

T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ



MODİFİYE GAMMA OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Hilal KURTOĞLU

HAZİRAN 2017

Matematik Anabilim Dalında Hilal KURTOĞLU tarafından hazırlanan
MODİFİYE GAMMA OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ adlı
Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine
getirdiğini onaylarım.

Doç. Dr. Ali OLGUN
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan	: Prof. Dr. Ali Aral	_____
Üye (Danışman)	: Doç. Dr. Ali Olgun	_____
Üye	: Doç. Dr. Rabia Aktaş	_____

....../....../2017

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek
Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Mustafa YİĞİTOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

MODİFİYE GAMMA OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

KURTOĞLU, Hilal

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Ali OLGUN

HAZİRAN 2017, 62 sayfa

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezin amacı ve kaynak özetleri hakkında bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde tezde kullanılacak temel teoremler, tanımlar ve bazı eşitsizlikler verilmiştir.

Üçüncü bölümde tezin temelini oluşturan Modifiye Gamma operatörü tanımlanmış ve operatörün yakınsaklık özellikleri ile ilgili teoremler verilmiştir. Sonunda da amaca yönelik açıklamalar yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Gamma Operatörü, Lineer Pozitif Operatörler, Yaklaşım, Süreklilik Modülü, Modifiye Gamma Operatörü

ABSTRACT

APPROXIMATION PROPERTIES OF MODIFIED GAMMA OPERATORS

KURTOĞLU, Hilal

Kirikkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, Master Thesis

Supervisor: Doç. Dr. Ali OLGUN

JUNE 2017, 62 pages

The thesis consists of three chapters. The aim of the study is given in the first chapter.

In the second chapter, some fundamental concepts, definitions and inequalities used throughout the thesis are given.

In the third chapter, Modified Gamma Operators are defined and some theorems related to approximation properties of the operators are investigated. The last section is devoted to some explanations presenting our aims.

Key Words: Gamma Operator, Linear Positive Operators, Approximation, Modulus of Continuity, Modified Gamma Operator

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması esnasında hiçbir yardımı esirgemeyen ve biz genç araştırmacılara büyük destek olan, bilimsel deney imkanlarını sonuna kadar bizlerin hizmetine veren, tez yöneticisi hocam, Sayın Doç. Dr. Ali OLGUN'a, büyük fedakarlıklarla bana destek olan arkadaşım Gökçe SAMURKORLU'ya, tezimin birçok aşamasında yardım gördüğüm Arş. Gör. Tuğçe ÜNVER'e ve son olarak bana birçok konuda olduğu gibi, tezimi hazırlamam esnasında da yardımını esirgemeyen aileme teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
1.1 Kaynak Özetleri	2
1.2 Tezin Amacı	2
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1 Lineer Pozitif Operatörlerle İlgili Temel Kavramlar	4
2.2 Korovkin Teoremi	6
2.3 Süreklilik Modülü ve Özellikleri	7
2.4 İleri Fark Operatörü	11
2.5 Gamma Fonksiyonu	13
2.6 Beta Fonksiyonu	15
3. MODİFİYE GAMMA OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ	
3.1 Ön Hazırlıklar	17
3.2 Bazı Yardımcı Sonuçlar	25
4. TARTIŞMA VE SONUÇ	60
KAYNAKLAR	61

SİMGELER DİZİNİ

$C[a, b]$	$[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonların uzayı.
C_p	Sürekli fonksiyonlar uzayı.
C^p	p kez türevi sürekli olan fonksiyonlar uzayı.
$\omega(f; \delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü.
$\omega_2(f; \delta)$	f fonksiyonunun 2. dereceden süreklilik modülü.
$\Delta_h^r f(\cdot)$	f fonksiyonunun r -inci ileri fark operatörü.
$G_n(f; \cdot)$	$I = (0, \infty)$ üzerinde tanımlı ve burada sürekli ve sınırlı f fonksiyonunun Gamma Operatörü.
$\omega_k(f; C_p; t)$	$f \in C_p$ ve $p \in N_0$ için f nin süreklilik modülü.
$G_{n;p}(f; \cdot)$	Modifiye Gamma Operatörü.
$\omega_p(\cdot)$	$p \in N_0$ için ağırlık fonksiyonları.
$\ f\ _p$	$p \in N_0$ için f fonksiyonunun normu.

1. GİRİŞ

Özel fonksiyonlar olarak bilinen Gamma ve Beta fonksiyonları ile uygulamalarda çok karşılaşıldığı bilinmektedir. Bu fonksiyonlar istatistik teorisinde de Gamma ve Beta dağılımları olarak bilinen istatistik ölçü birimine temel teşkil etmektedir ve yaygın olarak kullanılmaktadır. Ayrıca bu fonksiyonlar bir çok sınır-değer probleminin çözümünde, özel tipten bazı integrallerin hesaplanmasında yol gösterici olmaktadır.

Gamma ve Beta fonksiyonlarının tanımları kullanılarak yaklaşımlar teorisinde Gamma ve Beta operatörleri tanımlanmıştır ve bu operatörlerin yakınsaklık özellikleri bazı yazarlar tarafından incelenmiştir. Bu incelemeler sırasında Korovkin teoreminin şartlarının sağlandığı görülmüş, ayrıca operatörlerin yakınsaklık hızları incelenmiştir. İlerleyen zamanlarda bu operatörlerin daha da genelleştirmeleri yapılmış ve yakınsaklık özellikleri incelenmiştir. Halen de bu çalışmalara devam edilmektedir.

Bilindiği gibi Gamma fonksiyonu $x > 0$ için

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

olarak tanımlanmaktadır. Bu fonksiyon yardımı ile Gamma operatörü de; $M > 0$, $t \rightarrow \infty$ için $\beta \geq 0$ ve $|f(t)| \leq M e^{\beta t}$ şartları sağlanmak üzere

$$G_n(f; x) = \frac{1}{x^n \Gamma(n)} \int_0^{\infty} f\left(\frac{t}{n}\right) t^{n-1} e^{-\frac{t}{x}} dt$$

olarak tanımlanmış ve yakınsaklık özellikleri incelenmiştir. Bu operatör üzerinde çeşitli değişiklikler yapılarak Gamma operatörünün değişik tiplerinin yakınsaklık özellikleri incelenmektedir.

Biz de bu tezle Lucyna Rempulska ve Mariola Skorupka tarafından yapılan bir çalışmada ele alınan

$$g_n(x, y) = \frac{x^{n+1}}{n!} e^{-xy} y^n$$

olmak üzere $x \in I$, $n \in N$ için

$$G_n(f; x) = \int_0^\infty g_n(x, y) f\left(\frac{n}{y}\right) dy$$

şeklindeki değişik gamma operatörünün yakınsaklık özellikleri ile ilgileneceğiz.

1.1. Kaynak Özetleri

Bu tezde 2007 yılında Lucyna Rempulska ve Mariola Skorupka tarafından yapılan bir çalışma olan “Approximation properties of modified gamma operators” başlıklı makalede tanımlanan değişik gamma operatörünün yaklaşım özelliklerinin incelendiği makale temel alınacak, bununla beraber yaklaşımlar teorisinde bilinen temel kavramların incelendiği çalışmalardan destek alınacaktır. Bu makalede verilen teoremler ve Lemmalar bu operatörün değişik şekillerinin incelendiği diğer başka makalelerden de destek alınarak makalenin okuyucu tarafından daha kolay anlaşılabilir olmasını amaçlayacağız.

1.2. Tezin Amacı

Tezin esas amacı yaklaşımlar teorisinde yapılan çok çeşitli çalışmalar ve bu çalışmalarda verilen farklı Lineer Pozitif Operatörleri göz önüne alarak teze temel olan makaledeki Gamma Operatörünün değişik tiplerinin tanımlanması anlamak, bu tanımlamaya göre daha farklı operatörler tanımlayarak yeni çalışmalara imkan

sağlamaktır. Ayrıca ispatlar yapılırken kullanılan metodların okuyucu tarafından kolayca anlaşılıp uygulamasını sağlamaktır.



2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Lineer Pozitif Operatörler İle İlgili Temel Kavramlar

Bu bölümde lineer pozitif operatörlerle ilgili yaklaşımlar teorisine temel teşkil eden operatörlerin yaklaşım özelliklerini ve yaklaşım hızlarının belirlenmesinde faydalanan tez de kullanılacak bazı tanımlardan ve temel kavramlardan bahsedilecektir.

Tanım 2.1.1.(Noktasal Süreklilik) $A \subset \mathbb{R}$ ve $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. f fonksiyonunu a noktasında süreklidir $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyle ki $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ dur.

Tanım 2.1.2.(Düzgün Süreklilik) $A \subset \mathbb{R}$ ve $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. [8] den, f fonksiyonu A üzerinde düzgün süreklidir $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ vardır, öyle ki $|x - t| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan $\forall x, t \in A$ için $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$ dur.

Tanım 2.1.3. $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve aralığın tüm noktalarında sürekli olan fonksiyonlar uzayı $C[a, b]$ ile gösterilmektedir.

Tanım 2.1.4.(Lineer Uzay) N boş olmayan bir cümle ve R , reel sayılar cismi olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa N ye R üzerinde lineer uzay veya vektör uzayı denir.

(i) N , $+$ işlemine göre değişmeli gruptur. Yani,

(a) Her $x, y \in N$ için $x + y \in N$ dir.

(b) Her $x, y, z \in N$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir.

(c) Her $x \in N$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in N$ vardır.

(d) Her $x \in N$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in N$ vardır.

(e) Her $x, y \in N$ için $x + y = y + x$ dir.

(ii) $x, y \in N$ ve $\alpha, \beta \in R$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

(a) $\alpha x \in N$ dir.

(b) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ dir.

(c) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ dir.

(d) $1x = x$ dir. Burada 1, R nin birim elemanıdır.

Tanım 2.1.5.(Norm) N , bir lineer uzay olsun. $\| \cdot \| : N \rightarrow R$ fonksiyonun x deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için

$$i) \|x\| \geq 0$$

$$ii) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$iii) \|ax\| = |a| \|x\|$$

$$iv) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

şartları sağlanıyorsa $\| \cdot \|$ fonksiyonuna N üzerinde norm denir. Eğer bir Lineer uzay üzerinde norm tanımlanmışsa bu uzaya normlu uzay denir.

Tanım 2.1.6.(Lineer Operatör) X ve Y lineer normlu fonksiyon uzayları olsun.

$L : X \rightarrow Y$ operatörü, her $f, g \in X$ ve her $\alpha, \beta \in R$ için

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$$

eşitliğini sağlarsa, L operatörüne X den Y ye bir lineer operatör denir.

Tanım 2.1.7.(Lineer Pozitif Operatör) $L : X \rightarrow Y$ lineer operatör ve

$$X^+ = \{f \in X : f(t) \geq 0\}, Y^+ = \{g \in Y : g(t) \geq 0\}$$

olmak üzere, L lineer operatörü X^+ kümesindeki her bir f fonksiyonunu Y^+ kümesinde bir fonksiyona dönüştürüyorsa, L operatörüne lineer pozitif operatör denir.

Lemma 2.1.1. $L : X \rightarrow Y$ lineer pozitif operatör olsun. Bu durumda, $f, g \in X$ olmak üzere her t için $f(t) \leq g(t)$ ise $L(f(t); x) \leq L(g(t); x)$ dir ve buna L lineer pozitif operatörünün monotonluk özelliği denir. Ayrıca monoton operatörler $|L(f; x)| \leq L(|f|; x)$ eşitsizliğini sağlar.

2.2. Korovkin Teoremi

Yaklaşımlar teorisinde önemli bir yere sahip olan Korovkin Teoremi 1953 yılında P.P. Korovkin tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 2.2.1.(Bohman-Korovkin Teoremi) $L_n : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. $\alpha_n(x), \beta_n(x), \gamma_n(x)$, $[a, b]$ aralığı üzerinde düzgün olarak sıfıra yakınsak diziler olmak üzere, $\forall x \in [a, b]$ için

$$L_n(1; x) = 1 + \alpha_n(x)$$

$$L_n(t; x) = x + \beta_n(x)$$

$$L_n(t^2; x) = x^2 + \gamma_n(x)$$

koşulları sağlanıyorsa bu durumda $L_n(f; x)$, $[a, b]$ aralığı üzerinde $f(x)$ sürekli fonksiyonuna düzgün olarak yakınsar. Yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f; x) - f(x)\|_{C[a, b]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [a, b]} |L_n(f; x) - f(x)| = 0$$

dır.

