{\rho_1}(\mathbb{R}) \rightarrow B_{\rho_2}(\mathbb{R})$ lineer pozitif operatörler

dizisi, $C_{\rho_1}(\mathbb{R}) \rightarrow B_{\rho_2}(\mathbb{R})$ düzgün sınırlı ve $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)} = 0$ olsun. Eğer her s için

$$|x| \leq s \text{ olmak üzere } \lim_{n \rightarrow \infty} |L_n(f; x) - f(x)| = 0 \quad (2.5.7)$$

oluyorsa $\forall f \in C_{\rho_1}(\mathbb{R})$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f; x) - f(x)\|_{\rho_2} = 0$

dır.

İspat: Önerme 4 te $A_n = L_n - E$ alalım. Burada $E, C_{\rho_1}(\mathbb{R})$ deki birim operatördür.

Bu durumda

$$\begin{aligned}\varphi_n(s) &= \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \left\{ \sup_{|x| \leq s} \frac{|(L_n - E)(f; x)|}{\rho_1(x)} \right\} \\ &= \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \left\{ \sup_{|x| \leq s} \frac{|L_n(f; x) - f(x)|}{\rho_1(x)} \right\}\end{aligned}$$

dir. Her bir x için $\rho_1(x) \geq 1$ olduğundan

$$\varphi_n(s) \leq \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \left\{ \sup_{|x| \leq s} |L_n(f; x) - f(x)| \right\}$$

yazılabilir. Burada (2.5.7) nin kullanılmasıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(s) = 0$ elde edilir. O halde

önerme 4 ün sonucu olarak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n - E\|_{C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_2}} = 0 \quad (2.5.8)$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}\|L_n(f) - f\|_{\rho_2} &= \|L_n(f) - E(f)\|_{\rho_2} = \|(L_n - E)(f)\|_{\rho_2} \\ &= \left\| (L_n - E) \left(\frac{|f|}{\rho_1} \rho_1 \right) \right\|_{\rho_2} \leq \|f\|_{\rho_1} \|(L_n - E)(\rho_1)\|_{\rho_2}\end{aligned}$$

olduğundan Önerme 2 den dolayı $\|(L_n - E)(\rho_1)\|_{\rho_2} = \|(L_n - E)(\rho_1)\|_{C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_2}}$

yazabiliriz. O halde $\|L_n(f) - f\|_{\rho_2} = \|L_n - E\|_{C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_2}} \cdot \|f\|_{\rho_1}$ olup (2.5.7) ten dolayı $\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f) - f\|_{\rho_2} = 0$ elde edilir.

Şimdi sınırsız bölgelerde yakınsaklığa bir uygulama olarak Szasz Operatörlerinin yakınsaklığını inceleyelim;

Teorem 2.5.3: $\rho_2(x) \geq 1$, sürekli ve monoton artan bir fonksiyon olmak üzere;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^2}{\rho_2(x)} = 0 \quad (2.5.9)$$

şartını sağlasın. Bu durumda $\forall f \in C_{1+x^2}(\mathbb{R}^+)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(f) - f\|_{\rho_2} = 0$ dır.

İspat: İspat için Szasz operatörlerinin Teorem 2.5.2 in koşullarını sağladığını gösterelim. Bunun için öncelikle $S_n(f; x)$ in $C_{\rho_1}(\mathbb{R}^+)$ den $B_{\rho_2}(\mathbb{R}^+)$ ye dönüşüm yapan lineer pozitif operatör dizisi olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} \|S_n(\rho_1)\|_{\rho_2} &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|S_n(1+t^2); x|}{\rho_2(x)} \text{ olup (2.5.4) ten} \\ \|S_n(\rho_1)\|_{\rho_2} &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\left|1+x^2 + \frac{x}{n}\right|}{\rho_2(x)} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{1+x^2}{\rho_2(x)} + \frac{x}{\rho_2(x)} \cdot \frac{1}{n} \right\} \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

yazılabilir. Diğer yandan $1+x^2$ ve $\rho_2(x)$ fonksiyonları sürekli ve $\rho_2(x) \geq 1$ olduğundan $\frac{1+x^2}{\rho_2(x)}$ de sürekli dir. Sürekli her fonksiyon sonlu aralıkta sınırlı

olacağından $0 \leq x \leq N$ için $\frac{1+x^2}{\rho_2(x)} \leq M$ olacak şekilde bir M sabiti vardır.

Ayrıca (2.5.9) dan ve limit tanımından $N < x$ için

$$\frac{1+x^2}{\rho_2(x)} < \epsilon \text{ sağlanır. Dolayısıyla her durumda}$$

$$\frac{1+x^2}{\rho_2(x)} < M + \epsilon \quad (2.5.11)$$

yazılabilir. Ayrıca $0 < \frac{x}{\rho_2(x)} < \frac{1+x^2}{\rho_2(x)} < M + \epsilon$ ve dolayısıyla

$$\frac{x}{\rho_2(x)} < M + \epsilon \quad (2.5.12)$$

dir. (2.5.11) ve (2.5.12) un (2.5.10) da kullanılmasıyla $\|S_n(\rho_1)\|_{\rho_2} = 2(M + \epsilon)$

bulunur. $2(M + \epsilon) = M_1$ dersek $\|S_n(\rho_1)\|_{\rho_2} \leq M_1$

eşitsizliği elde edilir. Böylece önerme 1 den dolayı $S_n: C_{\rho_1}(\mathbb{R}^+) \rightarrow B_{\rho_2}(\mathbb{R}^+)$

dir. Şimdi de $S_n: C_{\rho_1}(\mathbb{R}^+) \rightarrow B_{\rho_2}(\mathbb{R}^+)$ düzgün sınırlı olduğunu gösterelim. Bunun için $\|S_n\|_{C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_2}} \leq K$ olacak şekilde K sabitinin varlığını göstermeliyiz. Önerme 2 den dolayı

$$\begin{aligned} \|S_n\|_{C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_2}} &= \|S_n(\rho_1)\|_{\rho_2} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|S_n(1+t^2; x)|}{1+x^2} \\ \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|1+x^2 + \frac{x}{n}|}{1+x^2} &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ 1 + \frac{x}{1+x^2} \frac{1}{n} \right\} \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

yazılabilir. Diğer yandan $x \leq 1+x^2$ olduğundan $\frac{x}{1+x^2} \leq 1$ ve $\frac{1}{n} \leq 1$ dir.

Bu eşitsizliklerin (2.5.13) da kullanılmasıyla $\|S_n\|_{C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_2}} \leq 2$ elde edilir. Böylece

$K = 2$ dir ve düzgün sınırlılık sağlanır. O halde $|x| < s$ için $f \in C_{1+x^2}[0, s] \subset C[0, s]$

olup Korovkin Teoreminden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq s} |S_n(f; x) - f(x)| = 0$$

dir. Diğer yandan

$$\max_{0 \leq x \leq s} |S_n(f; x) - f(x)| \geq |S_n(f; x) - f(x)| \geq 0$$

olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq s} |S_n(f; x) - f(x)| = 0$$

elde edilir. Böylece Teorem 2.5.2 den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(f) - f\|_{\rho_2} = 0$$

sonucuna ulaşılır.

2.6. Szasz Operatörlerinin Yaklaşım Hızı

Tanım 2.6.1: $C[a, b]$ Uzayında Süreklilik Modülü

$f \in C[a, b]$ olsun. $\forall \delta > 0$ için

$$\omega(f; \delta) = \sup_{\substack{|t-x| \leq \delta \\ x, t \in [a, b]}} |f(t) - f(x)|$$

ile tanımlanan $\omega(f; \delta)$ ifadesine f fonksiyonunun "süreklilik modülü" denir.

$C[a, b]$ uzayında süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri gerçekler.

$$i) \omega(f; \delta) \geq 0$$

$$ii) \delta_1 \leq \delta_2 \text{ ise } \omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2)$$

$$iii) m \in \mathbb{N} \text{ için } \omega(f; m\delta) \leq m \omega(f; \delta)$$

$$iv) \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{ için } \omega(f; \mu\delta) \leq (\lambda + 1) \omega(f; \delta)$$

$$v) \lim_{\delta \rightarrow \infty} \omega(f; \delta) = 0$$

$$vi) |f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t - x|)$$

$$vii) |f(t) - f(x)| \leq \left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1 \right) \omega(f; \delta)$$

Şimdi $f \in C_\rho[0, \infty)$ olan ve

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = K_f < \infty \quad (2.6.1)$$

koşulunu fonksiyonların uzayını $C_{\rho, K_f}[0, \infty)$ ile gösterelim ve süreklilik modülünün ağırlıklı uzaylardaki tanımından ve özelliklerinden bahsedelim.

2.6.2. Ağırlıklı Uzaylardaki Süreklilik Modülü

Bunun için önce;

$$|f(x+h) - f(x)| \text{ değerini hesaplayalım. } f(x+h), f(x) \in C_\rho[0, \infty)$$

olduğundan $|f(x)| \leq M_f \rho(x)$ ve $\rho(x) = 1 + x^2$ seçildiğinde

$$\frac{|f(x)|}{1 + x^2} \leq M_f \quad (2.6.2)$$

eşitsizliği vardır. Benzer şekilde;

$$|f(x+h)| \leq M_f \rho(x+h) \Rightarrow \frac{|f(x+h)|}{1+(x+h)^2} \leq M_f \quad (2.6.3)$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu durumda üçgen eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &\leq |f(x+h)| + |f(x)| \\ &= \frac{|f(x+h)|}{1+(x+h)^2} [1+(x+h)^2] + \frac{|f(x)|}{1+x^2} (1+x^2) \end{aligned}$$

yazabiliriz. (2.6.2) ve (2.6.3) ün kullanılmasıyla

$$|f(x+h) - f(x)| \leq M_f [(1+(x+h)^2) + (1+x^2)] \quad (2.6.4)$$

olarak elde edilir.

Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $(a+b)^2 \leq 4(a^2+b^2)$ eşitsizliği geçerli olduğundan

$a = x, b = h$ için $(x+h)^2 \leq 4(x^2+h^2)$ yazılabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} (1+(x+h)^2) + (1+x^2) &\leq 1+4(x^2+h^2) + 1+x^2 \\ &\leq 1+4(x^2+h^2) + 1+x^2+3+h^2 \\ &= 5+5(x^2+h^2) \\ &= 5(1+x^2+h^2) \\ &\leq 5(1+x^2+h^2+x^2h^2) \\ &= 5(1+x^2)(1+h^2) \\ &\Rightarrow \frac{1+(x+h)^2}{1+x^2} + \frac{1+x^2}{1+h^2} \leq 5 \frac{1+x^2}{1+h^2} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik (2.6.4) kullanılırsa

$$|f(x+h) - f(x)| \leq M_f \cdot 5(1+x^2)(1+h^2)$$

sonucu elde edilir. Dolayısıyla;

$$|f(x+h) - f(x)| \leq C(1+x^2)(1+h^2)$$

olarak yazılabileceğinden $\forall f \in C_{\rho, K_f}[0, \infty)$ için

$$\Omega(f; \delta) = \sup_{\substack{x \geq 0 \\ |h| \leq \delta}} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{(1+x^2)(1+h^2)}$$

eşitliği vardır. Şimdi aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 2.6.2: (Süreklilik Modülü)

$f \in C_{\rho, K_f}[0, \infty)$ için

$$\Omega(f; \delta) = \sup_{\substack{x \geq 0 \\ |h| \leq \delta}} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{(1+x^2)(1+h^2)}$$

şeklinde tanımlanan $\Omega(f; \delta)$ fonksiyonuna f fonksiyonunun $C_{\rho, K_f}[0, \infty)$

uzayında ‘‘Süreklilik Modülü’’ adı verilir.

$\Omega(f; \delta)$ süreklilik modülü de aşağıdaki özellikleri gerçekler.

i) $\Omega(f; \delta) \geq 0$

ii) $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\Omega(f; \delta_1) \leq \Omega(f; \delta_2)$

iii) $m \in \mathbb{N}$ için $\Omega(f; m\delta) \leq 4m(1 + \delta^2) \Omega(f; \delta)$

iv) $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\Omega(f; \lambda \delta) \leq 4(\lambda + 1)(1 + \delta^2) \Omega(f; \delta)$

v) $f \in C_{\rho, K_f}[0, \infty)$, $\lim_{\delta \rightarrow \infty} \Omega(f; \delta) = 0$

vi) $|f(t) - f(x)| \leq (1+x^2)(1+(t-x)^2)\Omega(f; |t-x|)$

vii) $|f(t) - f(x)| \leq 4\left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1\right)(1+x^2)(1+(t-x)^2)\Omega(f; \delta)$

İspat i) $|f(x+h) - f(x)| \geq 0$, $(1+x^2) > 0$, $(1+h^2) > 0$

olduğundan süreklilik modülünün tanımı gereğince $\Omega(f; \delta) \geq 0$ dir.

ii) $\delta_1 \leq \delta_2$ için $|h| \leq \delta_2$ bölgesi $|h| \leq \delta_1$ bölgesinden büyüktür. Bölge büyüdükçe supremum değeri büyüyeceğinden $\Omega(f; \delta_1) \leq \Omega(f; \delta_2)$ dir.

$$iii) \Omega(f; \delta) = \sup_{\substack{x \geq 0 \\ |h| \leq \delta}} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{(1+x^2)(1+h^2)}$$

İfadesinde $x+h=t$ denirse

$$\Omega(f; \delta) = \sup_{\substack{t, x \geq 0 \\ |t-x| \leq \delta}} \frac{|f(t) - f(x)|}{(1+x^2)(1+(t-x)^2)}$$

olur. Bu durumda

$$\Omega(f; m\delta) = \sup_{\substack{t, x \geq 0 \\ |t-x| \leq m\delta}} \frac{|f(t) - f(x)|}{(1+x^2)(1+(t-x)^2)}$$

için $|t-x| \leq m\delta$ ise $-m\delta \leq t-x \leq m\delta$ olup

$t = x + mh$ seçildiğinde $|h| \leq \delta$ olacağından

$$\Omega(f; m\delta) = \sup_{\substack{x \geq 0 \\ |h| \leq \delta}} \frac{|f(x+mh) - f(x)|}{(1+x^2)(1+(mh)^2)} \quad (2.6.5)$$

yazılabilir.

