

T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

BRENKE-TİPLİ POLİNOMLAR İÇEREN SZASZ OPERATÖRLERİNİN
BİR KANTOROVİCH TİPİ

AYLİN TAŞKIN

EYLÜL 2017

Matematik Anabilim Dalında Aylin TAŞKIN tarafından hazırlanan BRENKE-TİPLİ POLİNOMLAR İÇEREN SZASZ OPERATÖRLERİNİN BİR KANTOROVİCH TİPİ adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gerekliliklerini yerine getirdiğini onaylarım.


Doç. Dr. Ali OLGUN
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Gülen BAŞCANBAZ TUNCA

Üye (Danışman) : Doç. Dr. Ali OLGUN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Didem AYDIN ARI

...../...../2017

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Mustafa YİĞİTOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

BRENKE-TİPLİ POLİNOMLAR İÇEREN SZASZ OPERATÖRLERİNİN BİR KANTOROVICH TİPİ

AYLİN TAŞKIN

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. ALİ OLGUN

Eylül 2017, 61 sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmış olup, konu hakkında genel bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde tezde kullanılacak tanımlar, teoremler ve lemmalar açıklanmıştır.

Üçüncü bölümde K_n operatörünün yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde Klasik Süreklilik Modülü, İkinci Süreklilik Modülü ve Peetre K fonksiyoneli yardımıyla K_n operatörünün yaklaşım hızı incelenmiştir.

Son bölümde ise Gould-Hopper polinomlarını ve Hermit tipi d -ortogonal polinomların kümesini içeren özel durumlar ve özellikler incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Pozitif Lineer Operatörler, yakınsaklık hızı, Kantorovich operatörleri, süreklilik modülü, Gould-Hopper polinomları

ABSTRACT

A KANTOROVICH TYPE OF SZASZ OPERATORS INCLUDING BRENKE-TYPE POLYNOMIALS

TAŞKIN, AYLİN

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, Master of Science Thesis

Supervisor: Doç. Dr. Ali OLGUN

September 2017, 61 pages

This thesis consists of five parts.

In the first part as the introduction part, the general information was provided regarding the topic of the thesis.

In the second part, the descriptions, theories and lemmas used for the thesis were explained.

In the third part, K_n operator approximation properties are examined.

In the fourth part, the approach velocity of the K_n operator was investigated with the help of Classical Continuity Module, Second Continuity Module and Peetre K functional.

In the last part, Exceptional Cases and the features including Gould-Hopper Polynomials and the cluster of Hermit type d -orthogonal polynomials were investigated.

Key Words: Positive Linear Operators, Rate of Convergence, Kantorovich Operators, Continuity Module, Gould-Hopper Polynomials

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında görüş ve önerileriyle beni yönlendiren, bana her konuda destek olan danışman hocam Sayın, Doç. Dr. Ali OLGUN'a, emeği geçen Kırıkkale Üniversitesi Matematik Bölümünün değerli öğretim üyelerine, eğitim hayatım boyunca maddi manevi desteklerini esirgemeyen aileme ve Mustafa Hikmet ERGÜL'e teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	6
2.1. Lineer Pozitif Operatörlerin Özellikleri	8
2.2. Süreklilik Modülü	12
3. K_n OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ	16
4. K_n OPERATÖRÜNÜN YAKLAŞIM HIZI	27
5. ÖZEL DURUMLAR VE DİĞER ÖZELLİKLER	37
6. TARTIŞMA VE SONUÇ	59
KAYNAKÇA	60

