

T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ



SABİT NOKTA İLE METRİK UZAYIN TAMLIĞINI KARAKTERİZE EDEN
BAZI TEOREMLER

Gülfidan ULUS

AĞUSTOS 2017

Matematik Anabilim Dalında Gülfidan ULUS tarafından hazırlanan SABİT NOKTA İLE METRİK UZAYIN TAMLIĞINI KARAKTERİZE EDEN BAZI TEOREMLER adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA

Ana Bilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan : Doç. Dr. Murat OLGUN

Üye (Danışman) : Prof. Dr. İshak ALTUN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Gonca DURMAZ

...../...../.....

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Mustafa YİĞİTOĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

SABİT NOKTA İLE METRİK UZAYIN TAMLIĞINI KARAKTERİZE EDEN BAZI TEOREMLER

ULUS, Gülfıdan

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans tezi

Danışman: Prof. Dr. İshak ALTUN

Ağustos 2017, 49 sayfa

Bu yüksek lisans tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde sabit nokta teorisinin tarihi gelişimi ve bazı uygulamalarından bahsedilmiştir. Materyal ve Yöntem bölümünde tezde bahsi geçen temel kavramlar, bazı önemli sonuçlar ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölüm olan Araştırma Bulguları bölümünde Ekeland prensibinin ifadesi ve ispatı detaylı bir biçimde incelenmiştir. Daha sonra bu prensibin çeşitleri ve karşıtı ele alınmıştır. Ardından Ekeland prensibinin sabit nokta teorisine uygulamasını dikkate almak için Banach, Caristi ve Clark sabit nokta teoremlerinin ispatları bu prensip yardımıyla incelenmiştir. Son bölüm tartışma ve sonuç için ayrılmıştır.

Anahtar kelimeler: Ekeland prensibi, Caristi sabit nokta teoremi, Tam metrik uzay

ABSTRACT

SOME THEOREMS THAT CHARACTERIZES THE COMPLETENESS OF A METRIC SPACE WITH FIXED POINT

ULUS, Gülfidan

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, M.S. Thesis

Supervisor: Prof. Dr. İshak ALTUN

Ağustos 2017, 49 pages

This thesis consists of four chapters. In the introduction section, it is mentioned that the historical development of fixed point theory and its some applications. In the second chapter some fundamental concepts, important results and theorems are given. In the third chapter, the proof of Ekeland principle is deeply examined. Then some kind of Ekeland principle and its converse are examined. Then to consider the application of Ekeland principle to fixed point theory, the proof of Banach, Caristi and Clark fixed point theorems are investigated by this principle. The final chapter is divided into the conclusion.

Key words: Ekeland Principle, Caristi fixed point theorem, Complete metric space

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca; tecrübesi ve desteği ile beni yönlendiren ve yardımcı olan değerli hocam, Sayın Prof. Dr. İshak ALTUN'a, çalışmalarımın oluşum ve yazma aşamasında yanımda bulunan Yrd. Doç. Dr. Gonca DURMAZ hocama ve verdiği manevi destekten dolayı sevgili anneme teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜRLER	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	iv
1.GİRİŞ	1
1.1.Kaynak Özetleri	2
1.2 Çalışmanın Amacı	3
2.MATERYAL VE YÖNTEM	4
2.1 Bazı Temel Kavramlar	4
2.2 Metrik Uzayda Bazı Temel Teoremler	14
3. ARAŞTIRMA BULGULARI	23
3.1.Ekeland Prensibi Çeşitleri ve Ekeland Prensibinin Karşıtı	23
3.2.Ekeland Varyasyon Prensibinin Sabit Nokta Teoriye Uygulamaları.....	32
3.3. Bazı Tamlık Karakterizasyonları	38
4. TARTIŞMA VE SONUÇLAR	47
KAYNAKLAR	48

1. GİRİŞ

Boş olmayan bir X kümesinden kendisine tanımlı bir T dönüşümünün sabit noktaları $Tx = x$ eşitliğini sağlayan $x \in X$ noktalarıdır. Sabit nokta teori bir dönüşümün hangi koşullar altında bu tür noktalarının var olduğunu araştırmaktadır. Bunun için X kümesi üzerinde cebirsel veya topolojik yapılar dikkate alarak T dönüşümünün sabit noktasının varlığı için gerekli koşullar belirlenmektedir. Örneğin X in bir kısmi sıralı küme olduğu düşünülerek monoton dönüşümlerin sabit noktalarının varlığı için araştırmalar yapılmıştır. Tarski teoreminin bir örnek olarak verilebileceği bu yöndeki çalışmalara ayrık sabit nokta teori adı verilmektedir. Yine X in bir normlu uzay olduğunu kabul ederek sürekli veya kompakt veya bunlara benzer koşulları sağlayan dönüşümlerin sabit noktalarının varlığı da araştırılmaktadır. Topolojik sabit nokta teori adı altında toplanan bu gruba Brouwer, Schauder ve Mönch teoremleri dahil edilebilir. Dikkat edilecek olursa bu teoremler sabit noktanın varlığını garanti etmektedir fakat tekliği hakkında bir hüküm vermemektedir. Banach sabit nokta teoremini temel alan ve metrik sabit nokta teori olarak adlandırılan üçüncü grupta X in bir metrik uzay olduğu kabul edilerek büzüme veya büzülme tip dönüşümlerin sabit noktalarının varlığı araştırılmaktadır. Bu yöndeki teoremler genellikle sabit noktanın tekliğini ve hatta nasıl bulunabileceğini de belirtmektedir. Günümüzde metrik sabit nokta teori çalışmalarının uygulamaları matematiğin çeşitli dallarında dikkati çekmektedir. Ayrıca metrik sabit nokta teori çalışmaları ile uzayın tamlığı arasında kuvvetli bir ilişki vardır. Bu yöndeki hemen hemen tüm teoremlerde uzayın tam olduğu kabul edilmektedir. Karşıt olarak metrik uzayda belirli özelliklere sahip tüm dönüşümlerin sabit noktalarının var olması ile metrik uzayın tamlığı garanti altına alınabilmektedir. Bu tez çalışmasında tamlık karakterizasyonu diye adlandıracağımız bu tür sonuçları detaylı bir biçimde inceleyeceğiz. Her ne kadar sabit nokta teori ile direkt bir ilişkisi görülme de Cantor teoreminin karşıtı da bir tamlık karakterizasyonu vermektedir. Cantor teoremine dayanarak ispatlanabilen Caristi sabit nokta teoreminin karşıtı da yine bir tamlık karakterizasyonu vermektedir. Bu tez çalışmasının asıl amacını oluşturan Ekeland prensibi ile de metrik uzayın tamlığı arasında bir ilişki bulunmaktadır.

1.1 Kaynak Özetleri

Temel metrik ve topolojik kavramlar için sırasıyla Soykan, Koçak ve Ansari'nin "Metrik Uzaylar ve Topolojisi", "Genel Topolojiye giriş ve Çözümlü Alıştırmalar" ve "Metric Spaces Including Fixed Point Theory and Set-Valued Maps" adlı kitaplarından yararlanılmıştır [1,2,3]. Küme değerli dönüşümler ve Hausdorff metriği ile ilgili tanım ve özellikler için Mınak'ın "Metrik Uzayda Küme Değerli Dönüşümler için Sabit Nokta Teoremleri" adlı Yüksek Lisans tezi ile Aubin ve Farnkowska'nın "Set Valued Analysis" adlı kitabı dikkate alınmıştır [4,5]. Sabit nokta teori için Istratescu'nun "Fixed Point Theory and Introduction, Singh, Watson ve Srivastava'nın "Fixed Point Theory and Best Approximation: The KKM-map Principle" and Agarwal, O'Regan ve Sahu'nun "Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications" adlı kitaplarından yararlanılmıştır [6,7,8]. Ayrıca bazı özel sabit nokta teoremleri için "Pointwise contraction criteria for the existence of fixed points", "On a fixed point theorem for metric spaces", "Some results on fixed points", "Kannan's fixed point theorem" adlı kaynaklar da göz önüne alınmıştır [9,10,11,12]. Caristi sabit nokta teoremi ve onun karşıtı için sırasıyla "Fixed point theorems for mapping satisfying inwardness condition" ve Caristi's fixed point theorem on metric convexity" adlı kaynaklar kullanılmıştır [13,14]. Ekeland prensibi, onun kuvvetli ve zayıf formları ve karşıtı için "On the variational principle" ve "A survey on characterization of metric completeness" adlı çalışmalar dikkate alınmıştır [15,16]. Son olarak metrik uzayın bazı tamlık karakterizasyonları için yukarıdaki çalışmanın yanı sıra Dhompongsa ve Yingtaweessittikul'un "Fixed point for multivalued mappings and the metric completeness" adlı makalesi ile Mot ve Petruşel'in "Fixed point theory for a new type of contractive multivalued operators" adlı makalesinden yararlanılmıştır [17,18].

1.2 Çalışmanın Amacı

Bu tez çalışmasının amacı, özellikle sabit nokta teori ile yakından ilişkisi bulunan Ekeland prensibini, onun kuvvetli ve zayıf formunu, sabit nokta teoriye uygulamasını ve bunun yardımıyla yapılan tamlık karakterizasyonunu incelemektir. İlk olarak Cantor ve Caristi teoremleri ile elde edilen tamlık sonuçları incelenecek daha sonra Ekeland prensibi ile bağlantıları kurulacaktır.



2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1 Bazı Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1: X boş olmayan bir küme ve $\preceq$, X de bir bağıntı olsun. Eğer

- a) Her $x \in X$ için $x \preceq x$ (yansıma özelliği)
- b) $x \preceq y$ ve $y \preceq x$ ise $x = y$ (ters simetri özelliği)
- c) $x \preceq y$ ve $y \preceq z$ ise $x \preceq z$ (geçişme özelliği)

şartları sağlanıyorsa $\preceq$ bağıntısına kısmi sıralama bağıntısı denir.

X de bir kısmi sıralama bağıntısı tanımlanmışsa X e kısmi sıralı küme denir. Eğer kısmi sıralı bir kümede x, y elemanları için $x \preceq y$ veya $y \preceq x$ şartlarından en az biri doğru ise x ve y karşılaştırılabilir denir. Kısmi sıralı bir kümenin herhangi iki elemanı karşılaştırılabilirse bu kümeye tam sıralı küme denir.

