

T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

MODİFİYE SZÁSZ-MIRAKYAN OPERATÖRLERİNİN AĞIRLIKLİ
YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

NAZLİ ŞAYİR

OCAK 2020

Matematik Anabilim Dalı'nda Nazlı ŞAYİR tarafından hazırlanan MODİFİYE SZÁSZ-MİRAKYAN OPERATÖRLERİNİN AĞIRLIKLIL YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Ali OLGUN

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Dr. Öğr. Üyesi Başar YILMAZ

Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Ali ARAL

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Gümrah UYSAL

Üye (Danışman) : Dr. Öğr. Üyesi Başar YILMAZ

.../01/2020

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Recep ÇALIN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

MODİFİYE SZÁSZ-MIRAKYAN OPERATÖRLERİNİN AĞIRLIKLIL YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

ŞAYİR, Nazlı

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Başar YILMAZ

Ocak 2020, 44 sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmı için ayrılmıştır. İkinci bölümde tez çalışmasıyla ilgili temel bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde klasik Szász operatörlerinin tanımından ve özelliklerinden bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde ise modifiye edilmiş Szász-Mirakyan operatörlerinden bahsedilmiştir ve ağırlıklı uzaylarda yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Son bölüm tartışma ve sonuç kısmıdır.

Anahtar kelimeler: Modifiye Szász-Mirakyan operatörleri, Ağırlıklı uzaylar, Yaklaşım hızı

ABSTRACT

WEIGHTED APPROXIMATION PROPERTIES OF MODIFIED SZÁSZ-MIRAKYAN OPERATORS

ŞAYİR, Nazlı

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics M. Sc. Thesis

Advisor: Assist. Prof. Dr. Başar YILMAZ

January 2020, 44 pages

This thesis consists of five chapters. The first chapter is reserved for the introduction. In the second chapter, general information about the thesis is given. In the third chapter, the definition of well-known classical Szász operators is given and the properties of Szász operators are mentioned. In the fourth chapter, modified Szász-Mirakyan operators are introduced and some of their approximation properties are examined. The last chapter is devoted to results and discussion.

Keywords: Modified Szász-Mirakyan operators, Weighted spaces, Rate of approximation

TEŞEKKÜR

Tezimi hazırlamam konusunda her türlü yardımı yapan danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Başar YILMAZ'a, hocam Sayın Prof. Dr. Ali ARAL'a, bölümümün tüm öğretim üyelerine ve son olarak beni destekleriyle ayakta tutan aileme çok teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
1.1. Kaynak Özeti	2
1.2. Çalışmanın Amacı	2
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Lineer Pozitif Operatörler Dizisi	3
2.1.1. Lineer Pozitif Operatörlerin Özellikleri.....	4
2.2. Süreklilik Modülü	5
2.3. Bölünmüş Farklar.....	6
2.4. İleri Fark Operatörü	7
3. SZÁSZ OPERATÖRLERİ	9
4. ÜSTEL FONKSİYONLARI KORUYAN SZÁSZ MİRAKYAN OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ.....	14
4.1. Ağırlıklı Yaklaşım	25
4.2. Yakınsaklık Hızı	28
4.3. Voronovskaya Tipli Teorem.....	32
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	42
KAYNAKLAR	43

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	: Reel sayılar kümesi
$C[a, b]$	: $[a, b]$ aralığında tanımlı ve sürekli tüm reel fonksiyonların uzayı
$\rho(x)$	: $\rho(x) \geq 1$ olmak üzere $\mathbb{R}^n$ üzerinde sürekli fonksiyon
$\mathcal{R}_n(f; x)$	: Modifiye Szász-Mirakyan operatörleri
$\omega_f(\delta)$	: f fonksiyonu için süreklilik modülü
$\Delta_{\frac{1}{n}}^p\left(f; \frac{k}{n}\right)$	: f fonksiyonunun $\frac{1}{n}$ adımlı p -inci fark operatörü
$[x_0, x_1, \dots, x_n; f]$	: f fonksiyonunun n -inci bölünmüş farkı
$L(f; x)$	: Lineer pozitif operatör
$S_n(f; x)$	: Szász operatörleri

1. GİRİŞ

Yaklaşımlar teoresinde klasik Szász-Mirakyan operatörlerinin genelleştirilmesine yönelik birçok araştırma yapılmıştır. Bu araştırmaların en büyük amacı fonksiyonlara istenilen anlamda (normda, noktada, düzgün,...) yakınsayan ve kullanışlılığı daha iyi olan operatörler dizisi elde etmektir. Bu çalışmalar sonucu oluşturulan operatörlerden biri de Acar vd. (2017) tarafından yapılan çalışmada, yazarların oluşturduğu $e_0, e^{2ax} (a > 0)$ fonksiyonlarını koruyan yeni bir modifiye Szász-Mirakyan operatörleridir. Bu operatörler Szász (1950) ve Mirakyan (1941) tarafından tanımlanmıştır (Altomare ve Campiti, 1994). Literatürdeki bazı çalışmalar Becker vd. (1978), Gupta vd. (2006) ve Aral (2014) tarafından sunulmuştur. Bizim bu tezde inceleyeceğimiz modifiye Szász-Mirakyan operatörleri Acar vd. (2017) tarafından tanımlanmış ve devamı olarak farklı özellikleri Aral vd. (2019) tarafından incelenmiştir. Bu operatörler klasik Szász-Mirakyan operatörlerine kıyasla daha iyi sonuç vermektedir (Acar vd. 2017; Aral vd. 2019).

Szász operatörleri, f fonksiyonunun $[0, \infty)$ aralığında sınırlı ve sürekli olması halinde

$$S_n(f; x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!}$$

şeklinde tanımlanır (Szász, 1950; Altomare ve Campiti, 1994). Bu Szász operatörlerinden yararlanılarak tanımlanmış olan modifiye Szász-Mirakyan operatörleri

$$\mathcal{R}_n(f; x) = e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \geq 0, \quad (1.1)$$

şeklinde dir. Burada, $\alpha_n(x) = \frac{2ax}{n(e^{2a/n}-1)}$ ve $f \in C[0, \infty)$ şeklinde tanımlanmıştır (Acar vd., 2017).

Acar vd. (2017) tarafından bu operatörlerin üstel fonksiyonları koruma ve şekil koruma gibi özellikleri incelenmiş olup yaklaşım hızı teoremleri ve Voronovskaya tipinde teoremler verilmiştir. Ayrıca, Aral vd. (2019) tarafından ise ağırlıklı uzaylarda yaklaşım araştırmaları yapılmıştır.

1.1. Kaynak Özeti

Tezde kullanılan temel kavramlar için Hacısalihoğlu ve Gadjiev (1995)'in “Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı” isimli kitabından yararlanılmıştır. Tezin dördüncü bölümünde Aral vd. (2019)'nin “Approximation Properties of Szász-Mirakjan Operators Preserving Exponential Functions” isimli makalesi esas alınmıştır.

1.2. Çalışmanın Amacı

Bu tez çalışmasında ağırlıklı Korovkin teoremini kullanarak modifiye Szász-Mirakyan operatörlerinin ağırlıklı yaklaşım özellikleri incelenip, sonrasında Korovkin teoremi kullanılmadan benzer sonuçlar gösterilecektir. Ayrıca uygun süreklilik modülü kullanılarak üstel ağırlıklı uzaylarda kantitatif sonuçlar ve yaklaşım hızları elde edilecektir. En sonunda Voronoskaya tipli teorem verilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde diğer bölümlerde ihtiyaç duyacağımız tanım ,teorem ve ispatlara yer verilecektir. Ayrıca lineer pozitif operatörlere dair özelliklerden bahsedilerek bazı temel tanım ve teoremlere de yer verilecektir.

2.1. Lineer Pozitif Operatörler Dizisi

Tanım 2.1.1. X ve Y iki fonksiyon uzayı olmak üzere

$$L: X \rightarrow Y$$

$$f \rightarrow L(f) = g$$

X 'den alınan bir f fonksiyonunu Y 'de bir g fonksiyonuna karşılık getiren bir L dönüşümü varsa bu L dönüşümüne operatör denir.

X uzayındaki her f fonksiyonunun operatör altındaki görüntüsü Y uzayında $L(f) = g$ yerine $L(f(t); x) = g(x)$ veya $L(f; x) = g(x)$ ile gösterilir (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım 2.1.2. X lineer bir uzay olsun. X uzayında f_1 ve f_2 iki fonksiyon olmak üzere α ve β keyfi iki reel sayı olsun. Eğer her α ve β için

$$L(\alpha f_1 + \beta f_2; x) = \alpha L(f_1; x) + \beta L(f_2; x)$$

koşulu sağlanıyorsa L operatörüne lineer operatör denir (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım 2.1.3. X bir lineer uzay olsun. L bir lineer operatör olmak üzere eğer $\forall f(x) \geq 0$ için $L(f; x) \geq 0$ ise bu operatöre lineer pozitif operatör denir (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım 2.1.4. Eğer L lineer ve pozitif bir operatör dizisi ise

$$\forall t \text{ için } f(t) \leq g(t) \text{ ise}$$

$$L(f(t); x) \leq L(g(t); x) \text{ olur.}$$

Bu özelliğe monotonluk özelliği denir (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev, 1995).

2.1.1. Lineer Pozitif Operatör ve Özellikleri

Lemma 2.1.1.1. L lineer pozitif operatör bir operatör olmak üzere L monoton artandır (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev, 1995).

İspat. Monotonluk tanımı gereğince

$$f(t) \leq g(t) \Rightarrow L(f(t); x) \leq L(g(t); x)$$

$$f(t) \leq g(t) \Rightarrow g(t) - f(t) \geq 0$$

$$\Rightarrow L(g(t) - f(t); x) \geq 0$$

$$\Rightarrow L(g(t); x) - L(f(t); x) \geq 0 \text{ (lineerlik özelliği)}$$

$$\Rightarrow L(f(t); x) \leq L(g(t); x)$$

$$L(f; x) \leq L(g; x)$$

olur.

Lemma 2.1.1.2. L lineer pozitif operatör olmak üzere L 'nin monoton olmasından dolayı

$$|L(f; x)| \leq L(|f|; x)$$

olur (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev, 1995).

İspat. $\forall f$ fonksiyonu için L lineer pozitif operatör dizisi monoton artandır. Dolayısıyla

$$-|f| \leq f \leq |f| \Rightarrow L(-|f|; x) \leq L(f; x) \leq L(|f|; x) \text{ (monotonluk)}$$

$$\Rightarrow -L(|f|; x) \leq L(f; x) \leq L(|f|; x) \text{ (lineerlik)}$$

$$\Rightarrow |L(f; x)| \leq L(|f|; x)$$

olur.