Ayrıca,

$$\begin{aligned} |f(x+mh) - f(x)| &= \left| \sum_{k=1}^m [f(x+kh) - f(x+(k-1)h)] \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^m |f(x+kh) - f(x+(k-1)h)| \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{|f(x+kh) - f(x+(k-1)h)|}{(1+h^2)(1+(x+(k-1)h)^2)} (1+h^2)(1+(x+(k-1)h)^2) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Her iki tarafın $(1+x^2)(1+(mh)^2)$ ifadesine bölünmesiyle

$$\frac{|f(x+mh) - f(x)|}{(1+x^2)(1+(mh)^2)} \leq \sum_{k=1}^m \frac{|f(x+kh) - f(x+(k-1)h)|}{(1+h^2)(1+(x+(k-1)h)^2)}$$

$$\times \frac{(1+h^2)(1+(x+(k-1)h)^2)}{(1+x^2)(1+(mh)^2)}$$

eşitsizliği elde edilir. Her iki tarafın $|h| \leq \delta$ üzerinden supremumu alınır

(2.6.5) ten

$$\Omega(f; m\delta) \leq \Omega(f; \delta)(1 + \delta^2) \sum_{k=1}^m \frac{(1+(x+(k-1)h)^2)}{(1+x^2)(1+(mh)^2)} \quad (2.6.6)$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} 1 + (x + (k-1)h)^2 &\leq 1 + 4(x^2 + ((k-1)h)^2) \\ &\leq 1 + 4(x^2 + ((k-1)h)^2) + 3 \\ &= 4(1 + x^2 + ((k-1)h)^2) \end{aligned}$$

yazılabilir. $k-1 \leq m$ olduğundan

$$\begin{aligned} 1 + (x + (k-1)h)^2 &\leq 4(1 + x^2 + (mh)^2) \\ &\leq 4 + (1 + x^2 + (mh)^2 + x^2(mh)^2) \\ &= 4(1 + x^2)(1 + (mh)^2) \end{aligned}$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$\frac{1 + (x + (k-1)h)^2}{(1+x^2)(1+(mh)^2)} \leq 4$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğin (2.6.6)'da kullanılmasıyla

$$\Omega(f; m\delta) \leq 4m(1 + \delta^2) \Omega(f; \delta)$$

bulunur.

iv) $\lambda \in \mathbb{R}^+$ sayısının tam kısmını $\llbracket \lambda \rrbracket$ ile gösterirsek

$\llbracket \lambda \rrbracket < \lambda < \llbracket \lambda \rrbracket + 1$ eşitsizliklerinin geçerli olduğu açıktır. Bu eşitsizlikten ve (ii) özelliğinden

$\Omega(f; \lambda \delta) \leq \Omega(f; (\llbracket \lambda \rrbracket + 1)\delta)$ yazılabilir.

$$\llbracket \lambda \rrbracket + 1 \in \mathbb{N}$$

olduğundan eşitsizliğin sağ tarafına (iii) özelliği uyguladığında

$$\Omega(f; \lambda \delta) \leq \Omega(f; (\llbracket \lambda \rrbracket + 1)\delta) \leq 4(\llbracket \lambda \rrbracket + 1)(1 + \delta^2) \Omega(f; \delta)$$

sonucunu elde edilir. Ayrıca $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\lambda + 1 > \llbracket \lambda \rrbracket + 1$ olduğundan

$$\Omega(f; \lambda \delta) \leq 4(\lambda + 1)(1 + \delta^2) \Omega(f; \delta)$$

olarak elde edilir.

$v)$ $\Omega(f; \delta)$ f fonksiyonunun süreklilik modülü ve $f \in C_{\rho, K_f}[0, \infty)$ olduğundan f $[0, \infty)$ da sürekli ve

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = K_f < \infty \quad (2.6.7)$$

olduğundan $\epsilon > 0$ için öyle bir x_0 vardır ki tüm $x > x_0$ noktaları ve $h \in \mathbb{R}$

için

$$\left| \frac{f(x)}{\rho(x)} - K_f \right| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \left| \frac{f(x+h)}{\rho(x+h)} - K_f \right| < \frac{\epsilon}{2} \quad (2.6.8)$$

eşitsizlikleri sağlanır. O halde

$$\begin{aligned} \Omega(f; \delta) &= \sup_{\substack{x \geq 0 \\ |h| \leq \delta}} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{\rho(x+h)} \\ &= \sup_{\substack{x \geq 0 \\ |h| \leq \delta}} \frac{|f(x+h) - f(x) - \rho(x+h)K_f + \rho(x+h)K_f|}{\rho(x+h)} \\ &\leq \sup_{\substack{x \geq 0 \\ |h| \leq \delta}} \frac{|f(x+h) - \rho(x+h)K_f|}{\rho(x+h)} + \sup_{\substack{x \geq 0 \\ |h| \leq \delta}} \frac{|f(x) - \rho(x+h)K_f|}{\rho(x+h)} \\ &\leq \sup_{\substack{x \geq 0 \\ |h| \leq \delta}} \left| \frac{f(x+h)}{\rho(x+h)} - K_f \right| + \sup_{\substack{x \geq 0 \\ |h| \leq \delta}} \left| \frac{f(x)}{\rho(x)} \frac{\rho(x)}{\rho(x+h)} - K_f \right| \end{aligned}$$

ρ monoton artan olduğundan

$$\frac{\rho(x)}{\rho(x+h)} < 1$$

eşitsizliği geçerli olup

$$\Omega(f; \delta) \leq \sup_{\substack{x \geq 0 \\ |h| \leq \delta}} \left| \frac{f(x+h)}{\sigma(x+h)} - K_f \right| + \sup_{\substack{x \geq 0 \\ |h| \leq \delta}} \left| \frac{f(x)}{\sigma(x)} - K_f \right|$$

yazılabilir. (2.5.8) in kullanılmasıyla

$$\Omega(f; \delta) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

elde edilir. Yani $\Omega(f; \delta) < \epsilon$ dir. O halde

$$\delta \rightarrow 0 \quad \Omega(f; \delta) \rightarrow 0 \text{ dir.}$$

vi) $\Omega(f; \delta)$ ifadesinde $\delta = |t - x|$ seçilirse

$$\Omega(f; |t - x|) = \sup_{\substack{x \geq 0 \\ |h| \leq \delta}} \frac{|f(t) - f(x)|}{(1 + x^2)(1 + (t - x)^2)} \geq \frac{|f(t) - f(x)|}{(1 + x^2)(1 + (t - x)^2)}$$

yazılabilir. Buradan

$$\frac{|f(t) - f(x)|}{(1 + x^2)(1 + (t - x)^2)} \leq \Omega(f; |t - x|)$$

olduğu görülür. Yani,

$$|f(t) - f(x)| \leq \Omega(f; |t - x|)(1 + x^2)(1 + (t - x)^2)$$

eşitsizliği vardır.

vii), (*vi*) özelliğinden,

$$|f(t) - f(x)| \leq \Omega\left(f; \frac{|t - x|}{\delta}\delta\right)(1 + x^2)(1 + (t - x)^2) \quad (2.6.9)$$

yazılabilir.

$$\frac{|t - x|}{\delta} \in \mathbb{R}^+$$

olup (iv) özelliğinden dolayı

$$\Omega\left(f; \frac{|t-x|}{\delta} \delta\right) \leq 4 \left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1\right) (1 + \delta^2) \Omega(f; \delta) \text{ dir.}$$

Bu eşitsizliğin (2.5.9) de kullanılmasıyla

$$|f(t) - f(x)| \leq 4 \left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1\right) (1 + x^2)(1 + (t-x)^2)(1 + \delta^2) \Omega(f; \delta)$$

ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. Operatörün Tanımlanması Ve Özellikleri

Yaklaşımlar teorisinde Szasz-Mirakyan operatörleri önemli operatörlerdendir. Bu operatörler ve çeşitli araştırmalar tarafından analizin farklı dallarında ve farklı alanlarla bağlantıları yoğunlukla çalışıldı. Son zamanlarda bu operatörün değiştirilmiş (Modifiye) şekilleri çalışılmaktadır. Biz de bu tezde önce

$$L_n(f; r; x) = \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k}}{(k+r)!} f\left(\frac{k+r}{n(nx+1)}\right);$$

$$x \in [0, \infty), n \in \mathbb{N} \quad (3.1.1)$$

$$g(t, r) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{(k+r)!}, t \in [0, \infty) \quad (3.1.2)$$

$$g(0, r) = \frac{1}{r!}, \quad g(t, r) = \frac{1}{t^r} \left(e^t - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{t^j}{j!} \right); t > 0 \quad (3.1.3)$$

şeklinde tanımlanan operatörün polinom ağırlıklı uzaylardaki yaklaşım özelliklerini ve daha sonra da bu operatörün iki değişkenli halinin polinom ağırlıklı uzaylardaki yaklaşım özelliklerini ve yakınsaklık hızıyla ilgili sağladığı bazı eşitsizlikleri inceleyeceğiz. Bu incelemeler sırasında

$$B_p(\mathbb{R}) = \{f: |f(x)| \leq M_f \rho(x)\}$$

$$C_p(\mathbb{R}) = \{f: f \in B_p(\mathbb{R}) \text{ ve } f \text{ sürekli} \} \quad p \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$$

ağırlıklı uzayları üzerinde işlemler yapacağız. Bu uzayda ağırlık fonksiyonunu

$$\rho_p(x) := (1+x^p)^{-1}, \quad \rho_0(x) := 1 \quad p \geq 1 \text{ için} \quad (3.1.4)$$

olarak ele alacağız. Kolaylık olması bakımından $\mathbb{R}_0 = [0, \infty)$ ile göstereceğiz.

Bu uzaydaki normu

$$\|f\|_p \equiv \|f(\cdot)\|_p := \sup_{x \in \mathbb{R}_0} \rho_p(x) |f(x)| \quad (3.1.5)$$

şeklinde göstereceğiz.

Yine C_p yukarıdaki tanımladığımız fonksiyon uzayı olmak üzere f nin türevi için

$C_p^1 := \{f \in C_p; f' \in C_p\}$ fonksiyon uzayını göz önüne alacağız.

$f \in C_p$ olmak C_p uzayındaki süreklilik modülünü

$$\omega_1(f; C_p; t) := \sup_{x \leq h \leq t} \|\Delta_h f(\cdot)\|_p; t \in \mathbb{R}_0 \quad (3.1.6)$$

şeklinde tanımlayacağız. Burada

$$\Delta_h f(x) = f(x + h) - f(x); h, x \in \mathbb{R}_0$$

dir. Açıktır ki

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \omega_1(f; C_p; t) = 0 \text{ dır.}$$

Eğer $f \in C_p'$ ise bu durumda bir M_1 sabiti vardır öyle ki

$$\omega_1(f; C_p; t) \leq M_1 \cdot t, t \in \mathbb{R}_0 \quad (3.1.7)$$

dır.

(3.1.1) ile tanımlanan L_n operatörünün lineer ve pozitif olduğu açıktır. Şimdi (3.1.1) ile tanımlanan L_n operatörü için $f(t) = t^i; i = 0, 1, 2$ momentlerini hesaplayalım. Bunu bir lemma ile verelim.

Lemma 3.1.1: $r \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}_0$ sabit sayılar ve $f \in C_p$ için ile tanımlanan L_n operatörü için aşağıdaki özellikler sağlanır.

$$i) L_n(1; r; x) = 1 \quad (3.1.8)$$

$$ii) L_n(t; r; x) = x \quad (3.1.9)$$

$$iii) L_n(t^2; r; x) = \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 \left[1 + \frac{1}{(nx + 1)^2} + \frac{1}{g[(nx + 1)^2; r](r - 1)!(nx + 1)^2} \left(1 + \frac{r}{(nx + 1)^2}\right)\right] \quad (3.1.10)$$

$$iv) L_n(t^3; r; x) = \left(x + \frac{1}{n}\right)^3 \left[1 + \frac{3}{(nx+1)^2} + \frac{1}{(nx+1)^4} \frac{1}{(nx+1)^2(r-1)! g[(nx+1)^2; r]} \left(1 + \frac{r+2}{(nx+1)^2} + \frac{r^2}{(nx+1)^4}\right)\right] \quad (3.1.11)$$

$$\text{İspat: } i) L_n(1; r; x) = \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k}}{(k+r)!} 1 = 1$$

$$L_n(1; r; x) = 1$$

$$ii) L_n(t; r; x) = \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k}}{(k+r)!} \frac{k+r}{n(nx+1)} \\ = \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k-1}}{(k+r-1)!} \frac{1}{n}$$

Bu eşitlikte $k = 0$ değeri yerine yazılıp toplam $k = 1$ den başlatılırsa

$$L_n(t; r; x) = \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \frac{(nx+1)^{-1}}{(r-1)!n} + \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k-1}}{(k+r-1)!} \frac{1}{n}$$

olur. Toplamda k yerine $k+1$ yazılıp toplam $k = 0$ den başlatılırsa

$$L_n(t; r; x) = \frac{1}{g[(nx+1)^2; r](nx+1)(r-1)!n} \\ + \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k+1}}{(k+r)!n} \\ = \frac{1}{g[(nx+1)^2; r](nx+1)(r-1)!n} + \frac{(nx+1)}{g[(nx+1)^2; r]n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k}}{(k+r)!} \\ = \frac{(nx+1)}{g[(nx+1)^2; r](nx+1)^2(r-1)!n} + \frac{(nx+1)}{n} L_n(1; r; x) \\ L_n(t; r; x) = \left(x + \frac{1}{n}\right) \left[1 + \frac{1}{(r-1)!(nx+1)^2 g[(nx+1)^2; r]}\right]$$

olarak elde edilir.

$$\begin{aligned}
 \text{iii) } L_n(t^2; r; x) &= \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k}}{(k+r)!} \frac{(k+r)^2}{n^2(nx+1)^2} \\
 &= \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k-2}(k+r)}{(k+r-1)! n^2}
 \end{aligned}$$