Örnek 2.1.1:

- a) $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde bilinen $\leq$ bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır.
- b) Bir X kümesinin $P(X)$ kuvvet kümesi $\subseteq$ kapsama bağıntısına göre kısmi sıralı bir kümedir.
- c) $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerinde ' $m \preceq n \Leftrightarrow m$ sayısı n sayısını böler' şeklinde tanımlı $\preceq$ bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

Tanım 2.1.2: $(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir küme $A \subseteq X$ olsun. Her $x \in A$ için $u \preceq x$ olacak şekilde $u \in X$ varsa u ya A nın X deki alt sınırı denir. Benzer şekilde her $x \in A$ için $x \preceq v$ olacak şekilde $v \in X$ varsa v ye A nın X deki üst sınırı denir. Üst sınıra sahip bir kümeye üstten sınırlı; alt sınıra sahip bir kümeye de alttan sınırlı küme denir. Alttan ve üstten sınırlı kümeye ise kısaca sınırlı küme denir.

Tanım 2.1.3: $(X, \leq)$ kısmi sıralı bir küme, $A \subseteq X$ ve A nın alt sınırlarının kümesi A_1 olsun. $\alpha \in A_1$ olmak üzere her $x \in A_1$ için $x \leq \alpha$ ise α ya A nın en büyük alt sınırı (A nın infimumu) denir ve $\inf A$ ile gösterilir. A nın üst sınırlarının kümesi A_2 olsun. $\beta \in A_2$ olmak üzere her $y \in A_2$ için $\beta \leq y$ ise β ya A nın en küçük üst sınırı (A nın supremumu) denir ve $\sup A$ ile gösterilir. $\inf A \in A$ olması halinde $\inf A$ ya A nın minimumu; $\sup A \in A$ olması halinde ise $\sup A$ ya A nın maksimumu denir.

Tanım 2.1.4: $(X, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $x \leq y$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için $T(x) \leq T(y)$ oluyorsa T ye azalmayan dönüşüm denir.

Tanım 2.1.5: X boş olmayan bir küme olsun. Eğer $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için

- a) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- b) $d(x, y) = d(y, x)$
- c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

koşullarını sağlıyorsa d ye X üzerinde bir metrik ve (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir.

Tanım 2.1.6: (X, d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ bir reel sayı olsun.

$$B(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$$

kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar,

$$D(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar,

$$S(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) = r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı yuvar yüzeyi denir.

Tanım 2.1.7: (X, d) bir metrik uzay ve A , X in boş olmayan alt kümesi olsun. Eğer her $x \in A$ için $B(x, r) \subseteq A$ olacak şekilde bir r pozitif sayısı varsa A kümesine açıktır denir.

Tanım 2.1.8: (X, d) bir metrik uzayının bir A alt kümesi için $A^c = X - A$ açık ise A ya kapalı denir.

Önerme 2.1.1: (X, d) bir metrik uzay olsun.

- a) (X, d) içindeki her açık yuvar açık kümedir,
- b) (X, d) içindeki her kapalı yuvar kapalı kümedir.

Tanım 2.1.9: (X, d) bir metrik uzay, A ve B de X in boş olmayan iki alt kümesi olsun. $x \in X$ olmak üzere

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

sayısına A ve B kümeleri arasındaki uzaklık,

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$$

sayısına x noktasının A kümesine olan uzaklığı,

$$d(A) = \sup\{d(a, b) \mid a, b \in A\}$$

sayısına A kümesinin çapı denir.

Tanım 2.1.10: (X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_\varepsilon$ olduğunda $x_n \in B(x, \varepsilon)$ olacak şekilde bir n_ε doğal sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisi X içinde x noktasına yakınsar denir. Kısaca $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ veya $x_n \rightarrow x$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.11: $(X, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun.

- a) Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \leq x_{n+1}$ ise $\{x_n\}$ dizisine artan;
- b) Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \leq x_n$ ise $\{x_n\}$ dizisine azalan;
- c) Artan veya azalan bir diziye monoton dizi denir.

Önerme 2.1.2: (X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A nın kapalı olması için gerek ve yeter şart her $\{x_n\} \subseteq A$ için $x_n \rightarrow x$ olduğundan $x \in A$ olmasıdır.

Önerme 2.1.3: Bir (X, d) metrik uzayında $\{x_n\}$ dizisi yakınsak ise her $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi de aynı noktaya yakınsar.

Tanım 2.1.12: (X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda herhangi bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_\varepsilon$ olduğunda $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_ε doğal sayısı var ise $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.1.13: (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi bu uzayda bir noktaya yakınsıyorsa bu uzaya tam metrik uzay denir.

Tanım 2.1.14: (X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A kümesindeki her dizi yine A da yakınsayan bir alt diziyi içeriyorsa A kümesine dizisel kompakt denir. Eğer X kümesi içindeki her dizinin yakınsak bir alt dizisi varsa bu uzaya dizisel kompakt metrik uzay denir.

Tanım 2.1.15: X boştan farklı bir küme, d_1 ve d_2 , X üzerinde iki metrik olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$ad_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq bd_1(x, y)$$

olacak şekilde $a, b > 0$ sayıları varsa d_1 ve d_2 metriklerine denk metrikler denir ve bu durum $d_1 \sim d_2$ şeklinde gösterilir.

Örnek 2.1.2: $X = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ olmak üzere

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1, 2, \dots, n\}$$

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

$$d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

metrikleri denk metriklerdir.

Tanım 2.1.16: (X, d) bir metrik uzay olsun. Her $x, y \in X$ için

$$[x, y] = \{z \in X : d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)\}$$

kümesine x ile y noktaları arasındaki segment denir.

Tanım 2.1.17: (X, d) bir metrik uzay ve $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun ve $x_0 \in X$ noktasını göz önüne alalım. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ olacak şekilde her $\{x_n\}$ dizisi için

$$\varphi(x_0) \leq \liminf \varphi(x_n)$$

oluyorsa φ fonksiyonuna x_0 noktasında alttan yarı sürekli fonksiyon,

$$\limsup \varphi(x_n) \leq \varphi(x_0)$$

oluyorsa φ fonksiyonuna x_0 noktasında üstten yarı sürekli fonksiyon denir.

Eğer φ , X in her noktasında alttan (üstten) yarı sürekli ise φ ye alttan (üstten) yarı sürekli fonksiyon denir.

Tanım 2.1.18: X boş olmayan bir küme ve $f: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda en az bir $x \in X$ için $f(x) < \infty$ oluyorsa f ye bir proper fonksiyon denir. f

fonksiyonun reel değerli olduğu noktaların kümesine f nin domaini denir ve $\text{dom}(f)$ ile gösterilir. Yani

$$\text{dom}(f) = \{x \in X : f(x) < \infty\}$$

şeklinde tanımlanan kümedir.

Teorem 2.1.1: (X, d) bir metrik uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan bir küme ve $f: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ bir proper fonksiyon olsun. K kümesi kompakt ve f fonksiyonu alttan yarı sürekli ise

$$f(x_0) = \inf_{x \in K} f(x)$$

olacak şekilde bir $x_0 \in K$ noktası vardır.

Tanım 2.1.19: (X, d) bir metrik uzay $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$$

olacak biçimde $\alpha \geq 0$ sayısı varsa, T ye Lipschitz dönüşümü denir. Bu eşitsizliği sağlayan en küçük α sayısına T nin Lipschitz sabiti denir ve L ile gösterilir. T Lipschitz dönüşümü için $L < 1$ ise T ye büzülme dönüşümü $L \leq 1$ ise T ye genişlemeyen dönüşüm denir. $x \neq y$ olacak biçimdeki her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

oluyorsa T ye büzülebilir dönüşüm denir. Ayrıca, her Lipschitz fonksiyonu sürekli. Ayrıca (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa T ye bir yönlendirilmiş büzülme dönüşümü denir.

a) T sürekli

b) $Tx \neq x$ olacak şekilde her $x \in X$ ve en az bir $z \in [x, Tx] \setminus \{x\}$ için

$$d(Tx, Tz) \leq \alpha d(x, z)$$

eşitsizliğini sağlayan $\alpha \in (0,1)$ vardır.

(X, d) bir metrik uzay olmak üzere $P(X)$, X in boş olmayan tüm alt kümelerinin sınıfı, $C(X)$, X in boş olmayan tüm kapalı alt kümelerinin sınıfını, $B(X)$, X in boş olmayan tüm sınırlı alt kümelerinin sınıfını ve son olarak $CB(X)$ de X in boş olmayan tüm kapalı ve sınırlı alt kümelerinin sınıfını gösterebiliriz.

Tanım 2.1.20: X ve Y boş olmayan iki küme olsun. $T \subseteq X \times Y$ ise T ye X den Y ye bir küme değerli dönüşüm denir ve bu $T: X \rightarrow P(Y)$ ile gösterilir. $T: X \rightarrow P(Y)$ küme değerli dönüşümün tersi

$$(x, y) \in T \Leftrightarrow (y, x) \in T^{-1}$$

şeklinde tanımlanır.

T , X den Y ye bir küme değerli dönüşüm ve $x \in X$ olsun. T nin x noktasındaki görüntüsü

$$Tx = \{y \in Y: (x, y) \in T\}$$

kümesidir. Yine $A \subseteq X$ için

$$T(A) = \bigcup_{x \in A} Tx$$

kümesi A nın T küme değerli dönüşüm altındaki görüntüsüdür. Ayrıca

$$\bigcup_{x \in A} Tx = \{y \in Y: T^{-1}(y) \cap A \neq \emptyset\}$$

dır.

Tanım 2.1.21: $T: X \rightarrow P(X)$ dönüşümü için $x_0 \in Tx_0$ olacak şekilde $x_0 \in X$ varsa bu noktaya T nin sabit noktası denir. T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi $F(T)$ ile gösterilir. Yani

$$F(T) = \{x \in X: x \in Tx\}$$

dir.