Tanım 2.1.1.1. X ve Y lineer fonksiyon uzayları olmak üzere $L: X \rightarrow Y$ tanımlı lineer operatör dizisi olsun. X üzerindeki norm $\|\cdot\|_X$, Y üzerindeki norm $\|\cdot\|_Y$ $D(L)$ operatörün tanım kümesi olmak üzere

$$\forall x \in D(L) = X \text{ için}$$

$\|L(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$ şeklinde $M > 0$ sayısı varsa L 'ye sınırlı operatör denir (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım 2.1.1.2. $X_i = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $Y_i = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ sonlu (veya sonsuz) elemanlı diziler olmak üzere $p, q \in \mathbb{R}$ ve $p, q > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ koşulu sağlansın. Bu durumda

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine Hölder eşitsizliği denir (Shalit, 2017).

Belirtelim ki $n = 2$ için bu eşitsizlik Cauchy-Schwartz eşitsizliği olarak bilinir.

Teorem 2.1.1.1. (Weierstrass Teoremi)

$f(x) \in C[a, b]$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için $a \leq x \leq b$ kapalı aralığındaki tüm x 'ler için $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde $p(x)$ polinomu vardır (Weierstrass, 1885).

Yani, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ keyfi kapalı aralığında sürekli olan her f fonksiyonuna düzgün yakınsayan bir polinom dizisi bulunabilir.

1952 yılında ise Bohman, toplam şeklinde olan lineer pozitif operatörler dizisinin $[0, 1]$ kapalı aralığında f fonksiyonuna yaklaşım problemini göz önüne almıştır.

2.2. Süreklilik Modülü

Tanım 2.2.1. Kabul edelim ki $f, [a, b]$ aralığında tanımlı sınırlı bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonunun süreklilik modülü $\omega(f, \delta)$ şeklinde gösterilmek üzere

Keyfi $\delta > 0$ için

$$\omega(f, \delta) = \sup_{\substack{t, x \in [a, b] \\ |t - x| \leq \delta}} |f(t) - f(x)|$$

şeklinde tanımlanan $\omega(f, \delta)$ fonksiyonuna f 'nin $[a, b]$ aralığındaki süreklilik modülü denir (Altomare ve Campiti, 1994; Butzer ve Nessel, 1971).

Teorem 2.2.1. Süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri sağlar (Altomare ve Campiti, 1994; Butzer ve Nessel, 1971):

i) $\omega(f, \delta) \geq 0$.

$$ii) \omega(f, m\delta) \leq m \omega(f, \delta), \quad m \in \mathbb{N}.$$

$$iii) \omega(f, \lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(f, \delta), \quad \lambda \in \mathbb{R}^+.$$

$$iv) \delta_1 \leq \delta_2 \Rightarrow \omega(f, \delta_1) \leq \omega(f, \delta_2).$$

$$v) \omega(f, |t - x|) \geq |f(t) - f(x)|.$$

$$vi) \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f; \delta) = 0.$$

2.3. Bölünmüş Farklar

Tanım 2.3.1. f fonksiyonunun tanım kümesi olan (a, b) aralığı için $x_0, x_1, \dots, x_n$ olacak şekilde $n+1$ tane nokta seçilsin. Bu takdirde

$$f(x_k) = [x_k] \quad k = 0, 1, \dots, n$$

olmak üzere

$$f([x_0, x_1, \dots, x_n]) = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

ifadesine f 'nin n -inci bölünmüş farkı denir (Hacısalihoglu ve Hacıyev, 1995).

$n = 1$ için bölünmüş fark

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

ile ve $n = 2$ için bölünmüş fark

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

ile ifade edilir.

$$x_0 = \frac{k+1}{n} \quad \text{ve} \quad x_1 = \frac{k+2}{n} \quad \text{seçilirse}$$

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1] &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{f\left(\frac{k+2}{n}\right) - f\left(\frac{k+1}{n}\right)}{\frac{k+2}{n} - \frac{k+1}{n}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{f\left(\frac{k+2}{n}\right) - f\left(\frac{k+1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \\
&= n \left(f\left(\frac{k+2}{n}\right) - f\left(\frac{k+1}{n}\right) \right)
\end{aligned}$$

dir.

2.4. İleri Fark Operatörü

$j = 0, 1, \dots, n$ ve $x_j \in (a, b)$ olmak üzere $f(x)$ fonksiyonu (a, b) üzerinde tanımlı olsun.

$$\Delta f(x_j) = f(x_{j+1}) - f(x_j)$$

$k \geq 1$ doğal sayısı için

$$\Delta^k f(x_j) = \Delta^{k-1} f(x_{j+1}) - \Delta^{k-1} f(x_j)$$

ifadesi ileri fark operatörü olarak bilinir.

$k = 2$ için ileri fark operatörü aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$\begin{aligned}
\Delta^2 f(x_j) &= \Delta f(x_{j+1}) - \Delta f(x_j) \\
&= f(x_{j+2}) - f(x_{j+1}) - (f(x_{j+1}) - f(x_j)) \\
&= f(x_{j+2}) - 2f(x_{j+1}) + f(x_j).
\end{aligned}$$

Bu bilgiler yardımıyla aşağıdaki ifade kolaylıkla elde edilebilir.

Teorem 2.4.1. $j, k = 0, 1, \dots, n$ ve $x_j \in (a, b)$ olmak üzere $f(x)$ fonksiyonu (a, b) üzerinde tanımlı olsun. Bu takdirde

$$f[x_j, \dots, x_{j+k}] = \frac{1}{k!} \Delta^k f(x_j)$$

olur.

İspat.

$$f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k+1}] = \frac{f[x_{j+1}, \dots, x_{j+k+1}] - f[x_j, \dots, x_{j+k}]}{x_{j+k+1} - x_j}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{1}{k!} \Delta^k f(x_{j+1}) - \frac{1}{k!} \Delta^k f(x_j)}{k+1} \\
&= \frac{1}{(k+1)!} \Delta^{k+1} f(x_j)
\end{aligned}$$

Tanım 2.4.1. $L: X \rightarrow Y$ bir operatör ve X ve Y birer fonksiyon uzayı olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$L((t-x)^k; x), \quad k \in \mathbb{N}$$

ise L_n 'ye k -inci merkezi moment denir (Lorentz, 1953).

Tanım 2.4.2. (f_n) fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna $C[a, b]$ 'de düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in [a, b]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Bu düzgün yakınsama $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ şeklinde gösterilir (Musayev vd., 2003).

Bohman (1952) toplam şeklindeki lineer pozitif operatörler dizisinin $[0,1]$ kapalı aralığında sürekli olan bir f fonksiyonuna yaklaşımını araştırmıştır. Sonrasında Korovkin (1953) ise Bohman'ın elde ettiği koşulları daha genel hallerde geçerli olduğu sonucuna ulaşmıştır. Şimdi, yaklaşımlar teorisi içerisinde önemli bir yeri olan Korovkin teoremini ifade edelim.

Teorem 2.4.2. (Korovkin Teoremi)

$f \in C[a, b]$ ve f tüm reel ekseninde sınırlı olsun. Eğer $L_n(f; x)$ lineer pozitif operatör dizisi $n \rightarrow \infty$ iken $\forall x \in [a, b]$ için

$$L_n(1; x) \Rightarrow 1 \tag{2.1}$$

$$L_n(t; x) \Rightarrow x \tag{2.2}$$

$$L_n(t^2; x) \Rightarrow x^2 \tag{2.3}$$

koşullarını sağlıyorsa $[a, b]$ kompakt aralığı üzerinde $L_n(f; x) \Rightarrow f(x)$ olur (Korovkin, 1953 ve 1960).

3. SZÁSZ OPERATÖRLERİ

Szász-Mirakyan operatörlerinin geliştirilme ya da bir diğer deyişle modifiye edilme amacı önceki versiyonlarına kıyasla fonksiyonlara daha az hatayla yakınsayan operatörler dizisi elde etmektir. Szász-Mirakyan operatörlerinin diğer bir önemli özelliği ise klasik Szász operatörlerine kıyasla üstüne koyulacak fazladan özelliğe gereksinim bulunmamasıdır (Aral vd., 2019; Becker vd., 1978). Bu bölümde ilk olarak Szász operatörlerinin tanım ve özelliklerinden bahsedilerek Korovkin teoremi yardımıyla yaklaşım ile ilgili özellikler verilecektir.

Tanım 3.1. $f \in C(0, \infty)$ olmak üzere sınırlı ve sürekli olsun. Bu takdirde

$$S_n(f; x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!}, \quad x \in [0, \infty) \quad (3.1)$$

biçimindeki Szász (1950) tarafından Bernstein polinomlarını sınırsız aralığa genelleştirmek için tanımlanan lineer pozitif operatörlere Szász operatörleri denir.

Şimdi, Szász operatörleri ile ilgili olarak bilinen iki teoremi ifade ve ispat edelim.

Teorem 3.1. (3.1) eşitliği ile verilmiş olan Szász operatörleri $B \in (0, \infty)$ olmak üzere $[0, B]$ kapalı aralığında

- i) $S_n(1; x) \Rightarrow 1$
- ii) $S_n(t; x) \Rightarrow x$
- iii) $S_n(t^2; x) \Rightarrow x^2$

şartlarını sağlıyorsa $f \in C[0, B]$ fonksiyonu için $n \rightarrow \infty$ iken

$$S_n(f; x) \Rightarrow f(x), \quad x \in [0, B]$$

olur.

İspat. Szász operatörleri için lineerlik ve pozitiflik koşulunu kullanarak, Korovkin teoremi yardımıyla fonksiyona düzgün yakınsadığını gösterelim.

İlk olarak operatörlerin lineerliğini gösterelim.

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C[0, B]$ için

$$\begin{aligned}
S_n\left((\alpha f(t) + \beta g(t)); x\right) &= e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\alpha f\left(\frac{k}{n}\right) + \beta g\left(\frac{k}{n}\right) \right] \frac{(nx)^k}{k!} \\
&= \alpha e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} + \beta e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} g\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} \\
&= \alpha S_n(f(t); x) + \beta S_n(g(t); x)
\end{aligned}$$

olduğundan (S_n) lineer operatördür.

(S_n) 'nin pozitif operatör olduğunu gösterelim.