Bu eşitlikte $k = 0$ için toplamın değeri yazılır ve toplam $k = 1$ den başlatılırsa

$$\begin{aligned}
 L_n(t^2; r; x) &= \frac{r}{g[(nx+1)^2; r](nx+1)^2(r-1)! n^2} \\
 &+ \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k-2}(k+r)}{(k+r-1)! n^2}
 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada toplam içerisinde bulunan $k+r$ terimine 1 ekleyip 1 çıkarırsak ve gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$\begin{aligned}
 L_n(t^2; r; x) &= \frac{1}{g[(nx+1)^2; r](nx+1)^2(r-1)! n^2} \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k-2}(k+r-1+1)}{(k+r-1)! n^2} \\
 &= \frac{1}{g[(nx+1)^2; r](nx+1)^2(r-1)! n^2} \\
 &+ \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k-2}(k+r-1)}{(k+r-1)! n^2} \\
 &+ \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k-2}}{(k+r-1)! n^2} \\
 &= \frac{r}{g[(nx+1)^2; r](nx+1)^2(r-1)! n^2} \\
 &+ \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k-2}}{(k+r-2)! n^2} + \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k-2}}{(k+r-1)! n^2}
 \end{aligned}$$

olur. Bu son eşitlikte k yerine $k + 1$ yazılıp toplamalar $k=0$ dan başlatılırsa

$$L_n(t^2; r; x) = \frac{r}{g[(nx + 1)^2; r](nx + 1)^2(r - 1)!n^2} \\ + \frac{1}{g[(nx + 1)^2; r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx + 1)^{2k}}{(k + r - 1)!n^2} + \frac{1}{g[(nx + 1)^2; r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx + 1)^{2k}}{(k + r)!n^2}$$

elde edilir. Buna göre

$$L_n(t^2; r; x) = \frac{r}{g[(nx + 1)^2; r](nx + 1)^2(r - 1)!n^2} + \frac{1}{g[(nx + 1)^2; r](r - 1)!n^2} \\ + \frac{1}{g[(nx + 1)^2; r]} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nx + 1)^{2k}}{(k + r - 1)!n^2} + \frac{1}{g[(nx + 1)^2; r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx + 1)^{2k}}{(k + r)!n^2} \\ = \frac{r}{g[(nx + 1)^2; r](nx + 1)^2(r - 1)!n^2} + \frac{1}{g[(nx + 1)^2; r](r - 1)!n^2} \\ + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx + 1)^{2k}(nx + 1)^2}{(k + r)!n^2} + \frac{1}{n^2}$$

olur. Bu eşitlik düzenlendiğinde

$$L_n(t^2; r; x) = \frac{r(nx + 1)^2}{g[(nx + 1)^2; r](nx + 1)^2(r - 1)!n^2(nx + 1)^2} \\ + \frac{(nx + 1)^2}{g[(nx + 1)^2; r](r - 1)!n^2(nx + 1)^2} + \frac{(nx + 1)^2}{n^2} + \frac{(nx + 1)^2}{n^2(nx + 1)^2} \\ = \frac{(nx + 1)^2}{n^2} \left[\frac{1}{(nx + 1)^2} + 1 + \frac{1}{g[(nx + 1)^2; r](r - 1)!(nx + 1)^2} \right. \\ \left. + \frac{r}{g[(nx + 1)^2; r](r - 1)!(nx + 1)^4} \right]$$

haline gelir. Buna göre

$$L_n(t^2; r; x) = \left(x + \frac{1}{n} \right)^2 \left[1 + \frac{1}{(nx + 1)^2} \right]$$

$$+ \frac{1}{g[(nx+1)^2; r](r-1)!(nx+1)^2} \left(1 + \frac{r}{(nx+1)^2} \right) \Bigg]$$

olur ki bu istenilendir.

$$\begin{aligned} iv) \quad L_n(t^3; r; x) &= \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k}}{(k+r)!} \frac{(k+r)^3}{n^3(nx+1)^3} \\ &= \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k-3}}{(k+r-1)!} \frac{(k+r)^2}{n^3} \\ &= \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \frac{r^2}{(nx+1)^3(r-1)!n^3} \\ &+ \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k-3}[(k+r)^2-1+1]}{(k+r-1)!n^3} \\ &= \frac{r^2}{g[(nx+1)^2; r](nx+1)^3(r-1)!n^3} \\ &+ \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k-3}[(k+r)^2-1]}{(k+r-1)!n^3} \\ &+ \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k-3}}{(k+r-1)!n^3} \end{aligned}$$

son toplamda k yerine $k+1$ yazılırsa

$$\begin{aligned} L_n(t^3; r; x) &= \frac{r^2}{g[(nx+1)^2; r](nx+1)^3(r-1)!n^3} \\ &+ \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k-3}(k+r-1)(k+r+1)}{(k+r-1)!n^3} \\ &+ \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k}}{(k+r)!n^3} \end{aligned}$$

olur. Bu ifade de

$$L_n(t^3; r; x) = \frac{r^2}{g[(nx+1)^2; r](nx+1)^3(r-1)!n^3}$$

$$+ \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k-3}(k+r+1)}{(k+r-2)! n^3} + \frac{1}{n^3(nx+1)}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlik düzenlendiğinde

$$L_n(t^3; r; x) = \frac{r^2}{g[(nx+1)^2; r](nx+1)^3(r-1)! n^3} \\ + \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k-1}(k+r+2)}{(k+r-1)! n^3} + \frac{1}{n^3(nx+1)}$$

olur. Yine toplamda $k=0$ için değer yazılır toplam $k=1$ den başlatılırsa

$$= \frac{r^2}{g[(nx+1)^2; r](nx+1)^3(r-1)! n^3} + \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \frac{(r+2)}{(r-1)! (nx+1)n^3} \\ + \frac{1}{n^3(nx+1)} + \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k-1}(k+r+2)}{(k+r-1)! n^3}$$

olur. Yine toplamda k yerine $k+1$ yazılırsa

$$L_n(t^3; r; x) = \frac{r^2}{g[(nx+1)^2; r](nx+1)^3(r-1)! n^3} \\ + \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \frac{(r+2)}{(r-1)! (nx+1)n^3} \\ + \frac{1}{n^3(nx+1)} + \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k+1}(k+r+3)}{(k+r)! n^3}$$

elde edilir. Son toplam $k+r+3$ üzerine dağıtılırsa

$$L_n(t^3; r; x) = \frac{r^2}{g[(nx+1)^2; r](nx+1)^3(r-1)! n^3} \\ + \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \frac{(r+2)}{(r-1)! (nx+1)n^3} + \frac{1}{n^3(nx+1)} \\ + \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k}(nx+1)(k+r)}{(k+r)! n^3}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3(nx+1)^{2k}(nx+1)}{(k+r)! n^3} \\
& = \frac{r^2}{g[(nx+1)^2; r](nx+1)^3(r-1)! n^3} + \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \frac{(r+2)}{(r-1)! (nx+1)n^3} \\
& + \frac{1}{n^3(nx+1)} + \frac{3(nx+1)}{n^3} + \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k+1}}{(k+r-1)! n^3}
\end{aligned}$$

bulunur. Yine son toplamın $k=0$ için değeri yazılır toplam $k=1$ den başlatılırsa

$$\begin{aligned}
& = \frac{r^2}{g[(nx+1)^2; r](nx+1)^3(r-1)! n^3} + \frac{(r+2)}{g[(nx+1)^2; r](r-1)! (nx+1)n^3} \\
& + \frac{1}{n^3(nx+1)} + \frac{3(nx+1)}{n^3} + \frac{(nx+1)}{g[(nx+1)^2; r](r-1)! n^3} \\
& + \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k+1}}{(k+r-1)! n^3}
\end{aligned}$$

olur. Burada da yine son toplamda k yerine $k+1$ yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
L_n(t^3; r; x) & = \frac{r^2}{g[(nx+1)^2; r](nx+1)^3(r-1)! n^3} \\
& + \frac{(r+2)}{g[(nx+1)^2; r](r-1)! (nx+1)n^3} + \frac{1}{n^3(nx+1)} + \frac{3(nx+1)}{n^3} \\
& + \frac{(nx+1)}{g[(nx+1)^2; r](r-1)! n^3} + \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k}(nx+1)^3}{(k+r)! n^3} \\
& = \frac{r^2}{g[(nx+1)^2; r](nx+1)^3(r-1)! n^3} + \frac{(r+2)}{g[(nx+1)^2; r](r-1)! (nx+1)n^3} \\
& + \frac{1}{n^3(nx+1)} + \frac{3(nx+1)}{n^3} + \frac{(nx+1)}{g[(nx+1)^2; r](r-1)! n^3} \\
L_n(t^3; r; x) & = \left(x + \frac{1}{n}\right)^3 \left[1 + \frac{3}{(nx+1)^2} + \frac{1}{(nx+1)^4}\right]
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{(nx+1)^2(r-1)!g[(nx+1)^2;r]}\left(1+\frac{r+2}{(nx+1)^2}+\frac{r^2}{(nx+1)^4}\right)\Bigg]$$

olarak elde edilir. Bu eşitlikler sabit her bir $r \in \mathbb{N}$ ve bütün $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}_0$

için geçerlidir.

Lemma 3.1.2: $r \in \mathbb{N}$ sabit bir sayı olsun. Bu durumda $\forall x \in \mathbb{R}_0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$L_n(t-x; r; x) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n(nx+1)(r-1)!g[(nx+1)^2;r]} \quad (3.1.12)$$

$$L_n((t-x)^2; r; x) = \frac{2}{n^2} + \frac{r+(nx+1)^2-2nx(nx+1)}{n^2(nx+1)^2(r-1)!g[(nx+1)^2;r]} \quad (3.1.13)$$

$$\begin{aligned} L_n((t-x)^3; r; x) &= \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^3(nx+1)} + \frac{r[r+(nx+1)^2-3nx(nx+1)]}{n^3(nx+1)^3(r-1)!g[(nx+1)^2;r]} \\ &+ \frac{(nx+1)^2[(nx+1)^2-3nx(nx+1)+3(nx)^2+3]}{n^3(nx+1)^3(r-1)!g[(nx+1)^2;r]} \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

olur.

İspat: İspatı verirken yukarıda bulunan eşitlikleri kullanacağız.

$$\begin{aligned} L_n(t-x; r; x) &= \frac{1}{g[(nx+1)^2;r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k}}{(k+r)!} \left(\frac{k+r}{n(nx+1)} - x \right) \\ &= \frac{1}{g[(nx+1)^2;r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k}}{(k+r)!} \frac{k+r}{n(nx+1)} - \frac{x}{g[(nx+1)^2;r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k}}{(k+r)!} \\ &= L_n(t; r; x) - xL_n(1; r; x) \\ &= \left(x + \frac{1}{n} \right) \left[1 + \frac{1}{(r-1)!(nx+1)^2g[(nx+1)^2;r]} \right] - x \\ &= \frac{(nx+1)}{n} + \frac{1}{(r-1)!(nx+1)^2g[(nx+1)^2;r]} - x \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{(r-1)!(nx+1)^2g[(nx+1)^2;r]} \end{aligned}$$

olur ki bu da istenilendir.

$$\begin{aligned} L_n((t-x)^2; r; x) &= \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k}}{(k+r)!} \left[\frac{k+r}{n(nx+1)} - x \right]^2 \\ &= \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k}}{(k+r)!} \left[\left(\frac{k+r}{n(nx+1)} \right)^2 - 2x \left(\frac{k+r}{n(nx+1)} \right) + x^2 \right] \end{aligned}$$

L_n lineer olduğundan bu eşitlik L_n operatörünün tanımı göz önüne alındığında

$$L_n((t-x)^2; r; x) = L_n(t^2; r; x) - 2xL_n(t; r; x) - x^2L_n(1; r; x)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlikte daha önce hesaplanan (3.1.8), (3.1.9) ve (3.1.10) değerleri yerlerine yazılırsa istenilen elde edilir. Benzer yol ve L_n in tanımından

$$\begin{aligned} L_n((t-x)^3; r; x) &= \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k}}{(k+r)!} \left[\frac{k+r}{n(nx+1)} - x \right]^3 \\ &= \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k}}{(k+r)!} \left[\left(\frac{k+r}{n(nx+1)} \right)^3 - 3x \left(\frac{k+r}{n(nx+1)} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 3x^2 \left(\frac{k+r}{n(nx+1)} \right) - x^3 \right] \\ &= L_n(t^3; r; x) - 3xL_n(t^2; r; x) + 3x^2L_n(t; r; x) - x^3L_n(1; r; x) \end{aligned}$$

olup yukarıda elde edilen değerler kullanılarak istenilen elde edilir.

Şimdi polinom ağırlıklı uzaylarda L_n operatörünün yakınsaklık özelliklerini incelerken ihtiyaç duyacağımız bir başka lemmayı verelim.

Lemma 3.1.3: $r, s \in \mathbb{N}$ sabit sayılar olsun. Bu durumda bütün $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in \mathbb{R}_0$ lar için sadece j, s ye bağlı bir $\alpha_{s,j}$ ve sadece j, s ye bağlı $(1 \leq j \leq s)$ $\beta_{s,j}(r)$ sayıları vardır öyle ki

$$L_n(t^s; r; x) = \left(x + \frac{1}{n} \right)^s \sum_{j=1}^s \frac{1}{(nx+1)^{2(j-1)}}$$

$$\times \left(\alpha_{s,j} + \frac{\beta_{s,j}(r)}{(nx+1)^2(r-1)!g[(nx+1)^2;r]} \right) \quad (3.1.15)$$

dir. Üstelik burada $\alpha_{s,1} = \beta_{s,1}(r) = 1$

$\beta_{s,s}(r) = r^{s-1}$ dir.