(X, d) bir metrik uzay olsun. $A, B \in P(X)$ için

$$\delta(A, B) = \sup_{x \in A} \{D(x, B)\} = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \{d(x, y)\}$$

ve

$$H(A, B) = \max\{\delta(A, B), \delta(B, A)\}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.1.3: $X = \mathbb{R}$ kümesi alışılmış metrik ile göz önüne alınsın. $A = [1, 2]$ ve $B = [4, \infty)$ kümeleri için

$$\delta(A, B) = 3, \quad \delta(B, A) = \infty$$

olduğundan

$$H(A, B) = \max\{\delta(A, B), \delta(B, A)\} = \infty$$

bulunur. δ nin simetrik olmadığı da buradan görülebilir. Yani genelde

$$\delta(A, B) \neq \delta(B, A)$$

dır. Ayrıca, δ ve H ın $P(X) \times P(X)$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar olmadığı da görülmektedir.

Önerme 2.1.4: Eğer A ve B kümeleri (X, d) metrik uzayının sınırlı alt kümeleri ise $\delta(A, B)$, $\delta(B, A)$ ve $H(A, B)$ birer reel sayıdır. O halde δ ve H , $B(X) \times B(X)$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlardır.

Teorem 2.1.2: (X, d) bir metrik uzay ve $A, B \in P(X)$ olsun. Bu durumda

$$H(A, B) = \sup\{|D(x, A) - D(x, B)| : x \in X\}$$

dir.

Önerme 2.1.5: A ve B reel sayıların boş kümeden farklı üstten sınırlı iki alt kümesi olsun. Bu durumda

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$$

dir.

Önerme 2.1.6: (X, d) bir metrik uzay olsun. Bu durumda $H, CB(X)$ üzerinde bir metriktir. Bu metriğe Hausdorff metriği denir.

Önerme 2.1.7: $A, B \in CB(X)$ ve $a \in A$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için

$$d(a, b) \leq H(A, B) + \varepsilon$$

olacak şekilde bir $b \in B$ vardır.

Önerme 2.1.7: $A, B \in CB(X)$ ve $a \in A$ olsun. Bu durumda her $q > 1$ için

$$d(a, b) \leq qH(A, B)$$

olacak şekilde bir $b \in B$ vardır.

Önerme 2.1.8: (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow CB(X)$ küme değerli dönüşüm ve $z \in X$ olsun. Bu durumda her $x \in X$ için

$$D(z, Tz) \leq d(z, x) + D(x, Tz)$$

dir.

İspat: Her $x \in X$ için

$$\begin{aligned} D(z, Tz) &= \inf\{d(z, y): y \in Tz\} \\ &< \inf\{d(z, x) + d(x, y): y \in Tz\} \\ &< d(z, x) + \inf\{d(x, y): y \in Tz\} = d(z, x) + D(x, Tz) \end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 2.1.9: (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow CB(X)$ küme değerli dönüşüm ve $z \in X$ olsun. Bu durumda her $x \in X$ için

$$D(z, Tz) \leq D(z, Tx) + H(Tx, Tz)$$

dir.

İspat: Her $v \in X$ için

$$D(z, Tz) \leq d(z, v) + D(v, Tz)$$

olduğundan her $v \in Tx$ içinde

$$D(z, Tz) \leq d(z, v) + D(v, Tz)$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca

$$D(v, Tz) \leq H(Tx, Tz)$$

olduğundan her $v \in Tx$ için

$$D(z, Tz) \leq d(z, v) + H(Tx, Tz)$$

olur. $v \in Tx$ üzerinden infimum alınırsa istenilen elde edilir.

Tanım 2.1.22: (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow C(X)$ küme değerli bir dönüşüm olsun. Ayrıca $x \mapsto d(x, Tx)$ fonksiyonu alttan yarı sürekli ve $\theta: [0,1) \rightarrow (\frac{1}{2}, 1]$ azalmayan bir fonksiyon olsun. O zaman her $x, y \in X$ için

$$\theta(r)d(x, Tx) \leq d(x, y) \Rightarrow H(Tx, Ty) \leq r \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty)\}$$

önermesi doğru olacak şekilde bir $a \in [0,1)$ sabiti varsa T ye Dhompongsa-Yingtaweessittikul (DY) dönüşümü denir.

Tanım 2.1.23: (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow C(X)$ küme değerli bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$\frac{(1-b-c)}{(1+a)}d(x, Tx) \leq d(x, y) \Rightarrow H(Tx, Ty) \leq ad(x, y) + bd(x, Tx) + cd(y, Ty)$$

önermesi doğru olacak şekilde $a, b, c \in [0,1)$ sabitleri varsa T ye Mot-Petrusel(MP) dönüşümü denir.

2.2. Metrik Uzayda Bazı Temel Teoremler

Teorem 2.2.1 (Cantor Teoremi): (X, d) bir tam metrik uzay ve $\{A_n\}$ de X in boş olmayan kapalı alt kümelerinin bir dizisi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $A_{n+1} \subseteq A_n$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} d(A_n) = 0$ ise bu durumda

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

kümesi tek noktadan ibarettir.

İspat: Önce $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$ olduğunu gösterelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in A_n$ seçelim. Bu durumda $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ için $x_m \in A_n$ olacağından $d(x_m, x_n) \leq d(A_n)$ olur.

Yani $\{x_n\}$ dizisi X de bir Cauchy dizisidir. X tam olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z$ olacak biçimde bir $z \in X$ vardır. Yine $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ için $x_m \in A_n$ olduğundan $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = z \in \overline{A_n} = A_n$ olur. Bu durum Her $n \in \mathbb{N}$ için geçerli olduğundan

$$z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

dir. Şimdi $x, y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ ise, her $n \in \mathbb{N}$ için $x, y \in A_n$ olacağından

$$d(x, y) \leq d(A_n)$$

olur. Bu ise $d(x, y) = 0$ yani $x = y$ olduğunu gösterir ki sonuç olarak

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x\}$$

bulunur.

Cantor teoreminde kümelerin kapalı olması ve çaplarının sıfıra gitmesi koşulları kaldırılamaz.

Örnek 2.2.1: $(\mathbb{R}, d)$ alışılmış metrik uzay olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n = [n, \infty)$ kümelerini göz önüne alalım $\{A_n\}$ iç içe azalan kapalı kümelerin bir dizisidir. Fakat $\lim_{n \rightarrow \infty} d(A_n) \neq 0$ ve $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ dir.

Örnek 2.2.2: $(\mathbb{R}, d)$ alışılmış metrik uzay olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n = (0, \frac{1}{n})$ kümelerini göz önüne alalım. $\{A_n\}$ iç içe azalan bir dizi ve üstelik $\lim_{n \rightarrow \infty} d(A_n) = 0$ dır. Ancak A_n ler kapalı değildir ve $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ dır.

Teorem 2.2.2 (Cantor Teoreminin Karşıtı): Bir (X, d) metrik uzayının, iç içe azalan, çapları sıfıra giden ve boş olmayan kapalı alt kümelerinden oluşan her bir ailesinin arakesiti boştan farklı ise bu metrik uzay tamdır.

İspat: $\{x_n\}$, X içinde bir Cauchy dizisi olsun. Bu dizinin n . teriminden sonraki tüm terimlerinin kümesinin kapanışını A_n ile gösterelim. Yani

$$A_n = \overline{\{x_k : k \geq n\}}$$

olsun. O zaman A_n ler boş olmayan kapalı ve iç içe azalan kümelerdir. Ayrıca $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisi olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} d(A_n) = 0$ dır. Böylece $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ boş değildir. Dolayısıyla bir $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ noktası vardır. Şimdi her n doğal sayısı için $x_n, x \in A_n$ olduğundan $d(x_n, x) \leq d(A_n)$ olur ki bu $x_n \rightarrow x$ olduğunu gösterir. Böylece (X, d) metrik uzayı tamdır.

Şimdi Caristi sabit nokta teoremini daha iyi kavrayabilmek için aşağıdaki problemi göz önüne alalım:

(X, d) bir metrik uzay, $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm ve $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x \in X$ için

$$d(x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$$

eşitsizliğinin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda T dönüşümünün bir sabit noktaya sahip olabilmesi için (X, d) metrik uzayı ile φ fonksiyonun sağlaması gereken koşullar nelerdir?

Öncelikle (X, d) kompakt bir uzay ve φ sürekli bir fonksiyon olsun. Bilindiği gibi kompakt bir kümenin sürekli fonksiyon altındaki görüntüsü de kompakt ve $\mathbb{R}$ de kompakt kümeler kapalı ve sınırlıdır. Dolayısıyla $\varphi(X)$ kümesi $\mathbb{R}$ de kapalı ve sınırlıdır. Böylece φ fonksiyonu X üzerinde maksimum ve minimum değerlerini alır. Yani

$$\varphi(x_0) = \min \varphi(X) = \inf \varphi(X)$$

olacak şekilde bir $x_0 \in X$ noktası vardır. Bu durumda $\varphi(x_0) \leq \varphi(Tx_0)$ olur. O zaman

$$d(x_0, Tx_0) \leq \varphi(x_0) - \varphi(Tx_0) \leq 0$$

eşitsizliğinden $x_0 = Tx_0$ elde edilir.

Şimdi (X, d) kompakt bir uzay ve φ alttan yarı sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman Teorem 2.1.1 den

$$\varphi(x_0) = \min \varphi(X) = \inf \varphi(X)$$

olacak şekilde bir $x_0 \in X$ noktası vardır. Benzer düşünce ile bu x_0 noktasının T nin bir sabit noktası olduğu görülebilir.