$k \in \mathbb{N}$ ve $x \in C[0, B]$ için

$$e^{-nx} \frac{(nx)^k}{k!} \geq 0$$

olduğundan

$f \geq 0$ için $S_n(f(t); x) \geq 0$ elde edilir.

i) $(n \rightarrow \infty)$ iken $S_n(1; x) \Rightarrow 1$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
S_n(1; x) &= e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} \\
&= e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} \\
&\left(e^{nx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} \right) \\
&= e^{-nx} e^{nx} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

ii) $(n \rightarrow \infty)$ iken $S_n(t; x) \Rightarrow x$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
S_n(f; x) &= e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} \\
&= e^{-nx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{n} \frac{(nx)^k}{k!} \\
&\quad (k \rightarrow k+1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{n} \frac{(nx)^{k+1}}{(k+1)!} \\
&= e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{n} \frac{(nx)^k \cdot (nx)}{(k+1)k!} \\
&= xe^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} \\
(e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} &= S_n(1; x) = e^{-nx} e^{nx} = 1) \\
&= xe^{-nx} e^{nx} \\
&= x.
\end{aligned}$$

iii) $(n \rightarrow \infty)$ iken $S_n(t^2; x) \Rightarrow x^2$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
S_n(t^2; x) &= e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} \\
&= e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{n^2} \frac{(nx)^k}{k!}
\end{aligned}$$

$$(k^2 = k(k-1) + k)$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-nx} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)}{n^2} \frac{(nx)^k}{k!} + e^{-nx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{n^2} \frac{(nx)^k}{k!} \\
&= e^{-nx} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)}{n^2} \frac{(nx)^k}{k!} + e^{-nx} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{n} \frac{(nx)^k}{k!} \\
&= e^{-nx} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{(nx)^k}{(k-2)!} + e^{-nx} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{n} \frac{(nx)^k}{k!} \\
&= e^{-nx} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(nx)^2}{n^2} \frac{(nx)^{k-2}}{(k-2)!} + e^{-nx} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{n} \frac{(nx)^k}{k!}
\end{aligned}$$

$$(k \rightarrow k+2)$$

$$= x^2 e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} + \frac{1}{n} S_n(t; x)$$

$$= x^2 S_n(1; x) + \frac{1}{n} S_n(t; x)$$

$$= x^2 + \frac{1}{n} x$$

$(n \rightarrow \infty)$ için

$$= x^2$$

olarak elde edilir ve (i), (ii), (iii) koşulları sağlandığından Korovkin teoremi gereğince her $f \in C[0, B]$ için

$$n \rightarrow \infty \quad \text{iken} \quad S_n(f; x) \Rightarrow f(x) \quad \text{olur.}$$

Teorem 3.2. $f \in C[0, \infty]$

$$S_n^{(r)}(f; x) = n^r e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_{\frac{1}{n}}^r f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!}$$

sağlanır.

İspat. $S_n(f; x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!}$ olmak üzere eşitliğin her iki tarafının türevini alalım.

$$\begin{aligned} S_n'(f; x) &= -ne^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} + ne^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{k(nx)^{k-1}}{k!} \\ &= -ne^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} + ne^{-nx} \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{k(nx)^{k-1}}{k \cdot (k-1)!} \end{aligned}$$

$$(k \rightarrow k+1)$$

$$\begin{aligned} &= -ne^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} + ne^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \frac{(nx)^k}{(k)!} \\ &= ne^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \frac{(nx)^k}{(k)!} \\ &= ne^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_{\frac{1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{(k)!}. \end{aligned}$$

Benzer şekilde ikinci türev için

$$\begin{aligned}
S_n''(f; x) &= -n^2 e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_{\frac{1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{(k)!} + n^2 e^{-nx} \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_{\frac{1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{k(nx)^{k-1}}{k \cdot (k-1)!} \\
&\quad (k \rightarrow k+1) \\
&= -n^2 e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_{\frac{1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{(k)!} + n^2 e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_{\frac{1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \frac{(nx)^k}{(k)!} \\
&= n^2 e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\Delta_{\frac{1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right) - \Delta_{\frac{1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \frac{(nx)^k}{k!} \\
&= n^2 e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_{\frac{1}{n}}^2 f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{(k)!}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade r -inci türev için genellenirse

$$S_n^{(r)}(f; x) = n^r e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_{\frac{1}{n}}^r f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!}$$

şeklindeki istenen sonuç elde edilir.

4. ÜSTEL FONKSİYONLARI KORUYAN SZÁSZ-MİRAKYAN OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde amacımız, (1.1)'deki operatörlerin bazı ağırlıklı yaklaşım özelliklerini incelemektir. Öncelikle ağırlıklı Korovkin tipli teoremi kullanarak, operatörlerin ağırlıklı düzgün yaklaşımını inceleyeceğiz. Sonra benzer sonuçları Korovkin teoremini kullanmadan elde edeceğiz. Ayrıca üstel ağırlıklı uzaylarda, uygun tanımlanmış süreklilik modülü yardımıyla bu operatörlerin kantitatif sonuçları ile ilgileneceğiz. Operatörlerin türevlerini tanımlayıp düzgün yakınsaklık hızlarını ele alacağız. En sonunda operatörlerin birinci türevleri için Voronovskaya tipli teoremini ispatlayacağız.

Acar vd. (2017) modifiye Szász-Mirakyan operatörlerini tüm $x > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\mathcal{R}_n(1; x) = 1 \text{ ve } \mathcal{R}_n(e^{2at}; x) = e^{2ax}$$

olacak şekilde aşağıdaki şekilde tanımlamıştır:

Tanım 4.1. $f \in C[0, \infty)$ ve aşağıdaki ifadenin sağ tarafının mutlak yakınsak olması halinde

$$\mathcal{R}_n(f; x) = e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad n \in \mathbb{N}, x \geq 0 \quad (4.1)$$

ifadesine Modifiye Szász-Mirakyan operatörleri denir. Burada, $\alpha_n(x) = \frac{2ax}{n(e^{2a/n}-1)}$ şeklinde tanımlanmıştır.

Aşağıdaki bilgiler ile ilgili kaynaklar (Aral vd., 2019; Gadjiev, 1974; Hacısalıhoğlu ve Hacıyev, 1995; Coşkun, 2003) olarak verilebilir.

$\rho_k(x)$ fonksiyonları $k = 1, 2$ için $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı, sınırsız, sürekli ve $\rho_k(x) \geq 1$ şartını sağlayan fonksiyonlar olsun. Ayrıca, I sınırsız keyfi bir aralık olsun. Bu takdirde

$$B_{\rho_k} := \{f: |f(x)| \leq M_{f\rho_k}(x), x \in I\}, C_{\rho_k} = \{f: f \in B_{\rho_k}, f \text{ sürekli}\}$$

I aralıklarında tanımlanan fonksiyon uzaylarıdır. B_{ρ_k} ağırlıklı bir uzay olarak olarak adlandırılmak üzere ve $\|f\|_{\rho_k} = \sup_{x \in I} \frac{|f(x)|}{\rho_k(x)}$ şeklinde verilen ρ_k normuna sahip bir Banach uzayıdır.

Aşağıdaki önermeler ve teorem (Aral vd., 2019) kaynağında ispatsız olarak bulunabilir.

Önerme 4.1. C_{ρ_1} üzerinde tanımlanan bir L lineer pozitif operatörünün C_{ρ_1} ’den B_{ρ_2} ’ye dönüşüm yapması için gerek ve yeter şart $L(\rho_1) \in B_{\rho_2}$ olmasıdır.

Önerme 4.2. $L: C_{\rho_1}(R) \rightarrow B_{\rho_2}(R)$ lineer pozitif operatör olsun. Bu takdirde

$$\|L\|_{C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_2}} = \|L(\rho_1)\|_{\rho_2} \text{ eşitliği sağlanır.}$$

Önerme 4.3. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n: C_{\rho_1}(R) \rightarrow B_{\rho_2}(R)$ lineer pozitif operatör olsun. Kabul edelim ki $\forall x \in R$ için $\rho_1 \leq M\rho_2$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı mevcut olsun. Bu takdirde $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(\rho_1) - \rho_1\|_{\rho_2} = 0$ ise $\|A_n\|_{C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_2}}$ normu düzgün sınırlıdır.

İspat. $\|A_n(\rho_1) - \rho_1\|_{\rho_2} = 0$ ise $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N = N(\varepsilon)$ vardır. Bu takdirde $\forall n \geq N$ için $\|A_n(\rho_1) - \rho_1\|_{\rho_2} < \varepsilon$ olur. Aynı zamanda $\rho_1(x) \leq M\rho_2(x)$ olmasından dolayı $\|\rho_1\|_{\rho_2} \leq M$ olur. $\forall n \in \mathbb{N}$ için Önerme 4.2 kullanılarak

$$\begin{aligned} \|A_n\|_{C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_2}} &= \|A_n(\rho_1)\|_{\rho_2} = \|A_n(\rho_1) - \rho_1 + \rho_1\|_{\rho_2} \\ &\leq \|A_n(\rho_1) - \rho_1\|_{\rho_2} + \|\rho_1\|_{\rho_2} < \varepsilon + M \text{ yazılır.} \end{aligned}$$

$$K = \max \left\{ \|A_1\|_{C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_2}}, \|A_2\|_{C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_2}}, \dots, \varepsilon + M \right\} \text{ seçilirse } \|A_n\|_{C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_2}} \leq M$$

olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.1. Kabul edelim ki $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)} = 0$ olsun. $A_n: C_{\rho_1}(R) \rightarrow B_{\rho_2}(R)$ yani $A_n, C_{\rho_1}(R)$ ’den $B_{\rho_2}(R)$ ’ye dönüşüm yapan lineer operatör dizisi olsun. Bu operatör aşağıdaki üç şartı yerine getirirse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(\rho_1^v) - \rho_1^v\|_{\rho_2} = 0, \quad v = 0, 1, 2,$$

$n \rightarrow \infty$ iken keyfi $f \in C_{\rho_1}(R)$ fonksiyonu için ρ_2 normunda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(f) - f\|_{\rho_2} = 0 \text{ olur.}$$

İspat.

$$\rho_1(x) = \frac{f(x)}{1+x^2} \text{ alalım.}$$

$v = 0$ için

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(\rho_1^0) - \rho_1^0\|_{\rho_2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(1) - 1\|_{\rho_2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır.

$v = 1$ için

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(\rho_1^1) - \rho_1^1\|_{\rho_2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n(x) - a_n(x)| \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır.

$v = 2$ için

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(\rho_1^2) - \rho_1^2\|_{\rho_2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{A_n(\rho_1^2) - \rho_1^2}{\rho_2(x)} \right| \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|A_n(\rho_1^2) - \rho_1^2|}{1 + \rho_1^2(x)} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\left| \rho_1^2(x) + \frac{\rho_1^2(x)}{n} - \rho_1^2(x) \right|}{1 + \rho_1^2(x)} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\frac{|\rho_1(x)|}{n}}{1 + \rho_1^2(x)} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\rho_1(x)}{n(1 + \rho_1^2(x))} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır.