2.3. Süreklilik Modülü ve Özellikleri

Yaklaşımlar teorisinde operatörün yakınsaklığı kadar, yakınsama hızı da önemlidir. Bu sebeple operatörün yakınsama hızını veren bir fonksiyon olan ve süreklilik modülü olarak bilinen ifade aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

Tanım 2.3.1. Kabul edelim ki f , $[a, b]$ aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun. $x, y \in [a, b]$ için $|x - y| \leq \delta$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde $\delta > 0$ sayısı için $|f(x) - f(y)|$ ifadesinin en küçük üst sınırına

$$\omega(\delta) = \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|$$

denirse, $\omega(\delta)$ değerine f nin süreklilik modülü denir. Bazen bu gösterim yerine $\omega_f(\delta)$ veya $\omega(\delta; f)$ gösterimleri de kullanılabilir. $\omega(\delta; f)$, değişkenler farkının en fazla δ olması durumunda iki fonksiyon değerinin en fazla ne kadar fark edeceğini belirler. ω , δ 'nın bir fonksiyonu durumundadır ve $\delta > 0$ için $\omega(\delta, f)$ negatif olmayan bir fonksiyondur.

Süreklilik modülü fonksiyonu aşağıdaki önemli özellikleri gerçekleyen bir fonksiyondur.

Lemma 2.3.1. ω fonksiyonu monoton artandır. Yani, $0 < \delta_1 \leq \delta_2$ için

$$\delta_1 \leq \delta_2 \Rightarrow \omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2)$$

dır.

İspat: $0 < \delta_1 \leq \delta_2$ olsun. Bu durumda $|x - y| \leq \delta_2$ koşulunu sağlayan (x, y) sayı çiftlerinin kümesi $|x - y| \leq \delta_1$ koşulunu sağlayan sayı çiftlerinin kümesinden daha kapsamlıdır. Kümelerdeki supremum kavramı göz önüne alınarak süreklilik modülünün tanımından dolayı

$$\omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2)$$

yazılabilir.

Lemma 2.3.2. $m \in \mathbb{N}$ için

$$\omega(f; m\delta) \leq m\omega(f; \delta)$$

dır.

İspat:

$$\omega(f; m\delta) = \sup_{\substack{|x-y| \leq m\delta \\ x, y \in [a, b]}} |f(x) - f(y)|$$

ifadesinde $x = y + mh$ seçilirse, $m \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\begin{aligned} \omega(f; m\delta) &= \sup_{\substack{|h| \leq \delta \\ x, y \in [a, b]}} |f(y + mh) - f(y)| \\ &= \sup_{\substack{|h| \leq \delta \\ x, y \in [a, b]}} |f(y + mh) - f(y + (m-1)h) + f(y + (m-2)h) - \dots + f(y + h) - f(y)| \end{aligned}$$

$$= \sup_{\substack{|h| \leq \delta \\ x, y \in [a, b]}} \left| \sum_{k=1}^m f(y + kh) - f(y + (k-1)h) \right|$$

yazılabilir. Buradan da

$$\omega(f; m\delta) \leq \sum_{k=1}^m \sup_{\substack{|h| \leq \delta \\ x, y \in [a, b]}} |f(y + kh) - f(y + (k-1)h)|$$

olur. Yukarıdaki toplamın içindeki ifade süreklilik modülü olması ile toplananların sayısı m tane olduğundan

$$\omega(f; m\delta) \leq m\omega(f; \delta)$$

eşitsizliği elde edilir.

Lemma 2.3.3. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f; \delta) = 0$$

dır.

İspat: f fonksiyonu sürekli olduğundan süreklilik tanımı nedeniyle her $\varepsilon > 0$ için bir $\eta > 0$ vardır öyle ki $|x - y| < \eta$ olduğunda $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ dır. Süreklilik modülünde $\delta < \eta$ alındığında $\omega(f; \delta) < \varepsilon$ dır. Yani

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f; \delta) = 0$$

olur.

Lemma 2.3.4. $\lambda > 0$ reel sayısı için

$$\omega(f; \lambda\delta) \leq (1 + \lambda)\omega(f; \delta)$$

dır.

İspat: m , λ nın tam kısmı olsun. O takdirde $m \leq \lambda < m+1$ olur. ω süreklilik modülünün monotonluk özelliği ve Lemma(2.3.2) den

$$\omega(f; \lambda\delta) \leq \omega(f; (m+1)\delta)$$

$$\omega(f; (m+1)\delta) \leq (m+1)\omega(f; \delta) \leq (\lambda+1)\omega(f; \delta)$$

olur. Dolayısı ile

$$\omega(f; \lambda\delta) \leq (\lambda+1)\omega(f; \delta)$$

olarak elde edilir.

Lemma 2.3.5. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sınırlı ise, her $x, y \in [a, b]$ için

$$|f(x) - f(y)| \leq \left(1 + \frac{|x-y|}{\delta}\right) \omega(f; \delta)$$

dır.

İspat: Süreklilik modülünün tanımı ve Lemma(2.3.4) den

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &\leq \omega\left(f, \frac{|x-y|}{\delta}\right) \\
&\leq \left(1 + \frac{|x-y|}{\delta}\right) \omega(f; \delta)
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

Tanım 2.4.(İleri Fark Operatörü): $\forall k, j \geq 0$ için

$$\Delta f(x_j) = f(x_{j+1}) - f(x_j)$$

ve

$$\Delta^{k+1} f(x_j) = \Delta^k f(x_{j+1}) - \Delta^k f(x_j)$$

şeklinde tanımlanan Δ operatörüne İleri Fark Operatörü denir ve ayrıca ileri fark operatörü

$$\Delta_h^r f(x) = \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} f(x + (r-k)h)$$

olarak da tanımlanır.

Teorem 2.1.(Hölder Eşitsizliği): $p, q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $x = (a_i) = (a_1, a_2, \dots)$,

$y = (b_i) = (b_1, b_2, \dots)$ şeklinde diziler olsun. Bu durumda

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine Hölder Eşitsizliği denir.

Teorem 2.2.(Taylor Formülü): f fonksiyonu a noktasını ihtiva eden bir aralıkta $n+1$ 'inci mertebeden sürekli türevlere sahip olsun. Bu aralıkta her x için Taylor formülü,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

olur ve $K_n(x)$ ifadesine kalan terim, fark veya hata denirse

$$K_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

olmak üzere

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + K_n(x)$$

yazılabilir. Bu ifadeye kalan terimli Taylor Formülü adı verilir.

Teorem 2.3.(Ortalama Değer Teoremi): $f:[a,b] \rightarrow R$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve $\forall x \in (a,b)$ noktasında türevlenebilir olsun. Bu taktirde (a,b) aralığında

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

olacak şekilde en az bir x_0 noktası vardır.

2.5. Gamma Fonksiyonu

Tanım 2.5.1. $\Gamma(x)$ ile gösterilen Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (2.1)$$

genelleştirilmiş integrali yardımıyla tanımlanır. Gamma fonksiyonuna bazen genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu da denir. Neden böyle denildiğini görmek için,

$$F(u) = \int_0^{\infty} e^{-ut} dt = \frac{1}{u} \quad (2.2)$$

integrali ile tanımlanan fonksiyonu ele alınsın. $c > 0$ olmak üzere bu integral her $c \leq u \leq d$ sonlu aralığında $\frac{1}{u}$ ya düzgün yakınsaktır. (2.2)'de u ya göre türevler alarak elde edilen genelleştirilmiş integraller yine düzgün yakınsak olacağından aşağıdakiler yazılabilir:

$$-F'(u) = \int_0^{\infty} t e^{-ut} dt = \frac{1}{u^2}$$

$$F''(u) = \int_0^{\infty} t^2 e^{-ut} dt = \frac{2!}{u^3}$$

$$-F'''(u) = \int_0^{\infty} t^3 e^{-ut} dt = \frac{3!}{u^4}$$

$$F^{(4)}(u) = \int_0^{\infty} t^4 e^{-ut} dt = \frac{4!}{u^5}$$

Böylece u ya göre türev almaya devam ettiğimizde n -yinci türev için

$$(-1)^n F^{(n)}(u) = \int_0^{\infty} t^n e^{-ut} dt = \frac{n!}{u^{n+1}}$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitlikte $u = 1$ alınırsa;

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = n! = \int_0^{\infty} t^{(n+1)-1} e^{-t} dt = \Gamma(n+1)$$

olur. Burada n değerleri pozitif tamsayılar olarak alınmıştır. Halbuki n nin $n > -1$ olan herhangi bir reel sayı olması halinde de bu genelleştirilmiş integral tanımlıdır. Yani yakınsaktır. O halde $x > -1$ olan herhangi bir x reel sayısı için,

$$x! = \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt = \Gamma(x+1) \quad (2.3)$$

yazılabilir. Buradan görülüyor ki, -1 den büyük olan tüm reel sayıların faktöriyel değerlerini sonlu bir reel sayı olarak tanımlamak mümkündür. Bundan dolayı

$\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ genelleştirilmiş integrale genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu denir.

$x = 0$ olduğu zaman faktöriyel fonksiyonunun değeri,

$$0! = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = -(0-1) = 1$$

dir. Bu sonuç $0!$ in neden 1 olarak tanımlanması gerektiğini açıklar.

Elemanter matematikte n faktöriyelin $n! = n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1$ çarpımı ile verildiği biliniyor. Bu özellik, $n! = n(n-1)!$ eşitliğini içerdiğine göre, eğer $x = n$ bir tamsayı ise,

$$\Gamma(n+1) = n! = n(n-1)! = n\Gamma(n)$$

yazılabilmelidir. Gerçekten aşağıda görüleceği gibi Γ fonksiyonu,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

eşitliğini tüm $x > 0$ değerleri için gerçekler. Bunu görelim:

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b t^x e^{-t} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-t^x e^{-t} \right) \Big|_0^b + x \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x)\end{aligned}$$

bulunur.

2.6. Beta Fonksiyonu

Tanım 2.6.1. $B(x, y)$ ile gösterilen ve genelleştirilmiş bir integral yardımıyla tanımlanan iki değişkenli fonksiyona Beta Fonksiyonu denir. x ve y nin sadece pozitif değerleri için tanımlanan bu fonksiyon birkaç değişik biçimde ifade edilebilir. [7] den $B(x, y)$ nin tanımı için verilen dört ayrı ifade şunlardır:

$$1) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

$$2) \quad B(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2x-1} (\cos \theta)^{2y-1} d\theta$$

$$3) \quad B(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du$$

$$4) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Tezin bundan sonraki kısmında teze konu olarak seçilen çalışmada geçen değişik tipten Gamma operatörünün özellikleri incelenecektir.



3. MODİFİYE GAMMA OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

3.1. Ön Hazırlıklar

3.1.1. $I = (0, \infty)$, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ için I üzerinde sürekli ve sınırlı bir f fonksiyonu yardımıyla, $x \in I$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere Gamma operatörü

$$G_n(f; x) = \int_0^{\infty} g_n(x, y) f\left(\frac{n}{y}\right) dy \quad (3.1)$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada

$$g_n(x, y) = \frac{x^{n+1}}{n!} e^{-xy} y^n \quad (3.2)$$

şeklinde dir. [1–4] nolu referanslarda bu konuda yapılan çalışmalara örnek teşkil etmektedir. (3.1) ile tanımlanan $G_n(f; x)$ operatörü aşağıda verilen Korovkin teoreminin şartlarını gerç ekler. Gerç ektende,

$$\begin{aligned} G_n(1; x) &= \int_0^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} e^{-xy} y^n \cdot 1 \cdot dy \\ &= \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^{\infty} e^{-xy} y^n dy \end{aligned}$$

integralde $xy = t$ de ğ işken de ğ iş tirmesi yapıl ırsa

$$\begin{aligned}
G_n(1; x) &= \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{t}{x}\right)^n \frac{dt}{x} \\
&= \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^\infty e^{-t} \frac{t^n}{x^{n+1}} dt \\
&= \frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-t} t^n dt \\
&= \frac{1}{n!} \cdot n! \\
&= 1
\end{aligned}$$

elde edilir. Yine

$$\begin{aligned}
G_n(t; x) &= \int_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n!} e^{-xy} y^n \frac{n}{y} dy \\
&= \frac{x^{n+1}}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-xy} y^{n-1} dy
\end{aligned}$$

integralde $xy = t$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned}
G_n(t; x) &= \frac{x^{n+1}}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{t}{x}\right)^{n-1} \frac{dt}{x} \\
&= \frac{x^{n+1}}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-t} \frac{t^{n-1}}{x^n} dt \\
&= \frac{x}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1} dt \\
&= \frac{x}{(n-1)!} \cdot (n-1)! \\
&= x
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Son olarakta

$$\begin{aligned}
G_n(t^2; x) &= \int_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n!} e^{-xy} y^n \left(\frac{n}{y}\right)^2 dy \\
&= \frac{x^{n+1}}{n!} n^2 \int_0^\infty e^{-xy} y^{n-2} dy \\
&= \frac{n}{(n-1)!} x^{n+1} \int_0^\infty e^{-xy} y^{n-2} dy
\end{aligned}$$

integralde $xy = t$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned}
G_n(t^2; x) &= \frac{n}{(n-1)!} x^{n+1} \int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{t}{x}\right)^{n-2} \frac{dt}{x} \\
&= \frac{n}{(n-1)!} x^{n+1} \int_0^\infty e^{-t} \frac{t^{n-2}}{x^{n-1}} dt \\
&= \frac{n}{(n-1)!} x^2 \int_0^\infty e^{-t} t^{n-2} dt \\
&= \frac{n}{(n-1)!} x^2 (n-2)! \\
&= \frac{n}{n-1} x^2
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece

$n \rightarrow \infty$ için, $G_n(t^2; x) = x^2$ olur.