Şimdi burada X üzerindeki kompaktlık koşulu yerine tamlık alındığında sabit noktanın var olduğunu garanti eden Caristi sabit nokta teoremini inceleyeceğiz. Ancak bu durumda φ fonksiyonunun alttan sınırlı olması gerektiğine dikkat edelim. Öncelikle aşağıdaki lemmaları ifade ve ispat edelim:

Lemma 2.2.1: (X, d) bir tam metrik uzay ve $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ alttan sınırlı ve alttan yarı sürekli bir fonksiyon olsun. $\{x_n\}$, X içinde her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \varphi(x_n) - \varphi(x_{n+1})$$

şartını sağlayan bir dizi olsun. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi bir $z \in X$ noktasına yakınsar ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, z) \leq \varphi(x_n) - \varphi(z)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \varphi(x_n) - \varphi(x_{n+1})$$

eşitsizliği sağlandığından $\{\varphi(x_n)\}$ dizisi azalandır. Ayrıca φ fonksiyonu alttan sınırlı olduğundan $\{\varphi(x_n)\}$ yakınsaktır. Diğer taraftan her $m \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{m-1} d(x_n, x_{n+1}) &= d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq \varphi(x_0) - \varphi(x_1) + \varphi(x_1) - \varphi(x_2) + \cdots + \varphi(x_{m-1}) - \varphi(x_m) \\ &\leq \varphi(x_0) - \varphi(x_m) \\ &\leq \varphi(x_0) - \inf_{n \in \mathbb{N}} \varphi(x_n) \end{aligned}$$

olduğundan $m \rightarrow \infty$ için limit alınır

$$\sum_{n=0}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) \leq \varphi(x_0) - \inf_{n \in \mathbb{N}} \varphi(x_n)$$

bulunur ki bu ifade serinin yakınsak olduğunu gösterir. Ayrıca $m > n$ için

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}) \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} d(x_k, x_{k+1}) \end{aligned}$$

olur ki yakınsak bir seride kalan terimin limiti sıfır olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0$$

elde edilir. Yani $\{x_n\}$, X içinde bir Cauchy dizisidir. X tam olduğundan bu dizi bir $z \in X$ noktasına yakınsar. Ayrıca $m > n$ için

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &\leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}) \\
&\leq \varphi(x_n) - \varphi(x_m)
\end{aligned}$$

olduğundan $m \rightarrow \infty$ için limit alınırsa ve φ fonsiyonunun alttan yarı sürekli olduğu düşünülürse $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, z) \leq \varphi(x_n) - \varphi(z)$$

bulunur.

Lemma 2.2.2: (X, d) bir tam metrik uzay ve $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ alttan sınırlı ve alttan yarı sürekli bir fonskiyon olsun. Kabul edelim ki

$$\inf \varphi(X) < \varphi(u)$$

olacak şekilde her $u \in X$ için $u \neq v$ ve $d(u, v) \leq \varphi(u) - \varphi(v)$ şartlarını sağlayan bir $v \in X$ var olsun. Bu durumda

$$\varphi(x_0) = \min \varphi(X) = \inf \varphi(X)$$

olacak şekilde bir $x_0 \in X$ noktası vardır.

Teorem 2.2.3 (Caristi Sabit Nokta Teoremi): (X, d) bir tam metrik uzay, $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ alttan sınırlı ve alttan yarı sürekli bir fonskiyon ve $T: X \rightarrow X$, her $x \in X$ için

$$d(x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$$

özelliğine sahip bir fonskiyon olsun. Bu durumda T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat: Eğer T dönüşümü sürekli ise teoremin ispatı basittir. Gerçekten $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = T^n x_0$ biçiminde tanımlı $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alalım. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \varphi(x_n) - \varphi(x_{n+1})$$

olacağından Lemma 2.2.1 gereği $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. Dolayısıyla bu dizi bir $z \in X$ için noktasına yakınsar. T dönüşümü sürekli olduğundan $Tz = z$ bulunur. Şimdi T dönüşümünün sürekli olmaması durumunda ispatı yapalım. Bunun için $u \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere

$$C = \{x \in X: d(u, x) \leq \varphi(u) - \varphi(x)\}$$

kümesini göz önüne alalım. $Tu \in C$ olduğundan C boş değildir. Ayrıca C bir kapalı kümedir. Şimdi $TC \subseteq C$ olduğunu gösterelim. $x \in C$ olsun.

$$d(u, x) \leq \varphi(u) - \varphi(x) \text{ olup}$$

$$\varphi(Tx) \leq \varphi(x) - d(x, Tx)$$

$$\leq \varphi(x) - d(x, Tx) + \varphi(u) - \varphi(x) - d(u, x)$$

$$= \varphi(u) - [d(x, Tx) + d(u, x)]$$

$$\leq \varphi(u) - d(u, Tx)$$

olduğundan $Tx \in C$ dir.

Şimdi kabul edelim ki her $x \in C$ için $Tx \neq x$ olsun. O halde her $x \in C$ için $x \neq w$ ve $d(x, w) \leq \varphi(x) - \varphi(w)$ olacak biçimde $w \in C$ vardır. Dolayısıyla Lemma 2.2.2 den

$$\varphi(x_0) = \inf \varphi(X)$$

olacak biçimde $x_0 \in C$ vardır. Böylece

$$0 < d(x_0, Tx_0) \leq \varphi(x_0) - \varphi(Tx_0) = 0$$

olup bu bir çelişkidir. Bu durumda $Tz = z$ olacak biçimde bir $z \in C \subseteq X$ vardır.

Caristi'nin teoremi sabit noktanın tekliğini garanti etmez.

Örnek 2.2.3: $X = [0, \infty)$ ve $d(x, y) = |x - y|$ olsun. $T: X \rightarrow X$ dönüşümü $Tx = x$ ve $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = 1$ fonksiyonlarını göz önüne alalım. Bu durumda her $x \in X$ için

$$d(x, Tx) = 0 \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$$

olduğundan T , Caristi sabit nokta teoreminin tüm şartlarını sağlar. Fakat, T dönüşümünün sabit noktası tek değildir.

Tanım 2.2.1: (X, d) bir metrik uzay, $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm ve $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ alttan sınırlı ve alttan yarı sürekl bir fonksiyon olsun. Her $x \in X$ için

$$d(x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T ye bir Caristi dönüşümü adı verilir.

Bu tanım dikkate alındığında Caristi sabit nokta teoremi şu şekilde de ifade edilebilir:

Tam metrik uzayda her Caristi dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir.

Şimdi Caristi sabit nokta teoreminin karşıtını da içeren ve dolayısıyla bir tamlık karakterizasyonu veren aşağıdaki teoremi ifade ve ispat edelim.

Teorem 2.2.4 (Caristi-Kirk Teoremi): Bir (X, d) metrik uzayının tam olması için gerek ve yeter koşul bu uzayda her Caristi dönüşümünün bir sabit noktaya sahip olmasıdır.

İspat: Caristi Sabit Nokta Teoremi ile gerek şart ispatlanmıştır. Tersine X deki her Caristi dönüşümünün bir sabit noktasının var olduğunu kabul edelim. (X, d) tam olmasın. O zaman X de yakınsak olmayan bir $\{x_n\}$ Cauchy dizisi vardır. Şimdi her $z \in X$ için $\varphi(z) := \lim_{m \rightarrow \infty} 2d(x_m, z)$ olsun. O zaman φ reel değerli ve iyi tanımlıdır. Dolayısıyla $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olup aynı zamanda alttan sınırlı ve alttan yarı süreklidir. Üstelik her $z \in X$ için $\varphi(z) > 0$ dır. Şimdi her $x \in X$ için n sayısı $0 < d(x, x_n) \leq \varphi(x) - \varphi(x_n)$ eşitsizliğini sağlayan en küçük pozitif tam sayı olsun. Böylece bir n sayısını seçmek mümkündür, Çünkü hem $d(x, x_n)$ terimleri $\frac{\varphi(x)}{2} > 0$ noktası civarında hemde $\varphi(x_n)$ dizisi 0'a yakınsar. Her $x \in X$ için bu şekilde seçilen n sayısını dikkate alarak $T: X \rightarrow X$, $Tx = x_n$ dönüşümünü tanımlayalım. O zaman T sabit noktası olmayan bir Caristi dönüşümüdür ki bu bir çelişkidir.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1 Ekeland Prensibi, Çeşitleri ve Ekeland Prensibinin Karşıtı

Bu bölümde Ekeland varyasyon prensibinin kuvvetli formunu, Ekeland prensibinin çeşitlerini ve bu prensibin tersini ifade ve ispat edeceğiz.

Teorem 3.1.1 (Ekeland Varyasyon Prensibinin Kuvvetli Formu): (X, d) bir tam metrik uzay ve $f: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ proper, alttan sınırlı ve alttan yarı sürekli fonksiyon olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$f(x') \leq \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon$$

olacak şekilde $x' \in X$ verilsin. Bu durumda $\lambda > 0$ için aşağıdaki şartları sağlayan bir $x_0 \in X$ noktası vardır.

- a) $f(x_0) \leq f(x')$
- b) $d(x', x_0) \leq \lambda$
- c) Her $x \in X \setminus \{x_0\}$ için $f(x_0) < f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x, x_0)$

İspat: Her $x, y \in X$ için $d_\lambda(x, y) = \frac{1}{\lambda} d(x, y)$ olarak alalım. Buna göre d_λ, d ye denk bir metriktir ve dolayısıyla (X, d_λ) tamdır. X kümesi üzerinde

$$x \preceq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y) - \varepsilon d_\lambda(x, y)$$

önermesi ile $\preceq$ bağıntısı tanımlansın. Bu durumda $\preceq$ bir kısmi sıralama bağıntısıdır. Şimdi X in alt kümelerinden oluşan bir $\{S_n\}$ dizisini aşağıdaki şekilde verelim. x' teoremde belirtilen nokta olmak üzere $x_1 = x'$ için

$$S_1 = \{x \in X: x \preceq x_1\}$$

olsun. $x_2 \in S_1$ noktasını

$$f(x_2) \leq \inf_{x \in S_1} f(x) + \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde seçelim. Bu x_2 noktasını dikkate alarak

$$S_2 = \{x \in X : x \preceq x_2\}$$

olsun. Yine $x_3 \in S_2$ noktasını

$$f(x_3) \leq \inf_{x \in S_2} f(x) + \frac{\varepsilon}{2^2}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde seçelim. Bu şekilde devam edilerek S_n kümesini

$$S_n = \{x \in X : x \preceq x_n\}$$

olacak şekilde tanımlayalım ve $x_{n+1} \in S_n$ noktasını

$$f(x_{n+1}) \leq \inf_{x \in S_n} f(x) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde seçelim. Bu durumda $\{S_n\}$ iç içe azalan bir küme dizisidir.

Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için S_n kümesinin kapalı olduğunu göstermeliyiz. $\{u_m\}$, terimleri S_n içerisinde bulunan ve $u \in X$ noktasına yakınsayan herhangi bir dizi olsun. Bu durumda $u_m \preceq x_n$ ve buradan

$$f(u_m) \leq f(x_n) - \varepsilon d_\lambda(u_m, x_n)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte, f alttan yarı sürekli olduğundan $m \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$f(u) \leq f(x_n) - \varepsilon d_\lambda(u, x_n)$$

elde edilir. Buradan $u \leq x_n$ olur. Yani $u \in S_n$ olup S_n kümesi kapalıdır.