Lemma 4.1. Modifiye Szász-Mirakyan operatörü $(\mathcal{R}_n)_{n \geq 1}$ olmak üzere

$$i) \mathcal{R}_n(1; x) = 1$$

$$ii) \mathcal{R}_n(e^{at}; x) = e^{\frac{2ax}{(e^{a/n}+1)}}$$

$$iii) \mathcal{R}_n(e^{2at}; x) = e^{2ax}$$

$$iv) \mathcal{R}_n(e^{3at}; x) = e^{\frac{2at}{(e^{a/n}+1)}(e^{2a/n}+e^{a/n}+1)}$$

$$v) \mathcal{R}_n(e^{4at}; x) = e^{2ax(e^{2a/n}+1)}$$

dir. Burada

$$\alpha_n(x) = \frac{2ax}{n(e^{2a/n}-1)} := x\beta_n \text{ şeklindedir (Aral vd., 2019).}$$

İspat. i) $\mathcal{R}_n(1; x) = 1$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_n(1; x) &= e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} \\ &= e^{-n\alpha_n(x)} e^{n\alpha_n(x)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

$$ii) \mathcal{R}_n(e^{at}; x) = e^{\frac{2ax}{(e^{a/n}+1)}} \text{ olduğunu gösterelim.}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_n(e^{at}; x) &= e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} e^{a \cdot \frac{k}{n}} \\ &= e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x)e^{\frac{a}{n}})^k}{k!} \\ &= e^{-n\alpha_n(x)} e^{n\alpha_n(x)e^{\frac{a}{n}}} \\ &= e^{n\alpha_n(x)\left(e^{\frac{a}{n}}-1\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\frac{2ax}{n(e^{2a/n}-1)}} n \left(e^{\frac{a}{n}-1} \right) \\
&= e^{\frac{2ax}{n(e^{a/n}-1)(e^{a/n}+1)}} n \left(e^{\frac{a}{n}-1} \right) \\
&= e^{\frac{2ax}{(e^{a/n}+1)}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

iii) $\mathcal{R}_n(e^{2at}; x) = e^{2at}$ olduğunu gösterelim

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_n(e^{2at}; x) &= e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} e^{2\frac{k}{n}a} \\
&= e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(n\alpha_n(x) e^{\frac{2}{n}a} \right)^k}{k!} \\
&= e^{-n\alpha_n(x)} e^{n\alpha_n(x) e^{\frac{2}{n}a}} \\
&= e^{n\alpha_n(x) \left(e^{\frac{2a}{n}} - 1 \right)} \\
&= e^{\frac{n(e^{a/n}-1)(e^{a/n}+1)}{(e^{a/n}-1)(e^{a/n}+1)}} (e^{a/n}-1) \\
&= e^{2ax}
\end{aligned}$$

olur.

iv) $\mathcal{R}_n(e^{3at}; x) = e^{\frac{2ax}{(e^{a/n}+1)} \left(e^{\frac{2a}{n} + \frac{a}{n} + 1} \right)}$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_n(e^{3at}; x) &= e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} e^{\frac{3ak}{n}} \\
&= e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(n\alpha_n(x) e^{\frac{3a}{n}} \right)^k}{k!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-n\alpha_n(x)} e^{n\alpha_n(x) e^{\frac{3a}{n}}} \\
&= e^{n\alpha_n(x) \left(e^{\frac{3a}{n}} - 1 \right)} \\
&= e^{n \frac{2ax}{n \left(e^{\frac{2a}{n}} - 1 \right)} \left(e^{\frac{3a}{n}} - 1 \right)} \\
&= e^{\frac{2ax}{\left(e^{\frac{a}{n}} - 1 \right) \left(e^{\frac{a}{n}} + 1 \right)} \left(e^{\frac{a}{n}} - 1 \right) \left(e^{\frac{2a}{n}} + e^{\frac{a}{n}} + 1 \right)} \\
&= e^{\frac{2ax}{\left(e^{\frac{a}{n}} + 1 \right)} \left(e^{\frac{2a}{n}} + e^{\frac{a}{n}} + 1 \right)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

v) $\mathcal{R}_n(e^{4at}; x) = e^{2ax \left(e^{\frac{2a}{n}} + 1 \right)}$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_n(e^{4at}; x) &= e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} e^{\frac{4ak}{n}} \\
&= e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(n\alpha_n(x) e^{\frac{4a}{n}} \right)^k}{k!} \\
&= e^{-n\alpha_n(x)} e^{n\alpha_n(x) e^{\frac{4a}{n}}} \\
&= e^{n\alpha_n(x) \left(e^{\frac{4a}{n}} - 1 \right)} \\
&= e^{\frac{2ax}{n \left(e^{\frac{2a}{n}} - 1 \right)} n \left(e^{\frac{4a}{n}} - 1 \right)} \\
&= e^{\frac{2ax}{n \left(e^{\frac{2a}{n}} - 1 \right)} n \left(e^{\frac{2a}{n}} - 1 \right) \left(e^{\frac{2a}{n}} + 1 \right)} \\
&= e^{2ax \left(e^{\frac{2a}{n}} + 1 \right)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 4.2. $(\mathcal{R}_n)_{n \geq 1}$ operatörleri için

$$i) \mathcal{R}_n(1; x) = 1$$

$$ii) \mathcal{R}_n(\alpha_n; x) = \alpha_n(x)$$

$$iii) \mathcal{R}_n(\alpha_n^2; x) = \alpha_n^2(x) + \frac{\alpha_n(x)}{n}$$

olur (Aral vd., 2019).

İspat.

i) $\mathcal{R}_n(1; x) = 1$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_n(1; x) &= e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} \\ &= e^{-n\alpha_n(x)} e^{n\alpha_n(x)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

ii) $\mathcal{R}_n(\alpha_n; x) = \alpha_n(x)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_n(\alpha_n; x) &= e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} \\ &= e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{n} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} \\ &= e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{n} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k(k-1)!} \\ &= e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n\alpha_n(x)}{n} \frac{(n\alpha_n(x))^{k-1}}{(k-1)!} \\ &\quad (k \rightarrow k+1) \text{ yazılırsa} \\ &= \alpha_n(x) e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x))^k \alpha_n(x)}{k!} \\
&= \mathcal{R}_n(1; x) \alpha_n(x) \\
&= \alpha_n(x).
\end{aligned}$$

iii) $\mathcal{R}_n(\alpha_n^2; x) = \alpha_n^2(x) + \frac{\alpha_n(x)}{2}$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_n(\alpha_n^2; x) &= e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} \\
&= e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{n^2} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} \\
&= e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{n^2} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!}
\end{aligned}$$

$(k^2 = k(k-1) + k)$ olarak alınırsa.

$$\begin{aligned}
&= e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k(k-1) + k)(n\alpha_n(x))^k}{k!} \\
&= e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)}{n^2} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} + \\
&\quad + \frac{e^{-n\alpha_n(x)}}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{n} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} \\
&= e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)}{n^2} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k(k-1)(k-2)!} + \\
&\quad + \frac{e^{-n\alpha_n(x)}}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{n} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x))^2}{n^2} \frac{(n\alpha_n(x))^{k-2}}{(k-2)!} \\
&+ \frac{1}{n} \mathcal{R}_n(\alpha_n; x) \\
&\quad (k \rightarrow k+2) \text{ yazılırsa} \\
&= e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_n^2(x) \frac{(n\alpha_n(x))^k}{(k)!} + \frac{1}{n} \mathcal{R}_n(\alpha_n; x) \\
&= \alpha_n^2(x) e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} + \frac{\alpha_n(x)}{n} \\
&= \alpha_n^2(x) \mathcal{R}_n(1; x) + \frac{\alpha_n(x)}{n} \\
&= \alpha_n^2(x) + \frac{\alpha_n(x)}{n}.
\end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 4.3. Her $r \in \mathbb{N}$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$i) \mathcal{R}_n^{(r)}(f; x) = n^r \beta_n^r \mathcal{R}_n\left(\Delta_{\frac{1}{n}}^r f; x\right)$$

$$ii) \Delta_n^r f(x) = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^{r-k} f(x + kh)$$

gerçeklenir (Aral vd., 2019).

İspat. i)

$$\mathcal{R}_n(f; x) = \beta_n e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

olmak üzere her tarafın türevini aldığımızda

$$\mathcal{R}_n'(f; x) = -n\beta_n e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\begin{aligned}
& + \beta_n e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(n\alpha_n(x))^{k-1}}{k!} n f\left(\frac{k}{n}\right) \\
& (k \rightarrow k+1) \\
& = n\beta_n e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} \\
& = n\beta_n \mathcal{R}_n \left(\Delta_{\frac{1}{n}} f : x \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. İkinci türevini alırsak

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_n''(f : x) &= -n^2 \beta_n e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_{\frac{1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(\alpha_n(x)n)^k}{k!} \\
& + n^2 \beta_n e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_{\frac{1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) k \frac{(\alpha_n(x)n)^{k-1}}{k!} \\
& (k \rightarrow k+1) \\
& = -n^2 \beta_n e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_{\frac{1}{n}} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) \\
& + n^2 \beta_n e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_{\frac{1}{n}} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \\
& = n^2 \beta_n e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\Delta_{\frac{1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right) - \Delta_{\frac{1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \\
& = n^2 \beta_n^2 \mathcal{R}_n \left(\Delta_{\frac{1}{n}}^2 f : x \right)
\end{aligned}$$

ifadesini elde ederiz. Bu ifadeyi daha genel olarak yazacak olursak,

$$\mathcal{R}_n^{(r)}(f : x) = n^r \beta_n^r \mathcal{R}_n \left(\Delta_{\frac{1}{n}}^r f : x \right)$$

ifadesini elde ederiz.

$$ii) \Delta_h^r f(x) = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^{r-k} f(x + kh)$$

$r = 1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$\Delta_h f(x) = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} (-1)^{1-k} f(x + kh)$$

$$\begin{aligned}\Delta_h f(x) &= \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} (-1)^{1-k} f(x + kh) \\ &= 1 \cdot (-1) \cdot f(x) + 1 \cdot f(x + h) \\ &= f(x + h) - f(x).\end{aligned}$$

$r = 2$ için doğruluğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}\Delta_h^2 f(x) &= \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} (-1)^{2-k} f(x + kh) \\ &= (-1)^2 \cdot f(x) + 2 \cdot (-1) f(x + h) + 1 \cdot f(x + 2h) \\ &= f(x + 2h) - 2 \cdot f(x + h) + f(x).\end{aligned}$$

$r = 3$ için

$$\begin{aligned}\Delta_h^3 f(x) &= \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} (-1)^{3-k} f(x + kh) \\ &= 1 \cdot f(x) + 3 \cdot (-1) \cdot f(x + h) + 3 \cdot f(x + 2h) + f(x + 3h) \\ &= f(x + 3h) - 3f(x + 2h) + 3f(x + h) - f(x)\end{aligned}$$

elde ederiz.

Bulunan ifadeleri genellersek,

$$\Delta_h^r f(x) = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^{r-k} f(x + kh)$$

ifadesini elde ederiz.