SİMGELER DİZİNİ

$C[0, \infty)$	$[0, \infty)$ üzerinde sürekli reel değerli fonksiyonlar uzayı
$\tilde{C}[0, \infty)$	$[0, \infty)$ üzerindeki düzgün sürekli fonksiyonların kümesi
$C[a, b]$	$[a, b]$ aralığında sürekli olan fonksiyonların uzayı.
$C_B[0, \infty)$	$[0, \infty)$ üzerinde tanımlanan ve $\ f\ _{C_B} = \sup_{x \in [0, \infty)} f(x) $ normuna sahip ve düzgün sürekli olan fonksiyonların kümesi
(f_n)	Fonksiyonlar dizisi
S_n	Szász operatörleri
K_n	Kantorovich operatörleri
$L_n(f; x)$	Lineer pozitif operatörler
$K_n(f, \delta)$	f fonksiyonunun Peetre K fonksiyoneli
$L_n(f; x)$	$n \in N$ olmak üzere bir operatör dizisi
$\omega(f; \delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$w_2(f; \delta)$	İkinci süreklilik modülü
$g_k^{d-1}(x, h)$	Gould-Hopper polinomlar ailesi
$K_n(f; x)$	$n \in N$ olmak üzere bir operatör dizisi
$K_n^*(f; x)$	Gould-Hopper polinomlarını içeren operatörler

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisi son yıllarda üzerinde birçok çalışmalar yapılan alanlardan birisidir. Bu alanda yapılan çalışmaların çoğu Bernstein polinomları baz alınarak üretilen yeni operatörlere ve bu operatörlerin yaklaşım özelliklerinin elde edilmesinde temel oluşturan Korovkin teoremine dayanmaktadır. Bu şekilde oluşturulan ve lineer pozitif operatör olarak tanımlanan operatörlerden birisi de Szász operatörüdür.

Bu operatör

$n \in \mathbb{N}$, $x \geq 0$ ve $f \in C_B[0, \infty)$ olmak üzere $|f(x)| \leq M$ için seri yakınsak olacak şekildeki $f \in C[0, \infty)$ ise

$$S_n(f; x) := e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (1.1)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bu operatör ve çeşitli modifikasyonları üzerine birçok çalışma vardır ve bir çok genelleştirilmesi yapılmıştır.

Bu genelleştirmeler yapılırken bazı çalışmalarda, uygulamalarda en çok karşılaşılan ortogonal polinom ailelerinden yararlanılmıştır. Bu çalışmalardan bazıları aşağıdaki gibidir.

[2] ' de Jakimovski ve Leviatan, Szász operatörlerinin ve Appell polinomlarının bir genellemesini yapmışlardır. Bu tür genellemeler yapılırken ortogonal polinom ailelerinin doğurucu fonksiyonları çok önemli rol oynamaktadır.

Appell polinomları aşağıdaki gibi bir doğurucu fonksiyonlara sahiptir.

$$g(t)e^{tx} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)t^k \quad (1.2)$$

Burada $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ açılımına sahip $a_0 \neq 0$, $|z| < R$ da analitik ve $g(1) \neq 0$ olan bir fonksiyondur. Bazı kabuller altında Leviatan ve Jakimovski $x \in [0, \infty)$ ve $P_k(x) \geq 0$ olmak üzere;

$$P_n(f; x) := \frac{e^{-nx}}{g(1)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (1.3)$$

operatörünü tanımladı ve yaptıkları çalışmalarda bu operatörün yakınsaklık özelliklerini inceledi. Daha sonra [3] de Ismail (1.1) ve (1.3) operatörlerini kullanarak Szász operatörlerinin bir genellemesini Sheffer polinomları yardımı ile yapmıştır. Operatör oluşturulurken a_k ve h_k reel sayıları $A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ ($a_0 \neq 0$) ve $H(z) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k z^k$ ($h_1 \neq 0$) fonksiyonları $|z| < R$ ($R > 1$) de analitik fonksiyonlar olmak üzere

$P_k(x)$ için Sheffer polinomlarının

$$A(t)e^{xH(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)t^k \quad |t| < R \quad (1.4)$$

tipindeki doğurucu fonksiyonundan yararlanmıştır.