Şimdi S_n kümesinin çapını $d(S_n)$ olarak alalım. Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} d(S_n) = 0$ olduğunu göstermeliyiz. $u \in S_n$ keyfi bir nokta olsun. Bu durumda $u \leq x_n$ ve

$$f(u) \leq f(x_n) - \varepsilon d_\lambda(u, x_n) \quad (1)$$

dir. Diğer taraftan $\{S_n\}$ küme dizisi iç içe azalan olduğundan $u \in S_{n-1}$ dir. Ayrıca $x_n \in S_{n-1}$ olduğundan

$$f(x_n) \leq \inf_{x \in S_{n-1}} f(x) + \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}$$

yazılabilir. Böylece

$$f(x_n) \leq f(u) + \frac{\varepsilon}{2^{n-1}} \quad (2)$$

elde edilir. (1) ve (2) eşitsizlikleri dikkate alındığında her $u \in S_n$ için

$$d_\lambda(u, x_n) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan $u, v \in S_n$ keyfi noktaları için

$$\begin{aligned} d_\lambda(u, v) &\leq d_\lambda(u, x_n) + d_\lambda(x_n, v) \\ &\leq \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

olup $d(S_n) \leq \frac{1}{2^n}$ dir. Böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} d(S_n) = 0$ olur. Bu durumda (X, d_λ) tam ve $\{S_n\}$, X içerisinde kapalı kümelerin iç içe azalan ve çapları sıfıra giden bir dizi olduğundan Cantor Teoremi gereğince $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ kümesi $x_0 \in S_n$ olacak şekilde bir

tek noktadan ibarettir. Şimdi bu x_0 noktasının teoremin şartlarını sağladığını gösterelim. $x_0 \in S_1$ olduğundan $x_0 \leq x_1 = x'$ ve

$$f(x_0) \leq f(x') - \varepsilon d_\lambda(x_0, x')$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece $f(x_0) \leq f(x')$ olup teoremin (a) şartı sağlanır. Şimdi $x \neq x_0$ olsun. Eğer $x \leq x_0$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $x \in S_n$ olacağından $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ olur ki bu bir çelişkidir. Bu durumda $x \not\leq x_0$ dır. Böylece

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon d_\lambda(x, x_0)$$

eşitsizliği sağlanır ki bu (c) şartının sağlandığını gösterir. Son olarak

$$d_\lambda(x', x_n) = d_\lambda(x_1, x_n) \leq \sum_{m=1}^{n-1} d_\lambda(x_m, x_{m+1}) \leq \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{2^m}$$

olduğundan $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $d_\lambda(x', x_0) \leq 1$ olup buradan

$$d(x', x_0) \leq \lambda$$

bulunur. Böylece (b) şartı da sağlanmış olur. Yukarıdaki teoremden (b) şartı $x_0 \in D(x', \lambda)$ şeklinde de ifade edilebilir.

Uyarı 3.1.1: Ekeland varyasyon prensibinin kuvvetli formu, $\lambda, \varepsilon > 0$ için x' , (2) eşitsiliğinde belirtilen yaklaşık ε çözüm olmak üzere, x' nün λ komşuluğunda bulunan ve f altındaki görüntüsü x' nün görüntüsünden daha küçük olan ve üstelik (c) özelliğini sağlayan bir x_0 noktasının var olduğunu anlamına gelir. Ayrıca (c) özelliği $f(\cdot) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(\cdot, x_0)$ fonksiyonunun x_0 noktasında minimum değeri aldığını göstermektedir.

Aubin ve Frankowska, Ekeland varyasyon prensibinin yukarıdaki teoremine denk olan aşağıdaki formunu elde etmişlerdir.

Teorem 3.1.2 (Ekeland Varyasyon Prensibinin Kuvvetli Formu): (X, d) bir tam metrik uzay, $f: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ proper, alttan sınırlı ve alttan yarı sürekli bir fonksiyon, $e > 0$ ve $x' \in \text{dom}(f)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki şartları sağlayan bir $w \in X$ noktası vardır.

- a) $f(w) - f(x') + ed(x', w) \leq 0$,
- b) Her $x \in X \setminus \{w\}$ için $f(w) < f(x) + ed(x, w)$

İspat: Her $x, y \in X$ için $d_e(x, y) = ed(x, y)$ olarak alalım. Buna göre d_e , d ye denk bir metriktir ve böylece (X, d_e) tamdır. Şimdi $x \in X$ için

$$S(x) = \{y \in X: f(y) - f(x) + d_e(x, y) \leq 0\}$$

kümesini tanımlayalım. İlk olarak her $x \in X$ için $f(x) < \infty$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $x \in X$ için $x \in S(x)$ olduğundan $S(x)$ kümesi boş değildir. Dolayısıyla bu kümeden bir $y \in S(x)$ noktasını alabiliriz. Bu durumda

$$f(y) - f(x) + d_e(x, y) \leq 0$$

eşitsizliği ile $z \in S(y)$ noktası için

$$f(z) - f(y) + d_e(y, z) \leq 0$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizliklerden

$$f(z) - f(x) + d_e(x, z) \leq 0$$

elde edilir. Bu durumda $z \in S(x)$ olup $S(y) \subseteq S(x)$ dir.

Şimdi her $x \in X$ için $S(x)$ kümesinin kapalı olduğunu göstermeliyiz. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi terimleri $S(x)$ kümesinde olan ve $x^* \in X$ noktasına yakınsayan bir dizi olsun. Bu durumda

$$f(x_n) - f(x) + d_e(x, x_n) \leq 0$$

olur. f alttan yarı sürekliliği olduğundan

$$f(x^*) - f(x) + d_e(x, x^*) \leq 0$$

olur. Böylece $x^* \in S(x)$ olup $S(x)$ kümesi kapalıdır.

Her $x \in \text{dom}(f)$ için

$$V(x) = \inf_{z \in S} f(z)$$

olsun. Bu durumda her $z \in S(x)$ için

$$d_e(x, z) \leq f(x) - f(z) \leq f(x) - V(x)$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \delta(S(x)) &= \sup_{y, z \in S(x)} d_e(y, z) \\ &\leq 2(f(x) - V(x)) \end{aligned}$$

olur. X de bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlayalım. $x_0 = x'$,

$$f(x_1) \leq V(x_0) + \frac{1}{2}$$

olacak şekilde $x_1 \in S(x_0)$ olsun. Yine

$$f(x_2) \leq V(x_1) + \frac{1}{2^2}$$

olacak şekilde $x_2 \in S(x_1)$ olsun. Bu şekilde devam edilerek

$$x_{n+1} \in S(x_n) \text{ ve } f(x_{n+1}) \leq V(x_n) + \frac{1}{2^{n+1}}$$

olacak şekilde bir $\{x_n\}$ dizisi elde edilir. $S(x_{n+1}) \subseteq S(x_n)$ olduğundan

$$V(x_{n+1}) = \inf_{z \in S(x_{n+1})} f(z) \geq \inf_{z \in S(x_n)} f(z) = V(x_n)$$

ve böylece

$$V(x_n) \leq V(x_{n+1})$$

elde edilir. Diğer taraftan $V(y) \leq f(y)$ olduğundan

$$V(x_{n+1}) \leq f(x_{n+1}) \leq V(x_n) + \frac{1}{2^{n+1}} \leq V(x_{n+1}) + \frac{1}{2^{n+1}}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece

$$0 \leq 2(f(x_{n+1}) - V(x_{n+1})) \leq \frac{1}{2^n}$$

elde edilir. Yani $\delta(S(x_n)) \leq \frac{1}{2^n}$ olur ki buradan $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(S(x_n)) = 0$ elde edilir.

Bu durumda Cantor arakesit teoremi gereği $\bigcap_{n=1}^{\infty} S(x_n)$ kümesi w tek noktasından ibarettir. Yani

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S(x_n) = \{w\}$$

olsun. Bu durumda $w \in S(x_0) = S(x')$ olup

$$f(w) - f(x') + ed(x', w) \leq 0$$

elde edilir. Böylece (a) şartı sağlanır.

Diğer taraftan w noktası her bir $S(x_n)$ kümesine ait ve $S(w) \subseteq S(x_n)$ olduğundan $S(w) = \{w\}$ dir. Bu ise $x \neq w$ için $x \neq S(w)$ olduğundan

$$f(x) - f(w) + d_e(x, w) < 0$$

elde edilir. Böylece (b) şartı sağlanır.

Şimdi Ekeland varyasyon prensibinin bir zayıf formunu inceleyelim.

Teorem 3.1.3 (Ekeland Varyasyon Prensibinin Zayıf Formu): (X, d) bir tam metrik uzay ve $f: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ proper, alttan sınırlı ve alttan yarı sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için

$$f(x_0) \leq \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon$$

olacak şekilde bir $x_0 \in X$ var ve her $x \in X \setminus \{x_0\}$ için

$$f(x_0) < f(x) + \varepsilon d(x, x_0)$$

dır.

İspat: Her $\varepsilon > 0$ için

$$f(x') \leq \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon$$

olacak şekilde bir $x' \in X$ noktası vardır. Bu durumda Teorem 3.1.1 de $\lambda = 1$ alınarak

$$f(x_0) \leq f(x') \leq \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon$$

ve her $x \in X \setminus \{x_0\}$ için

$$f(x_0) < f(x) + \varepsilon d(x, x_0)$$

özelliklerini sağlayan bir $x_0 \in X$ noktası bulunur.

Ekeland varyasyon prensibinin bir özelliği de metrik uzayın tamlığını karakterize eden bazı sonuçlar vermesidir. Burada bununla ilgili bir teoremi ifade ve ispat edelim.

Teorem 3.1.4 (Ekeland Varyasyon Prensibinin Karşıtı): (X, d) bir metrik uzay olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $f: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ proper, alttan sınırlı ve alttan yarı sürekli fonksiyonu için

$$f(x_0) \leq \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon$$

ve her $x \in X$ için

$$f(x_0) \leq f(x) + \varepsilon d(x, x_0)$$

özelliklerini sağlayan bir $x_0 \in X$ noktası varsa (X, d) metrik uzayı tamdır.