4.1. AĞIRLIKLILIK YAKLAŞIM

Bu bölümde ağırlıklı Korovkin teoremi yardımıyla ağırlıklı bir yaklaşım teoremi vereceğiz. Bu durumda M 'nin pozitif bir sabit olduğu $|f(x)| < M\rho_a(x)$, $\rho_a(x) = e^{ax}$ koşulunu sağlayan $\mathbb{R}$ 'de tanımlanan tüm gerçekteğerli fonksiyonların kümesi olan sabit bir $a > 0$ ile göz önüne alarak B_{ρ_a} 'yı dikkate alacağız. Ayrıca C_{ρ_a} ise B_{ρ_a} 'ya ait tüm sürekli fonksiyonların alt uzayını gösterir. Bu uzayda norm

$$\|f\|_{\rho_a} = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \frac{|f(x)|}{\rho_a(x)}$$

ile gösterilir (Aral vd., 2019).

$C_{\rho_a}^k(\mathbb{R}^+)$ $f \in C_{\rho_a}(\mathbb{R}^+)$ daki $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{\rho_a(x)}$ şartını sağlayan tüm fonksiyonların altuzayı olsun (k sabit) ve $C_{\rho_a}^r(\mathbb{R}^+)$ ise $f^{(s)} \in C_{\rho_a}(\mathbb{R}^+)$ $s = 1, 2, \dots, r$ şartını sağlayan $f \in C_{\rho_a}(\mathbb{R}^+)$ deki tüm fonksiyonların uzayı olsun.

Şimdi $(\mathcal{R}_n)_{n \geq 1}$ nin $C_{\rho_a}(\mathbb{R}^+)$ dan $B_{\rho_a}(\mathbb{R}^+)$ ya dönüşüm yaptığını gösterelim.

Lemma 4.1.1. $0 < a < b$ olmak üzere $(\mathcal{R}_n)_{n \geq 1}$ C_{ρ_a} uzayından C_{ρ_b} uzayına dönüşüm yapan bir lineer pozitif operatör olsun. Bu durumda

$$\|\mathcal{R}_n\|_{C_{\rho_a} \rightarrow C_{\rho_b}}$$

normu düzgün sınırlıdır (Aral vd., 2019).

İspat. $\mathcal{R}_n(f; x) = e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right)$ ifadesi gösterir ki

$(\mathcal{R}_n)_{n \geq 1}$ ifadesi bir lineer pozitif operatördür.

$$\|\mathcal{R}_n(\rho_a)\|_{\rho_b} = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} e^{\left(\frac{2a}{e^{a/n+1}} - b\right)x} = 1$$

$$\frac{|\mathcal{R}_n(\rho_a; x) - \rho_a(x)|}{\rho_b(x)} = \frac{|e^{\frac{2a}{e^{a/n+1}}x} - e^{ax}|}{e^{bx}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{|e^{ax} - e^{\frac{2a}{e^{a/n}+1}x}|}{e^{bx}} \\
&= \frac{\left(e^{ax} - e^{\left(\frac{2ax}{e^{a/n}+1} - ax + ax\right)}\right)}{e^{bx}} \\
&= \frac{e^{ax} \left(1 - e^{\left(\frac{2}{e^{a/n}+1}-1\right)ax}\right)}{e^{bx}} \\
&= e^{x(a-b)} \left(1 - e^{\left(\frac{2}{e^{a/n}+1}-1\right)ax}\right)
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{2}{e^{a/n}+1} - 1\right)ax = u \text{ olarak seçip}$$

$1 - e^{-u} \leq u$ eşitsizliğini kullanırsak

$$\begin{aligned}
1 - e^{-\left(1 - \frac{2}{e^{a/n}+1}\right)ax} &\leq \left(1 - \frac{2}{e^{a/n}+1}\right)ax \\
&\leq e^{(a-b)x} \left(1 - \frac{2}{e^{a/n}+1}\right)ax \\
&= \frac{ax}{e^{(b-a)x}} \left(1 - \frac{2}{e^{a/n}+1}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\left(\frac{ax}{e^{(b-a)x}}\right)' = \frac{ae^{(b-a)x} - (b-a)e^{(b-a)x}ax}{e^{((b-a)x)^2}} = 0$$

$$e^{(b-a)x}a(1 - (b-a)x) = 0$$

$x = \frac{1}{b-a}$ ifadesini fonksiyonda yerine yazalım.

$$\begin{aligned}
\frac{a \frac{1}{b-a}}{e} &= \frac{a}{(b-a)e} \text{ ise} \\
&\leq \left(1 - \frac{2}{e^{\frac{a}{n}+1}}\right) \frac{a}{(b-a)e} \text{ olur.}
\end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ için ise yukarıdaki ifade sıfır olacaktır.

Burada dikkat edilirse Becker vd. (1978), makalelerinde klasik Szász-Mirakyan operatörlerinin $b > a > 0$ ve $n > a \left(\ln \left(\frac{b}{a} \right) \right) - 1$ şartları altında C_{ρ_a} dan C_{ρ_b} ye dönüşüm yapan bir pozitif lineer operatör olduğunu göstermiştir. Fakat, Lemma 4.4 de $\mathcal{R}_n$ operatöründe n, a ve b değerleri için bir sınırlamaya ihtiyaç olmadığı görülmüştür (Aral vd., 2019).

Sonuç 4.1.1. $f \in C_{\rho_a}(\mathbb{R}^+)$ ve $a > 0$ olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{R}_n(f; x) = f(x), x \in \mathbb{R}^+ \text{ dir.}$$

Bu yakınsama $x_2 > x_1 \geq 0$ olmak üzere her $[x_1, x_2]$ aralığı üzerinde düzgündür (Aral vd., 2019).

Teorem 4.1.2. $0 < a < b$ için her $f \in C_{\rho_a}^k(\mathbb{R}^+)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{R}_n(f) - f\|_{\rho_b} = 0 \text{ olur (Aral vd., 2019).}$$

İspat. $\forall x_0 > 0$ için

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \frac{|\mathcal{R}_n(f; x) - f(x)|}{e^{bx}} &\leq \sup_{x \leq x_0} \frac{|\mathcal{R}_n(f; x) - f(x)|}{e^{bx}} \\ &\quad + \sup_{x \geq x_0} \frac{|\mathcal{R}_n(f; x) - f(x)|}{e^{bx}} \\ &\leq \|\mathcal{R}_n(f) - f\|_{C[0, x_0]} + \|f\|_{\rho_a} \sup_{x \geq x_0} \frac{|\mathcal{R}_n(e^{at}; x)|}{e^{bx}} \\ &\quad + \sup_{x \geq x_0} \frac{|f(x)|}{e^{bx}}. \end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitsizliğin ilk koşulu sağ tarafın sıfır olduğunu göstermektir. Lemma 4.1'den $x > 0$ sabittir. Kolayca görülebilir ki

$$\sup_{x \geq x_0} \frac{|\mathcal{R}_n(e^{at}; x)|}{e^{bx}} = e^{x_0 \left(\frac{2a}{e^{a/n+1}} - b \right)}$$

ifadesi $n \rightarrow \infty$ için sıfıra yakınsar. Yukarıdaki eşitsizliğin son kısmında $x_0 > 0$ sayısı yeterince büyük seçtiğimizde eşitsizliğin son kısmı yeterince küçük bırakılabilir.

4.2. YAKINSAKLIK HIZI

Bizim buradaki amacımız uygun bir süreklilik modülü yardımıyla Teorem 4.1'deki yakınsaklık hızını belirlemektir. Yakınsaklık hızını bulmak için $f \in C_{\rho a}^k(\mathbb{R}^+)$ olduğunda bir ağırlıklı süreklilik modülü belirleyelim. Bu amaç için öncelikle kullanacağımız ağırlıklı süreklilik modülünün tanımını verelim.

$$\tilde{\omega}(f; \delta) = \sup_{|t-x| \leq \delta} \frac{|f(t) - f(x)|}{e^{at} + e^{ax}}, \quad \delta \geq 0$$

$$f \in C_{\rho a}^k(\mathbb{R}^+) \text{ (Aral vd., 2019; Aral vd., 2017).}$$

Aşağıdaki lemmalar ispatsız olarak (Aral vd., 2019) kaynağında bulunmaktadır.

Lemma 4.2.1. $f \in C_{\rho a}^k(\mathbb{R}^+)$ için $\lim_{\delta \rightarrow 0} \tilde{\omega}(f; \delta) = 0$.

İspat. $f \in C_{\rho a}^k(\mathbb{R}^+)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{e^{ax}} &= k \in \mathbb{R}^+ \text{ ise} \\ \tilde{\omega}(f; \delta) &= \sup_{|t-x| \leq \delta, x \geq 0} \frac{|f(t) - f(x)|}{e^{at} + e^{ax}} \\ &\leq \sup_{|t-x| \leq \delta, 0 \leq x \leq x_0} |f(t) - f(x)| + \sup_{|t-x| \leq \delta, x > x_0} \frac{|f(t) - f(x)|}{e^{at} + e^{ax}} \\ &\leq \omega(f; \delta) + \sup_{|t-x| \leq \delta, x > x_0} \left| \frac{f(t)}{e^{at}} - k \right| + \sup_{|t-x| \leq \delta, x > x_0} \left| \frac{f(x)}{e^{ax}} - k \right| \\ &\leq \omega(f; \delta) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Lemma 4.2.2. Herhangi $\lambda > 0$ ve $f \in C_a^k(\mathbb{R}^+)$ için $\tilde{\omega}(f; \lambda\delta) \leq 2(1 + \lambda)\tilde{\omega}(f; \delta)$ olur.

İspat. $\llbracket \lambda \rrbracket$ ile λ sayısının tam kısmı gösterilmek üzere

$$\begin{aligned} 2\llbracket \lambda \rrbracket &\leq 2\lambda < 2(\llbracket \lambda \rrbracket + 1) \\ \tilde{\omega}(f; \lambda\delta) &\leq \tilde{\omega}(f; 2(\llbracket \lambda \rrbracket + 1)\delta) \leq 2(\llbracket \lambda \rrbracket + 1)\tilde{\omega}(f; \delta) \\ &\leq 2(\lambda + 1)\tilde{\omega}(f; \delta) \end{aligned}$$

olur.

Teorem 4.2.1. $P_{n,k}(x) = e^{-nx} \frac{(nx)^k}{k!}$ olmak üzere

$P'_{n,k}(x) = n[P_{n,k-1}(x) - P_{n,k}(x)]$ olduğunu gösterelim.

İspat. $P'_{n,k}(x) = -ne^{-nx} \frac{(nx)^k}{k!} + kne^{-nx} \frac{(nx)^{k-1}}{k!}$

$$= n[P_{n,k-1}(x) - P_{n,k}(x)].$$

Teorem 4.2.2. $0 < 2a < b$ için $f \in C_{\rho_a}^k(\mathbb{R}^+)$ olmak üzere

$$\|\mathcal{R}_n(f) - f\|_{\rho_b} \leq 8\tilde{\omega}(f; \sqrt{v_n})$$

dir. Burada

$$v_n = \left(\frac{2a}{n(e^{2a/n-1})} - 1 \right)^2 \frac{4}{b^2 e^2} + \frac{1}{bn} \frac{2a}{n(e^{2a/n-1})}$$

şeklindedir (Aral vd., 2019).