Ismail bu çalışmasında

- (i) $x \in [0, \infty)$, $P_k(x) \geq 0$
- (ii) $A(1) \neq 0$ ve $H'(1) = 1$

olduğunu kabul ederek

$$T_n(f; x) := \frac{e^{-nxH(1)}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) f\left(\frac{k}{n}\right) \quad n \in N \quad (1.5)$$

operatör dizisini tanımlamış ve bu operatör dizisinin yakınsaklık özelliklerini incelemiştir.

Daha sonra Varma, Sucu ve İçöz [4] de Brenke tipli polinomlar yardımıyla Szász operatörünün başka bir genellemesini tanımladılar.

$$A(t) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r t^r, \quad a_0 \neq 0 \quad (1.6)$$

$$B(t) = \sum_{r=0}^{\infty} b_r t^r, \quad b_r \neq 0 \quad (r \geq 0)$$

şeklindeki analitik fonksiyonlar olmak üzere Brenke-tipi polinomları için doğurucu fonksiyonlar

$$A(t)B(xt) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) t^k \quad (1.7)$$

şeklinde verilirler [5]. Burada $P_k(x)$ in açık formu

$$P_k(x) = \sum_{r=0}^k a_{k-r} b_r x^r \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.8)$$

şeklindedir. Bunları göz önüne alarak

$$(i) \quad A(1) \neq 0, \quad \frac{a_{k-r}b_r}{A(1)} \geq 0 \quad 0 \leq r \leq k \quad k = 0,1,2, \dots$$

$$(ii) \quad B: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \quad (1.9)$$

$$(iii) \quad (1.7) \text{ ve } (1.8), |t| < R \quad (R > 1) \text{ için yakınsar.}$$

kabulleri altında Varma, Sucu ve İçöz $x \geq 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için;

$$L_n(f; x) := \frac{1}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (1.10)$$

Kantorovich tipli Lineer pozitif operatörünü tanımlayıp yakınsaklık özelliklerini incelediler.

Biz bu tezde Varma, Sucu ve İçöz tarafından tanımlanan L_n operatörünü baz alarak bu operatörün integral versiyonu olan ve Taşdelen, Aktaş ve Altın tarafından oluşturulan $f \in C[0, a], (a > 0)$ için

$$K_n(f; x) := \frac{n}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{(k+1)}{n}} f(t) dt \quad (1.11)$$

şeklinde tanımlanan Lineer pozitif operatörünün yaklaşım özelliklerini inceleyeceğiz.

$n \in \mathbb{N}, x \geq 0, f \in C[0, \infty)$ koşulları ve (1.11) göz önüne alındığında K_n operatörünün lineer ve pozitif olduğu kolayca görülebilir.

Bu operatörde $B(t) = e^t, A(t) = 1$ alınırsa (1.8) in yardımı ile $P_k(x) = x^k/k!$ olmak üzere (1.11) operatörü

$$K_n(f; x) := ne^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{(k+1)}{n}} f(t) dt \quad (1.12)$$

şeklinde bilinen Szász -Mirakyan-Kantorovich operatörüne dönüşür.

Szász -Mirakyan-Kantorovich operatörleri farklı yaklaşım özelliklerinin incelenmesi için çeşitli modifikasyonları [7-13] nolu referanslarda vardır.

Bu çalışmada, (1.11) lineer pozitif operatörleri ile yaklaşım $[0, \infty)$ aralığının kompakt alt kümelerinde Korovkin teoremi yardımı ile inceleyeceğiz.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tezin bu kısmında tezde kullanılacak temel tanımlar verilecek, lineer pozitif operatörler tanıtılacak ve sağladığı temel özellikler incelenecektir. Ayrıca daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı tanımlar, teoremler ve lemmalar ifade edilecektir.

Bazı Tanımlar

Tanım 2.1 X ve Y iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer X den alınan herhangi bir f fonksiyonuna Y de bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı varsa buna X uzayında bir operatördür denir. Bu operatör $L(f; x) = g(x)$ biçiminde gösterilir.