İspat: $\{x_n\}$, X içinde bir Cauchy dizisi ve $x \in X$ için $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x)$ olacak şekilde $f: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ tanımlı bir fonksiyon olsun. Ayrıca f , alttan sınırlı ve sürekli. $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisi olduğundan

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f(x_m) = \lim_{m, n \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0$$

dır. Böylece $\inf_{x \in X} f(x) = 0$ dır. Hipotezdeki $0 < \varepsilon < 1$ sayısına karşılık

$$f(x_0) \leq \varepsilon$$

olacak şekilde $x_0 \in X$ seçildiğinde her $x \in X$ için

$$f(x_0) \leq f(x) + \varepsilon d(x, x_0) \tag{3}$$

elde edilir. (3) eşitsizliğinde $x = x_n$ yazarak $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$f(x_0) \leq \varepsilon f(x_0)$$

elde edilir. Buradan $f(x_0) = 0$ dır. Böylece $\{x_n\}$ dizisi x_0 noktasına yakınsaktır.

3.2.Ekeland varyasyon prensibinin sabit nokta teoriye uygulamaları

Bu prensibin ilk uygulaması olarak bilinen Banach sabit nokta teoremini ispatlayalım.

Teorem3.2.1 (Banach Sabit Nokta Teoremi): (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir büzölme dönüşümü olsun. Bu durumda T dönüşümü X de bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: Her $x \in X$ için $f(x) = d(x, Tx)$ ile tanımlı $f: X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Böylece f alttan sınırlı ve süreklidir. L , Lipschitz sabiti olmak üzere $0 < \varepsilon < 1 - L$ olacak şekilde bir ε sayısı seçelim. Bu durumda Teorem 3.1.3 den ε a bağlı her $x \in X$ için

$$f(x_0) \leq f(x) + \varepsilon d(x, x_0)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $x_0 \in X$ noktası vardır. $x = Tx_0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} d(x_0, Tx_0) &= f(x_0) \\ &\leq f(x) + \varepsilon d(x, x_0) \\ &= d(x, Tx) + \varepsilon d(x, x_0) \\ &= d(Tx_0, TTx_0) + \varepsilon d(x_0, Tx_0) \\ &\leq Ld(x_0, Tx_0) + \varepsilon d(x_0, Tx_0) \\ &= (L + \varepsilon)d(x_0, Tx_0) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $L + \varepsilon < 1$ olduğundan $d(x_0, Tx_0) = 0$ olur. Yani x_0 noktası T nin bir sabit noktasıdır. Sabit noktanın tekliği Banach sabit nokta teoreminde olduğu gibi yapılabilir.

Teorem 3.2.2 (Caristi Sabit Nokta Teoremi): (X, d) bir tam metrik uzay, $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm ve $\varphi: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ proper, sınırlı ve alttan yarı sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in X$ için

$$d(x, Tx) + \varphi(Tx) \leq \varphi(x) \quad (4)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T bir $z \in X$ sabit noktasına sahiptir. Üstelik $\varphi(z) < \infty$ dur.

İspat: Teorem 3.1.3 de $\varepsilon = 1$ alınırsa her $x \in X \setminus \{x_0\}$ için

$$\varphi(x_0) < \varphi(x) + d(x, x_0) \quad (5)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $x_0 \in X$ noktası vardır. Diğer taraftan $x_0 = Tx_0$ olduğu iddia ediyoruz. Aksi halde $x_0 \neq Tx_0$ olup (4) ve (5) eşitsizliklerinden

$$d(x_0, Tx_0) + \varphi(Tx_0) \leq \varphi(x_0)$$

ve

$$\varphi(x_0) < \varphi(Tx_0) + d(Tx_0, x_0)$$

elde edilir. Bu durum mümkün değildir.

Aşağıdaki teoremde Ekaland Varyasyon Prensibi'ne denk olan bazı ifadeler verilmiştir.

Teorem 3.2.3: (X, d) bir tam metrik uzay $f: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ proper, alttan sınırlı ve alttan yarı sürekli bir fonksiyon olsun. $\varepsilon > 0$ ve

$$f(x') \leq \inf f(x) + \varepsilon$$

olacak şekilde $x' \in X$ verilsin. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

a) Verilen $\lambda > 0$ için

$$f(x_0) \leq f(x') \text{ ve } f(x_0) < f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x, x_0) (\text{Her } x \in X \setminus \{x_0\})$$

özelliklerini sağlayan bir $x_0 \in \overline{B(x', \lambda)}$ noktası vardır.

- b) Eğer $T: \overline{B(x', \lambda)} \rightarrow X$ küme değerli dönüşümü her $x \in \overline{B(x', \lambda)} \setminus Tx$ ve en az bir $y \in X \setminus \{x\}$ için

$$f(y) \leq f(x) - \frac{\varepsilon}{\lambda} d(y, x)$$

şartını sağlasın. Bu durumda T , bir $x_0 \in \overline{B(x', \lambda)}$ sabit noktasına sahiptir. Bu durumda $f(x_0) \leq f(x')$ olacak şekilde $x_0 \in Tx_0$ vardır.

- c) Eğer $\varphi: \overline{B(x', \lambda)} \rightarrow X$, her $x \in \overline{B(x', \lambda)}$ için

$$f(\varphi(x)) \leq f(x) - \frac{\varepsilon}{\lambda} d(\varphi(x), x)$$

özellikliğini sağlayan tek değerli dönüşüm ise $f(x_0) \leq f(x')$ olacak şekilde $x_0 \in \overline{B(x', \lambda)}$ vardır.

- d) Eğer $T: \overline{B(x', \lambda)} \rightarrow X$, her $Tx \neq \emptyset$ olacak şekildeki her $x \in \overline{B(x', \lambda)}$ ve her $y \in Tx$ için

$$f(y) \leq f(x) - \frac{\varepsilon}{\lambda} d(y, x)$$

özellikliğini sağlayan bir küme değerli dönüşüm olsun. Bu durumda T , bir $x_0 \in \overline{B(x', \lambda)}$ sabit noktasına sahiptir. Bu durumda $f(x_0) \leq f(x')$ olacak şekilde $Tx_0 = \{x_0\}$ vardır.

İspat:

$a \Rightarrow b$: (a) şartından her $x \neq x_0$ için

$$f(x_0) < f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x, x_0) \tag{6}$$

olacak şekilde bir $x_0 \in \overline{B(x', \lambda)}$ noktası vardır. T , (b) şartında bahsedilen özelliğe sahip bir küme değerli dönüşüm ve $x_0 \notin Tx_0$ olsun. Bu durumda $x_0 \in \overline{B(x', \lambda)} \setminus Tx_0$ olup (b) şartından

$$f(y) \leq f(x_0) - \frac{\varepsilon}{\lambda} d(y, x_0) \quad (7)$$

eşitsizliğini sağlayan en az bir $y \in X \setminus \{x_0\}$ noktası vardır. Bu durumda (7) eşitsizliğinde $y = x$ alınırsa (6) eşitsizliğiyle bir çelişki elde edilmiş olur.

$b \Rightarrow c$: (b) şartı sağlansın ve φ de (c) şartındaki özelliklere sahip tek değerli bir dönüşüm olsun. Bu durumda $T: \overline{B(x', \lambda)} \rightarrow X$ dönüşümü $Tx = \{\varphi(x)\}$ olarak tanımlayalım. φ dönüşümünün $\overline{B(x', \lambda)}$ içinde bir sabit noktasının olmadığını kabul edelim. Yani her $x \in \overline{B(x', \lambda)}$ için $x \neq \varphi(x)$ olsun. O halde $x \in \overline{B(x', \lambda)} \setminus Tx$ ve aynı zamanda $y = \varphi(x) \in X \setminus \{x\}$ noktası

$$f(y) \leq f(x) - \frac{\varepsilon}{\lambda} d(y, x)$$

eşitsizliğini sağlar. Böylece (b) şartından T nin $\overline{B(x', \lambda)}$ içinde bir sabit noktası vardır. Bu ise φ nin $\overline{B(x', \lambda)}$ içinde bir sabit noktasının olmadığı kabulü ile çelişir.

$c \Rightarrow d$: (c) şartı sağlansın ve $\varphi, \{Tx: x \in \overline{B(x', \lambda)}\}$ olacak şekildeki dönüşüm bir sabit noktaya sahip olsun. Kabul edelim ki T dönüşümün sabit noktası olmasın. Herhangi bir $x \in \overline{B(x', \lambda)}$ için $x \in Tx$ olduğunda $\varphi(x) \in Tx \setminus x$ olur. Bu durumda φ dönüşümü hiçbir sabit noktaya sahip değildir. Bu ise bir çelişki olup T dönüşümün bir sabit noktası vardır.

$d \Rightarrow a$: (d) şartı sağlansın. Şimdi $T: \overline{B(x', \lambda)} \rightarrow X$ küme değerli dönüşümü

$$Tx = \{y \in X: f(y) \leq f(x) - \frac{\varepsilon}{\lambda} d(y, x)\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda her $x \in \overline{B(x', \lambda)}$ için $Tx \neq \emptyset$ dir. Dolayısıyla T dönüşümü (d) şartındaki özelliklere sahip küme değerli bir dönüşüm olur. Böylece

$Tx_0 = \{x_0\}$ ve $f(x_0) \leq f(x')$ özelliklerini sağlayan bir $x_0 \in \overline{B(x', \lambda)}$ noktası vardır. Bu durumda $Tx_0 = \{x_0\}$ olduğundan her $x \neq x_0$ için

$$f(x) > f(x_0) - \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x, x_0)$$

eşitsizliği sağlanır ki bu (a) nın sağlandığını gösterir.

Teorem 3.2.4 (Clarke Sabit Nokta Teoremi): (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir yönlendirilmiş büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda T bir sabit noktaya sahiptir.