İspat: İspat için tümevarım metodunu kullanacağız. Kabul edelim ki

$f(x) = x^j, 1 \leq j \leq s, s \in \mathbb{N}$ için

$$L_n(t^s; r; x) = \left(x + \frac{1}{n}\right)^s \sum_{j=1}^s \frac{1}{(nx+1)^{2(j-1)}}$$

$$\times \left(\alpha_{s,j} + \frac{\beta_{s,j}(r)}{(nx+1)^2(r-1)!g[(nx+1)^2;r]} \right)$$

$$\alpha_{s,1} = \beta_{s,1}(r) = 1, \quad \beta_{s,s}(r) = r^{s-1}$$

$$L_n(f; r; x) = \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k}}{(k+r)!} f\left(\frac{k+r}{n(nx+1)}\right)$$

$$g(t, r) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{(k+r)!}$$

$$g(0, r) = \frac{1}{r!}, \quad g(t, r) = \frac{1}{t^r} \left(e^t - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{t^j}{j!} \right) \quad (3.1.16)$$

operatörü için $f(x) = x^j$ için doğruluğu kabul edip $f(x) = x^{j+1}$ için ispat yapacağız.

$$L_n(t^{s+1}; r; x) = \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k}}{(k+r)!} \frac{(k+r)^{s+1}}{(n(nx+1))^{s+1}}$$

ifadesinin $k=0$ için değerini yazıp toplamı $k=1$ den başlatırsak

$$L_n(t^{s+1}; r; x) = \frac{r^s}{(n(nx+1))^{s+1}(r-1)!g[(nx+1)^2; r]} \\ + \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k}}{(k+r-1)!} \frac{(k+r)^s}{(n(nx+1))^{s+1}}$$

olur. k yerine $k+1$ yazılırsa

$$L_n(t^{s+1}; r; x) = \frac{r^s}{(n(nx+1))^{s+1}(r-1)!g[(nx+1)^2; r]} \\ + \frac{(nx+1)^2}{(n(nx+1))^{s+1}} \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k}}{(k+r)!} (k+r+1)^s$$

bulunur.

$$(k+r+1)^s = \sum_{l=0}^s \binom{s}{l} (k+r)^l \quad (3.1.17)$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$L_n(t^{s+1}; r; x) = \frac{r^s}{(n(nx+1))^{s+1}(r-1)!g[(nx+1)^2; r]} \\ + \frac{(nx+1)^2}{(n(nx+1))^{s+1}} \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k}}{(k+r)!} \sum_{l=0}^s \binom{s}{l} (k+r)^l$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca biliyoruz ki binom açılımından

$$(a+b)^m = \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} a^l b^{m-l} \quad (3.1.18)$$

dir. Buradan

$$(k+r+1)^s = \sum_{l=0}^s \binom{s}{l} (k+r)^l 1^{s-l} = \sum_{l=0}^s \binom{s}{l} (k+r)^l$$

olup son terim $(n(nx+1))^l$ ile çarpılıp bölünürse

$$\begin{aligned}
L_n(t^{s+1}; r; x) &= \frac{r^s}{(n(nx+1))^{s+1} (r-1)! g[(nx+1)^2; r]} \\
&+ \frac{(nx+1)^2}{(n(nx+1))^{s+1}} \frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k}}{(k+r)!} \sum_{l=0}^s \binom{s}{l} (k+r)^l \frac{(n(nx+1))^l}{(n(nx+1))^l} \\
&= \frac{r^s}{(n(nx+1))^{s+1} (r-1)! g[(nx+1)^2; r]} \\
&+ \frac{(nx+1)^2}{(n(nx+1))^{s+1}} \sum_{l=0}^s \binom{s}{l} (n(nx+1))^l \\
&\times \underbrace{\frac{1}{g[(nx+1)^2; r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k}}{(k+r)!} \frac{(k+r)^l}{(n(nx+1))^l}}_{L_n(t^l; r; x)}
\end{aligned}$$

(3.1.1) ile tanımlanan L_n operatörü göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
L_n(t^{s+1}; r; x) &= \frac{r^s}{(n(nx+1))^{s+1} (r-1)! g[(nx+1)^2; r]} \\
&+ \frac{(nx+1)^2}{(n(nx+1))^{s+1}} \sum_{l=0}^s \binom{s}{l} (n(nx+1))^l L_n(t^l; r; x)
\end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. $l = 0$ için yazılıp toplam $l = 1$ den başlatılırsa

$$\begin{aligned}
L_n(t^{s+1}; r; x) &= \frac{r^s}{(n(nx+1))^{s+1} (r-1)! g[(nx+1)^2; r]} \\
&+ \frac{(nx+1)^2}{(n(nx+1))^{s+1}} L_n(1; r; x) + \frac{(nx+1)^2}{(n(nx+1))^{s+1}} \sum_{l=1}^s \binom{s}{l} (n(nx+1))^l L_n(t^l; r; x)
\end{aligned}$$

olur. Kabulden dolayı $f(x) = x^j$ ve (3.1.3) sağlandığından

$$L_n(t^{s+1}; r; x) = \frac{r^s}{(n(nx+1))^{s+1} (r-1)! g[(nx+1)^2; r]}$$

$$+ \frac{(nx+1)^2}{(n(nx+1))^{s+1}} L_n(1; r; x) + \frac{(nx+1)^2}{(n(nx+1))^{s+1}} \sum_{l=1}^s \binom{s}{l} (n(nx+1))^l (nx+1)^{2l}$$

$$\sum_{j=1}^l \frac{1}{(nx+1)^{2(j-1)}} \left(\alpha_{l,j} + \frac{\beta_{l,l}(r)}{(nx+1)^2 (r-1)! g[(nx+1)^2; r]} \right)$$

Bu eşitlikteki toplamlar için $1 \leq l \leq s$ ve $1 \leq j \leq s$ olduğundan

indis kaydırması yapıp pay ve payda $(nx+1)^{2s}$ ile çarpıp böldükten

sonra $(nx+1)^{2l} = \frac{1}{(nx+1)^{-2l}}$ yazarsak

$$L_n(t^{s+1}; r; x) = \frac{r^s}{(n(nx+1))^{s+1} (r-1)! g[(nx+1)^2; r]} + \frac{(nx+1)^2}{(n(nx+1))^{s+1}}$$

$$+ \frac{(nx+1)^{2(s+1)}}{(nx+1)^{s+1}} \sum_{j=1}^s \sum_{l=j}^s \binom{s}{l} \frac{1}{(nx+1)^{2(j+s-l-1)}}$$

$$\left(\alpha_{l,j} + \frac{\beta_{l,l}(r)}{(nx+1)^2 (r-1)! g[(nx+1)^2; r]} \right) \quad (3.1.19)$$

olur. Buradan da

$$L_n(t^{s+1}; r; x) = \left(x + \frac{1}{n} \right)^{s+1} \left[\frac{1}{(nx+1)^{2s}} \left(1 + \frac{1}{(r-1)! (nx+1)^2 g[(nx+1)^2; r]} \right) \right.$$

$$+ \sum_{j=1}^s \frac{1}{(nx+1)^{2(j-1)}} \sum_{l=s-j+1}^s \binom{s}{l} \left(\alpha_{l,l+j-s} + \frac{\beta_{l,l+j-s}(r)}{(nx+1)^2 (r-1)! g[(nx+1)^2; r]} \right)$$

$$= \left(x + \frac{1}{n} \right)^{s+1} \sum_{j=1}^{s+1} \frac{1}{(nx+1)^{2(j-1)}} \left(\alpha_{s+1,j} + \frac{\beta_{s+1,j}(r)}{(nx+1)^2 (r-1)! g[(nx+1)^2; r]} \right)$$

Yukarıdaki eşitliği (3.1.20) ile gösterelim.

$$s+1=1, \beta_{s+1,1}(r)=1, \beta_{s+1,s+1}(r)=r^s$$

olarak istenilen elde edilir.

Şimdi $L_n(f; r; x)$ operatörü için bazı lemmaları verelim.

Lemma 3.1.4: $p \in \mathbb{N}_0$ ve $r \in \mathbb{N}$ sabit sayılar olsun. Bu taktirde sadece p ve r parametrelerine bağlı bir $M_2 = M_2(p, r)$ sabiti vardır, öyle ki

$$\left\| L_n \left(\frac{1}{\rho_p(t)}; r; x \right) \right\|_p \leq M_2, n \in \mathbb{N} \quad (3.1.21)$$

ve her $f \in C_p$ için

$$\|L_n(f; r)\|_p \leq M_2 \|f\|_p, n \in \mathbb{N} \quad (3.1.22)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat: İlk eşitsizlik $p=0$ için açıktır çünkü $\rho_0(x) = 1$ olduğunu ve $L_n(1; r; x) = 1$

olduğunu biliyoruz. Ayrıca (3.1.2) den

$$\left(\frac{1}{g(t, r)} \leq r!; t \in \mathbb{R}_0 \right) \quad (3.1.23)$$

yazabiliriz. Şimdi $\rho_p(x) = \frac{1}{1+x^p}$ olduğunu ve L_n operatörünün (3.1.1)

deki tanımını, L_n nin lineer olduğunu ve Lemma 3.1.3 ile beraber

$\forall x \in \mathbb{R}_0, n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{N}$ için (3.1.23) ü göz önüne alırsak

$$\begin{aligned} \rho_p(x) L_n \left(\frac{1}{\rho_p(t)}; r; x \right) &= \rho_p(x) L_n \{1 + t^p; r; x\} \\ &= \rho_p(x) L_n(1; r; x) + \rho_p(x) L_n(t^p; r; x) \\ &= \frac{1}{1+x^p} + \frac{(x + \frac{1}{n})^p}{1+x^p} \sum_{j=1}^p \frac{1}{(nx+1)^{2(j-1)}} \\ &\quad \times \left(\alpha_{p,j} + \frac{\beta_{p,j}(r)}{(nx+1)^2 (r-1)! g[(nx+1)^2; r]} \right) \\ &\leq 1 + \sum_{l=0}^p \binom{p}{l} \frac{x^l}{1+x^p} \sum_{j=1}^p \left(\alpha_{p,j} + r \beta_{p,j}(r) \right) \leq M_2(p, r) \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

yazabiliriz. Buna göre

$$L_n\left(\frac{1}{\rho_p(t)}; r; x\right) = L_n(1 + t^p; r; x) = L_n(1; r; x) + L_n(t^p; r; x)$$

$$\Rightarrow \rho_p(x)L_n\left(\frac{1}{\rho_p(t)}; r; x\right) = \rho(x)L_n(1; r; x) + \rho_p(x)L_n(t^p; r; x)$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}_0} \rho_p(x) \left| L_n\left(\frac{1}{\rho_p(t)}; r; x\right) \right| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}_0} \rho_p(x) |L_n(1; r; x)|$$

$$+ \sup_{x \in \mathbb{R}_0} \rho_p(x) |L_n(t^p; r; x)|$$

$$\Rightarrow \left\| L_n\left(\frac{1}{\rho_p(t)}; r; x\right) \right\|_p \leq \|L_n(1; r; x)\|_p + \|L_n(t^p; r; x)\|_p$$

yukarıda elde edilen eşitsizliği kullanırsak

$$\left\| L_n\left(\frac{1}{\rho_p(t)}; r; x\right) \right\|_p \leq M_2 \quad (3.1.25)$$

elde edilir. Eğer $f \in C_p$ ise bu durumda yukarıda elde edilen (3.1.23) kullanılırsa

$$\rho_p(x)L_n(f; r; x) = \rho_p(x) \frac{\rho_p(x)}{\rho_p(x)} L_n(f; r; x)$$

$$= \rho_p(x) \cdot f \cdot \rho_p(x) L_n\left(\frac{1}{\rho_p(t)}; r; \cdot\right)$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}_0} \rho_p(x) |L_n(f; r; \cdot)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}_0} |f| \sup_{x \in \mathbb{R}} \rho_p(x) \left| L_n\left(\frac{1}{\rho_p(t)}; r; \cdot\right) \right|$$

$$\Rightarrow \|L_n(f; r; \cdot)\|_p \leq \|f\|_p \left\| L_n\left(\frac{1}{\rho_p(t)}; r; x\right) \right\|_p$$

olur ki bu da istenilendir.

Lemma 3.1.5: $p \in \mathbb{N}_0$ ve $r \in \mathbb{N}$ sabitler olsun. Bu durumda bir pozitif

$M_3 = M_3(p, r)$ sabiti vardır öyle ki

$$\left\| L_n \left(\frac{(t-x)^2}{\rho_p(t)} \right) \right\|_p \leq \frac{M_3}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.1.26)$$

dir.

İspat: İspat için Lemma 3.1.2 de elde edilen eşitlikleri ve Lemma 3.1.4 te elde edilen eşitsizlikleri kullanacağız. L_n lineer olduğundan

$$L_n \left(\frac{(t-x)^2}{\rho_p(t)}; r; x \right) = L_n((t-x)^2(1+t^p); r; x)$$

$$= L_n((t-x)^2; r; x) + L_n(t^p(t-x)^2; r; x)$$

eşitliğini $\forall p, n \in \mathbb{N}$ için yazılabilir. Eğer $p=1$ ise bu eşitlik

$$L_n \left(\frac{(t-x)^2}{\rho_1(t)}; r; x \right) = L_n((t-x)^2; r; x) + L_n(t(t-x)^2; r; x)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca $(t-x)^2 + t(t-x)^2 = (t-x)^3 + (1+x)(t-x)^2$

şeklinde yazılabileceğinden

$$L_n \left(\frac{(t-x)^2}{\rho_1(t)}; r; x \right) = L_n((t-x)^3; r; x) + (1+x)L_n((t-x)^2; r; x)$$

olur ki $\rho_0(x) = 1, \rho_1(x) = 1+x$ olduğunu göz önüne alalım. Lemma 3.1.2 de elde edilen

(3.1.13) ve (3.1.14) eşitliklerini göz önüne alırsak

$$\rho_1(x)L_n \left(\frac{(t-x)^2}{\rho_1(t)}; r; x \right) = \rho_1 L_n((t-x)^2(1+t); r; x)$$

$$= \rho_0 L_n((t-x)^3; r; x) + \rho_1 L_n((t-x)^2(1+t); r; x)$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_0} \rho_1(x) \left| L_n \left(\frac{(t-x)^2}{\rho_1(t)}; r; x \right) \right| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}_0} \rho_0(x) |L_n((t-x)^3; r; x)|$$

$$+ \sup_{x \in \mathbb{R}_0} \rho_1(x) |L_n((t-x)^2; r; x)|$$

$$\Rightarrow \left\| L_n \left(\frac{(t-x)^2}{\rho_1(t)} \right) \right\|_p \leq \|L_n((t-x)^3; r; x)\|_p + \|L_n((t-x)^2; r; x)\|_p$$

$$\leq \frac{M_3(p, r)}{n^3} + \frac{M_3(p, r)}{n^2}$$

yazılabilir. $n \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{n^2} > \frac{1}{n^3}$ olduğundan

$$\Rightarrow \left\| L_n \left(\frac{(t-x)^2}{\rho_1(t)} \right) \right\|_p \leq \frac{M_3}{n^2}$$

elde edilir. Şimdi kabul edelim ki $p \geq 0$ olsun.