Burada $L(f; x) = L(f(t); x)$ olmak üzere L operatörü f fonksiyonunun bağlı olduğu t değişkenine göre uygulanmaktadır. Sonuç ise x değişkenine bağlı bir fonksiyondur. Bundan dolayı x değişkeni L işleminde sabit gibidir ve $L(f(x); x) = gf(x) L(1; x)$ yazılabilir.

X uzayı lineer bir uzay olduğunda lineer operatörün tanımı yapılabilir.

Tanım 2.2 X ve Y lineer fonksiyon uzayları olmak üzere,

$$L: X \rightarrow Y$$

şeklindeki L operatörünü gözönüne alalım. Eğer $\forall f, g \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$L(\alpha f + \beta g; x) = \alpha L(f; x) + \beta L(g; x)$$

koşulu sağlanıyorsa o takdirde L operatörüne *lineer operatör* denir

Tanım 2.3 Eğer bir L operatörü pozitif değerli fonksiyonu yine pozitif değerli bir fonksiyona dönüştürüyor ise yani, f bir fonksiyon ve L bir operatör olmak üzere

$$f \geq 0 \text{ iken } L(f; x) \geq 0$$

oluyor ise L operatörüne *pozitif operatör* denir.

Hem lineerlik hem de pozitiflik şartını sağlayan operatöre *lineer pozitif operatör* denir.

Uyarı

$f \leq 0$ iken $L(f; x) \leq 0$ eşitsizliği de sağlanır. Gerçekten de bunu görmek için kabul edelim ki $f \leq 0$ olsun.

Bu durum da $-f \geq 0$ olacaktır.

L operatörü pozitif olduğundan dolayı

$$L(-f; x) \geq 0$$

olur. L operatörünün lineerlik özelliği de göz önüne alındığında

$$-L(f; x) \geq 0 \Rightarrow L(f; x) \leq 0$$

elde edilir. Dolayısıyla

$f \leq 0$ iken $L(f; x) \leq 0$ dır.

2.1. Lineer Pozitif Operatörlerin Özellikleri

Lemma 2.1 Lineer pozitif operatörler monoton artandır. Yani;

$$f \leq g \Rightarrow L(f) \leq L(g)$$

dır.

İspat: Kabul edelim ki $f \leq g$ olsun. Bu durumda $g - f \geq 0$ ve L operatörü pozitif olduğundan

$$L(g - f) \geq 0$$

olur.

Diğer taraftan L operatörü lineer olduğundan dolayı

$$L(g - f) = L(g) - L(f)$$

elde edilir.

Böylece

$$L(g - f) = L(g) - L(f) \geq 0 \Rightarrow L(f) \leq L(g)$$

bulunur ki bu istenilendir.

Lemma 2.2 L bir lineer pozitif operatör ise

$$|L(f)| \leq L(|f|)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Keyfi bir f fonksiyonu için

$$-|f| \leq f \leq |f| \tag{2.1}$$

eşitliği sağlandığından L operatörünün lineerliğinden, monoton artanlığını göz önüne alınarak operatör (2.1) eşitliğine uygulanırsa

$$-L(|f|) \leq L(f) \leq L(|f|)$$

yazılabilir.

Bu ise

$$|L(f)| \leq L(|f|)$$

olduğunu gösterir.

Lineer Pozitif Operatörlerin Önemi

Alman Matematikçi Weierstrasse sonlu aralıkta sürekli olan her fonksiyona bu aralıkta yakınsayan bir polinom dizisinin olduğunu ispatladı. Daha sonra Rus Matematikçi Bernstein bu dizinin $x \in [0,1]$ için

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

şeklinde olduğunu ispatlamıştır.

Korovkin daha sonra aşağıdaki teoremi vermiştir. Bu teorem lineer pozitif operatörler alanında yapılan çalışmalara büyük katkı sağlamıştır.