İspat: Her $x \in X$ için $f(x) = d(x, Tx)$ şeklinde tanımlı $f: X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda f sürekli ve alttan sınırlıdır. $\varepsilon \in (0, 1 - \alpha)$ olmak üzere f fonksiyonuna Ekeland Varyasyon Prensibi'nin zayıf formu uygularsak, her $x \in X$ için

$$f(x_0) \leq f(x) + \varepsilon d(x, x_0) \quad (8)$$

olacak şekilde bir $x_0 \in X$ noktası vardır. Eğer $Tx_0 = x_0$ ise x_0 , bir sabit nokta olur. Bu durumda $Tx_0 \neq x_0$ olduğunu kabul edelim. Yönlendirilmiş büzülme tanımında $z \neq x_0$ olacak şekilde bir $z \in [x_0, Tx_0]$ noktası vardır. Yani

$$d(x_0, z) + d(z, Tx_0) = d(x_0, Tx_0) = f(x_0) \quad (9)$$

ve

$$d(Tx_0, Tz) \leq \alpha d(x_0, z) \quad (10)$$

eşitsizliklerini sağlayan bir $z \in X$ noktası vardır. Şimdi (8) eşitsizliğinde x yerine z alınırsa

$$f(x_0) \leq f(z) + \varepsilon d(z, x_0)$$

elde edilir. Böylece bu eşitsizlik ve (9) eşitliğinden

$$d(x_0, z) + d(z, Tx_0) \leq d(z, Tz) + \varepsilon d(z, x_0)$$

veya

$$d(x_0, z) \leq d(z, Tz) - d(z, Tx_0) + \varepsilon d(z, x_0) \quad (11)$$

elde edilir. Şimdi üçgen eşitsizliği ve (10) eşitsizliğinden

$$d(z, Tz) - d(z, Tx_0) \leq d(Tx_0, Tz) \leq \alpha d(x_0, z)$$

elde edilir. Bu ifade (11) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} d(x_0, z) &\leq \alpha d(x_0, z) + \varepsilon d(z, x_0) \\ &= (\alpha + \varepsilon) d(x_0, z) \end{aligned}$$

elde edilir. $\alpha + \varepsilon < 1$ olduğundan bu bir çelişkidir.

Uyarı 3.2.1: Her büzülme dönüşümünün bir yönlendirilmiş büzülme dönüşümü olduğu açıktır. Dolayısıyla Clarke Sabit Nokta Teoremi, Banach Sabit Nokta Teoremi'nden daha geneldir. Aşağıdaki örnek bu durumu açıklayabilir.

Örnek 3.2.1: $X = \mathbb{R}^2$ ve $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, her $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X$

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $a = (a_1, a_2)$ ve $b = (b_1, b_2)$ noktaları arasındaki segmentin elemanları, köşeleri a ve b noktalarında olan dik üçgen (dik üçgen köşesi a veya b olmayan) üzerinde bulunan noktalardır. Şimdi $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$Tx = T(x_1, x_2) = \left(\frac{3x_1}{2} - \frac{x_2}{3}, x_1 + \frac{x_2}{3}\right)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda T bir yönlendirilmiş büzülme dönüşümüdür. Gerçekten,

$$y = (y_1, y_2) = Tx \neq x = (x_1, x_2)$$

ise $y_2 \neq x_2$ dir. Çünkü $y_2 = x_2$ olarak kabul edildiğinde $y_1 = x_1$ elde edilir. Bu durumda $Tx = x$ olur. Şimdi $[x, y]$ kümesi x_2 den farklı olan t elemanlarından oluşturulsun. Bu durumda $[x, y]$ kümesi, (x_1, t) tipindeki noktaları içerir. Bu tür noktalar için

$$d(T(x_1, t), T(x_1, x_2)) = \frac{2}{3} d((x_1, t), (x_1, x_2))$$

eşitliği sağlandığından T dönüşümü bir yönlendirilmiş büzülme dönüşümüdür. Ayrıca $(x, \frac{3x}{2})$ tipindeki tüm noktaların T nin bir sabit noktası olduğu açıkça görülmektedir. T nin birden fazla sabit noktası olduğundan Banach sabit nokta teoremi bu dönüşüme uygulanamaz.

3.3 Bazı Tamlık Karakterizasyonları

Teorem 3.3.1: (X, d) tam metrik uzay, $\varphi: X \rightarrow [0, \infty)$ alttan yarı sürekli bir fonksiyon ve $T: X \rightarrow C(X)$ bir küme değerli dönüşüm ve ayrıca T , her $x \in X$ için

$$\inf\{d(x, y) + \varphi(y): y \in Tx\} \leq \varphi(x)$$

şartını sağlasın. Bu durumda T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat: Her $x \in X$ için

$$d(x, f(x)) \leq 2\varphi(x) - 2\varphi(f(x))$$

olacak şekilde $f(x) \in Tx$ var olsun. Eğer $d(x, Tx) = 0$ ise $f(x) = x$ olur. Eğer $d(x, Tx) > 0$ ise

$$\begin{aligned} d(x, Tx) + \inf\{d(x, y) + 2\varphi(y): y \in Tx\} &\leq 2 \inf\{d(x, y) + \varphi(y): y \in Tx\} \\ &\leq 2\varphi(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\inf\{d(x, y) + 2\varphi(y) : y \in Tx\} < 2\varphi(x)$$

bulunur. İnfimumun tanımından

$$d(x, y) + 2\varphi(f(x)) \leq 2\varphi(x)$$

olacak şekilde bir $f(x) \in Tx$ vardır. Bu durumda Caristi Sabit Nokta Teorem'ne göre $x_0 = f(x_0) \in Tx_0$ olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır.

Teorem 3.3.2: (X, d) bir metrik uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler önermeler denktir.

- a) (X, d) metrik uzayı tamdır.
- b) X in kapalı her C alt kümesi için, $f: C \rightarrow C$ Banach büzülme dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir.
- c) Her $f: X \rightarrow X$ Kannan dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir.
- d) Her $T: X \rightarrow C(X)$ küme değerli DY dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir.
- e) Her $T: X \rightarrow C(X)$ küme değerli MP dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir.

İspat: $a \Rightarrow d$: (a) şartı sağlansın. Bu durumda $\varepsilon > 0$ sayısını $\varepsilon + r < 1$ olacak şekilde seçelim. Ayrıca $\varphi: [0, 1) \rightarrow \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ dönüşümünü $\varphi(x) = \frac{1}{\varepsilon} d(x, Tx)$ şeklinde tanımlayalım. O halde her $x \in X$ için

$$d(x, f(x)) \leq \frac{1}{\varepsilon + r} d(x, Tx)$$

olacak şekilde bir $f(x) \in Tx$ bulabiliriz. Şimdi her $x \in X$ için

$$d(x, f(x)) \leq \varphi(x) - \varphi(f(x))$$

olduğunu gösterelim.

$$d(x, Tx) \leq d(x, f(x)) \leq \frac{1}{\theta(r)} d(x, f(x))$$

olduğundan

$$H(Tx, Tf(x)) \leq r \max\{d(x, f(x)), d(x, Tx), d(f(x), Tf(x))\}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} d(f(x), Tf(x)) &\leq H(Tx, Tf(x)) \\ &\leq r \max \{d(x, f(x)), d(x, Tx), d(f(x), Tf(x))\} \end{aligned}$$

dir. $K = r \max \{d(x, f(x)), d(x, Tx), d(f(x), Tf(x))\}$ olarak kabul edelim. Eğer

- i) $K = rd(x, f(x))$ ise $d(f(x), Tf(x)) \leq rd(x, f(x))$ elde edilir.
- ii) $K = rd(x, Tx)$ ise $d(f(x), Tf(x)) \leq rd(x, Tx) \leq rd(x, f(x))$ elde edilir.
- iii) $K = rd(f(x), Tf(x))$ ise $d(f(x), Tf(x)) \leq rd(f(x), Tf(x))$

olur ki bu durum gerçekte gerçekleşmez. O halde

$$\begin{aligned} d(x, f(x)) &= \frac{1}{\varepsilon} ((\varepsilon + r)d(x, f(x)) - rd(x, f(x))) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} ((\varepsilon + r) \frac{1}{\varepsilon + r} d(x, f(x)) - d(f(x), Tf(x))) \\ &= \varphi(x) - \varphi(f(x)) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda Teorem 3.3.1 veya Caristi teoremi gereğince T nin bir sabit noktası vardır.

$a \Rightarrow e$: (a) şartı sağlansın. $q > 1$ olarak alalım. $x_0 \in X$ keyfi bir nokta ve $x_1 \in Tx_0$ olsun. O halde $d(x_1, x_2) \leq qH(Tx_0, Tx_1)$ olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. $\eta = \frac{1-b-c}{1+a} \leq 1$ dersek,

$$\eta d(x_0, Tx_0) \leq \eta d(x_0, x_1) \leq d(x_0, x_1)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &\leq qH(Tx_0, Tx_1) \leq q[ad(x, y) + bd(x, Tx) + cd(y, Ty)] \\ &\leq q(a + b)d(x_0, x_1) + qcd(x_1, x_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$d(x_1, x_2) \leq \frac{q(a + b)}{1 - qc} d(x_0, x_1)$$

olur. Bu şekilde x_0 noktasından başlayarak aşağıdaki özelliklere sahip X de bir $\{x_n\}$ dizi elde ederiz.

- I) Her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x_{n+1} \in Tx_n$ dir.
- II) Her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $d(x_n, x_{n+1}) \leq \left(\frac{q(a+b)}{1-qc}\right)^n d(x_0, x_1)$ dir.

$p = \frac{q(a+b)}{1-qc}$ diyelim. Eğer $1 < q < \frac{1}{a+b+c}$ seçersek $0 \leq p < 1$ olur. (II) den her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve her $p \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{p^n}{1 - p} d(x_0, x_1)$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için limit alındığında $\{x_n\}$, X de bir Cauchy dizisi olur. X tam Cauchy dizisi olduğundan $x_n \rightarrow z$ olacak şekilde $z \in X$ vardır. Şimdi z nin T nin bir sabit noktası olduğunu gösterelim. İlk olarak her $x \in X \setminus \{z\}$ için

$$d(z, Tx) \leq \left(a + \frac{b}{\eta}\right) d(z, x) + cd(x, Tx)$$

olduğunu gösterelim. $x \neq z$ olduğunu kabul edelim. $x_n \rightarrow z$ olduğundan öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ki $n \geq n_0$ için

$$d(x_n, z) \leq \frac{1}{3} d(x, z)$$

dir. O halde

$$\begin{aligned} \eta d(x_n, Tx_n) &\leq d(x_n, Tx_n) \\ &\leq d(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq d(x_n, z) + d(z, x_{n+1}) \\ &\leq \frac{2}{3} d(x, z) \\ &\leq d(x, z) - d(x_n, z) \leq d(x_n, x) \end{aligned}$$

olur. Buradan her $n \geq n_0$ için

$$H(Tx_n, Tx) \leq (a + \frac{b}{\eta})d(x_n, x) + cd(x, Tx)$$

elde edilir. Sonuç olarak her $n \geq n_0$ için

$$d(x_{n+1}, Tx) \leq H(Tx_n, Tx) \leq (a + \frac{b}{\eta})d(x_n, x) + cd(x, Tx)$$