İspat. $\tilde{\omega}(f; \delta)$ ile verilen süreklilik modülünün özelliklerini kullanalım.

$\lambda > 0$ için $\lambda = \frac{|t-x|}{\delta}$, $\delta > 0$ alalım. Bu takdirde

$$\begin{aligned} |f(t) - f(x)| &\leq (e^{at} + e^{ax})\tilde{\omega}(f; |t-x|) \\ &\leq 2(e^{at} + e^{ax}) \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta} \right) \tilde{\omega}(f; \delta) \end{aligned}$$

bulunur.

$P_{n,k} = e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!}$ $n \in \mathbb{N}$ alalım.

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}_n(f; x) - f(x)| &\leq \left| \sum_{k=0}^{\infty} f(t) - f(x) \right| P_{n,k}(x) \\ &\leq 2\tilde{\omega}(f; \delta) \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{a\frac{k}{n}} + e^{ax} \right) \left(1 + \frac{1}{\delta} \left| \frac{k}{n} - x \right| \right) P_{n,k}(x) \end{aligned}$$

$$\leq 2\tilde{\omega}(f; \delta) \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} e^{a\frac{k}{n}} P_{n,k}(x) + \frac{1}{\delta} \sum_{k=0}^{\infty} e^{a\frac{k}{n}} \left| \frac{k}{n} - x \right| P_{n,k}(x) + e^{ax} + \frac{1}{\delta} e^{ax} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{k}{n} - x \right| P_{n,k}(x) \right\}$$

Cauchy-Schwartz eşitsizliği Lemma 4.1 ve Lemma 4.2 yardımıyla

$$\left(\mathcal{R}_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{a\frac{k}{n}} \cdot e^{-n\alpha_n(x)} \cdot e^{n\alpha_n(x)}; x \right) = \mathcal{R}_n(e^{at}; x) = e^{ax} \right)$$

$$\left(\mathcal{R}_n \left(\frac{1}{\delta} \sum_{k=0}^{\infty} e^{a\frac{k}{n}} \left| \frac{k}{n} - x \right| e^{-n\alpha_n(x)} \cdot e^{n\alpha_n(x)}; x \right) = \frac{1}{\delta} e^{ax} |t - x| \right)$$

$$\left(\mathcal{R}_n \left(\frac{e^{ax}}{\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{k}{n} - x \right| e^{-n\alpha_n(x)} \cdot \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!}; x \right) = \frac{1}{\delta} e^{ax} |t - x| \right)$$

kullanılarak

$$|\mathcal{R}_n(f; x) - f(x)| \leq 2\tilde{\omega}(f; \delta) \left\{ \mathcal{R}_n(e^{at}; x) + e^{ax} + \frac{2e^{ax}}{\delta} (\mathcal{R}_n((t - x)^2; x))^{1/2} \right\}$$

$$(\mathcal{R}_n((t - x)^2; x) = \alpha_n^2(x) + \frac{\alpha_n(x)}{n} - 2x\alpha_n(x) + x^2$$

$$= (\alpha_n - x)^2 + \frac{\alpha_n(x)}{n}$$

$$\leq 2\tilde{\omega}(f; \delta) \left\{ e^{\frac{2ax}{(e^{a/n}+1)}} + e^{ax} + \frac{2e^{ax}}{\delta} \left(x^2 \left(\frac{2a}{n(e^{2a/n} - 1)} - 1 \right)^2 + \frac{1}{n} \frac{2ax}{n(e^{2a/n} - 1)} - 1 \right)^{1/2} \right\}$$

$$\leq 2\tilde{\omega}(f; \delta) e^{bx} \left\{ e^{\frac{2ax}{(e^{a/n}+1)} - bx} + e^{(a-b)x} + \frac{2e^{(a-b)x}}{\delta} \left(x^2 \left(\frac{2a}{n(e^{2a/n} - 1)} - 1 \right)^2 + \frac{2ax}{n^2(e^{2a/n} - 1)} \right)^{1/2} \right\}$$

yazabiliriz.

$$= \sup_{x \geq 0} \frac{x^2 \left(\frac{2a}{n(e^{2a/n} - 1)} - 1 \right)^2 + x \frac{2a}{n^2(e^{2a/n} - 1)}}{e^{bx}}$$

$$\leq \left(\frac{2a}{n \left(e^{\frac{2a}{n}} - 1 \right)} - 1 \right)^2 \cdot \frac{4}{b^2 e^2} + \frac{1}{be} \frac{2a}{n^2 \left(e^{\frac{2a}{n}} - 1 \right)} = v_n$$

elde edilir.

Teorem 4.2.3. $0 < 2a < b$ ve $f \in C^r[0, \infty]$ öyle ki $f^{(r)} \in C_{\rho_a}^k(\mathbb{R}^+)$ için

$$\|\mathcal{R}_n^r(f; x) - f^{(r)}(x)\|_{\rho_b} \leq 2 \left(e^{a\frac{r}{n}} + 1 \right) B_n^r \tilde{\omega} \left(f^{(r)}; \frac{r}{n} \right) + |1 - \beta_n^r| \|f^{(r)}\|_{\rho_a} + 8\tilde{\omega}(f^{(r)}; \sqrt{\mathcal{V}_n}) \text{ olur (Aral vd. 2019).}$$

İspat. $\mathcal{R}_n^{(r)}(f; x) = n^r \beta_n^r \mathcal{R}_n \left(\Delta_{\frac{1}{n}}^r f; x \right)$ $x \in \mathbb{R}^+$ ifadesinden yararlanılarak

$$|\mathcal{R}_n^r(f; x) - f^{(r)}(x)| \leq \left| n^r \beta_n^r \mathcal{R}_n \Delta_{\frac{1}{n}}^r f - \mathcal{R}_n(f^{(r)}; x) \right| + |\mathcal{R}_n(f^{(r)}; x) - f^{(r)}(x)|$$

yazılabilir, $\xi_t \in \left(t, t + \frac{r}{n} \right)$ olmak üzere

$$n^r \Delta_{\frac{1}{n}}^r f(t) = f^{(r)}(\xi_t)$$

şeklinde ifade edilsin.

$$\left\{ \mathcal{R}_n^{(r)}(f; x) = n^r \beta_n^r \mathcal{R}_n \left(\Delta_{\frac{1}{n}}^r f; x \right) \right\}$$

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}_n(f^{(r)}; x) - f^{(r)}(x)| &= \left| n^r \beta_n^r \Delta_{\frac{1}{n}}^r f(t) - f^{(r)}(t) \right| \\ &= |\beta_n^r f^{(r)}(\xi_t) - f^{(r)}(t)| \\ &\leq \beta_n^r |f^{(r)}(\xi_t) - f^{(r)}(t)| + |\beta_n^r f^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)| \\ &= \beta_n^r |f^{(r)}(\xi_t) - f^{(r)}(t)| + |f^{(r)}(t)| |1 - \beta_n^r| \end{aligned}$$

$\left(|f(t) - f(x)| \leq 2(e^{at} + e^{ax}) \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta} \right) \tilde{\omega}(f; \delta) \right)$ ifadesinden faydalanılarak

$$|f^{(r)}(\xi_t) - f^{(r)}(t)| \leq 2(e^{a\xi_t} + e^{at}) \tilde{\omega}(f^{(r)}; |t - \xi_t|)$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2 \left(e^{a(t+\frac{r}{n})} + e^{at} \right) \tilde{\omega}(f^{(r)}; |t - \xi_t|) \\
&\leq 2 \left(e^{a\frac{r}{n}} + 1 \right) e^{at} \tilde{\omega} \left(f^{(r)}; \frac{r}{n} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak

$$\begin{aligned}
\left| \mathcal{R}_n(n^r \beta_n^r \Delta_{\frac{1}{n}}^r f - f^{(r)}; x) \right| &\leq \beta_n^r \mathcal{R}_n(|f^{(r)}(\xi_t) - f^{(r)}(t)|; x) + \\
&+ |1 - \beta_n^r| \mathcal{R}_n(|f^{(r)}|; x) \\
&\leq 2 \left(e^{a\frac{r}{n}} + 1 \right) \beta_n^r \mathcal{R}_n(\rho_a; x) \tilde{\omega} \left(f^{(r)}; \frac{r}{n} \right) + \\
&+ |1 - \beta_n^r| \|f^{(r)}\|_{\rho_a} \mathcal{R}_n(\rho_a; x) \\
&\leq 2 \left(e^{a\frac{r}{n}} + 1 \right) \beta_n^r e^{\frac{2ax}{(e^{a/n}+1)}} \tilde{\omega} \left(f^{(r)}; \frac{r}{n} \right) + \\
&+ |1 - \beta_n^r| \|f^{(r)}\|_{\rho_a} e^{\frac{2ax}{(e^{a/n}+1)}}
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

4.3. VORONOVSKAYA TİPLİ TEOREM

Burada (1.1) deki operatörler için bir kantitatif Voronovskaya teorem elde etmek istiyoruz. Sonuçları süreklilik modülü yardımıyla elde edeceğiz. İlk olarak merkezi momentleri kullanarak bir rekürans bağıntısı verelim.

Lemma 4.3.1. $m \in \mathbb{N}$ için merkezi momenti (1.1) için şu şekilde tanımlayalım.

$$\mathcal{R}_{n,m}(x) := \mathcal{R}_n((t-x)^m; x) \text{ vardır.}$$

$$\frac{x}{n} [\mathcal{R}'_{n,m}(x) + m \mathcal{R}_{n,m-1}(x)] = \mathcal{R}_{n,m+1}(x) + x(1 - \beta_n) \mathcal{R}_{n,m}(x)$$

$$\mathcal{R}_{n,0}(x) = 1$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{n,1}(x) &= \alpha_n(x) - x \\ &= x(\beta_n - 1)\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{n,2}(x) &= (\alpha_n(x) - x)^2 + \frac{\alpha_n(x)}{n} \\ &= x^2(\beta_n - 1)^2 + x \frac{\beta_n}{n}\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{n,3}(x) &= (\alpha_n(x) - x)^3 + \frac{3}{n} \alpha_n^2(x) + \frac{\alpha_n(x)}{n^2} - 3x \frac{\alpha_n(x)}{n} \\ &= x^3(\beta_n - 1)^3 + \frac{x^2}{n} 3\beta_n(\beta_n - 1) + \frac{x\beta_n}{n^2}\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{n,4}(x) &= x^4(\beta_n - 1)^4 + \frac{x^3}{n} (6\beta_n^3 - 12\beta_n^2 + 6\beta_n) + \\ &\quad + \frac{x^2}{n^2} (7\beta_n^2 - 4\beta_n^2) + x \frac{\beta_n}{n^3}\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{n,8}(x) &= x^8(\beta_n - 1)^8 + 28 \frac{x^7}{n} \beta_n(\beta_n - 1)^6 + \\ &\quad - 14 \frac{x^6}{n^2} (4 - 19\beta_n)(\beta_n - 1)^4 \beta_n + \\ &\quad + 70 \frac{x^5}{n^3} \beta_n(\beta_n - 1)^2 (1 - 10\beta_n + 15\beta_n^2) \\ &\quad - 7 \frac{x^4}{n^4} (8 - 124\beta_n + 344\beta_n^2 - 243\beta_n^3) \\ &\quad + 14 \frac{x^3 \beta_n}{n^5} (2 - 36\beta_n + 69\beta_n^2) - \frac{x^2}{n^6} \beta_n (8 - 127\beta_n) + \frac{x}{n^7} \beta_n\end{aligned}$$

(Aral vd., 2019).