[1-3] numaralı referanslar gereğince (3.1) ile tanımlanan G_n operatörü, $r \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere $f_r(x) = x^r$ fonksiyonları için $x > 0$, $n \geq 1$, $r = 0, 1$ olmak üzere

$$G_n(f_r; x) = f_r(x) \quad (3.3)$$

eşitliğini sağlar. Genel olarak $r \in \mathbb{N}$, $n \geq r$ ve $x > 0$ için

$$\begin{aligned}
G_n(f_r(t) = t^r; x) &= \int_0^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} e^{-xy} y^n \left(\frac{n}{y}\right)^r dy \\
&= \frac{n^r}{n!} x^{n+1} \int_0^{\infty} e^{-xy} y^{n-r} dy
\end{aligned}$$

integralde $xy = t$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned}
G_n(f_r(t) = t^r; x) &= \frac{n^r}{n!} x^{n+1} \int_0^{\infty} e^{-t} \left(\frac{t}{x}\right)^{n-r} \frac{dt}{x} \\
&= \frac{n^r}{n!} x^{n+1} \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{t^{n-r}}{x^{n-r+1}} dt \\
&= \frac{n^r}{n!} x^r \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n-r} dt \\
&= \frac{n^r}{n!} x^r (n-r)! \\
&= \frac{n^r x^r (n-r)(n-r-1)\dots 1}{n(n-1)\dots(n-(r-1))(n-r)(n-(r+1))\dots 1}
\end{aligned}$$

yazılabilir. O halde

$$G_n(f_r(t) = t^r; x) = \frac{n^r x^r}{n(n-1)\dots(n-r+1)} \quad (3.4)$$

bulunur. Buradan da görölmektedir ki

$$G_n(t^2; x) = \frac{nx^2}{n-1}$$

olur ve $x > 0$, $n \geq 2$ için

$$\begin{aligned}
G_n\left((t-x)^2; x\right) &= G_n\left(t^2 - 2xt + x^2; x\right) \\
&= G_n\left(t^2; x\right) - 2xG_n(t; x) + x^2G_n(1; x) \\
&= \frac{n}{n-1}x^2 - 2x^2 + x^2 \\
&= \frac{nx^2}{n-1} - x^2 \\
&= \frac{nx^2 - nx^2 + x^2}{n-1}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$G_n\left((t-x)^2; x\right) = \frac{x^2}{n-1} \quad (3.5)$$

bulunur.

[1] de $x > 0$, $r \in \mathbb{N}$ ve $n \geq 2r$ olmak üzere

$$G_n\left((t-x)^{2r}; x\right) \leq M_1(r)n^{-r}x^{2r} \quad (3.6)$$

olduğu ispatlanmıştır.

Ayrıca [1,3] den f , I üzerinde sürekli ve sınırlıdır. Öyleyse aynı zamanda $n \geq n_0$

için $G_n(f)$ de I üzerinde sürekli ve sınırlıdır.

$x > 0$, $n \geq n_0$ için,

$$\begin{aligned}
G_n(f(t); x) - f(x) &= G_n(f(t); x) - f(x)G_n(1; x) \\
&= G_n(f(t); x) - G_n(f(x); x) \\
&= G_n(f(t) - f(x); x) \\
G_n(f(t); x) - f(x) &= \int_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n!} e^{-xy} y^n \left(f\left(\frac{n}{y}\right) - f(x) \right) dy
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafının da mutlak değeri alınır ve mutlak değer için bilinen eşitsizlikler ve süreklilik modülünün tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\left| G_n(f(t); x) - f(x) \right| &= \left| \int_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n!} e^{-xy} y^n \left(f\left(\frac{n}{y}\right) - f(x) \right) dy \right| \\
&\leq \int_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n!} e^{-xy} y^n \left| f\left(\frac{n}{y}\right) - f(x) \right| dy \\
&\leq \int_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n!} e^{-xy} y^n \omega\left(f; \left| \frac{n}{y} - x \right| \right) dy \\
&\leq \int_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n!} e^{-xy} y^n \omega\left(f; \frac{\left| \frac{n}{y} - x \right|}{\delta} \delta \right) dy \\
&\leq \int_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n!} e^{-xy} y^n \left(1 + \frac{\left| \frac{n}{y} - x \right|}{\delta} \right) \omega(f; \delta) dy \\
&= \frac{x^{n+1}}{n!} \omega(f; \delta) \left[\int_0^\infty e^{-xy} y^n dy + \int_0^\infty e^{-xy} y^n \left| \frac{n}{y} - x \right| \frac{1}{\delta} dy \right] \\
&= \omega(f; \delta) + \frac{1}{\delta} \omega(f; \delta) \int_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n!} e^{-xy} y^n \left| \frac{n}{y} - x \right| dy
\end{aligned}$$

buradan Hölder eşitsizliği uygulanarak

$$\begin{aligned}
\left| G_n(f(t); x) - f(x) \right| &\leq \omega(f; \delta) + \frac{1}{\delta} \omega(f; \delta) \left[\left(\int_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n!} e^{-xy} y^n \left(\frac{n}{y} - x \right)^2 dy \right)^{1/2} \right. \\
&\quad \left. \times \left(\int_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n!} e^{-xy} y^n \cdot 1^2 dy \right)^{1/2} \right] \\
&\leq \omega(f; \delta) + \frac{1}{\delta} \omega(f; \delta) \left[\left(M_1(1) \frac{x^2}{n} \right)^{1/2} \cdot (1)^{1/2} \right]
\end{aligned}$$

$$\left| G_n(f(t); x) - f(x) \right| \leq \omega(f; \delta) + \frac{1}{\delta} \omega(f; \delta) \sqrt{M_1(1)} \frac{x}{\sqrt{n}}$$

olur . O halde bulunan bu eşitsizlikte $\delta \rightarrow \frac{x}{\sqrt{n}}$ alınırsa

$$\left| G_n(f(t); x) - f(x) \right| \leq \omega\left(f; \frac{x}{\sqrt{n}}\right) + \frac{\sqrt{n}}{x} \omega\left(f; \frac{x}{\sqrt{n}}\right) \sqrt{M_1(1)} \frac{x}{\sqrt{n}}$$

bulunur ve buradan

$$\left| G_n(f(t); x) - f(x) \right| \leq M_2 \omega\left(f; \frac{x}{\sqrt{n}}\right) \quad (3.7)$$

elde edilir. Burada $M_2 > 0$ bir sabittir.

3.1.2. Modifiye Gamma Operatörü

Bu bölümde, diferansiyellenebilir fonksiyonlar için Modifiye Gamma operatörünü tanımlayıp, bu operatörün yaklaşım özelliklerinin G_n den daha iyi olduğunu gösterelim.

$p \in N_0$ için C_p yi polinom ağırlıklı uzayı olarak düşünelim. Ağırlık fonksiyonları olarak da $x \in I$ ve $p \geq 1$ için

$$\omega_0(x) = 1, \quad \omega_p(x) = (1 + x^p)^{-1} \quad (3.8)$$

fonksiyonlarını alalım. Böylece C_p , I üzerinde tanımlı bütün reel değerli f fonksiyonlarının kümesidir. Bu durumda $\omega_p f$, I üzerinde düzgün sürekli ve sınırlıdır. Bu uzayda norm ise

$$\|f\|_p = \sup_{x \in I} \omega_p(x) |f(x)| \quad (3.9)$$

olarak tanımlanır. Ayrıca $p \in N_0$ için I üzerinde p kez türevlenebilen ve $0 \leq k \leq p$ için türevleri $f^{(k)} \in C_{p-k}$ olan tüm $f \in C_p$ lerin sınıfını C^p sınıfı olarak alacağız. Eğer $p < q$ ise; $C^0 \equiv C_0$, $C_p \subset C_q$ ve $f \in C_p$ için $\|f\|_q \leq \|f\|_p$ olduğu açıktır.

$f \in C_p$, $p \in N_0$ için $k = 1, 2, \dots$ için süreklilik modülü $t \geq 0$ olmak üzere

$$\omega_k(f; C_p; t) = \sup_{0 \leq h \leq t} \|\Delta_h^k f(\cdot)\|_p \quad (3.10)$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada

$$\Delta_h^1 f(x) \equiv \Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$$

ve

$$\Delta_h^2 f(x) = \Delta_h(\Delta_h f(x)) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$$

olurlar. Ayrıca süreklilik modülünün özelliklerinden $p \in N_0$ ve her $f \in C_p$ için $k = 1, 2, \dots$ olmak üzere

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \omega_k(f; C_p; t) = 0$$

dir.

3.1.3 $p \in N_0$ ve $f \in C^p$ olsun. Modifiye Gamma operatörünü $x \in I$ ve $p \leq n \in N$ için

$$G_{n,p}(f;x) = \int_0^\infty g_n(x,y) F_p\left(x, \frac{n}{y}\right) dy \quad (3.11)$$

olarak tanımlayalım. Burada $g_n(x,y)$, (3.2) ile verilmiştir ve $x, t > 0$ için

$$F_p(x,t) = \sum_{j=0}^p \frac{f^j(t)}{j!} (x-t)^j \quad (3.12)$$

dir. Eğer $p = 0$ ve $f \in C^0$ ise, $x > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için daha önce verilen (3.1) deki

$$G_{n,0}(f;x) \equiv G_n(f;x) = \int_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n!} e^{-xy} y^n f\left(\frac{n}{y}\right) dy \quad (3.13)$$

olur.

$n \geq p$ için $G_{n,p}(f;x)$ operatörü C^p deki bir fonksiyonu C_p deki bir fonksiyona dönüştürmektedir.

3.2 Bazı Yardımcı Sonuçlar

Bu kısımda G_n operatörlerinin bazı özellikleri ile ilgili Lemmalar vereceğiz.

Lemma 3.1: $p \in \mathbb{N}$ olsun. O halde en az bir $M_3(p) > 0$ sabiti vardır öyle ki; her $n \geq p$ için

$$\left\| G_n\left(\frac{1}{\omega_p(t)}; \cdot\right) \right\|_p \leq M_3(p) \quad (3.14)$$

eşitsizliği ve her $f \in C_p$ için

$$\|G_n(f; \cdot)\|_p \leq M_3(p) \|f\|_p \quad (3.15)$$

eşitsizliği sağlanır. $M_3 = 1$ için (3.14) ve (3.15) eşitsizlikleri $p = 0$ ve $f \in C_0$ için doğrudur.

(3.1), (3.2) ve (3.15) ifadeleri göstermektedir ki; eğer $n \geq p$, $p \in N$ ise ve $n \geq 1$, $p = 0$ ise G_n operatörü C_p den C_p ye lineer pozitif operatördür.