ve $n \rightarrow \infty$ için limit alındığında $x \neq z$ için

$$d(z, Tx) \leq (a + \frac{b}{\eta})d(z, x) + cd(x, Tx)$$

olur. Şimdi her $x \in X$ için

$$H(Tx_n, Tx) \leq (a + \frac{b}{\eta})d(x, z)$$

olduğunu gösterelim. Eğer $x = z$ ise eşitsizliğin doğru olduğu açıktır. Bu durumda $x \neq z$ olarak alalım. Böylece her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$d(z, y_n) \leq d(z, Tx) + \frac{1}{n} d(x, z)$$

olacak şekilde $y_n \in Tx$ vardır. Her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\begin{aligned} d(x, Tx) &\leq d(x, y_n) \leq d(x, z) + d(z, y_n) \\ &\leq d(x, z) + d(z, Tx) + \frac{1}{n} d(x, z) \\ &\leq (1 + a + \frac{1}{\eta} + \frac{1}{n}) d(x, z) + c d(x, Tx) \end{aligned}$$

olduğundan $n \rightarrow \infty$ için limit alındığında

$$(1 - c) d(x, Tx) \leq (1 + a + \frac{b}{\eta} + \frac{1}{n}) d(x, z)$$

ve buradan

$$\eta d(x, Tx) \leq d(x, z)$$

elde edilir. Dolayısıyla her $x \in X$ için

$$H(Tx, Tz) \leq a d(x, z) + b d(x, Tx) + c d(x, Tz) \leq (a + \frac{b}{\eta}) d(x, z)$$

olur. Sonuç olarak,

$$d(z, Tz) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+1}, Tz) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a + \frac{b}{\eta} \right) d(x_n, z) = 0$$

bulunur. Yani z, T nin bir sabit noktasıdır.

$d \Rightarrow b$: $x \mapsto d(x, fx)$ sürekli ve

$$d(fx, fy) \leq r d(x, y) \leq r \max\{d(x, y), d(x, fx), d(y, Ty)\}$$

olduğundan C üzerinde bir Banach büzölme dönüşümü bir DY dir. O halde (C, d) metrik uzayı için $f: C \rightarrow C$ dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir.

$e \Rightarrow c$: $a = 0, b = c = \alpha \in [0, \frac{1}{2})$ olduğunda, her Kannan dönüşümü bir MP dönüşüm olur. Bu durumda $f: X \rightarrow X$ dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir.

$c \Rightarrow a$: X uzayının tam olmadığını kabul edelim. Bu durumda, X de yakınsak olmayan $\{x_n\}$ Cauchy dizisi vardır ve $n \neq m$ için $x_n \neq x_m$ dir. Her $x \in X$ için

$$a_x = \inf\{d(x, x_n) : n \in \mathbb{N}, x_n \neq x\} \quad (12)$$

olsun. Bu durumda $a_x > 0$ dir. Çünkü $\{x_n\}$ dizisinin yakınsak olan bir alt dizisi yoktur. $\{x_n\}$ Cauchy dizisi olduğundan her $x \in X$ için öyle bir $N(X)$ tamsayısı var ki $n, m \geq N(X)$ için

$$d(x_n, x_m) < \alpha a_x \quad (13)$$

dir. Kabul edelim ki her $n \in \mathbb{N}$ için

$$N(x_n) > n \quad (14)$$

olsun. Bu eşitsizliği göstermek için aksini kabul edelim. Yani bazı $n \in \mathbb{N}$ için

$$N(x_n) \leq n$$

olsun. Bu durumda (13) den her $m \geq n$ için

$$d(x_n, x_m) < \alpha a_x < a_n$$

dir. Ancak (12) den her $m > n$ için

$$d(x_n, x_m) \geq a_n$$

dir. Bu ise bir çelişkidir. Bu durumda (14) ifadesi doğrudur. Şimdi $f: X \rightarrow X$ dönüşümünü

$$f(x) = x_{N(x)}$$

şeklinde tanımlayalım. Buradan f nin hiçbir sabit noktası yoktur. Çünkü, bazı n ler için $x = x_n$ ise (14) eşitsizliğinden $N(x_n) > n$ olacağından

$$f(x_n) = x_{N(x)} \neq x_n$$

dir. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $x \neq x_n$ ise

$$f(x_n) = x_{N(x)} \neq x$$

dir. Şimdi f dönüşümünün bir Kannan dönüşümü olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= d(x_{N(x)}, x_{N(y)}) \\ &\leq d(x_{N(x)}, x_{N(x)} + x_{N(y)}) + d(x_{N(x)} + x_{N(y)}, x_{N(y)}) \\ &\leq \alpha(a_x + a_y) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} d(x, f(x)) + d(y, f(y)) &= d(x, N(x)) + d(y, N(y)) \\ &\geq a_x + a_y \end{aligned}$$

olduğundan her $x, y \in X$ için

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, f(x)) + \alpha d(y, f(y))$$

elde edilir. Bu durumda f , bir Kannan dönüşümüdür. Her Kannan dönüşümünün bir sabit noktası olduğundan bir çelişki elde edilir. Sonuç olarak X tamdır.

$b \Rightarrow a$: Kabul edelim ki X tam olmasın. Bu durumda, X de yakınsak olmayan ve her $n \neq m$ için $x_n \neq x_m$ olacak şekilde bir $\{x_{(n)}\}$ Cauchy dizisi vardır. Bu durumda $Y = \{x_{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi X in kapalı bir alt kümesidir. Bu durumda Y üzerindeki bir Banach büzülme dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir. Önceki ispatta olduğu gibi f fonksiyonunu tanımlayalım. Burada $\{N(x(N))\}$ dizisi azalmayandır. f nin Y alt uzayına kısıtlaması g olsun. O halde f nin sabit noktası olmadığından g nin de Y de bir sabit noktası yoktur. Şimdi g nin bir Banach büzülme olduğunu gösterelim. $m > n$ olsun. Bu durumda $N(x(M)) \geq N(x(N))$ dir. (13) eşitsizliğinden

$$d(g(x_{(n)}), g(x_{(m)})) = d(x(N(x(n))), x(N(x(M)))) < \alpha a_{x_{(n)}}$$

elde edilir. (12) eşitliğinden her $m \geq n$ için

$$d(x_{(n)}, x_{(m)}) \geq a_{x_{(n)}}$$

olup $m > n$ için

$$d(g(x_{(n)}), g(x_{(m)})) < \alpha a_{x_{(n)}} \leq \alpha d(x_{(n)}, x_{(m)})$$

olur. Dolayısıyla g bir Banach büzülmedir. Ancak g nin hiçbir sabit noktası yoktur. Bu ise Y üzerindeki her Banach büzülme dönüşümü bir sabit noktaya sahip olmasıyla çelişir. Dolayısıyla X tamdır.

4. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında temel olarak metrik uzayın tamlığını karakterize eden bazı teoremler incelenmiştir. Materyal ve Yöntem bölümünde Cantor teoremi ve karşıtı ile Caristi sabit nokta teoremi ve bunun karşıtını da içeren Caristi-Kirk sabit nokta teoremleri dikkate alınmıştır. Araştırma Bulguları bölümünde Ekeland prensibinin kuvvetli ve zayıf formları detaylı bir biçimde ele alınmış ve ardından karşıtı dikkate alınarak metrik uzay için bir tamlık karakterizasyonu verilmiştir. Daha sonra Ekeland prensibinin sabit nokta teoriye uygulamasına dikkati çekmek için, Banach, Caristi ve Clark sabit nokta teoremlerinin Ekeland prensibi yardımıyla ispatları yapılmıştır. Son olarak DY ve MP tip küme değerli dönüşümler yardımıyla elde edilen bir tamlık karakterizasyonu da incelenmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Soykan, Y., Metrik Uzaylar ve Topolojisi, Nobel Kitap, Ankara, 2012.
- [2] Koçak, M., Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar, Furkan Ofset, Eskişehir.
- [3] Ansari Q. H., Metric Spaces Including Fixed Point Theory and Set-valued Maps, Alpha science.
- [4] Minak, G., Metrik Uzayda Küme Değerli Dönüşümler için Sabit Nokta Teoremleri, Yüksek Lisans Bitirme Tezi, Kırıkkale, 2013.
- [5] Aubin, J. P., Frankowska, H., Set Valued Analysis, Birkhauser, Boston, Basel, Berlin, 1990.
- [6] Istatescu V.I., Fixed Point Theory An Introduction, D.Reidel Publishing Company, Holland/Boston:U.S.A./London: England.
- [7] Singh S., Watson B., and Srivastava P., Fixed Point Theory and Best Approximation:The KKM-map Principle, Kluwer Academic Publishers, Boston/London.
- [8] Agarwal P.Ravi, O'Regan D., and Sahu D.R., Fixed Point Theory for Lipschitzain-type Mappings whith Applications, Springer,U.S.A/Ireland/India.
- [9] Clarke F., Pointwise contraction criteria fort he existence of fixed points, MRC Technical Report 1958, July 1976, ,University of Wisconsin,Wisconsin, 1976.
- [10] Hu T.K.,On a fixed point theorem for metric spaces,Amer.Math.Monthly74 436-437-1967.

- [11] Kannan R., Some results on fixed points, Bull. Calcutta Math. Soc. 60, 71-76, 1968.
- [12] Reich S., Kannan's fixed point theorem, Bollettino U.M.I (4) 4, 1-11, 1971.
- [13] Caristi J., Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness condition, Trans. Amer. Math. Soc. 215, 241-255, 1976.
- [14] Kirk W.A., Caristi's fixed point theorem and metric convexity, Colloq. Math. 36, 81-86, 1976.
- [15] Ekeland I., On the variational principle, J. Math. Anal. Appl. 47, 324-353, 1974.
- [16] Lee, W. And Cho, Y., A survey on characterization of metric completeness, Nonlinear Analysis Forum, 19, 265-276, 2014.
- [17] Dhompongsa, S., Yingtae Sittikul, Fixed points for multivalued mappings and the metric completeness, Fixed Point Theory and Appl., ID972395, 15 pages, 2009.
- [18] Mot G., and Petrusel A., Fixed point theory for a new type of contractive multivalued operators, Nonlinear Anal. 70, 3371-3377, 2009.