$$\begin{aligned} \rho_p(x) L_n(t^p(t-x)^2; r; x) &= \rho_p(x) \{L_n(t^{p+2}; r; x) - 2x L_n(t^{p+1}; r; x) \\ &+ x^2 L_n(t^p; r; x)\} \end{aligned}$$

Lemma 3 ten dolayı

$$\begin{aligned} \rho_p(x) L_n(t^p(t-x)^2; r; x) &= \rho_p(x) \left\{ \left(x + \frac{1}{n} \right)^{p+2} \sum_{j=1}^{p+2} \frac{1}{(nx+1)^{2(j-1)}} \right. \\ &\times \left(\alpha_{p+2,j} + \frac{\beta_{p+2,j}(r)}{(nx+1)^2(r-1)! g[(nx+1)^2; r]} \right) \\ &- 2x \left(x + \frac{1}{n} \right)^{p+1} \sum_{j=1}^{p+1} \frac{1}{(nx+1)^{2(j-1)}} \left(\alpha_{p+1,j} + \frac{\beta_{p+1,j}(r)}{(nx+1)^2(r-1)! g[(nx+1)^2; r]} \right) \\ &+ x^2 \left(x + \frac{1}{n} \right)^p \sum_{j=1}^p \frac{1}{(nx+1)^{2(j-1)}} \left(\alpha_{p,j} + \frac{\beta_{p,j}(r)}{(nx+1)^2(r-1)! g[(nx+1)^2; r]} \right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitlikte Lemma 3.1.2 ve Lemma 3.1.4 göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} \rho_p(x) L_n(t^p(t-x)^2; r; x) &= \rho_p(x) \left(x + \frac{1}{n} \right)^p \\ &\times \left\{ \frac{1}{n^2} \left(1 + \frac{1}{(r-1)! (nx+1)^2 g[(nx+1)^2; r]} \right) + \left(x + \frac{1}{n} \right)^2 \sum_{j=2}^{p+2} \frac{1}{(nx+1)^{2(j-1)}} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\alpha_{p+2,j} + \frac{\beta_{p+2,j}(r)}{(nx+1)^2(r-1)!g[(nx+1)^2;r]} \right) - 2x \left(x + \frac{1}{n} \right) \sum_{j=2}^{p+1} \frac{1}{(nx+1)^{2(j-1)}} \\
& \times \left(\alpha_{p+1,j} + \frac{\beta_{p+1,j}(r)}{(nx+1)^2(r-1)!g[(nx+1)^2;r]} \right) + x^2 \sum_{j=2}^p \frac{1}{(nx+1)^{2(j-1)}} \\
& \times \left(\alpha_{p,j} + \frac{\beta_{p,j}(r)}{(nx+1)^2(r-1)!g[(nx+1)^2;r]} \right)
\end{aligned}$$

olur. (3.1.23) ün de göz önüne alınmasıyla

$$\begin{aligned}
\rho_p(x)L_n(t^p(t-x)^2;r;x) & \leq \frac{1}{n^2} \frac{(1+x)^p}{1+x^p} \{1+r + \sum_{j=2}^{p+2} \frac{1}{(nx+1)^{2(j-1)}} \\
& \times (\alpha_{p+2,j} + r\beta_{p+2,j}(r)) + 2 \sum_{j=2}^{p+1} \frac{1}{(nx+1)^{2(j-1)}} (\alpha_{p+1,j} + r\beta_{p+1,j}(r)) \\
& \times \sum_{j=2}^p \frac{1}{(nx+1)^{2(j-1)}} (\alpha_{p,j} + r\beta_{p,j}(r))
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin $x \in \mathbb{R}_0$ üzerinden supremumu alınırsa (3.1.25) elde edilir.

3.2. L_n İçin Yaklaşım Teoremleri

Teorem 3.2.1 $p \in \mathbb{N}_0$ ve $r \in \mathbb{N}$ sabit olsun. Bu durumda bir pozitif $M_5 = M_5(p, r)$

sabit sayısı vardır, öyle ki $f \in C_p^1$ için

$$\|L_n(f; r; \cdot) - f(\cdot)\|_p \leq \frac{M_5}{n} \|f'\|_p, n \in \mathbb{N} \quad (3.2.1)$$

dir.

İspat: $x \in \mathbb{R}_0$ sabit bir nokta olsun. Bu durumda $f \in C_p^1$ için

$$f(t) - f(x) = \int_x^t f'(u) du, \quad t \in \mathbb{R}_0$$

yazabiliriz. Lemma 3.1.5 ve L_n operatörünün tanımını dikkate aldığımızda L_n lineer olduğundan

$$\begin{aligned} L_n(f(t) - f(x); r; x) &= L_n(f(t); r; x) - L_n(f(x); r; x) \\ &= L_n(f(t); r; x) - f(x)L_n(1; r; x) = L_n\left(\int_x^t f'(u) du; r; x\right), n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \left| \int_x^t f'(u) du \right| &\leq \left| \int_x^t \left[(1+x^p) \frac{f'(u)}{1+x^p} + (1+t^p) \frac{f'(u)}{1+t^p} \right] du \right| \\ &\leq \int_x^t \left[(1+x^p) \sup_{x \in \mathbb{R}_0} \frac{|f'(u)|}{1+x^p} + (1+t^p) \sup_{x \in \mathbb{R}_0} \frac{|f'(u)|}{1+t^p} \right] du \\ &\leq \|f'\|_p \int_x^t \left[\frac{1}{\rho_p(x)} + \frac{1}{\rho_p(t)} \right] du \\ &= \|f'\|_p \left(\frac{1}{\rho_p(x)} + \frac{1}{\rho_p(t)} \right) |t-x|, \quad x, t \in \mathbb{R}_0 \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \rho_p(x) |L_n((t-x); r; x) - f(x)| &\leq \|f'\|_p \{L_n(|t-x|; r; x) \\ &+ \rho_p(x) L_n\left(\frac{|t-x|}{\rho_p(t)}; r; x\right)\}, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

olur. Hölder eşitsizliği Lemma 3.1.3, Lemma 3.1.2, Lemma 3.1.4 ve Lemma 3.1.5 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
L_n(|t-x|; r; x) &\leq \{L_n((t-x)^2; r; x)\}^{1/2} \{L_n(1; r; x)\}^{1/2} \leq \frac{M_6(p, r)}{n} \\
\rho_p(x) L_n\left(\frac{|t-x|}{\rho_p(t)}; r; x\right) &\leq \rho_p(x) \left\{L_n\left(\frac{(t-x)^2}{\rho_p(t)}; r; x\right)\right\}^{1/2} \left\{L_n\left(\frac{1}{\rho_p(t)}; r; x\right)\right\}^{1/2} \\
&\leq \rho_p(x) \left\{L_n\left(\frac{(t-x)^2}{\rho_p(t)}; r; x\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{L_n\left(\frac{1}{\rho_p(t)}; r; x\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{M_7(p, r)}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

eşitsizliği yazılabilir ki bu değerler (3.2.3) de yerlerine yazılıp $x \in \mathbb{R}_0$

için supremum alınırsa (3.2.1) elde edilir.

Teorem 3.2.2: $p \in \mathbb{N}_0, r \in \mathbb{N}$ sabitler olsun. Bu durumda bir $M_8 = M_8(p, r)$ sabiti vardır. Öyle ki $f \in C_p$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|L_n(f; r; \cdot) - f(\cdot)\|_p \leq M_8 w_1\left(f; C_p; \frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N} \tag{3.2.5}$$

dir.

İspat: İspat için Steklov fonksiyonunu kullanalım. $f \in C_p, h > 0$ ve $x \in \mathbb{R}_0$ için

$$f_h(x) := \frac{1}{h} \int_0^h f(x+t) dt \tag{3.2.6}$$

şeklinde tanımlansın. Buradan

$$\begin{aligned}
f_h(x) - f(x) &= \frac{1}{h} \int_0^h f(x+t) dt - f(x) = \frac{1}{h} \int_0^h f(x+t) dt - \frac{1}{h} \int_0^h f(x) dt \\
&= \frac{1}{h} \int_0^h [f(x+t) - f(x)] dt
\end{aligned}$$

yazılabilir.

$f'_h(x) = \frac{1}{h} [f(x+t) - f(x)]$ $h > 0, x \in \mathbb{R}_0$ şeklinde tanımlanırsa

$$f_h(x) - f(x) = \frac{1}{h} \int_0^h \Delta_t f(x) dt = \frac{1}{h} \int_0^h [f(x+t) - f(x)] dt$$

yazılabilir. Bu durumda her $h > 0$ için

$$|f_h(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{h} \int_0^h [f(x+t) - f(x)] dt \right| \leq \frac{1}{h} \int_0^h |f(x+t) - f(x)| dt$$

$$\Rightarrow \frac{|f_h(x) - f(x)|}{1+x^p} \leq \frac{1}{h} \int_0^h \frac{|f(x+t) - f(x)|}{1+x^p} dt$$

$$\Rightarrow \|f_h(x) - f(x)\|_p = \sup_{x \in \mathbb{R}_0} \frac{|f_h(x) - f(x)|}{1+x^p} \leq \frac{1}{h} \int_0^h \sup_{x \in \mathbb{R}_0} \frac{|f(x+t) - f(x)|}{1+x^p} dt$$

$$= \frac{1}{h} \int_0^h \|\Delta_h f(x)\|_p dt = \frac{1}{h} \|\Delta_h f(x)\|_p \cdot h$$

$$= \|\Delta_h f(x)\|_p$$

olacağından ve $\sup_{x \in \mathbb{R}_0} \|\Delta_h f(x)\|_p = \omega_1(f; C_p; h)$ olduğundan

$$\Rightarrow \|f_h(x) - f(x)\|_p \leq \omega_1(f; C_p; h) \quad (3.2.7)$$

olarak elde edilir. Ayrıca (3.2.6) dan

$$f_h(x) - f(x) = \frac{1}{h} \int_0^h \Delta_t f(x) dt$$

olup,

$$\frac{f_h(x) - f(x)}{h} = \frac{1}{h^2} \int_0^h \Delta_t f(x) dt$$

den

$$f'_h(x) = \frac{1}{h^2} \int_0^h \Delta_t f(x) dt \Rightarrow |f'_h(x)| \leq \frac{1}{h^2} \int_0^h |\Delta_t f(x)| dt$$

yazılabilir. Buradan da

$$\Rightarrow \frac{|f'_h(x)|}{1+x^p} \leq \frac{1}{h^2} \int_0^h \frac{|\Delta_t f(x)|}{1+x^p} dt$$

$$\Rightarrow \|f'_h(x)\|_p = \sup_{x \in \mathbb{R}_0} \frac{|f'_h(x)|}{1+x^p} \leq \frac{1}{h^2} \int_0^h \sup_{x \in \mathbb{R}_0} \frac{|\Delta_h f(x)|}{1+x^p} dt$$

$$= \frac{1}{h^2} \int_0^h \|\Delta_h f(x)\|_p dt = \frac{1}{h} \|\Delta_h f(x)\|_p$$

$$\Rightarrow \|f'_h(x)\|_p \leq \sup_{x \in \mathbb{R}_0} \frac{1}{h} \|\Delta_h f(x)\|_p = \frac{1}{h} \omega_1(f; C_p; h)$$

$$\Rightarrow \|f'_h(x)\|_p \leq \frac{1}{h} \omega_1(f; C_p; h) \quad (3.2.8)$$

olarak bulunur.

Bu eşitsizlikler göstermektedir ki eğer $f \in C_p$ ve $h > 0$ ise $f_h \in C_p^1$ dir. Böylece L_n operatörünün lineerliği de kullanılarak

$$\begin{aligned} \rho_p(x) |L_n(f; x) - f(x)| &= \rho_p(x) |L_n(f; x) - f(x) + L_n(f_h; x) \\ &\quad - L_n(f_h; x) + f_h(x) - f_h(x)| \\ &= \rho_p(x) \{|L_n(f - f_h; x) + L_n(f_h; x) - f_h(x) + f_h(x) - f(x)|\} \\ &\leq \rho_p(x) |L_n(f - f_h; x)| + \rho_p(x) |L_n(f_h; x) - f_h(x)| + \rho_p(x) |f_h(x) - f(x)| \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. (3.1.22) ve (3.2.7) dan

$\forall n \in \mathbb{N}, h > 0, x \in \mathbb{R}_0$ için

$$\rho_p(x) |L_n(f - f_h; x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}_0} \rho_p(x) |L_n(f - f_h; x)| = \|L_n(f - f_h; x)\|_p$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \frac{f}{f} (f - f_h) L_n(1; x) \right\|_p = \frac{1}{\|f\|_p} \|f - f_h\|_p \|L_n(f; x)\|_p \\
&\leq \frac{1}{\|f\|_p} M_2 \|f\|_p \|f - f_h\|_p = M_2 \|f - f_h\|_p \leq M_2 \omega_1(f; C_p; h)
\end{aligned}$$

olur. Buna göre

$$\|L_n(f - f_h; x)\|_p \leq M_2 \omega_1(f; C_p; h) \quad (3.2.9)$$

bulunur. (3.2.1) ve (3.2.8) den

$$\begin{aligned}
\rho_p(x) |L_n(f_h; x) - f_h(x)| &= \sup_{x \in \mathbb{R}_0} \rho_p(x) |L_n(f_h; x) - f_h(x)| \\
&= \|L_n(f_h; x) - f_h(x)\|_p
\end{aligned}$$

yazılabilir. Steklov fonksiyonu yardımı ile

$$f_h(t) - f_h(x) = \int_x^t f_h'(u) du \quad t \in \mathbb{R}_0$$

şeklinde tanımlayıp Teorem 3.2.1 in ispatından izlenen yol izlenirse

$$\|L_n(f_h; x) - f_h(x)\|_p \leq \frac{M_5}{n} \|f_h'\|_p \leq \frac{M_5}{nh} \omega_1(f; h; x) \quad h > 0, n \in \mathbb{N} \quad (3.2.10)$$

olarak elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\rho(x) |f_h(x) - f(x)| &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}_0} \rho_p(x) |f_h(x) - f(x)| \\
&= \|f_h(x) - f(x)\|_p \leq \omega_1(f; C_p; h)
\end{aligned} \quad (3.2.11)$$

olur. (3.2.9), (3,2,10) ve (3,2,11) eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$\|L_n(f; r; \cdot) - f(\cdot)\|_p \leq \left(1 + M_2 + \frac{M_5}{nh}\right) \omega_1(f; C_p; h)$$

yazılabilir ki $\left(1 + M_2 + \frac{M_5}{nh}\right) = M_8$ olarak seçilirse (3.2.5) elde edilir ki

bu ispatı tamamlar.