İspat: $x > 0$ ve $n \geq p$ için (3.3), (3.4), ve (3.8) den

$$\begin{aligned} G_n\left(\frac{1}{\omega_p(t)}; x\right) &= \int_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n!} e^{-xy} y^n \frac{1}{\omega_p(t)} dy \\ G_n\left(\frac{1}{\omega_p(t)}; x\right) &= \int_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n!} e^{-xy} y^n \frac{1}{\omega_p(t)} dy \\ &= \int_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n!} e^{-xy} y^n \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{n}{y}\right)^p\right)} dy \\ &= \int_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n!} e^{-xy} y^n \left(1 + \left(\frac{n}{y}\right)^p\right) dy \\ &= \int_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n!} e^{-xy} y^n \cdot 1 \cdot dy + \int_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n!} e^{-xy} y^n \frac{n^p}{y} dy \\ &= G_n(1; x) + G_n\left(\left(\frac{n}{y}\right)^p; x\right) \\ &= 1 + \int_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n!} e^{-xy} y^n \left(\frac{n}{y}\right)^p dy \\ &= 1 + \frac{x^{n+1}}{n!} n^p \int_0^\infty e^{-xy} y^{n-p} dy \end{aligned}$$

olur. Buradaki son integralde $xy = t$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned}
 G_n\left(\frac{1}{\omega_p(t)}; x\right) &= 1 + \frac{x^{n+1}}{n!} n^p \int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{t}{x}\right)^{n-p} \frac{dt}{x} \\
 &= 1 + \frac{x^{n+1}}{n!} n^p \frac{1}{x^{n-p+1}} \int_0^\infty e^{-t} t^{n-p} dt \\
 &= 1 + \frac{n^p x^p}{n!} (n-p)! \\
 &= 1 + \frac{n^p x^p (n-p)!}{1.2 \dots (n-p-1)(n-p)(n-p+1) \dots n}
 \end{aligned}$$

$$G_n\left(\frac{1}{\omega_p(t)}; x\right) = 1 + \frac{n^p x^p}{(n-p+1)(n-p+2) \dots (n-1)n}$$

bulunur. Açık olarak bu eşitlikte $n \geq 1$ için $p = 1$ alınır

$$\begin{aligned}
 \omega_1(x) G_n\left(\frac{1}{\omega_1(t)}; x\right) &= \frac{1}{1+x} \left(1 + \frac{nx}{n}\right) \\
 &= \frac{1}{1+x} (1+x) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

olur. Üstelik $x > 0$, $p \geq 2$, $n \geq p$ için

$$\begin{aligned}
 \omega_p(x) G_n\left(\frac{1}{\omega_p(t)}; x\right) &= \frac{1}{1+x^p} \left(1 + \frac{n^p x^p}{n(n-1) \dots (n-p+1)}\right) \\
 &= \frac{1}{1+x^p} + \frac{n^p x^p}{(1+x^p) n(n-1) \dots (n-p+1)} \\
 &\leq 1 + \frac{n^{p-1}}{n(n-1) \dots (n-p+1)} \\
 &= 1 + \frac{n^{p-1}}{(n-1)(n-2) \dots (n-p+1)}
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

eşitsizliği bulunur. Bu eşitsizlikte

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(n-p+1)(n-p+2)\dots(n-1)} &= \frac{1}{(n-(p-1))(n-(p-2))\dots(n-1)} \\
&\leq \frac{1}{(n-(p-1))(n-(p-1))\dots(n-(p-1))} \\
&= \frac{1}{(n-p+1)(n-p+1)\dots(n-p+1)} \\
&= \frac{1}{(n-p+1)^{p-1}}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabileceğinden bu değer (3.16) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\omega_p(x) G_n \left(\frac{1}{\omega_p(t)}; x \right) &\leq 1 + \frac{n^{p-1}}{(n-p+1)^{p-1}} \\
&= 1 + \left(\frac{n}{n-p+1} \right)^{p-1} \\
&= 1 + \left(1 + \frac{p-1}{n-p+1} \right)^{p-1}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\omega_p(x) G_n \left(\frac{1}{\omega_p(t)}; x \right) \leq M_3(p) \tag{3.17}$$

olarak elde edilir.

Bu eşitsizlikler ve (3.9) eşitliği (3.14) eşitsizliğini verir. (3.1), (3.8) ve (3.9) formüllerinden $n \geq p \geq 1$ için

$$G_n(f(t); x) = G_n \left(\frac{\omega_p(t)}{\omega_p(t)} f(t); x \right)$$

yazılabilir. Eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa

$$\begin{aligned}
|G_n(f(t); x)| &\leq G_n\left(\omega_p(t)|f(t)|\frac{1}{\omega_p(t)}; x\right) \\
&\leq G_n\left(\sup_{x \in I} \omega_p(t)|f(t)|\frac{1}{\omega_p(t)}; x\right) \\
&= \|f(t)\| G_n\left(\frac{1}{\omega_p(t)}; x\right)
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\omega_p(x)|G_n(f(t); x)| &\leq \|f(t)\| \omega_p(x) G_n\left(\frac{1}{\omega_p(t)}; x\right) \\
\|G_n(f(t); x)\|_p &\leq \|f(t)\| M_3(p)
\end{aligned}$$

bulunur. Lemma 1'in başında verilen $M_3 = 1$ için verilen eşitsizliklerin doğruluğu gösterilmek istenirse

$p = 0$ için

$$\left\| G_n\left(\frac{1}{\omega_0(t)}; \cdot\right) \right\|_0 \leq M_3(0)$$

(3.8) den $\omega_0(t) = 1$ olur. O halde

$$\begin{aligned}
\|G_n(1; x)\|_0 &\leq M_3 \\
\|1\|_0 &\leq 1 \\
1 &= 1
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

(3.8) eşitliğinden $x > 0$ ve $p, r \in N$ için

$$\left(\omega_p(x)\right)^2 \leq \omega_{2p}(x), \quad \left(\omega_p(x)\right)^{-2} \leq \frac{4}{\omega_{2p}(x)}, \quad \frac{\omega_{p+r}(x)}{\omega_p(x)\omega_r(x)} \leq 3 \quad (3.18)$$

olduğu açıktır. Yani;

$$\begin{aligned} \left(\omega_p(x)\right)^2 &= \left(\frac{1}{1+x^p}\right)^2 = \frac{1}{1+2x^p+x^{2p}} \leq \frac{1}{1+x^{2p}} \\ &= \omega_{2p}(x) \end{aligned}$$

bulunur.

$$\left(\omega_p(x)\right)^{-2} = \left(\frac{1}{1+x^p}\right)^{-2} = (1+x^p)^2$$

$(a+b)^n \leq 2^{n-1}(a^n+b^n)$ eşitsizliğinden

$$\left(\omega_p(x)\right)^{-2} \leq 2(1+x^{2p})$$

eşitsizliği daha da büyüterek

$$\left(\omega_p(x)\right)^{-2} \leq 4(1+x^{2p})$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned} \left(\omega_p(x)\right)^{-2} &\leq \frac{4}{\frac{1}{1+x^{2p}}} \\ &\leq \frac{4}{\omega_{2p}(x)} \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\frac{\omega_{p+r}(x)}{\omega_p(x)\omega_r(x)} &= \frac{\frac{1}{1+x^{p+r}}}{\left(\frac{1}{1+x^p}\right)\left(\frac{1}{1+x^r}\right)} = \frac{1}{1+x^{p+r}}(1+x^p)(1+x^r) \\
&= \frac{1+x^{p+r}+x^p+x^r}{1+x^{p+r}} = \frac{1+x^{p+r}}{1+x^{p+r}} + \frac{x^p}{1+x^{p+r}} + \frac{x^r}{1+x^{p+r}} \\
&\leq 3
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Hölder eşitsizliği, (3.6), (3.8), (3.14) ve (3.18) formüllerini kullanılarak aşağıdaki iki lemma verilebilir.

Lemma 3.2: Her $r \in \mathbb{N}$ için sabit bir $M_4(r) > 0$ sayısı vardır. Öyle ki $x > 0$, $n \geq 2r$ olmak üzere

$$G_n(|t-x|^r; x) \leq M_4(r) n^{-r/2} x^r$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $x > 0$, $n \geq 2r$ olsun.

$$G_n(|t-x|^r; x) = G_n(|t-x|^r \cdot 1; x)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğe Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
G_n(|t-x|^r; x) &\leq \left[G_n((t-x)^{2r}; x) \right]^{1/2} \cdot \left[G_n(1^2; x) \right]^{1/2} \\
&\leq \sqrt{G_n((t-x)^{2r}; x)} \cdot \sqrt{1}
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.6) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} G_n\left(|t-x|^r; x\right) &\leq \sqrt{M_1(r)n^{-r}x^{2r}} \cdot 1 \\ &= \sqrt{M_1(r)}n^{-r/2}x^r \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $\sqrt{M_1(r)}$ yerine $M_4(r)$ alınırsa

$$G_n\left(|t-x|^r; x\right) \leq M_4(r)n^{-r/2}x^r$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Lemma 3.3: $p, r \in \mathbb{N}$ olsun. Öyleyse sabit bir $M_5(p, r) > 0$ sayısı vardır. Öyle ki $x > 0$ ve $n \geq 2(p+r)$ için

$$\omega_{p+r}(x)G_n\left(\frac{|t-x|^r}{\omega_p(t)}; x\right) \leq M_5(p, r)n^{-r/2}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: (3.18) eşitsizlikleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \omega_{p+r}(x)G_n\left(\frac{|t-x|^r}{\omega_p(t)}; x\right) &\leq 3\omega_p(x)\omega_r(x)G_n\left(\frac{|t-x|^r}{\omega_p(t)}; x\right) \\ &\leq 3G_n\left(\frac{\omega_p(x)\omega_r(x)|t-x|^r}{\omega_p(t)}; x\right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitsizliğe Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\omega_{p+r}(x)G_n\left(\frac{|t-x|^r}{\omega_p(t)};x\right) &\leq 3\sqrt{(\omega_r(x))^2 G_n((t-x)^{2r};x)}\sqrt{(\omega_p(x))^2 G_n\left(\frac{1}{(\omega_p(t))^2}\right)} \\ &\leq 3\sqrt{\omega_{2r}(x)G_n((t-x)^{2r};x)}\sqrt{\omega_{2p}(x)G_n\left(\frac{4}{\omega_{2p}(t)};x\right)}\end{aligned}$$

olur. (3.6) ve (3.8) den,

$$\omega_{p+r}(x)G_n\left(\frac{|t-x|^r}{\omega_p(t)};x\right) \leq 6\sqrt{\frac{1}{1+x^{2r}}M_1(r)n^{-r}x^{2r}}\sqrt{\omega_{2p}(x)G_n\left(\frac{1}{\omega_{2p}(x)};x\right)} \quad (3.19)$$

elde edilir. Lemma 1'den $\omega_p(x)G_n\left(\frac{1}{\omega_p(t)};x\right) \leq M_3(p)$ olduğundan (3.19)

eşitsizliğinin sağ tarafının supremumu alınarak eşitsizlik daha da büyütülebilir.

$\frac{x^{2r}}{1+x^{2r}} \leq 1$ olduğundan ondan daha büyük bir değer olan 1 alınırsa,

$$\begin{aligned}\omega_{p+r}(x)G_n\left(\frac{|t-x|^r}{\omega_p(t)};x\right) &\leq 6\sqrt{M_1(r)n^{-r}}\sqrt{M_3(2p)} \\ &\leq M_5(p,r)n^{-r/2}\end{aligned}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Şimdi $G_{n;p}$ operatörleri için aşağıdaki Lemma verilebilir.