İspat. $\mathcal{R}_{n,m}(x) = \mathcal{R}_n((t-x)^m; x)$ için moment değerleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{n,0}(x) &= \mathcal{R}_n((t-x)^0; x) \\ &= \mathcal{R}_n(1; x) \\ &= 1\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{n,1}(x) &= \mathcal{R}_n((t-x)^1; x) \\ &= \alpha_n(x) - x \\ &= x\beta_n - x \\ &= x(\beta_n - 1)\end{aligned}$$

Birinci dereceden moment elde edilir. Benzer şekilde ikinci dereceden moment aşağıdaki şekildedir.

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{n,2}(x) &= \mathcal{R}_n((t-x)^2; x) \\ &= \alpha_n^2(x) + \frac{\alpha_n(x)}{n} - 2x\alpha_n(x) + x^2 \\ &= (\alpha_n(x) - x)^2 + \frac{\alpha_n(x)}{n} \\ &= (x\beta_n - x)^2 + \frac{\alpha_n(x)}{n} \\ &= x^2(\beta_n - 1)^2 + \frac{x\beta_n}{n}\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{n,3}(x) &= \mathcal{R}_n((t-x)^3; x) \\ &= \alpha_n^3(x) - 3\alpha_n^2(x)x + 3\alpha_n(x)x^2 - x^3 \\ &= \alpha_n^3(x) + \frac{3\alpha_n^2(x)}{n} + \frac{\alpha_n(x)}{n^2} - 3\alpha_n^2(x)x - 3\frac{\alpha_n(x)}{n}x + \\ &\quad + 3\alpha_n(x)x^2 - x^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\alpha_n(x) - x)^3 + \frac{3\alpha_n^2(x)}{n} + \frac{\alpha_n(x)}{n^2} - 3\frac{\alpha_n(x)}{n}x \\
&= (x\beta_n - x)^3 + 3\frac{\alpha_n(x)}{n}(\alpha_n(x) - x) + \frac{\alpha_n(x)}{n^2} \\
&= x^3(\beta_n - 1)^3 + 3\frac{x^2}{n}\beta_n(\beta_n - 1) + x\frac{\beta_n}{n^2}
\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{n,4}(x) &= \mathcal{R}_n((t-x)^4; x) \\
&= \alpha_n^4(x) - 4\alpha_n^3(x)x + 6\alpha_n^2(x)x^2 - 4\alpha_n(x)x^3 + x^4 \\
&= \alpha_n^4(x) + 6\frac{\alpha_n^3(x)}{n} + 7\frac{\alpha_n^2(x)}{n^2} + \frac{\alpha_n(x)}{n^3} - \\
&\quad + 4\left(\alpha_n^3(x) + 3\frac{\alpha_n^2(x)}{n} + \frac{\alpha_n(x)}{n^2}\right)x \\
&\quad + 6\left(\alpha_n^2(x) + \frac{\alpha_n(x)}{n}\right)x^2 - 4\alpha_n(x)x^3 + x^4 \\
&= \alpha_n^4(x) + 6\frac{\alpha_n^3(x)}{n} + 7\frac{\alpha_n^2(x)}{n^2} + \frac{\alpha_n(x)}{n^3} + \\
&\quad - 4\alpha_n^3(x)x - 12\frac{\alpha_n^2(x)}{n}x - 4\frac{\alpha_n(x)}{n^2}x + 6\alpha_n^2(x)x^2 + \\
&\quad + 6\frac{\alpha_n(x)}{n}x^2 - 4\alpha_n(x)x^3 + x^4
\end{aligned}$$

İfadesi düzenlenirse

$$\begin{aligned}
&= (\alpha_n(x) - x)^4 + \frac{6}{n}\alpha_n^3(x) - 12\frac{\alpha_n^2(x)}{n}x + \\
&\quad + 6\frac{\alpha_n(x)}{n}x^2 + \frac{\alpha_n(x)}{n^3} + 7\frac{\alpha_n^2(x)}{n^2} - 4\frac{\alpha_n(x)}{n^2}x \\
&= x^4(\beta_n - 1)^4 + \frac{x^3}{n}(6\beta_n^3 - 12\beta_n^2 + 6\beta_n) +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{x^2}{n^2} (7\beta_n^2 - 4\beta_n)$$

olarak elde edilir.

$\mathcal{R}'_{n,m}(x)$ için

$$\frac{x}{n} [\mathcal{R}'_{n,m}(x) + m\mathcal{R}_{n,m-1}(x)] = \mathcal{R}_{n,m+1}(x) + x(1 - \beta_n)\mathcal{R}_{n,m}(x)$$

olduğunu gösterelim.

$$\mathcal{R}_n(f; x) = e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

m'nci moment

$$\mathcal{R}_n((t-x)^m; x) = e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} f\left(\frac{k}{n} - x\right)^m$$

ifade edilir ve ifadenin birinci türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}'_n((t-x)^m; x) &= -n\alpha'_n(x)e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} f\left(\frac{k}{n} - x\right)^m + \\ &\quad + n\alpha'_n(x)e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(n\alpha_n(x))^{k-1}}{k!} f\left(\frac{k}{n} - x\right)^m + \\ &\quad - e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} m\left(\frac{k}{n} - x\right)^{m-1} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} \mathcal{R}_n((t-x)^m; x) = \mathcal{R}_{n,m}(x) \\ \mathcal{R}'_n(m(t-x)^{m-1}; x) = m\mathcal{R}_{n,m-1}(x) \end{array} \right)$$

şeklinde bilinen ifadelerden faydalanılarak

$$= -n\alpha'_n(x)e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} f\left(\frac{k}{n} - x\right)^m +$$

$$\begin{aligned}
& +n\alpha'_n(x)e^{-n\alpha_n(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k(n\alpha_n(x))^{k-1}}{k!}f\left(\frac{k}{n}-x\right)^m+ \\
& -m\mathcal{R}_{n,m-1}(x) \\
& =\alpha'_n(x)e^{-n\alpha_n(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{n}-x\right)^m n\left\{-\frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!}+\frac{k(n\alpha_n(x))^{k-1}}{k!}\right\}-m\mathcal{R}_{n,m-1}(x) \\
& =\alpha'_n(x)e^{-n\alpha_n(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{n}-x\right)^m n\left\{-\frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!}+\frac{k(n\alpha_n(x))^{k-1}}{k!}\frac{n\alpha_n(x)}{n\alpha_n(x)}\right\} \\
& -m\mathcal{R}_{n,m-1}(x) \\
& =\alpha'_n(x)e^{-n\alpha_n(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{n}-x\right)^m\frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!}\left\{-n+\frac{kn}{n\alpha_n(x)}\right\}-m\mathcal{R}_{n,m-1}(x) \\
& \quad (\alpha_n(x)=x\beta_n \text{ yazalım}) \\
& =\alpha'_n(x)e^{-n\alpha_n(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{n}-x\right)^m\frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!}\left\{-n+\frac{k}{x\beta_n}\right\}-m\mathcal{R}_{n,m-1}(x) \\
& =\alpha'_n(x)e^{-n\alpha_n(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{n}-x\right)^m\frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!}\frac{n}{x\beta_n}\left(\frac{k}{n}-x\beta_n\right)-m\mathcal{R}_{n,m-1}(x) \\
& =\alpha'_n(x)e^{-n\alpha_n(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{n}-x\right)^m\frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!}\frac{n}{\alpha_n(x)}\left(\frac{k}{n}-x\beta_n\right)-m\mathcal{R}_{n,m-1}(x) \\
& \quad \left(\begin{aligned} \alpha_n(x) &= \frac{2ax}{n(e^{a/n}-1)} \\ \alpha'_n(x) &= \frac{2a}{n(e^{a/n}-1)} \\ x\alpha'_n(x) &= \alpha_n(x) \end{aligned}\right)
\end{aligned}$$

İfadesinden faydalanılarak

$$= e^{-n\alpha_n(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{n}-x\right)^m\frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!}\alpha'_n(x)\frac{n}{x\alpha'_n(x)}\left(\frac{k}{n}-x\beta_n\right)-m\mathcal{R}_{n,m-1}(x)$$

elde edilir.

İfadesine x ekleyip çıkarırsak

$$\begin{aligned}
&= \frac{n}{x} e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} - x\right)^m \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} \left(\frac{k}{n} - x + x - x\beta_n\right) - m \mathcal{R}_{n,m-1}(x) \\
&= \frac{n}{x} e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} - x\right)^{m+1} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} + \\
&\quad + n e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} - x\right)^m \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} + \\
&\quad - n\beta_n e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} - x\right)^m \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} - m \mathcal{R}_{n,m-1}(x) \\
\mathcal{R}'_{n,m}(x) &= \frac{n}{x} e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} - x\right)^{m+1} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} + \\
&\quad + n(1 - \beta_n) e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} - x\right)^m \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} - m \mathcal{R}_{n,m-1}(x) \\
\frac{x}{n} [\mathcal{R}'_{n,m}(x) + m \mathcal{R}_{n,m-1}(x)] &= \mathcal{R}_{n,m+1}(x) + x(1 - \beta_n) \mathcal{R}_{n,m}(x)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.3.1. Sabit bir $a > 0$ için $f \in C_{\rho_a}^{(3)}(\mathbb{R}^+)$ olmak üzere (1.1) ile tanımlanan $\mathcal{R}_n$ operatörü için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n[\mathcal{R}'_n(f; x) - f'(x)] = -af'(x) + \frac{1 - 2ax}{2} f''(x) + A(x)f'''(x), \forall x > 0$$

eşitliği sağlanır.

Burada,

$$A(x) = \frac{1}{6}x(16a^2x^2 - 16a^2x + 18ax - 18a + 3)$$

şeklindedir (Aral vd., 2019).