Teorem 3.2.1 ve Teorem 3.2.2 den sonra aşağıdaki sonuçları yazabiliriz.

Sonuç 1: Her sabit $r \in \mathbb{N}$ ve $f \in C_p$, $p \in \mathbb{N}_0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f; r; \cdot) - f(\cdot)\|_p = 0$$

dır.

Sonuç 2: Eğer $f \in C_p^1$, $p \in \mathbb{N}_0$ ve $r \in \mathbb{N}$ ise o takdirde

$$\|L_n(f; r; \cdot) - f(\cdot)\|_p = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

dir.

3.3. Polinom Ağırlıklı Uzaylarda Yaklaşım

3.3.1 İki Değişkenli $A_{m,n}$ Operatörünün Tanımlanması

Tezin bu kısmında daha önce tanımlanan L_n operatörünün bir modifiye şeklinin iki değişkenli hali için polinom ağırlıklı uzaylarda yaklaşım özelliklerini inceleyeceğiz. Bu inceleme sırasında L_n için incelenen özelliklerden yararlanacağız ve ispatlarımızda bu özelliklerin sonuçlarını kullanacağız.

Şimdi bu kısımda inceleyeceğimiz operatörü ve operatörün yaklaşım özelliklerini incelerken kullanacağımız diğer fonksiyonları tanımlayalım.

Verilen $p, q \in \mathbb{N}_0$ için $C_{p,q}$ ağırlıklı uzayında ağırlık fonksiyonunu

$$\rho_{p,q}(x, y) = \rho_p(x)\rho_q(y) \quad (x, y) \in R_0^2 = R_0 \times R_0 \quad (3.3.1)$$

olarak tanımlayalım. Yine $C_{p,q}$ ağırlıklı uzayında normu

$$\|f\|_{p,q} \equiv \|f(\cdot, \cdot)\|_{p,q} = \sup \rho_{p,q}(x, y) |f(x, y)| \quad (3.3.2)$$

şeklinde tanımlayalım. $f \in C_{p,q}$ ağırlıklı uzayında süreklilik modülünü alışıldığı gibi

$$\Delta_{h,\mu} f(x, y) = f(x + h, y + \mu) - f(x, y) \quad , (x + h, y + \mu) \in R_0^2$$

$$\omega(f, C_{p,q}; t, s) = \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}_0^2} \|\Delta_{h,\mu} f(x, y)\| \quad t, s \geq 0 \quad (3.3.3)$$

şeklinde tanımlayalım. $C_{p,q}$ ya ait türevlenebilen tüm f fonksiyonlarının oluşturduğu kümeyi $C_{p,q}^1$ ile gösterelim. Süreklilik modülünün özelliklerinden dolayı açıktır ki

$$\lim_{t,s \rightarrow 0^+} \omega(f, C_{p,q}; t, s) = 0$$

dır.

$$r, s \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\} \quad (x, y) \in \mathbb{R}_0^2 \quad m, n \in \mathbb{N} \quad \text{ve} \quad \alpha > 0 \quad \text{için} \quad (3.1.2) \quad \text{ve} \quad (3.1.3)$$

sağlanmak üzere

$$\begin{aligned} A_{m,n}(f; r, s, \alpha; x, y) &= A_{m,n}(f; x, y) = \frac{1}{g((m^\alpha x + 1)^2; r) g((n^\alpha y + 1)^2; s)} \\ &\times \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m^\alpha x + 1)^{2j}}{(j+r)!} \frac{(n^\alpha y + 1)^2}{(k+s)!} f\left(\frac{j+r}{m^\alpha(m^\alpha x + 1)}, \frac{k+s}{n^\alpha(n^\alpha y + 1)}\right) \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

operatörünü tanımlayalım. $p, q \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere bu operatör $C_{p,q}$ uzayında lineer ve pozitifdir. Ayrıca

$r, s \in \mathbb{N}, \alpha > 0$ ve $(x, y) \in \mathbb{R}_0^2$ olmak üzere

$$A_{m,n}(1; r, s, \alpha; x, y) = 1 \quad (3.3.5)$$

Eğer $f \in C_{p,q}$ ve her $(x, y) \in \mathbb{R}_0^2$ için $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ ise o takdirde

$$A_{m,n}(f; r, s, \alpha; x, y) = A_m(f_1; r, s, \alpha; x) A_n(f_2; r, s, \alpha; y) \quad (3.3.6)$$

eşitliği sağlanır.

Lemma 3.3.1: $r, s \in \mathbb{N}, \alpha > 0$ ve $(x, y) \in \mathbb{R}_0^2$ olmak üzere (3.3.4) ile tanımlanan $A_{m,n}$ operatörü (3.3.6) şeklinde yazıldığında aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

$$i) \quad A_{m,n}(1; x, y) = 1 \quad (3.3.7)$$

$$ii) \quad A_{m,n}(\mu; x, y) = \left(x + \frac{1}{m^\alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{g((m^\alpha x + 1)^2; r)(r-1)!(m^\alpha x + 1)}\right) \quad (3.3.8)$$

$$iii) \quad A_{m,n}(\sigma; x, y) = \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{g((n^\alpha y + 1)^2; s)(s-1)!(n^\alpha y + 1)^2}\right) \quad (3.3.9)$$

$$\begin{aligned}
iv) \quad A_{m,n}(\mu^2 + \sigma^2; x, y) &= \left(x + \frac{1}{m^{2\alpha}}\right)^2 \left[1 + \frac{1}{(m^\alpha x + 1)^2} + \right. \\
&\quad \frac{1}{g((m^\alpha x + 1)^2; r)(r-1)!(m^\alpha x + 1)^2} \left(1 + \frac{r}{(m^\alpha x + 1)^2}\right)] + \left(y + \frac{1}{n^{2\alpha}}\right)^2 \\
&\quad \left[1 + \frac{1}{(n^\alpha y + 1)^2} + \frac{1}{g((n^\alpha y + 1)^2; s)} \frac{1}{(n^\alpha y + 1)^2(s-1)!} \right. \\
&\quad \left. \left(1 + \frac{s}{(n^\alpha y + 1)^2(s-1)!}\right)\right] \tag{3.3.10}
\end{aligned}$$

İspatı yaparken L_n operatörünün sağladığı özellikleri gösterirken yapılan işlemleri tekrarlayacağımızdan kısalık olması için elde edilen sonuçları kullanacağız.

$$\begin{aligned}
\text{İspat: } i) \quad A_{m,n}(1; x, y) &= \frac{1}{g((m^\alpha x + 1)^2; r)g((n^\alpha y + 1)^2; s)} \\
&\times \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m^\alpha x + 1)^{2j}}{(j+r)!} \frac{(n^\alpha y + 1)^{2k}}{(k+s)!} 1 \\
&= \frac{1}{g((mx + 1)^2; r)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(m^\alpha x + 1)^{2j}}{(j+r)!} \frac{1}{g((n^\alpha y + 1)^2; s)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n^\alpha y + 1)^{2k}}{(k+s)!} = 1
\end{aligned}$$

$$ii) \quad A_{m,n}(\mu; x, y) = \frac{1}{g((m^\alpha x + 1)^2; r)g((n^\alpha y + 1)^2; s)}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m^\alpha x + 1)^{2j}}{(j+r)!} \frac{(n^\alpha y + 1)^{2k}}{(k+s)!} \frac{j+r}{m^\alpha(m^\alpha x + 1)} \\
&= \frac{1}{g((m^\alpha x + 1)^2; r)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(m^\alpha x + 1)^{2j}}{(j+r)!} \frac{j+r}{m^\alpha(m^\alpha x + 1)} \\
&\times \frac{1}{g((n^\alpha y + 1)^2; s)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n^\alpha y + 1)^{2k}}{(k+s)!} \\
A_{m,n}(\mu; x, y) &= \left(x + \frac{1}{m^\alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{g((m^\alpha x + 1)^2; r)(r-1)!(m^\alpha x + 1)}\right)
\end{aligned}$$

$$iii) \quad A_{m,n}(\sigma; x, y) = \frac{1}{g((m^\alpha x + 1)^2; r)g((n^\alpha y + 1)^2; s)}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m^{\alpha}x + 1)^{2j}}{(j+r)!} \frac{(n^{\alpha}y + 1)^{2k}}{(k+s)!} \frac{k+s}{n^{\alpha}(n^{\alpha}y + 1)} \\
&= \underbrace{\frac{1}{g((m^{\alpha}x + 1)^2; r)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(m^{\alpha}x + 1)^{2j}}{(j+r)!}}_1 \\
&\times \frac{1}{g((n^{\alpha}y + 1)^2; s)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n^{\alpha}y + 1)^{2k}}{(k+s)!} \frac{k+s}{n^{\alpha}(n^{\alpha}y + 1)} \\
&A_{m,n}(\sigma; x, y) = \left(1 + \frac{1}{n^{\alpha}}\right) \left(1 + \frac{1}{g((n^{\alpha}y + 1)^2; s)(s-1)!(n^{\alpha}y + 1)^2}\right) \\
&iv) \ A_{m,n}(\mu^2 + \sigma^2; x, y) = \frac{1}{g((m^{\alpha}x + 1)^2; r)g((n^{\alpha}y + 1)^2; s)} \\
&\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m^{\alpha}x + 1)^{2j}}{(j+r)!} \frac{(n^{\alpha}y + 1)^{2k}}{(k+s)!} \left[\frac{(j+r)^2}{m^{2\alpha}(m^{\alpha}x + 1)^2} + \frac{(k+s)^2}{n^{2\alpha}(n^{\alpha}y + 1)^2} \right] \\
&= \frac{1}{g((m^{\alpha}x + 1)^2; r)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(m^{\alpha}x + 1)^{2j}}{(j+r)!} \frac{(j+r)^2}{m^{2\alpha}(m^{\alpha}x + 1)^2} \underbrace{\frac{1}{g((n^{\alpha}y + 1)^2; s)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n^{\alpha}y + 1)^{2k}}{(k+s)!}}_1 \\
&+ \underbrace{\frac{1}{g((m^{\alpha}x + 1)^2; r)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(m^{\alpha}x + 1)^{2j}}{(j+r)!}}_1 \frac{1}{g((n^{\alpha}y + 1)^2; s)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n^{\alpha}y + 1)^{2k}}{(k+s)!} \frac{(k+s)^2}{n^{2\alpha}(n^{\alpha}y + 1)^2} \\
&\times A_{m,n}(\mu^2 + \sigma^2; x, y) = \left(x + \frac{1}{m^{2\alpha}}\right)^2 \left[1 + \frac{1}{(m^{\alpha}x + 1)^2} + \right. \\
&\times \frac{1}{g((m^{\alpha}x + 1)^2; r)(r-1)!(m^{\alpha}x + 1)^2} \left(1 + \frac{r}{(m^{\alpha}x + 1)^2}\right) + \left(y + \frac{1}{n^{2\alpha}}\right)^2 \\
&\times \left[1 + \frac{1}{(n^{\alpha}y + 1)^2} + \frac{1}{g((n^{\alpha}y + 1)^2; s)} \frac{1}{(n^{\alpha}y + 1)^2(s-1)!} \right. \\
&\times \left. \left(1 + \frac{s}{(n^{\alpha}y + 1)^2(s-1)!}\right) \right]
\end{aligned}$$

olarak elde edilir ki bu Lemma 3.3.1 in ispatını tamamlar.

3.3.2 $A_{m,n}$ Operatörünün Yaklaşım Özellikleri

Bu kısımda $A_{m,n}$ operatörünün yaklaşım özelliklerini inceleyebilmek için ihtiyacımız olan bazı lemmaları vereceğiz ve arkasından da $A_{m,n}$ operatörü için teoremler vereceğiz.