Lemma 3.4: $p \in N$ olsun. Öyleyse sabit bir $M_6(p) > 0$ vardır. Öyle ki her $f \in C^p$ ve $n \geq 2p$ için

$$\|G_{n;p}(f)\|_p \leq M_6(p) \sum_{j=0}^p \|f^{(j)}\|_{p-j} \quad (3.20)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $f \in C_p$, $p \in N$ ise, öyleyse $0 \leq j \leq p$ olmak üzere $\|f^{(j)}\|_{p-j}$ normu tanımlıdır. (3.11)-(3.13) ve (3.9) formüllerinden yararlanarak $x > 0$ ve $n \geq 2p$ için

$$G_{n,p}(f; x) = \int_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n!} e^{-xy} y^n \sum_{j=0}^p \frac{f^{(j)}\left(\frac{n}{y}\right)}{j!} \left(x - \frac{n}{y}\right)^j dy$$

eşitliğinden yola çıkılarak bu eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa

$$\begin{aligned} |G_{n,p}(f; x)| &= \left| \int_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n!} e^{-xy} y^n \sum_{j=0}^p \frac{f^{(j)}\left(\frac{n}{y}\right)}{j!} \left(x - \frac{n}{y}\right)^j dy \right| \\ &= \left| \sum_{j=0}^p \int_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n!} e^{-xy} y^n \frac{f^{(j)}\left(\frac{n}{y}\right)}{j!} \left(x - \frac{n}{y}\right)^j dy \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^p \int_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n!} e^{-xy} y^n \left| f^{(j)}\left(\frac{n}{y}\right) \right| \frac{\left|x - \frac{n}{y}\right|^j}{j!} dy \\ &= \sum_{j=0}^p \int_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n!} e^{-xy} y^n \omega_{p-j}\left(\frac{n}{y}\right) \left| f^{(j)}\left(\frac{n}{y}\right) \right| \frac{1}{\omega_{p-j}\left(\frac{n}{y}\right)} \frac{\left|x - \frac{n}{y}\right|^j}{j!} dy \end{aligned}$$

elde edilir ve eşitliğin sağ tarafının supremumu alınırsa,

$$|G_{n,p}(f; x)| \leq \sum_{j=0}^p \left\| f^{(j)}\left(\frac{n}{y}\right) \right\|_{p-j} \int_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n!} e^{-xy} y^n \frac{\left|x - \frac{n}{y}\right|^j}{\omega_{p-j}\left(\frac{n}{y}\right)} dy$$

$$\leq \sum_{j=0}^p \left\| f^{(j)} \left(\frac{n}{y} \right) \right\|_{p-j} G_n \left(\frac{\left| x - \frac{n}{y} \right|^j}{\omega_{p-j} \left(\frac{n}{y} \right)}; x \right)$$

eşitsizliği bulunur ve bu eşitsizliğe Lemma 2 ve Lemma 3 uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \omega_p(x) |G_{n,p}(f; x)| &\leq \sum_{j=0}^p \left\| f^{(j)} \left(\frac{n}{y} \right) \right\|_{p-j} \omega_p(x) G_n \left(\frac{\left| x - \frac{n}{y} \right|^j}{\omega_{p-j} \left(\frac{n}{y} \right)}; x \right) \\ &\leq \sum_{j=0}^p \left\| f^{(j)} \left(\frac{n}{y} \right) \right\|_{p-j} M_6(p) n^{-j/2} \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu bulunan eşitsizliğin her iki tarafında supremumu alınırsa ve $1/n^{j/2} \leq 1$ olduğu için bunun yerine onun en büyük değeri olan 1 alınırsa,

$$\|G_{n,p}(f; x)\|_p \leq M_6(p) \sum_{j=0}^p \left\| f^{(j)} \left(\frac{n}{y} \right) \right\|_{p-j}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

(3.11), (3.12) formülleri ve (3.20) eşitsizliği $p \in \mathbb{N}$ ve $n \geq 2p$ için $G_{n,p}$ nin C^p den C_p ye giden lineer operatör olduğunu gösterir.

Şimdi bu bölümde G_n operatörünün yakınsaklığı ile ilgili iki teoremi ve ispatını vereceğiz.

Teorem 3.1: $p \in \mathbb{N}_0$ ile $f, f', f'' \in C_p$ olmak üzere; f nin I üzerinde 2 kez türevlenebilen bir fonksiyon olduğunu varsayalım. Bu durumda sabit bir $M_7(p) > 0$ sayısı vardır, öyle ki $x > 0$ ve $n \geq 2p + 4$ için

$$\omega_p(x) |G_n(f; x) - f(x)| \leq M_7(p) \|f''\|_p \frac{x^2}{n} \quad (3.21)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $x > 0$ ve f teoremdaki şartları sağlasın. $t > 0$ için

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \int_x^t \int_x^s f''(u) du ds$$

yazılabilir. Buradan da

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \int_x^t (t-u) f''(u) du$$

yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafına G_n operatörü uygulanırsa ve $G_n(t; x) = x$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} G_n(f(t); x) &= G_n(f(x); x) + G_n(f'(x)(t-x); x) + G_n\left(\int_x^t (t-u) f''(u) du; x\right) \\ &= f(x) + G_n\left(\int_x^t (t-u) f''(u) du; x\right) \end{aligned}$$

yazılabilir. [5]’ den

$$\left| \int_x^t (t-u) f''(u) du \right| \leq \|f''\|_p \left(\frac{1}{\omega_p(t)} + \frac{1}{\omega_p(x)} \right) (t-x)^2$$

eşitsizliğini sağlanır. Bu ifade göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
|G_n(f(t); x) - f(x)| &= \left| G_n \left(\int_x^t (t-u) f''(u) du; x \right) \right| \\
&\leq G_n \left(\left| \int_x^t (t-u) f''(u) du \right|; x \right) \\
&\leq G_n \left(\|f''\|_p \left(\frac{1}{\omega_p(t)} + \frac{1}{\omega_p(x)} \right) (t-x)^2; x \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafı $\omega_p(x)$ ile çarpılırsa $n \geq 2p+4$ için

$$\begin{aligned}
\omega_p(x) |G_n(f(t); x) - f(x)| &\leq \omega_p(x) G_n \left(\|f''\|_p \left(\frac{1}{\omega_p(t)} + \frac{1}{\omega_p(x)} \right) (t-x)^2; x \right) \\
&= \|f''\|_p \omega_p(x) G_n \left(\left(\frac{1}{\omega_p(t)} + \frac{1}{\omega_p(x)} \right) (t-x)^2; x \right) \\
&= \|f''\|_p \left\{ \omega_p(x) \left[G_n \left(\frac{(t-x)^2}{\omega_p(t)}; x \right) + G_n \left(\frac{(t-x)^2}{\omega_p(x)}; x \right) \right] \right\} \\
&= \|f''\|_p \left[\omega_p(x) G_n \left(\frac{(t-x)^2}{\omega_p(t)}; x \right) + G_n \left((t-x)^2; x \right) \right]
\end{aligned}$$

bulunur. Yani

$$\begin{aligned}
\omega_p(x) |G_n(f(t); x) - f(x)| &\leq \|f''\|_p \left[\omega_p(x) G_n \left(\frac{(t-x)^2}{\omega_p(t)}; x \right) \right. \\
&\quad \left. + G_n \left((t-x)^2; x \right) \right] \tag{3.22}
\end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra (3.6) ve (3.18) eşitsizliği ve Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\omega_p(x) G_n \left(\frac{(t-x)^2}{\omega_p(t)}; x \right) &\leq \omega_p(x) \left[\left(G_n \left((t-x)^4; x \right) \right)^{1/2} \left(G_n \left(\frac{1}{(\omega_p(t))^2}; x \right) \right)^{1/2} \right] \\
&\leq \left((\omega_p(x))^2 G_n \left(\frac{4}{\omega_{2p}(t)}; x \right) \right)^{1/2} \left(G_n \left((t-x)^4; x \right) \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

$$\leq \left(4\omega_{2p}(x) G_n \left(\frac{1}{\omega_{2p}(t)}; x \right) \right)^{1/2} \left(G_n \left((t-x)^4; x \right) \right)^{1/2}$$

yazılabilir. Yani

$$\omega_p(x) G_n \left(\frac{(t-x)^2}{\omega_p(t)}; x \right) \leq \left(4\omega_{2p}(x) G_n \left(\frac{1}{\omega_{2p}(t)}; x \right) \right)^{1/2} \left(G_n \left((t-x)^4; x \right) \right)^{1/2} \quad (3.23)$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca daha önceden ispatlanan (3.6) ve (3.17) eşitsizlikleri geçerlidir. Bu sebeple

$$\begin{aligned} \omega_p(x) G_n \left(\frac{(t-x)^2}{\omega_p(t)}; x \right) &\leq 2 \left(M_3(p) \right)^{1/2} \left(M_1(2) n^{-2} x^4 \right)^{1/2} \\ &\leq M_8(p) \frac{x^2}{n} \end{aligned}$$

Yazılabilir. (3.5) den ise

$$\begin{aligned} \omega_p(x) \left| G_n(f(t); x) - f(x) \right| &\leq \|f''\|_p \left[M_8(p) \frac{x^2}{n} + \frac{x^2}{n-1} \right] \\ &\leq M_7(p) \|f''\|_p \frac{x^2}{n} \end{aligned}$$

bulunur. Bu da istenilendir.

Teorem 3.2: $p \in N_0$ olsun. Öyleyse sabit bir $M_9(p) > 0$ sayısı vardır. Öyle ki her $f \in C_p$, $x > 0$ ve $n \geq 2p+4$ için

$$\omega_p(x) \left| G_n(f; x) - f(x) \right| \leq M_9(p) \omega_2 \left(f; C_p; \frac{x}{\sqrt{n}} \right) \quad (3.24)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $x, h > 0$ için $f \in C_p$ nin f_h Stiecklov fonksiyonu

$$f_h(x) = \frac{4}{h^2} \int_0^{h/2} \int_0^{h/2} (2f(x+s+t) - f(x+2(s+t))) ds dt$$

olan ifadesini göz önüne alalım. Bu eşitliğin her iki tarafı $-$ ile çarpılırsa

$$-f_h(x) = \frac{4}{h^2} \int_0^{h/2} \int_0^{h/2} (f(x+2(s+t)) - 2f(x+s+t)) ds dt$$

yazılabilir. Eşitliğin her iki tarafına $f(x)$ fonksiyonu eklenirse

$$f(x) - f_h(x) = \frac{4}{h^2} \int_0^{h/2} \int_0^{h/2} (f(x+2(s+t)) - 2f(x+s+t)) ds dt + f(x)$$

yazılabilir. Ayrıca burada $\frac{4}{h^2} \int_0^{h/2} \int_0^{h/2} f(x) ds dt = f(x)$ olduğu için eşitliğin sağ

tarafındaki $f(x)$ fonksiyonu integral içine alınabilir. Böylece

$$f(x) - f_h(x) = \frac{4}{h^2} \int_0^{h/2} \int_0^{h/2} (f(x+2(s+t)) - 2f(x+s+t) + f(x)) ds dt$$

yazılabilir. İleri fark tanımından yararlanarak ise

$$f(x) - f_h(x) = \frac{4}{h^2} \int_0^{h/2} \int_0^{h/2} \Delta_{s+t}^2 f(x) ds dt$$

yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_h(x)| &= \left| \frac{4}{h^2} \int_0^{h/2} \int_0^{h/2} \Delta_{s+t}^2 f(x) ds dt \right| \\
&\leq \frac{4}{h^2} \int_0^{h/2} \int_0^{h/2} |\Delta_{s+t}^2 f(x)| ds dt
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $\omega_p(x)$ ile çarpılırsa

$$\omega_p(x) |f(x) - f_h(x)| \leq \frac{4}{h^2} \int_0^{h/2} \int_0^{h/2} \omega_p(x) |\Delta_{s+t}^2 f(x)| ds dt$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafın supremumu alındığı takdirde ise

$$\sup_{x \in I} \omega_p(x) |f(x) - f_h(x)| \leq \frac{4}{h^2} \int_0^{h/2} \int_0^{h/2} \sup_{x \in I} \omega_p(x) |\Delta_{s+t}^2 f(x)| ds dt$$

olur. (3.9) ve (3.10) dan ise

$$\begin{aligned}
\|f(x) - f_h(x)\|_p &\leq \frac{4}{h^2} \int_0^{h/2} \int_0^{h/2} \omega_2(f; C_p; h) ds dt \\
&= \omega_2(f; C_p; h) \frac{4}{h^2} \int_0^{h/2} \int_0^{h/2} ds dt
\end{aligned}$$

elde edilir. burada $\frac{4}{h^2} \int_0^{h/2} \int_0^{h/2} ds dt = 1$ olduğu bilindiği için

$$\|f - f_h\|_p \leq \omega_2(f; C_p; h) \quad (3.25)$$

eşitsizliği bulunur. Daha sonra f_h Stiecklov fonksiyonu tekrar göz önüne alındığında

$$f_h(x) = \frac{4}{h^2} \int_0^{h/2} \int_0^{h/2} (2f(x+s+t) - f(x+2(s+t))) ds dt$$

$$f'_h(x) = \frac{4}{h^2} \int_0^{h/2} \int_0^{h/2} (2f'(x+s+t) - f'(x+2(s+t))) ds dt$$

$$f''_h(x) = \frac{4}{h^2} \int_0^{h/2} \int_0^{h/2} (2f''(x+s+t) - f''(x+2(s+t))) ds dt$$

yazılabilir. Ortalama değer teoremi gereğince, $f''(\xi) = \frac{1}{h^2} [f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)]$ olacak şekilde bir $\xi \in I$ vardır. Buna göre

$$f''_h(x) = \frac{4}{h^2} \int_0^{h/2} \int_0^{h/2} \frac{1}{h^2} \{ 2[f(x+s+t+2h) - 2f(x+s+t+h) + f(x+s+t)] - [f(x+2(s+t)+2h) - 2f(x+2(s+t)+h) + f(x+2(s+t))] \} ds dt$$

yazılabilir. Bu integralin içine $f(x+2h)$, $2f(x+h)$ ve $f(x)$ eklenir çıkarılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$f''_h(x) = \frac{4}{h^2} \int_0^{h/2} \int_0^{h/2} \frac{1}{h^2} \{ 2[f(x+s+t+2h) - 2f(x+s+t+h) + f(x+s+t)] - [f(x+2(s+t)+2h) - 2f(x+2(s+t)+h) + f(x+2(s+t))] + f(x+2h) - f(x+2h) + 2f(x+h) - 2f(x+h) + f(x) - f(x) \} ds dt$$

$$= \frac{4}{h^2} \int_0^{h/2} \int_0^{h/2} \frac{1}{h^2} \{ -[f(x+2(s+t)+2h) - 2f(x+s+t+2h) + f(x+2h)] + 2[f(x+2(s+t)+h) - 2f(x+s+t+h) + f(x+h)] - [f(x+2(s+t)) - 2f(x+s+t) + f(x)] + [f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)] \} ds dt$$

$$f''_h(x) = \frac{4}{h^2} \int_0^{h/2} \int_0^{h/2} [-\Delta_{s+t}^2 f(x+2h) + 2\Delta_{s+t}^2 f(x+h) - \Delta_{s+t}^2 f(x) + \Delta_h^2 f(x)] ds dt$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafının supremumu alınır ve süreklilik modülü tanımı kullanılırsa

$$\|f_h''\|_p \leq 9h^{-2}\omega_2(f; C_p; h) \quad (3.26)$$

elde edilir. Burada ki $\omega_2(f)$, (3.10) formülü ile tanımlanan f nin 2. süreklilik modülüdür.