İspat. $f \in C_{\rho_a}^{(3)}(\mathbb{R}^+)$ verilsin ve $t, x \in \mathbb{R}^+$ için

$$f(t) = \sum_{k=0}^3 (t-x)^k \frac{f^{(k)}(x)}{k!} + h(t, x)(t-x)^3$$

Taylor açılımı yardımıyla

$$f(t) = f(x) + (t-x)f'(x) + (t-x)^2 \frac{f''(x)}{2!} + (t-x)^3 \frac{f'''(x)}{3!} + h(t, x)(t-x)^3$$

İfadesi elde edilir.

$$\mathcal{R}'_n(f; x) = \frac{n}{x} \mathcal{R}_n((t-x)f(t); x) + n(1 - \beta_n) \mathcal{R}_n(f; x)$$

yazabiliriz. Burada

$f(t)$ 'yi yerine yazalım.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}'_n(f; x) = & \frac{n}{x} \left\{ f(x) \mathcal{R}_n((t-x); x) + f'(x) \mathcal{R}_n((t-x)^2; x) \right. \\ & + \frac{f''(x)}{2!} \mathcal{R}_n((t-x)^3; x) + \frac{f'''(x)}{3!} \mathcal{R}_n((t-x)^4; x) \\ & \left. + \mathcal{R}_n(h(t, x)(t-x)^4; x) \right\} + n(1 - \beta_n) \mathcal{R}_n(f; x) \end{aligned}$$

$h \in C_{\rho_a}(\mathbb{R}^+)$ ve $h_x(t) = \lim_{t \rightarrow x} h_x(t) = 0$ eşitliği doğrudur.

$$\frac{n}{x} \mathcal{R}_n((t-x); x) = \frac{n}{x} (\alpha_n(x) - x)$$

$$= \frac{n}{x} (x\beta_n - x)$$

$$= \frac{n}{x} x(\beta_n - 1)$$

$$= n(\beta_n - 1)$$

$$\begin{aligned} n[\mathcal{R}'_n(f; x) - f'(x)] = & \frac{n^2}{x} f(x) \mathcal{R}_n((t-x); x) + \frac{n^2}{x} f'(x) \mathcal{R}_n((t-x)^2; x) \\ & + \frac{n^2}{x} \frac{f''(x)}{2!} \mathcal{R}_n((t-x)^3; x) + \frac{n^2}{x} \frac{f'''(x)}{3!} \mathcal{R}_n((t-x)^4; x) \end{aligned}$$

$$+ \frac{n^2}{x} \mathcal{R}_n(h(t, x)(t - x)^4; x) + n^2(1 - \beta_n) \mathcal{R}_n(f; x) - nf'(x)$$

İfadesi düzenlenirse,

$$\begin{aligned} &= n^2 f(x)(\beta_n - 1) + \frac{n^2}{x} f'(x) \mathcal{R}_n((t - x)^2; x) + \\ &+ \frac{n^2}{x} \frac{f''(x)}{2!} \mathcal{R}_n((t - x)^3; x) + \frac{n^2}{x} \frac{f'''(x)}{3!} \mathcal{R}_n((t - x)^4; x) \\ &+ \frac{n^2}{x} \mathcal{R}_n(h(t, x)(t - x)^4; x) + n^2(1 - \beta_n) \mathcal{R}_n(f; x) - nf'(x) \\ &= \frac{n^2}{x} f'(x) \left[\mathcal{R}_n((t - x)^2; x) - \frac{x}{n} \right] + \frac{f''(x)}{2x} n^2 \mathcal{R}_n((t - x)^3; x) + \\ &+ \frac{f'''(x)}{6x} n^2 \mathcal{R}_n((t - x)^4; x) + \frac{n^2}{x} \mathcal{R}_n(h(t, x)(t - x)^4; x) + \\ &+ n^2(1 - \beta_n)(\mathcal{R}_n(f; x) - f(x)) \end{aligned}$$

Ayrıca uygun bir program yardımıyla (Mathematica, Maple, Matlab vb.)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{x} \mathcal{R}_n\left((t - x)^2; x - \frac{x}{n}\right) = a^2 x - a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2x} \mathcal{R}_n((t - x)^3; x) = \frac{1 - 3ax}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{6x} \mathcal{R}_n((t - x)^4; x) = A(x)$$

bulunur. Yukarıdaki limitleri kullanarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n [\mathcal{R}'_n(f; x) - f'(x)] = (a^2 x - a)f'(x) + \frac{1 - 3ax}{2} f''(x) + A(x)f'''(x) +$$

$$+ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{x} \mathcal{R}_n(h(t, x)(t - x)^4; x) + \lim_{n \rightarrow \infty} n^2(1 - \beta_n)(\mathcal{R}_n(f; x) - f(x))$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n[\mathcal{R}_n(f; x) - f(x)] = -axf'(x) + \frac{x}{2} f''(x)$$

yazılabilir. $x > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \beta_n)n = a$ alalım.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(1 - \beta_n)[\mathcal{R}_n(f; x) - f(x)] = -a^2 x f'(x) + \frac{ax}{2} f''(x).$$

İspatı tamamlamak için $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{x} \mathcal{R}_n(h(t, x)(t - x)^4; x)$ hesaplamalıyız.

Sonuç 1 ve $h^2 \in C_{2\rho a}(\mathbb{R}^+)$ göz önüne alınırsa

$$\lim_{t \rightarrow x} \mathcal{R}_n(h^2(t, x); x) = h^2(x, x) = 0 \text{ olduğu görülür.}$$

Ayrıca Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden yola çıkarak

$$n^2 \mathcal{R}_n(h(t, x)(t - x)^4; x) \leq \sqrt{\mathcal{R}_n(h^2(t, x); x)} \sqrt{n^4 \mathcal{R}_n((t - x)^8; x)} \quad \text{yazabiliriz.}$$

Son olarak hipotezden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^4(\mathcal{R}_n((t - x)^8; x)) = 105x^4$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n[\mathcal{R}'_n(f; x) - f'(x)] &= a^2 x f'(x) - a f'(x) + \frac{1}{2} f''(x) - \frac{3ax}{2} f''(x) + \\ &+ A(x) f'''(x) + 0 - a^2 x f'(x) + \frac{ax}{2} f''(x) \\ &= -a f'(x) + \frac{1 - 2ax}{2} f''(x) + A(x) f''(x) \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Szász-Mirakyan operatörleri yaklaşımlar teorisinde yaygın olarak kullanılan operatörlerdir. Buna bağlı olarak son yıllarda yakınsaklık hızı arttırılmış operatörler dizisi elde edilmiştir. Ayrıca üstel fonksiyonu koruyan Szász operatörünün yeni yorumu üstel ağırlıklı uzaylarda çalışmanın daha elverişli olduğunu göstermiştir. Üstel ağırlıklı uzaylarda çalışırken ilave gereksinimlere ihtiyaç duyulmamıştır. Korovkin teoremi kullanılarak modifiye Szász-Mirakyan operatörlerinin ağırlıklı yaklaşım özellikleri incelenip daha genel sonuçlar elde edilmiş ve üstel ağırlıklı uzaylarda uygun tanımlanmış süreklilik modülü yardımıyla kantitatif sonuçlar ve yaklaşım hızları incelenmiştir.

Sonuç olarak modifiye Szász-Mirakyan operatörlerinin bazı yaklaşım ve şekil koruma özellikleri verilerek kullanışlılığı incelenmiştir.

KAYNAKLAR

- Acar, T., Aral, A., Gonska, H., On Szász-Mirakyan operators preserving e^{2ax} , $a > 0$, Mediterr. J. Math., 14(1), Art. 6, 14 pp., 2017.
- Altomare, F., Campiti, M., Korovkin-type Approximation Theory and Its Applications, Appendix A by Michael Pannenberg and Appendix B by Ferdinand Beckhoff. De Gruyter Studies in Mathematics, 17. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994.
- Aral, A., Inoan, D., Raşa, I., On the generalized Szász-Mirakyan operators, Results Math., 65(3-4): 441–452, 2014.
- Aral, A., Acar, T., Cardenas-Morales, D., Garrancho, P., Szász-Mirakyan type operators which fix exponentials. Results Math., 72(3):1393–1404, 2017.
- Aral, A., Inoan, D., Raşa, I., Approximation properties of Szász-Mirakyan operators preserving exponential functions, Positivity 23(1): 233–246, 2019.
- Becker, M., Kucharski, D., Nessel, R.J., Global approximation theorems for the Szász-Mirakjan operators in exponential weight spaces, in: Linear spaces and approximation (Proc. Conf., Math. Res. Inst., Oberwolfach, 1977), 319–333. Internat. Ser. Numer. Math., Vol. 40, Birkhauser, Basel, 1978.
- Bohman, H., On approximation of continuous and of analytic functions, Ark. Mat., 2: 43–56, 1952.
- Butzer, P.L., Nessel, R.J., Fourier Analysis and Approximation, Academic Press, New York and London, 1971.
- Coşkun, T., Weighted approximation of unbounded continuous functions by sequences of linear positive operators, Indian J. Pure Appl. Math., 34(3): 477–485, 2003.
- Gadjiev, A.D., A problem on the convergence of a sequence of positive linear operators on unbounded sets, and theorems that are analogous to P. P. Korovkin's theorem (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR, 218: 1001–1004, 1974.

- Gadjiev, A.D., Ispir, N., On a sequence of linear positive operators in weighted spaces, Proc. Inst. Math. Mech. Acad. Sci. Azerb., 11: 45–56, 1999.
- Gupta, V., Noor, M.A., Singh, B.M., Rate of convergence in simultaneous approximation for Szász-Mirakyan-Durrmeyer operators, J. Math. Anal. Appl., 322 (2): 964–970, 2006.
- Hacisalihoglu, H. H., Hacıyev, A.D., Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı, A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletme Yayınları, Ankara, 1995.
- Korovkin, P.P., On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions (Russian), Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.), 90: 961–964, 1953.
- Korovkin, P.P., Linear Operators and Approximation Theory, Translated from the Russian ed. (1959). Russian Monographs and Texts on Advanced Mathematics and Physics, Vol. III. Gordon and Breach Publishers, Inc., New York; Hindustan Publishing Corp. (India), Delhi, 1960.
- Lorentz, G.G., Bernstein polynomials, Mathematical Expositions, no. 8. University of Toronto Press, Toronto, 1953.
- Mirakjan, G.M., Approximation of continuous functions with the aid of polynomials of the form $e^{-nx} \sum_{k=0}^{m_n} c_{k,n} x^k$, Comptes rendus de l'Académie des sciences de l'URSS (in French), 31: 201–205, 1941.
- Musayev, B., Alp, M., Mustafayev, N., Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz II, Tekağaç Eylül Yayıncılık, Kütahya, 2003.
- Shalit, O.M., A First Course in Functional Analysis, CRC Press, Boca Raton, FL, USA, 2017.
- Szász, O., Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval, J. Research Nat. Bur. Standards 45, 239–245, 1950.
- Weierstrass, K., Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen veränderlichen. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 633-639 and 789-805, 1885.