Lemma 3.3.2: $x \in \mathbb{R}_0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$i) A_{m,n}(t - x; x, y) = \frac{1}{m^\alpha} + \frac{1}{m^\alpha(m^\alpha x + 1)(r - 1)! g((mx + 1)^2; r)} \quad (3.3.11)$$

$$ii) A_{m,n}((t - x)^2; x, y) = \frac{2}{m^\alpha} + \frac{r + (mx + 1)^2 - 2m^\alpha x(mx + 1)}{m^\alpha(m^\alpha x + 1)(r - 1)! g((mx + 1)^2; r)} \quad (3.3.12)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

$$\text{İspat: } i) A_{m,n}(t - x; x, y) = \frac{1}{g((m^\alpha x + 1)^2; r)} \frac{1}{g((n^\alpha y + 1)^2; s)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n^\alpha y + 1)^{2k}}{(k + s)!}$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(m^\alpha x + 1)^{2k}}{(j + r)!} \left(\frac{j + r}{m^\alpha(m^\alpha x + 1)} - x \right) \frac{k + s}{n^\alpha(n^\alpha y + 1)} \\ &= \frac{1}{g((m^\alpha x + 1)^2; r)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(m^\alpha x + 1)^{2k}}{(j + r)!} \left(\frac{j + r}{m^\alpha(m^\alpha x + 1)} - x \right) \\ & \times \underbrace{\frac{1}{g((n^\alpha y + 1)^2; s)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n^\alpha y + 1)^{2k}}{(k + s)!}}_1 \\ &= \frac{1}{g((m^\alpha x + 1)^2; r)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(m^\alpha x + 1)^{2k}}{(j + r)!} \frac{j + r}{m^\alpha(m^\alpha x + 1)} \\ & - \frac{x}{g((m^\alpha x + 1)^2; r)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(m^\alpha x + 1)^{2k}}{(j + r)!} \\ & A_{m,n}(t - x; x, y) = \left(x + \frac{1}{m^\alpha} \right) \left[1 + \frac{1}{(m^\alpha x + 1)^2 (r - 1)! g((mx + 1)^2; r)} \right] - x \end{aligned}$$

$$A_{m,n}(t-x; x, y) = x + \frac{1}{m^\alpha} + \frac{x}{m^\alpha(m^\alpha x + 1)^2(r-1)! g((mx+1)^2; r)}$$

$$+ \frac{1}{m^\alpha(m^\alpha x + 1)^2(r-1)! g((mx+1)^2; r)} - x$$

payda eşitlemesi yaparsak

$$A_{m,n}(t-x; x, y) = \frac{1}{m^\alpha} + \frac{(m^\alpha x + 1)}{m^\alpha(m^\alpha x + 1)^2(r-1)! g((mx+1)^2; r)}$$

$$A_{m,n}(t-x; x, y) = \frac{1}{m^\alpha} + \frac{1}{m^\alpha(m^\alpha x + 1)(r-1)! g((mx+1)^2; r)}$$

elde edilir ki bu da istenilendir.

$$ii) A_{m,n}((t-x)^2; x, y)$$

$$= \frac{1}{g((m^\alpha x + 1)^2; r)} \frac{1}{g((n^\alpha y + 1)^2; s)} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m^\alpha x + 1)^{2k}}{(j+r)!} \frac{(n^\alpha y + 1)^{2k}}{(k+s)!}$$

$$\times \left(\frac{j+r}{m^\alpha(m^\alpha x + 1)} - x \right)^2 \frac{k+s}{n^\alpha(n^\alpha y + 1)}$$

$$= \frac{1}{g((m^\alpha x + 1)^2; r)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(m^\alpha x + 1)^{2k}}{(j+r)!} \left[\left(\frac{j+r}{m^\alpha(m^\alpha x + 1)} \right)^2 - \frac{2x(j+r)}{m^\alpha(m^\alpha x + 1)} + x^2 \right]$$

$$\times \underbrace{\frac{1}{g((n^\alpha y + 1)^2; s)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n^\alpha y + 1)^{2k}}{(k+s)!}}_1$$

$$= \frac{1}{g((m^\alpha x + 1)^2; r)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(m^\alpha x + 1)^{2k}}{(j+r)!} \left(\frac{j+r}{m^\alpha(m^\alpha x + 1)} \right)^2$$

$$- \frac{2x}{g((m^\alpha x + 1)^2; r)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(m^\alpha x + 1)^{2k}}{(j+r)!} \frac{(j+r)}{m^\alpha(m^\alpha x + 1)}$$

$$+ \frac{x^2}{g((m^\alpha x + 1)^2; r)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(m^\alpha x + 1)^{2k}}{(j+r)!}$$

$L_n(t^2, x), L_n(t, x), L_n(1, x)$ değerlerini kullanırsak

$$\begin{aligned}
&= \frac{r}{(m^\alpha x + 1)^2(r-1)! m^{2\alpha} g((mx+1)^2; r)} + \frac{1}{m^{2\alpha}(r-1)! g((mx+1)^2; r)} \\
&+ \frac{(m^\alpha x + 1)^{2j}}{m^{2\alpha}} + \frac{1}{m^{2\alpha}} - 2x \left[\frac{(m^\alpha x + 1)}{m^{2\alpha}} \right. \\
&\left. + \frac{1}{(m^\alpha x + 1)m^{2\alpha}(r-1)! g((mx+1)^2; r)} + x^2 \right] \\
&= \frac{r}{(m^\alpha x + 1)^2(r-1)! m^{2\alpha} g((mx+1)^2; r)} + \frac{1}{m^{2\alpha}(r-1)! g((mx+1)^2; r)} + x^2 \\
&+ \frac{2x}{m^{2\alpha}} + \frac{1}{m^{2\alpha}} + \frac{2x(m^\alpha x + 1)}{m^{2\alpha}} \\
&- \frac{2x}{(m^\alpha x + 1)m^{2\alpha}(r-1)! g((mx+1)^2; r)} + x^2 \\
&= \frac{r}{(m^\alpha x + 1)^2(r-1)! m^{2\alpha} g((mx+1)^2; r)} + \frac{1}{m^{2\alpha}(r-1)! g((mx+1)^2; r)} \\
&+ 2x^2 + \frac{2x}{m^{2\alpha}} + \frac{2}{m^{2\alpha}} - 2x^2 - \frac{2x}{m^{2\alpha}} - \frac{2x}{(m^\alpha x + 1)m^\alpha(r-1)! g((mx+1)^2; r)} \\
A_{m,n}((t-x)^2; x, y) &= \frac{2}{m^{2\alpha}} + \frac{r + (mx+1)^2 - 2x(m^\alpha x + 1)}{(m^\alpha x + 1)m^\alpha(r-1)! g((mx+1)^2; r)}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 3.3.3: Sabit $p, q \in \mathbb{N}_0$, $r, s \in \mathbb{N}$ ve $\alpha > 0$ olsun. Bu durumda bir pozitif

$M_5 = M_5(p, q, r, s)$ sabiti vardır. Öyle ki,

$$\left\| A_{m,n} \left(\frac{1}{\rho_{p,q}(t, z)}; r, s, \alpha; \cdot \right) \right\|_{p,q} \leq M_5; m, n \in \mathbb{N} \quad (3.3.13)$$

dir. Üstelik

$$\left\| A_{m,n} \left(\frac{1}{\rho_{p,q}(t,z)}; r, s, \alpha; \cdot, \cdot \right) \right\|_{p,q} \leq M_5 \|f\|_{p,q}; m, n$$

$$\in \mathbb{N} \quad (3.3.14)$$

dir. Bu lemmanın sonucu olarak $A_{m,n}$ operatörünün $C_{p,q}$ dan $C_{p,q}$ ya olduğu görülür.

İspat: İspat için daha önce verilen verilen Lemma 3.1.4 ün ispatında izlenen yol izlendiğinde $A_{m,n}$ nin lineerliğinden

$$\begin{aligned} & \rho_{p,q}(x,y) A_{m,n} \left(\frac{1}{\rho_{p,q}(t,z)}; r, s, \alpha; x, y \right) \\ &= \rho_{p,q}(x,y) A_{m,n}((1+t^p)(1+z^q); r, s, \alpha; x, y) \\ &= \rho_{p,q}(x,y) A_{m,n}(1+t^p+z^q+t^p z^q; r, s, \alpha; x, y) \\ &= \rho_{p,q}(x,y) \{A_{m,n}(1; r, s, \alpha; x, y) + A_{m,n}(t^p; r, s, \alpha; x, y) \\ &+ A_{m,n}(z^q; r, s, \alpha; x, y) + A_{m,n}(t^p z^q; r, s, \alpha; x, y)\} \end{aligned}$$

$A_{m,n}$ operatörünün tanımını, Lemma 3.2 yi ve $\omega_{p,q}(x,y)$ tanımını kullanırsak

$$\begin{aligned} & \rho_{p,q}(x,y) A_{m,n} \left(\frac{1}{\rho_{p,q}(t,z)}; r, s, \alpha; x, y \right) \\ &= \frac{1}{1+x^p} \frac{1}{1+y^q} A_{m,n}(1; r, s, \alpha; x, y) + \frac{1}{1+y^q} \frac{\left(x + \frac{1}{m^\alpha}\right)^p}{1+x^p} \\ & \sum_{j=1}^p \frac{1}{(m^\alpha x + 1)^{2(j-1)}} \left(\alpha_{p,j} + \frac{\beta_{p,j}(r)}{(m^\alpha x + 1)^2 (r-1)! g((m^\alpha x + 1)^2; r)} \right) \\ & \times \frac{1}{g((n^\alpha y + 1)^2; s)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n^\alpha y + 1)^{2k}}{(k+s)!} + \frac{1}{1+x^p} \frac{\left(x + \frac{1}{n}\right)^q}{1+y^q} \\ & \sum_{k=0}^q \frac{1}{(n^\alpha y + 1)^{2(k-1)}} \left(\alpha_{q,k} + \frac{\beta_{q,k}(s)}{(n^\alpha y + 1)^2 (s-1)! g((n^\alpha y + 1)^2; r)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{g((m^\alpha x + 1)^2; r)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(m^\alpha x + 1)^{2k}}{(j+r)!} + \frac{\left(x + \frac{1}{m^\alpha}\right)^p \left(x + \frac{1}{n}\right)^q}{1+x^p} \frac{1}{1+y^q} \\
& \times \sum_{j=1}^p \frac{1}{(m^\alpha x + 1)^{2(j-1)}} \left(\alpha_{p,j} + \frac{\beta_{p,j}(r)}{(m^\alpha x + 1)^2 (r-1)! g((m^\alpha x + 1)^2; r)} \right) \\
& \sum_{k=0}^q \frac{1}{(n^\alpha y + 1)^{2(k-1)}} \left(\alpha_{q,k} + \frac{\beta_{q,k}(s)}{(n^\alpha y + 1)^2 (s-1)! g((n^\alpha y + 1)^2; r)} \right) \\
& \leq 1 + \sum_{l=0}^p \binom{p}{l} \frac{x^l}{1+x^p} \sum_{j=1}^p (\alpha_{p,j} + r\beta_{p,j}(r)) + \sum_{i=0}^q \binom{q}{i} \frac{y^i}{1+y^q} \sum_{k=1}^q (\alpha_{q,k} + s\beta_{q,k}(s)) \\
& + \sum_{l=0}^p \binom{p}{l} \frac{x^l}{1+x^p} \sum_{j=1}^p (\alpha_{p,j} + r\beta_{p,j}(r)) \cdot \sum_{i=0}^q \binom{q}{i} \frac{y^i}{1+y^q} \sum_{k=1}^q (\alpha_{q,k} + s\beta_{q,k}(s)) \\
& \leq M_5(p, q, r, s) = M_5 \text{ olarak bulunur.}
\end{aligned}$$

Eğer $f \in C_{p,q}$ ise bu durumda (3.3.13) eşitsizliğini de göz önüne aldığımızda

$$\begin{aligned}
\rho_{p,q}(x, y) A_{m,n}(f; r, s, \alpha; x, y) &= \rho_{p,q}(x, y) \cdot \frac{\rho_{p,q}(x, y)}{\rho_{p,q}(x, y)} A_{m,n}(f; r, s, \alpha; x, y) \\
&= \rho_{p,q}(x, y) f(x, y) \rho_{p,q}(x, y) A_{m,n} \left(\frac{1}{\rho_{p,q}(t, z)}; r, s, \alpha; x, y \right)
\end{aligned}$$

eşitliğin her iki tarafından $(x, y) \in \mathbb{R}_0^2$ için supremum alınırsa

$$\|A_{m,n}(f; r, s, \alpha; x, y)\|_{p,q} \leq \|f\|_{p,q} \left\| A_{m,n} \left(\frac{1}{\rho_{p,q}(t, z)}; r, s, \alpha; \cdot, \cdot \right) \right\|_{p,q}$$

elde edilir ki bu (3.3.14) tür. Böylece Lemmanın ispatı tamamlanır.

Şimdi $A_{m,n}$ operatörünün yakınsaklık özellikleri ile ilgili iki teorem verelim.

Teorem 3.3.1: Kabul edelim ki $f \in C_{p,q}^1$ ve $p, q \in N_0$ olsun. Bu durumda her $m, n \in N$ ve $r, s \in N$ için pozitif bir $M_6 = M_6(p, q, r, s)$ sabiti vardır öyle ki

$$\|A_{m,n}(f; r, s, \alpha; x, y) - f(\cdot, \cdot)\|_{p,q} \leq M_6 \left\{ \frac{1}{m^\alpha} \|f'_x\|_{p,q} + \frac{1}{n^\alpha} \|f'_y\|_{p,q} \right\} \quad (3.3.15)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: $(x, y) \in \mathbb{R}_0^2$ sabit bir nokta olsun. Bu durumda $f \in C_{p,q}^1$ için

$$f(t, z) - f(x, y) = \int_x^t f'_u(u, z) du + \int_y^z f'_v(x, v) dv; (t, z) \in \mathbb{R}_0^2$$

yazabiliriz. $A_{m,n}(1; r, s, \alpha; x, y) = 1$ olduğundan bu eşitliğin her iki yanına lineer olan $A_{m,n}$ operatörünü uygularsak

$$\begin{aligned} A_{m,n}(f(t, z); r, s, \alpha; x, y) - f(x, y) &= A_{m,n} \left(\int_x^t f'_u(u, z) du; r, s, \alpha; x, y \right) \\ &+ A_{m,n} \left(\int_y^z f'_v(x, v) dv; r, s, \alpha; x, y \right) \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

elde ederiz. (3.3.1) ve (3.3.2) tanımlarını göz önüne aldığımızda

$$\begin{aligned} \left| \int_x^t f'_u(u, z) du \right| &= \left| \int_x^t \frac{\rho_{p,q}(u, z)}{\rho_{p,q}(u, z)} f'_u(u, z) du \right| \\ &= \left| \int_x^t \rho_{p,q}(u, z) \frac{f'_u(u, z)}{\rho_{p,q}(u, z)} du \right| \\ &\leq \int_x^t \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}_0^2} \rho_{p,q}(u, z) |f'_u(u, z)| \frac{du}{\rho_{p,q}(u, z)} \\ &\leq \|f'_x\|_{p,q} \int_x^t \frac{du}{\rho_{p,q}(u, z)} \\ &\leq \|f'_x\|_{p,q} \left(\frac{1}{\rho_{p,q}(t, z)} + \frac{1}{\rho_{p,q}(x, z)} \right) \int_x^t du \end{aligned}$$

$$\left| \int_x^t f'_u(u, z) du \right| = \|f'_x\|_{p,q} \left(\frac{1}{\rho_{p,q}(t, z)} + \frac{1}{\rho_{p,q}(x, z)} \right) |t - x| \quad (3.3.17)$$

yazılabilir. Şimdi (3.3.1), (3.3.2),(3.3.4),(3.3.11) eşitliklerini göz önüne alalım.