$$f(t) = f(t) - f_h(t) + f_h(t) - f_h(x) + f_h(x)$$

eşitliği için Lemma1, Teorem1, (3.25) ve (3.26) eşitsizlikleri göz önüne alınarak, bu eşitliğin her iki tarafına G_n operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} G_n(f(t); x) &= G_n(f(t) - f_h(t) + f_h(t) - f_h(x) + f_h(x); x) \\ &= G_n(f(t) - f_h(t); x) + G_n(f_h(t) - f_h(x); x) + G_n(f_h(x); x) \end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. Eşitliğin her iki tarafından $f(x)$ çıkarılırsa

$$\begin{aligned} G_n(f(t); x) - f(x) &= G_n(f(t) - f_h(t); x) + G_n(f_h(t) - f_h(x); x) \\ &\quad + G_n(f_h(x); x) - f(x) \\ &= G_n(f(t) - f_h(t); x) + G_n(f_h(t) - f_h(x); x) \\ &\quad + G_n(f_h(x) - f(x); x) \end{aligned}$$

bulunur ve eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınır

$$\begin{aligned} &|G_n(f(t); x) - f(x)| \\ &= |G_n(f(t) - f_h(t); x) + G_n(f_h(t) - f_h(x); x) + G_n(f_h(x) - f(x); x)| \\ &\leq |G_n(f(t) - f_h(t); x)| + |G_n(f_h(t) - f_h(x); x)| + |G_n(f_h(x) - f(x); x)| \\ &\leq |G_n(f(t) - f_h(t); x)| + |G_n(f_h(t) - f_h(x); x)| + |f_h(x) - f(x)| G_n(1; x) \end{aligned}$$

olur. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $\omega_p(x)$ ile çarpılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\omega_p(x) |G_n(f(t); x) - f(x)| &\leq \omega_p(x) |G_n(f(t) - f_h(t); x)| \\
&\quad + \omega_p(x) |G_n(f_h(t) - f_h(x); x)| + \omega_p(x) |f_h(x) - f(x)| \\
&\leq M_3(p) \|f - f_h\|_p + M_7(p) \|f_h''\|_p \frac{x^2}{n} + \|f_h - f\|_p \\
&\leq M_3(p) \omega_2(f; C_p; h) + M_7(p) \frac{9}{h^2} \omega_2(f; C_p; h) \frac{x^2}{n} \\
&\quad + \omega_2(f; C_p; h) \\
&\leq M_{10}(p) \omega_2(f; C_p; h) \left(1 + h^{-2} \frac{x^2}{n}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $h = x/\sqrt{n}$ alınırsa

$$\begin{aligned}
\omega_p(x) |G_n(f(t); x) - f(x)| &\leq M_{10}(p) \omega_2\left(f; C_p; \frac{x}{\sqrt{n}}\right) \left(1 + \left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{-2} \frac{x^2}{n}\right) \\
&\leq M_{10}(p) \omega_2\left(f; C_p; \frac{x}{\sqrt{n}}\right) \left(1 + \frac{n}{x^2} \frac{x^2}{n}\right) \\
&\leq M_9(p) \omega_2\left(f; C_p; \frac{x}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Şimdi bu bölümde $G_{n;p}$ operatörü için (3.7) ve (3.24) değerlerinin farklı bir şeklinin ispatını yapalım.

Teorem 3.3: $p \in N$ olsun. Öyleyse sabit bir $M_{11}(p) > 0$ sayısı vardır. Öyle ki her $f \in C^p$, $x > 0$ ve $n \geq 2p+2$ için

$$\omega_p(x) |G_{n;p}(f; x) - f(x)| \leq M_{11}(p) n^{-p/2} \omega_1\left(f^{(p)}; C_0; \frac{x}{\sqrt{n}}\right) \quad (3.27)$$

eşitsizliği sağlanır. Sonuç olarak, $n \geq 2p + 2$ için

$$\|G_{n,p}(f) - f\|_{p+1} \leq 3M_{11}(p)n^{-p/2}\omega_1\left(f^{(p)}; C_0; \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (3.28)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada ω_1 , (3.10) formülü ile tanımlanan ifadedir.

İspat: (3.11)-(3.13) ve (3.3) tanımlarından, her $f \in C^p$, $x > 0$, $p \geq 0$ ve $n \geq 2p + 2$ için (3.11) gereğince

$$G_{n,p}(f; x) = \int_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n!} e^{-xy} y^n \sum_{j=0}^p \frac{f^{(j)}(t)}{j!} (x-t)^j dy$$

olduğunu biliyoruz. Bu eşitliğin her iki tarafından $f(x)$ çıkarılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned} G_{n,p}(f; x) - f(x) &= \int_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n!} e^{-xy} y^n \sum_{j=0}^p \frac{f^{(j)}(t)}{j!} (x-t)^j dy - f(x) \\ &= \int_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n!} e^{-xy} y^n \sum_{j=0}^p \frac{f^{(j)}(t)}{j!} (x-t)^j dy - f(x) \int_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n!} e^{-xy} y^n dy \\ &= \int_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n!} e^{-xy} y^n \left[\sum_{j=0}^p \frac{f^{(j)}(t)}{j!} (x-t)^j - f(x) \right] dy \\ &= \int_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n!} e^{-xy} y^n [F_p(x, t) - f(x)] dy \end{aligned}$$

olur ve buradan

$$G_{n,p}(f; x) - f(x) = G_n(F_p(x, t) - f(x); x) \quad (3.29)$$

elde edilir. Şimdi $t > 0$ için $f \in C^p$ nin Taylor formülü $x > 0$ olmak üzere

$$f(x) = \sum_{j=0}^p \frac{f^{(j)}(t)}{j!} (x-t)^j + \frac{(x-t)^p}{(p-1)!} I_p(x, t) \quad (3.30)$$

olup, burada

$$I_p(x, t) = \int_0^1 (1-u)^{p-1} \left(f^{(p)}(t+u(x-t)) - f^{(p)}(t) \right) du \quad (3.31)$$

dir. (3.30) dan $x, t > 0$ için

$$f(x) = F_p(x, t) + \frac{(x-t)^p}{(p-1)!} I_p(x, t)$$

$$f(x) - F_p(x, t) = \frac{(x-t)^p}{(p-1)!} I_p(x, t)$$

yazılır ve bu eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa

$$|f(x) - F_p(x, t)| = \frac{|x-t|^p}{(p-1)!} |I_p(x, t)|$$

olur ve sonuç olarak $x > 0$ ve $n \geq 2p+2$ için (3.29) dan

$$G_{n;p}(f; x) - f(x) = G_n(F_p(x; t) - f(x))$$

olduğu bilindiğinden her iki tarafın mutlak değeri alınırsa

$$\begin{aligned}
|G_{n,p}(f;x) - f(x)| &= |G_n(F_p(x,t) - f(x);x)| \\
&\leq G_n(|F_p(x,t) - f(x)|;x) \\
&= G_n\left(\frac{|x-t|^p}{(p-1)!} |I_p(x,t)|;x\right)
\end{aligned}$$

elde edilir ve buradan da

$$|G_{n,p}(f;x) - f(x)| = \frac{1}{(p-1)!} G_n(|x-t|^p |I_p(x,t)|;x) \quad (3.32)$$

yazılabilir. (3.10) tanımı ve $f^{(p)} \in C_0$ için tanımlanan $\omega_1(f^{(p)};C_0)$ in özellikleri ile (3.31) eşitliğinden $x > 0$ ve $n \in N$ için

$$I_p(x,t) = \int_0^1 (1-u)^{p-1} (f^{(p)}(t+u(x-t)) - f^{(p)}(t)) du$$

eşitliğinin her iki tarafının da mutlak değeri alınır

$$\begin{aligned}
|I_p(x,t)| &= \left| \int_0^1 (1-u)^{p-1} (f^{(p)}(t+u(x-t)) - f^{(p)}(t)) du \right| \\
&\leq \int_0^1 |1-u|^{p-1} |f^{(p)}(t+u(x-t)) - f^{(p)}(t)| du
\end{aligned}$$

olur. Burada $0 < u < 1$ olduğundan $|1-u|^{p-1} = (1-u)^{p-1}$ olarak yazılabilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
|I_p(x, t)| &= \int_0^1 (1-u)^{p-1} \left| f^{(p)}(t+u(x-t)) - f^{(p)}(t) \right| du \\
&\leq \int_0^1 (1-u)^{p-1} \sup_{0 \leq h \leq t} \left| f^{(p)}(t+u(x-t)) - f^{(p)}(t) \right| du \\
&= \int_0^1 (1-u)^{p-1} \omega_1\left(f^{(p)}; C_0; u|t-x|\right) du \\
&\leq \omega_1\left(f^{(p)}; C_0; |t-x|\right) \int_0^1 (1-u)^{p-1} du \\
&= \omega_1\left(f^{(p)}; C_0; |t-x|\right) \left[-\frac{1}{p}(1-u)^p \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{p} \omega_1\left(f^{(p)}; C_0; |t-x|\right) \\
&= \frac{1}{p} \omega_1\left(f^{(p)}; C_0; |t-x| \frac{x}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{n}}{x}\right) \\
&= \frac{1}{p} \omega_1\left(f^{(p)}; C_0; \frac{x}{\sqrt{n}}\right) \left(\frac{\sqrt{n}}{x} |t-x|\right)
\end{aligned}$$

bulunur ve buradan da

$$|I_p(x, t)| \leq \frac{1}{p} \omega_1\left(f^{(p)}; C_0; \frac{x}{\sqrt{n}}\right) \left(\frac{\sqrt{n}}{x} |t-x| + 1\right) \quad (3.33)$$

elde edilir. (3.32) eşitsizliğinde (3.33) değerini kullanarak

$$\begin{aligned}
|G_{n,p}(f; x) - f(x)| &= \frac{1}{(p-1)!} G_n(|x-t|^p |I_p(x, t)|; x) \\
&\leq \frac{1}{(p-1)!} G_n\left(|x-t|^p \frac{1}{p} \omega_1\left(f^{(p)}; C_0; \frac{x}{\sqrt{n}}\right) \left(\frac{\sqrt{n}}{x} |t-x| + 1\right); x\right) \\
&= \frac{1}{(p)!} \omega_1\left(f^{(p)}; C_0; \frac{x}{\sqrt{n}}\right) G_n\left(|x-t|^p \left(\frac{\sqrt{n}}{x} |t-x| + 1\right); x\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(p)!} \omega_1 \left(f^{(p)}; C_0; \frac{x}{\sqrt{n}} \right) G_n \left(|x-t|^{p+1} \frac{\sqrt{n}}{x} + |t-x|^p; x \right) \\
&= \frac{1}{(p)!} \omega_1 \left(f^{(p)}; C_0; \frac{x}{\sqrt{n}} \right) \left[G_n \left(|x-t|^{p+1} \frac{\sqrt{n}}{x}; x \right) + G_n \left(|t-x|^p; x \right) \right] \\
&= \frac{1}{(p)!} \omega_1 \left(f^{(p)}; C_0; \frac{x}{\sqrt{n}} \right) \left[\frac{\sqrt{n}}{x} G_n \left(|x-t|^{p+1}; x \right) + G_n \left(|t-x|^p; x \right) \right]
\end{aligned}$$

bulunur ve Lemma2 den de

$$\begin{aligned}
&|G_{n,p}(f; x) - f(x)| \\
&\leq \frac{1}{(p)!} \omega_1 \left(f^{(p)}; C_0; \frac{x}{\sqrt{n}} \right) \left[\frac{\sqrt{n}}{x} M_4(p+1) n^{-(p+1)/2} x^{p+1} + M_4(p) n^{-p/2} x^p \right] \\
&= \frac{1}{(p)!} M_{11}(p) \omega_1 \left(f^{(p)}; C_0; \frac{x}{\sqrt{n}} \right) [n^{-p/2} x^p + n^{-p/2} x^p] \\
&= \frac{1}{(p)!} M_{11}(p) \omega_1 \left(f^{(p)}; C_0; \frac{x}{\sqrt{n}} \right) n^{-p/2} x^p
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafı $\omega_p(x)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
\omega_p(x) |G_{n,p}(f; x) - f(x)| &\leq \frac{1}{(p)!} M_{11}(p) \omega_1 \left(f^{(p)}; C_0; \frac{x}{\sqrt{n}} \right) n^{-p/2} x^p \omega_p(x) \\
&= \frac{1}{(p)!} M_{11}(p) \omega_1 \left(f^{(p)}; C_0; \frac{x}{\sqrt{n}} \right) n^{-p/2} x^p \frac{1}{1+x^p} \\
&= \frac{1}{(p)!} M_{11}(p) \omega_1 \left(f^{(p)}; C_0; \frac{x}{\sqrt{n}} \right) n^{-p/2} \frac{x^p}{1+x^p}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $x^p / 1+x^p < 1$ olduğundan eşitsizlik daha da büyütülerek

$$\omega_p(x) |G_{n,p}(f; x) - f(x)| \leq \frac{1}{(p)!} M_{11}(p) n^{-p/2} \omega_1 \left(f^{(p)}; C_0; \frac{x}{\sqrt{n}} \right)$$

şeklinde yazılabilir ve bu da bize (3.27) eşitsizliğini verir.

Teoremde verilen (3.28) eşitsizliği, (3.18) eşitsizliği ve $x > 0$ ve $n \in N$ için $\omega_1(f^{(p)}; C_0; x/\sqrt{n}) \leq (x+1)\omega_1(f^{(p)}; C_0; 1/\sqrt{n})$ eşitsizliği ile (3.27) değerinden elde edilir. Yani;

$$|G_{n;p}(f; x) - f(x)| \leq \frac{1}{(p)!} M_{11}(p) \omega_1\left(f^{(p)}; C_0; \frac{x}{\sqrt{n}}\right) n^{-p/2} x^p$$

olup bu eşitsizliğin her iki tarafı $\omega_{p+1}(x)$ ile çarpılırsa

$$\omega_{p+1}(x) |G_{n;p}(f; x) - f(x)| \leq \frac{1}{(p)!} M_{11}(p) \omega_1\left(f^{(p)}; C_0; \frac{x}{\sqrt{n}}\right) n^{-p/2} x^p \omega_{p+1}(x)$$

olur. (3.18) den ise

$$\omega_{p+1}(x) |G_{n;p}(f; x) - f(x)| \leq \frac{1}{(p)!} M_{11}(p) \omega_1\left(f^{(p)}; C_0; \frac{x}{\sqrt{n}}\right) n^{-p/2} x^p 3\omega_p(x) \omega_1(x)$$

yazılabilir ve buradan

$$\omega_{p+1}(x) |G_{n;p}(f; x) - f(x)| \leq 3M_{11}(p) n^{-p/2} \omega_1\left(f^{(p)}; C_0; \frac{x}{\sqrt{n}}\right) \frac{x^p}{1+x^p} \frac{1}{1+x} \quad (3.34)$$

bulunur. Bu eşitsizliğin her iki tarafının supremumu alınırsa

$$\|G_{n;p}(f; x) - f(x)\|_{p+1} \leq 3M_{11}(p) n^{-p/2} \omega_1\left(f^{(p)}; C_0; \frac{x}{\sqrt{n}}\right) \frac{1}{1+x}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte başta verilen eşitsizlik yerine yazıldığı takdirde

$$\|G_{n;p}(f; x) - f(x)\|_{p+1} \leq 3M_{11}(p) n^{-p/2} (x+1) \omega_1\left(f^{(p)}; C_0; \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \frac{1}{1+x}$$

olur, buradan

$$\|G_{n;p}(f;x) - f(x)\|_{p+1} \leq 3M_{11}(p)n^{-p/2}\omega_1\left(f^{(p)};C_0;\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2 ve Teorem 3 den aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir.

Sonuç 1: Her $f \in C_p$, $p \in N_0$ ve $x > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (G_n(f;x) - f(x)) = 0$$

dır. Bu yakınsama $x > 0$ için her $[x_1, x_2]$ aralığında düzgündür.

Ayrıca f , I üzerinde iki kez türevlenebilen bir fonksiyon ve $f', f'' \in C_p$ ise her $x > 0$ ve $n \rightarrow \infty$ için

$$|G_n(f;x) - f(x)| = O_x\left(\frac{1}{n}\right)$$

dır.

Sonuç 2: $f \in C^p$, $p \in N$ ve her $x > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{p/2} (G_{n;p}(f;x) - f(x)) = 0$$

dır. Ayrıca,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{p/2} \|G_{n;p}(f;x) - f(x)\|_{p+1} = 0$$

dır.

Sonuç 3: $n \geq 2p+2$ için $G_{n,p}$ operatörleri yardımı ile $f \in C^p$ nin (3.27) yaklaşım hızının derecesi, (3.1) formülü ile tanımlanan G_n klasik gamma operatörleri için verilen (3.7) operatörünün yaklaşım hızının derecesinden daha iyidir.

Bu bölümde ise G_n ve $G_{n,p}$ operatörleri için Voronovskaya tipi teorem verilecek.

Teorem 3.4: $p \in N_0$ ve $f, f', f'' \in C_p$ olmak üzere; f nin I üzerinde 2 kez türevlenebilen bir fonksiyon olduğunu varsayalım. Bu durumda her $x > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(G_n(f; x) - f(x)) = \frac{x^2}{2} f''(x) \quad (3.35)$$

dır.

İspat: f ve $x > 0$ seçilirse, f nin özellikleri ile $t > 0$ için Taylor formülü gereğince

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{1}{2} f''(x)(t-x)^2 + \varphi(t, x)(t-x)^2 \quad (3.36)$$

yazılabilir. Burada $\varphi(t) \equiv \varphi(t, x)$ şeklinde bir fonksiyon olup, öyle ki $\varphi(t)t^2, C_p$ 'ye aittir ve $\lim_{t \rightarrow x} \varphi(t) = \varphi(x) = 0$ 'dır.

Yukarıda yazılan Taylor formülünde eşitliğin her iki tarafına G_n operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} G_n(f(t); x) &= G_n(f(x); x) + G_n(f'(x)(t-x); x) + G_n\left(\frac{1}{2} f''(x)(t-x)^2; x\right) \\ &\quad + G_n(\varphi(t, x)(t-x)^2; x) \end{aligned}$$

$$G_n(f(t);x) = f(x)G_n(1;x) + f'(x)G_n((t-x);x) + \frac{1}{2}f''(x)G_n((t-x)^2;x) + G_n(\varphi(t,x)(t-x)^2;x)$$

bulunur. Buradan $G_n(t;x) = x$ olduğu göz önüne alınırsa

$$G_n(f(t);x) = f(x) + \frac{1}{2}f''(x)G_n((t-x)^2;x) + G_n(\varphi(t,x)(t-x)^2;x) \quad (3.37)$$

yazılabilir. Daha sonra $n \geq 2p+2$ için Hölder eşitsizliğini uygulanarak

$$G_n(\varphi(t,x)(t-x)^2;x) \leq [G_n(\varphi^2(t,x);x)]^{1/2} [G_n((t-x)^4;x)]^{1/2}$$

yazılabilir.

φ nin özellikleri ve Sonuç 1'den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (G_n(\varphi(t,x);x) - \varphi(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (G_n(\varphi(t);x) - \varphi(x)) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (G_n(\varphi^2(t);x) - \varphi^2(x)) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(\varphi^2(t);x) = \varphi^2(x)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(\varphi^2(t);x) = \varphi^2(x) = 0$$

bulunur ve (3.6) eşitsizliğinden ise

$$G_n((t-x)^4;x) \leq M_1(2)n^{-2}x^4$$

olduğu açıktır. O halde

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} n G_n \left(\varphi(t)(t-x)^2; x \right) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[G_n \left(\varphi^2(t, x); x \right) \right]^{1/2} \left[G_n \left((t-x)^4; x \right) \right]^{1/2} \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[G_n \left(\varphi^2(t, x); x \right) \right]^{1/2} \left[M_1(2) n^{-2} x^4 \right]^{1/2} \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[G_n \left(\varphi^2(t, x); x \right) \right]^{1/2} \sqrt{M_1(2)} \frac{1}{n} x^2 \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[G_n \left(\varphi^2(t, x); x \right) \right]^{1/2} \sqrt{M_1(2)} x^2 \\
&\leq 0. \sqrt{M_1(2)} x^2
\end{aligned}$$

bulunur. Yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n G_n \left(\varphi(t)(t-x)^2; x \right) = 0 \quad (3.38)$$

elde edilir. (3.5) ve (3.38) eşitliğini uygulayarak (3.37) eşitliğinden

$$G_n(f(t); x) - f(x) = \frac{1}{2} f''(x) G_n((t-x)^2; x) + G_n(\varphi(t, x)(t-x)^2; x)$$

yazılabilir. Buna göre

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[G_n(f(t); x) - f(x) \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{1}{2} f''(x) G_n((t-x)^2; x) \right] \\
&\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[G_n(\varphi(t, x)(t-x)^2; x) \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{1}{2} f''(x) \frac{x^2}{n-1} \right] + 0 \\
&= \frac{x^2}{2} f''(x) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n-1}
\end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(G_n(f(t); x) - f(x) \right) = \frac{x^2}{2} f''(x)$$

elde edilir.

Teorem 3.5: $p \in N$ ve f , C^p 'ye ait ve I üzerinde sürekli ve sınırlı $f^{(p+1)}, f^{(p+2)}$ türevlerine sahip bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x > 0$ ve $n \rightarrow \infty$ için

$$\begin{aligned} G_{n,p}(f; x) - f(x) &= \frac{(-1)^p f^{(p+1)}(x) G_n((t-x)^{p+1}; x)}{(p+1)!} \\ &+ \frac{(-1)^p (p+1) f^{(p+2)}(x) G_n((t-x)^{p+2}; x)}{(p+2)!} \\ &+ O_x(n^{-(p+2)/2}) \end{aligned} \quad (3.39)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $x > 0$ ve f kabulleri sağlasın. Teorem 4'ün ispatına benzer olarak $0 \leq j \leq p$ olmak üzere $f^{(j)}$ her türevi için Taylor formülü yazılabilir. $t > 0$ için

$$f^{(j)}(t) = \sum_{i=0}^{p+2-j} \frac{f^{(j+i)}(x)}{i!} (t-x)^i + \varphi_j(t, x) (t-x)^{p+2-j}$$

olur. Burada $\varphi_j(t) \equiv \varphi_j(t, x)$ şeklindeki bir fonksiyondur. Öyle ki $\varphi_j(t)t^2$, C_0 a aittir ve $\lim_{t \rightarrow x} \varphi_j(t) = \varphi_j(x) = 0$ 'dır. Bu yüzden (3.12) formülü ile tanımlanan F_p aşağıdaki şekilde yazılabilir. $x, t > 0$ için