Bu durumda

$$\underbrace{\rho_{p,q}(x, y) \left| A_{m,n} \left(\int_x^t f'_u(u, z) d_u; r, s, \alpha; x, y \right) \right|}_{**} \\ \leq \rho_{p,q}(x, y) A_{m,n} \left(\left| \int_x^t f'_u(u, z) d_u \right|; r, s, \alpha; x, y \right)$$

dır. (3.3.17) göz önüne alınırsa

$$** = \rho_{p,q}(x, y) \left| A_{m,n} \left(\int_x^t f'_u(u, z) d_u; r, s, \alpha; x, y \right) \right| \\ \leq \rho_{p,q}(x, y) \|f'_x\|_{p,q} \left\{ A_{m,n} \left(\frac{|t - x|}{\rho_{p,q}(t, z)}; r, s, \alpha; x, y \right) \right. \\ \left. + \left\{ A_{m,n} \left(\frac{|t - x|}{\rho_{p,q}(x, z)}; r, s, \alpha; x, y \right) \right\} \right\}$$

olarak yazılabilir. (3.1.1) ile tanımlanan L_n operatörü göz önüne alınırsa

$$** \leq \rho_p(x) \rho_q(y) \|f'_x\|_{p,q} \left\{ \left[L_m \left(\frac{|t - x|}{\rho_p(t)}; r, \alpha; x \right) L_n \left(\frac{|t - x|}{\rho_q(z)}; s, \alpha; y \right) \right] \right. \\ \left. \left[L_m \left(\frac{|t - x|}{\rho_p(x)}; r, \alpha; x \right) L_n \left(\frac{|t - x|}{\rho_q(z)}; s, \alpha; y \right) \right] \right\} \\ = \|f'_x\|_{p,q} \rho_q(y) L_n \left(\frac{1}{\rho_q(z)}; s, \alpha; y \right) \left\{ \rho_p(x) L_m \left(\frac{|t - x|}{\rho_p(t)}; r, \alpha; x \right) \right. \\ \left. + \rho_p(x) L_m \left(\frac{|t - x|}{\rho_p(x)}; r, \alpha; x \right) \right\}$$

şeklinde elde edilir. Hölder eşitsizliğini uygulayarak daha önce bulduğumuz

(3.3.11), (3.3.12), (3.3.13) ve (3.3.14) eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} L_m(|t-x|; r, \alpha; x) &\leq \{L_m(|t-x|^2; r, \alpha; x)\}^{\frac{1}{2}} \{L_m(1; r, \alpha; x)\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{M_7(p, r)}{m^\alpha} \end{aligned}$$

eşitsizliğinin var olduğunu görürüz. Ayrıca her $m \in \mathbb{N}$ ve $x \in \mathbb{R}_0$ için Hölder eşitsizliği gereğince

$$\begin{aligned} \rho_p(x) L_m\left(\frac{|t-x|}{\rho_p(t)}; r, \alpha; x\right) &\leq \left\{ \rho_p(x) L_m\left(\frac{|t-x|^2}{\rho_p(t)}; r, \alpha; x\right) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \rho_p(x) L_m\left(\frac{1}{\rho_p(t)}; r, \alpha; x\right) \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{M_8(p, r)}{m^\alpha} \end{aligned}$$

yazılabilir. Bütün bunlardan görülmektedir ki $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\rho_{p,q}(x, y) \left| A_{m,n} \left(\int_x^t f'_u(u, z) du; r, s, \alpha; x, y \right) \right| \leq \frac{M_9(p, q, r, s)}{m^\alpha} \|f'_x\|_{p,q} \quad (3.3.18)$$

elde edilir. Benzer işlemler tekrar edildiğinde kolayca

$$\rho_{p,q}(x, y) \left| A_{m,n} \left(\int_x^t f'_u(u, z) du; r, s, \alpha; x, y \right) \right| \leq \frac{M_{10}(p, q, r, s)}{m^\alpha} \|f'_y\|_{p,q} \quad (3.3.19)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu iki eşitlik (3.3.16) da yerlerine yazıldığında (3.3.15) elde edilir ki bu da teoremi ispatlar.

Teorem 3.3.2: $p, q \in \mathbb{N}$ ve $f \in C_{p,q}$ olsun. Bu durumda bir pozitif

$M_{11} \equiv M_{11}(p, q, r, s)$ sabiti vardır öyle ki her $m, n, r, s \in \mathbb{N}$ ve $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned} & \|A_{m,n}(f; r, s, \alpha; x, y) - f(\cdot, \cdot)\|_{p,q} \\ & \leq M_{11} \omega\left(f, C_{p,q}; \frac{1}{m^\alpha}, \frac{1}{n^\alpha}\right) \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

dır.

İspat: İspat için $f \in C_{p,q}$ için $f_{h,\delta}$ Steklov fonksiyonundan faydalanacağız. Bu fonksiyon

$$f_{h,\delta}(x, y) = \frac{1}{h\delta} \int_0^h du \int_0^\delta f(x+u, y+v) dv; (x, y) \in \mathbb{R}^2; h, \delta > 0 \quad (3.3.21)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. (3.3.21) den

$$\begin{aligned} f_{h,\delta}(x, y) - f(x, y) &= \frac{1}{h\delta} \int_0^h du \int_0^\delta [f(x+u, y+v) - f(x, y)] dv \\ &= \frac{1}{h\delta} \int_0^h du \int_0^\delta \Delta_{u,v} f(x, y) dv \end{aligned}$$

$$(f_{h,\delta})'_x(x, y) = \frac{1}{h\delta} \int_0^\delta [\Delta_{h,v} f(x, y) - \Delta_{0,v} f(x, y)] dv$$

$$(f_{h,\delta})'_y(x, y) = \frac{1}{h\delta} \int_0^\delta [\Delta_{u,\delta} f(x, y) - \Delta_{u,0} f(x, y)] du$$

yazabiliriz. Eğer $f \in C_{p,q}$ ve $h, \delta > 0$ için $f_{h,\delta} \in C_{p,q}^1$ ise Teorem 3.2.2 deki ispat tekniğine benzer teknik ile

$$\|f_{h,\delta} - f\|_{p,q} \leq \omega(f, C_{p,q}; h, \delta) \quad (3.3.22)$$

$$\|(f_{h,\delta})'_x\|_{p,q} \leq \frac{2}{h} \omega(f, C_{p,q}; h, \delta) \quad (3.3.23)$$

$$\|(f_{h,\delta})'_y\|_{p,q} \leq \frac{2}{\delta} \omega(f, C_{p,q}; h, \delta) \quad (3.3.24)$$

eşitsizlikleri her $h, \delta > 0$ için geçerlidir. Bu durumda $A_{m,n}$ nin lineerliğinden

$$\begin{aligned}
& \rho_{p,q}(x, y) |A_{m,n}(f; r, s, \alpha; x, y) - f(x, y)| \\
&= \rho_{p,q}(x, y) |A_{m,n}(f(t, z) - f_{h,\delta}(t, z) + f_{h,\delta}(t, z) + f_{h,\delta}(x, y) \\
&\quad - f_{h,\delta}(x, y); r, s, \alpha; x, y) - f(x, y)| \\
&= \rho_{p,q}(x, y) |A_{m,n}(f(t, z) - f_{h,\delta}(t, z); r, s, \alpha; x, y) \\
&\quad + A_{m,n}(f_{h,\delta}(t, z); r, s, \alpha; x, y) - A_{m,n}(f_{h,\delta}(x, y); r, s, \alpha; x, y) \\
&\quad + A_{m,n}(f_{h,\delta}(x, y); r, s, \alpha; x, y) - f(x, y)| \\
&= \rho_{p,q}(x, y) |A_{m,n}(f(t, z) - f_{h,\delta}(t, z); r, s, \alpha; x, y) + A_{m,n}(f_{h,\delta}(t, z); r, s, \alpha; x, y) \\
&\quad - f_{h,\delta}(x, y)A_{m,n}(1; r, s, \alpha; x, y) + f_{h,\delta}(x, y)A_{m,n}(1; r, s, \alpha; x, y) - f(x, y)| \\
&\leq \rho_{p,q}(x, y) \{ |A_{m,n}(f(t, z) - f_{h,\delta}(t, z); r, s, \alpha; x, y)| \\
&\quad + |A_{m,n}(f_{h,\delta}(t, z); r, s, \alpha; x, y) - f_{h,\delta}(x, y)| + |f_{h,\delta}(x, y) - f(x, y)| \}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikteki her bir terim için

$$T_1 = \rho_{p,q}(x, y) |A_{m,n}(f(t, z) - f_{h,\delta}(t, z); r, s, \alpha; x, y)|$$

denirse

$$\begin{aligned}
T_1 &\leq \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}_0} \rho_{p,q}(x, y) |A_{m,n}(f(t, z) - f_{h,\delta}(t, z); r, s, \alpha; x, y)| \\
&= \|A_{m,n}(f - f_{h,\delta}; r, s, \alpha; \cdot, \cdot)\|_{p,q}
\end{aligned}$$

(3.3.14) ve ((3.3.22) eşitliklerini göz önüne alırsak

$$T_1 \leq \|A_{m,n}(f - f_{h,\delta}; r, s, \alpha; \cdot, \cdot)\|_{p,q} \leq M_5 \|f - f_{h,\delta}\|_{p,q} \leq M_5 \omega(f, C_{p,q}; h, \delta) \quad (3.3.25)$$

elde edilir.

$$T_2 = \rho_{p,q}(x, y) |A_{m,n}(f_{h,\delta}(t, z); r, s, \alpha; x, y) - f_{h,\delta}(x, y)|$$

dersek Teorem1 in ispatını (3.3.15), (3.3.23), (3.3.24) eşitliklerini göz önüne alırsak

$$\begin{aligned}
T_2 &= \rho_{p,q}(x,y) |A_{m,n}(f_{h,\delta}(t,z); r, s, \alpha; x, y) - f_{h,\delta}(x, y)| \\
&\leq \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}_0} \rho_{p,q}(x,y) |A_{m,n}(f_{h,\delta}(t,z); r, s, \alpha; x, y) - f_{h,\delta}(x, y)| \\
&= \|A_{m,n}(f_{h,\delta}(t,z); r, s, \alpha; x, y) - f_{h,\delta}(x, y)\|_{p,q} \\
T_2 &\leq M_6 \left\{ \frac{1}{m^\alpha} \|(f_{h,\delta})'_x\|_{p,q} + \frac{1}{n^\alpha} \|(f_{h,\delta})'_y\|_{p,q} \right\} \\
T_2 &\leq 2M_6 \omega(f, C_{p,q}; h, \delta) \left\{ \frac{h^{-1}}{m^\alpha} + \frac{\delta^{-1}}{n^\alpha} \right\} \tag{3.3.26}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

$$T_3 = \rho_{p,q}(x,y) |f_{h,\delta}(x, y) - f(x, y)|$$

dersek

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}_0} \rho_{p,q}(x,y) |f_{h,\delta}(x, y) - f(x, y)| \\
&= \|f_{h,\delta} - f\|_{p,q}
\end{aligned}$$

olup (3.3.22) eşitsizliğinden

$$T_3 \leq \omega(f, C_{p,q}; h, \delta) \tag{3.3.27}$$

olur. (3.3.25), (3.3.26) ve (3.3.27) eşitsizliklerinden görülmektedir ki bu durumda bir

$M_{13} \equiv M_{13}(p, q, r, s)$ vardır öyle ki, $m, n \in \mathbb{N}$ ve $h, \delta > 0$ için

$$\|A_{m,n}(f; r, s, \alpha; \cdot, \cdot) - f_{h,\delta}(\cdot, \cdot)\|_{p,q} \leq M_{13} \omega(f, C_{p,q}; h, \delta) \left\{ 1 + \frac{h^{-1}}{m^\alpha} + \frac{\delta^{-1}}{n^\alpha} \right\}$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizliği (3.3.28) ile gösterelim.

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \text{ için } h = \frac{1}{m^\alpha} \text{ ve } \delta = \frac{1}{n^\alpha} \text{ denirse (3.3.28) eşitsizliği (3.3.20)}$$

eşitsizliğine dönüşür ki bu ispatı tamamlar. Teorem 3.3.2 ve

$$\lim_{t,s \rightarrow 0^+} \omega(f, C_{p,q}; h, \delta) = 0$$

olduğunu dikkate alırsak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç: $f \in C_{p,q}$ ve $p, q \in \mathbb{N}_0$ olsun. Bu durumda her $r, s \in \mathbb{N}$ ve $\alpha > 0$ için

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \|A_{m,n}(f; r, s, \alpha; \cdot, \cdot) - f_{h,\delta}(\cdot, \cdot)\|_{p,q} = 0$$

dır. Bu sonuç $A_{m,n}$ operatörünün yakınsaklığını göstermektedir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Biz bu tez boyunca Szasz-Mirakyan operatörünün Modifie bir şeklinin, tek değişkenli ve iki değişkenli hallerini ağırlıklı uzaylarda sağladığı bazı eşitsizlikleri ve yaklaşım özelliklerini inceledik.

Yaklaşımlar teorisinde yaygın olarak çalışılan Szasz-Mirakyan operatörünün değişik formları çeşitli araştırmacılar tarafından halen çalışılmaktadır. Bu tezde tanımlanan L_n ve $A_{m,n}$ operatörünün değişik formları oluşturulabilir ve bu yeni formların yaklaşım özellikleri incelenebilir. Çok geniş bir konu olan yaklaşımlar teorisi için ağırlıklı uzaylarda çeşitli özelliklerini incelediğimiz L_n ve $A_{m,n}$ operatörünün sağladığı özelliklerin incelenmesi sırasında yapılan işlemler göz önüne alındığında bu tezin araştırmacılar için bir kaynak olabileceği düşüncesindeyiz.

KAYNAKLAR

- [1] Z. Walczak. Approximation of functions of two variables by some linear positive operators. Acta Math Univ. Comenianae. 1(2005), 37 - 48
- [2] Z. Walczak. On certain positive linear operators in polynomial weight spaces. Acta Math.Hungar. 101 (3) (2003), 179 - 191
- [3] Korovkin, P.P. Linear Operators and Approximation Theory. 1960
- [4] A. İlkkan, “ Ağırlıklı uzaylarda Szasz operatörlerinin yaklaşım özellikleri ve yakınsaklık oranı”, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi
- [5] O. Doğru, Weighted Approximation Properties of Szasz-Type Operators. Intern. Math. Journal, 2(9), 2002, 889 - 895
- [6] Hacısalıhoğlu, H. and Hacıyev, A. Lineer Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı. 1995, 1-94, Ankara
- [7] L. Rempulska, Z. Walczak. Modified Szasz-Mirakyan Operators. Mathematica Balkanica.18, 2004, Fasc. 1-2