$$\begin{aligned} F_p(x, t) &= \sum_{j=0}^p \frac{f^{(j)}(t)}{j!} (x-t)^j \\ &= \sum_{j=0}^p \frac{\sum_{i=0}^{p+2-j} \frac{f^{(j+i)}(x)}{i!} (t-x)^i + \varphi_j(t, x) (t-x)^{p+2-j}}{j!} (x-t)^j \\ &= \sum_{j=0}^p \frac{1}{j!} \left(\sum_{i=0}^{p+2-j} \frac{f^{(j+i)}(x)}{i!} (t-x)^i + \varphi_j(t, x) (t-x)^{p+2-j} \right) (x-t)^j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^p \frac{1}{j!} \left(\sum_{i=0}^{p+2-j} \frac{f^{(j+i)}(x)}{i!} (t-x)^i \right) (x-t)^j + \sum_{j=0}^p \frac{1}{j!} \varphi_j(t, x) (t-x)^{p+2-j} (x-t)^j \\
&= \sum_{j=0}^p \frac{(-1)^j}{j!} \sum_{i=0}^{p+2-j} \frac{f^{(j+i)}(x)}{i!} (t-x)^{i+j} + \sum_{j=0}^p \frac{(-1)^j}{j!} \varphi_j(t, x) (t-x)^{p+2}
\end{aligned}$$

bulunur ve burada

$$\Phi_p(t) = \sum_{j=0}^p \frac{(-1)^j}{j!} \varphi_j(t) \quad (3.40)$$

denirse

$$F_p(x, t) = \sum_{j=0}^p \frac{(-1)^j}{j!} \sum_{i=0}^{p+2-j} \frac{f^{(j+i)}(x)}{i!} (t-x)^{i+j} + \Phi_p(t) (t-x)^{p+2}$$

yazılabilir. Daha sonra, basit hesaplamalar ile

$$\begin{aligned}
F_p(x, t) &= \sum_{j=0}^p (-1)^j \sum_{i=0}^{p+2-j} \frac{f^{(j+i)}(x)}{i! j!} (t-x)^{i+j} + \Phi_p(t) (t-x)^{p+2} \\
F_p(x, t) &= \sum_{j=0}^p (-1)^j \sum_{i=0}^{p+2-j} \left(\frac{(i+j)!}{i! j!} \right) \frac{f^{(j+i)}(x)}{(i+j)!} (t-x)^{i+j} + \Phi_p(t) (t-x)^{p+2}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $s = j + i$ denir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
F_p(x, t) &= \sum_{j=0}^p (-1)^j \sum_{s=j}^{p+2} \binom{s}{j} \frac{f^{(s)}(x) (t-x)^s}{s!} + \Phi_p(t) (t-x)^{p+2} \\
&= \sum_{s=0}^{p+2} \frac{f^{(s)}(x) (t-x)^s}{s!} \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} (-1)^j + \Phi_p(t) (t-x)^{p+2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{s=0}^p \frac{f^{(s)}(x)(t-x)^s}{s!} \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} (-1)^j \\
&+ \frac{f^{(p+1)}(x)(t-x)^{p+1}}{(p+1)!} \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} (-1)^j \\
&+ \frac{f^{(p+2)}(x)(t-x)^{p+2}}{(p+2)!} \sum_{j=0}^p \binom{p+2}{j} (-1)^j + \Phi_p(t)(t-x)^{p+2}
\end{aligned} \tag{3.41}$$

olur. $m \in N_0$ için aşağıda verilenler kolaylıkla doğrulanabilir.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (-1)^j &= \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m \geq 1 \end{cases} \\
\sum_{j=0}^m \binom{m+1}{j} (-1)^j &= (-1)^m \\
\sum_{j=0}^m \binom{m+2}{j} (-1)^j &= (m+1)(-1)^m
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Gerçekten de

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (-1)^j &= \binom{m}{0} (-1)^0 + \binom{m}{1} (-1)^1 + \binom{m}{2} (-1)^2 + \dots + \binom{m}{m-1} (-1)^{(m-1)} + \binom{m}{m} (-1)^m \\
&= \frac{m!}{m!0!} (-1)^0 + \frac{m!}{(m-1)!1!} (-1)^1 + \frac{m!}{(m-2)!2!} (-1)^2 + \dots + \frac{m!}{1!(m-1)!} (-1)^{(m-1)} + \frac{m!}{0!m!} (-1)^m \\
&= 1 - m + \frac{m(m-1)}{2} + \dots + m(-1)^{(m-1)} + 1 \cdot (-1)^m
\end{aligned}$$

yazılabilir ve buradan da

$$\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (-1)^j = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m \geq 1 \end{cases} \tag{3.42}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^m \binom{m+1}{j} (-1)^j &= \binom{m+1}{0} (-1)^0 + \binom{m+1}{1} (-1)^1 + \dots + \binom{m+1}{m-1} (-1)^{m-1} + \binom{m+1}{m} (-1)^m \\
&= \frac{(m+1)!}{(m+1)!0!} (-1)^0 + \frac{(m+1)!}{m!1!} (-1)^1 + \dots + \frac{(m+1)!}{2!(m-1)!} (-1)^{m-1} + \frac{(m+1)!}{1!m!} (-1)^m \\
&= 1 - (m+1) + \frac{m(m+1)}{2} + \dots + \frac{m(m+1)}{2} (-1)^{m-1} + (m+1)(-1)^m
\end{aligned}$$

dir. Yani

$$\sum_{j=0}^m \binom{m+1}{j} (-1)^j = (-1)^m \quad (3.43)$$

yazılabilir ve

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^m \binom{m+2}{j} (-1)^j &= \binom{m+2}{0} (-1)^0 + \binom{m+2}{1} (-1)^1 + \dots + \binom{m+2}{m-1} (-1)^{m-1} + \binom{m+2}{m} (-1)^m \\
&= \frac{(m+2)!}{(m+2)!0!} (-1)^0 + \frac{(m+2)!}{(m+1)!1!} (-1)^1 + \dots + \frac{(m+2)!}{3!(m-1)!} (-1)^{m-1} + \frac{(m+2)!}{2!m!} (-1)^m \\
&= 1 - (m+2) + \dots + \frac{m(m+1)(m+2)}{6} (-1)^{m-1} + \frac{(m+1)(m+2)}{2} (-1)^m
\end{aligned}$$

dir. O halde

$$\sum_{j=0}^m \binom{m+2}{j} (-1)^j = (m+1)(-1)^m \quad (3.44)$$

olduğu açıktır. Bu tanımları ve (3.3) formülünü kullanarak, (3.41) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
F_p(x, t) &= f(x) + \sum_{s=1}^p \frac{f^{(s)}(x)(t-x)^s}{s!} \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} (-1)^j + \frac{f^{(p+1)}(x)(t-x)^{p+1}}{(p+1)!} \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} (-1)^j \\
&\quad + \frac{f^{(p+2)}(x)(t-x)^{p+2}}{(p+2)!} \sum_{j=0}^p \binom{p+2}{j} (-1)^j + \Phi_p(t)(t-x)^{p+2}
\end{aligned}$$

yazılabilir ve $\sum_{j=0}^s \binom{s}{j} (-1)^j (1)^{s-j} = (-1) + 1 = 0$ olduğu bilindiğinden ve (3.42), (3.43),

(3.44) eşitliklerinden

$$F_p(x, t) = f(x) + \frac{f^{(p+1)}(x)(t-x)^{p+1}(-1)^p}{(p+1)!} \\ + \frac{f^{(p+2)}(x)(t-x)^{p+2}(p+1)(-1)^p}{(p+2)!} + \Phi_p(t)(t-x)^{p+2}$$

elde edilir. Bu son eşitliğin her iki tarafına $G_{n,p}$ operatörü uygulanırsa $n \geq 2(p+2)$ için

$$G_{n,p}(F_p(x, t); x) = G_n(f(x); x) + G_n\left(\frac{f^{(p+1)}(x)(t-x)^{p+1}(-1)^p}{(p+1)!}; x\right) \\ + G_n\left(\frac{f^{(p+2)}(x)(t-x)^{p+2}(p+1)(-1)^p}{(p+2)!}; x\right) + G_n(\Phi_p(t)(t-x)^{p+2}; x)$$

yazılabilir. Buradan

$$G_{n,p}(f; x) = f(x) + \frac{(-1)^p f^{(p+1)}(x) G_n((t-x)^{p+1}; x)}{(p+1)!} \\ + \frac{(-1)^p (p+1) f^{(p+2)}(x) G_n((t-x)^{p+2}; x)}{(p+2)!} \\ + G_n(\Phi_p(t)(t-x)^{p+2}; x) \quad (3.45)$$

elde edilir. (3.40) formülü ve φ_j nin özellikleri ile $\lim_{t \rightarrow x} \Phi_p(t) = \Phi_p(x) = 0$ 'dır ve

Sonuç 1'den dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(\Phi_p^2(t); x) = \Phi_p^2(x) = 0 \quad (3.46)$$

olduğundan Hölder eşitsizliği ve daha sonra (3.46), (3.6) eşitliklerinin uygulanmasıyla

$$\begin{aligned}
G_n\left(\Phi_p(t)(t-x)^{p+2};x\right) &\leq \left(G_n\left(\Phi_p^2(t);x\right)\right)^{1/2} \left(G_n\left((t-x)^{2(p+2)};x\right)\right)^{1/2} \\
&\leq \left(G_n\left(\Phi_p^2(t);x\right)\right)^{1/2} \left(M_1(p+2)n^{-(p+2)}x^{2(p+2)}\right)^{1/2} \\
&\leq \left(G_n\left(\Phi_p^2(t);x\right)\right)^{1/2} \left(M_1(p+2)\right)^{1/2} n^{-(p+2)/2}x^{p+2}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} G_n\left(\Phi_p(t)(t-x)^{p+2};x\right) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(G_n\left(\Phi_p^2(t);x\right)\right)^{1/2} \left(M_1(p+2)\right)^{1/2} n^{-(p+2)/2}x^{p+2} \\
&\leq 0. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(M_1(p+2)\right)^{1/2} n^{-(p+2)/2}x^{p+2}
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n\left(\Phi_p(t)(t-x)^{p+2};x\right) = 0_x \left(n^{-(p+2)/2}\right) \quad (3.47)$$

elde edilir. Bu durumda (3.45) ve (3.47) eşitliğinden ispat tamamlanır.

5. TARTIşMA VE SONUÇ

Yaklaşımlar teorisinin temel amaçlarından tezin baş kısmında bahsedildi. Bu tezde uygulamalarda oldukça önemli bir fonksiyon olan Gamma fonksiyonu yardımıyla oluşturulan Gamma operatörünün değişik bir şeklinin yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Bu inceleme sırasında yaklaşımlar teorisinde kullanılan temel tanımlar ve teoremler kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar amaca uygun olarak bulunmuştur. İncelemeler yarı sonsuz aralıkta ağırlıklı uzaylarda yapılmıştır.

Sonuç itibariyle tez bir operatörün yaklaşım özellikleri ile ilgili olup, bu yaklaşım özellikleri elde edilirken yapılan işlemler diğer başka tip operatörlerin incelenmesinde de yol gösterici bir kaynak olacağını düşünmekteyiz.

Sonraki aşamalarda bu operatörü baz alarak farklı şekillerde tanımlanabilecek orijinal operatörler elde edilip, bu operatörlerin yaklaşım özelliklerini incelemek amaçlarımızdan birisi olacaktır.

KAYNAKLAR

- [1] Ditzian, Z. and Totik, V., Moduli of Smoothness (New York: Springer-Verlag), 1987.
- [2] Finta, Z., Direct local and global approximation theorems for some linear positive operators. Analysis in Theory and Applications, 20(4), 307-322, 2004.
- [3] Guo, S. and Qiulan, Qi, On pointwise estimate for gamma operators. Approximation Theory and its Applications, 18(3), 93-98, 2002.
- [4] Totik, V., The gamma operators in L_p spaces. Publicationes Mathematicae (Debrecen), 32, 43-55, 1985.
- [5] Becker, M., Global approximation theorems for Szasz-Mirakyan and Baskakov operators in polynomial weight spaces. Indiana University Mathematics Journal, 27(1), 127-142, 1978.
- [6] Kirov, G.H., A generalization of the Bernstein polynomials. Mathematica Balkanica, 6(2), 147-153, 1992.
- [7] Altın, A., Uygulamalı Matematik, Ankara, Gazi Kitabevi, 131-141, 2011.
- [8] Balcı, M., Matematik Analiz 1, Ankara, 165-168, 7. Basım, Balcı Yayınları, 2008.
- [9] Acar, T., Genelleştirilmiş Bernstein Operatörlerin Yaklaşım özellikleri, Kırıkkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 2015.

[10] Yılmaz, B., Hölder Uzayında Yakınsaklık Özellikleri, Kırıkkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 2006.

[11] Özhavzalı, M., Kantorovich Tipli Bazı Lineer Pozitif Operatörlerin Yaklaşım Özellikleri, Kırıkkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 2014.

[12] Rempulska L., Skorupka M., Integral Transforms and Special Functions, Vol. 18, No. 9, 653-662, September 2007.