Teorem 2.1 P.P.Korovkin Teoremi

$f \in C[a, b]$ ve tüm reel ekseninde

$$|f(x)| < M_f$$

olsun. Eğer $L_n(f; x)$ lineer pozitif operatör dizisi her $x \in [a, b]$ için:

$$L_n(1; x) \Rightarrow 1$$

$$L_n(t; x) \Rightarrow x$$

$$L_n(t^2; x) \Rightarrow x^2$$

koşulları sağlanıyorsa bu durumda $[a, b]$ de $L_n(f; x) \Rightarrow f(x)$ dir.

Tanım 2.4 $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f_n(x)$ e bir *fonksiyon dizisi* denir ve (f_n) ile gösterilir.

Tanım 2.5 $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $L_n(f; x)$ e bir *operatör dizisi* denir ve (L_n) ile gösterilir.

Tanım 2.6 Kapalı bir $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli ve reel değerli fonksiyonlardan oluşan kümeye $C[a, b]$ *fonksiyon uzayı* denir. Bu uzaydaki norm,

$$\|f(x)\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

şeklinde tanımlanır.

Bu $C[a, b]$ uzayının keyfi elemanları için aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $\forall f, g \in C[a, b]$ için $f + g \in C[a, b]$
2. $\forall f, g \in C[a, b]$ için $f + g = g + f$
3. $\forall f, g, h \in C[a, b]$ için $(f + g) + h = f + (g + h)$
4. $\forall f \in C[a, b]$ için $\exists \theta$ vardır ki $f + \theta = \theta + f = f$
5. $\forall f \in C[a, b]$ için $\exists f^*$ vardır ki $f + f^* = f^* + f = \theta$
6. $\forall f \in C[a, b]$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\lambda f \in C[a, b]$

7. $\forall f \in C[a, b]$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ için $(\lambda\mu)f = \lambda(\mu f)$
8. $\forall f \in C[a, b]$ için $1 \cdot f = f$
9. $\forall f \in C[a, b]$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ için $(\lambda + \mu)f = \lambda f + \mu f$
10. $\forall f, g \in C[a, b]$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g$
11. $\forall f \in C[a, b]$ için $\|f\| \geq 0$
12. $\forall f \in C[a, b]$ için $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$
13. $\forall f \in C[a, b]$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$
14. $\forall f, g \in C[a, b]$ için $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

sonuç olarak $C[a, b]$ uzayı bir normlu vektör uzayıdır.

Tanım 2.7 Bir (f_n) fonksiyonlar dizisinin bir f fonksiyonuna $C[a, b]$ normunda düzgün yakınsak olması, $\forall x \in [a, b]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f(x)\|_{C[a, b]} = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

eşitliği sağlanmalıdır.

Düzgün yakınsama $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ şeklinde gösterilir.

2.2. Süreklilik Modülü

$f \in C[a, b]$ olsun. $\forall \delta > 0$ için

$$\omega(f; \delta) = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |t-x| \leq \delta}} |f(t) - f(x)|$$

ile tanımlanan $\omega(f; \delta)$ ifadesine f fonksiyonunun *süreklilik modülü* denir.

Lemma 2.3 Süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri sağlar.

- (i) $\omega(f; \delta) \geq 0$
- (ii) $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2)$
- (iii) $m \in \mathbb{N}$ için $\omega(f; \delta) \leq m \omega(f; \delta)$
- (iv) $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(f; \lambda\delta) \leq (1 + \lambda) \omega(f; \delta)$
- (v) $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega(f; \delta) = 0$
- (vi) $|f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t - x|)$
- (vii) $|f(t) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right) \omega(f; \delta)$

İspat:

(i) Tanım gereğince, süreklilik modülü mutlak değerin supremumu olduğundan pozitiftir.

(ii) $\delta_1 \leq \delta_2$ için $|t - x| \leq \delta_2$ bölgesinin $|t - x| \leq \delta_1$ bölgesinden daha büyük olduğunu biliyoruz. Bölge büyüdükçe alınan supremumda büyüyeceğinden istenilen elde edilir. Yani süreklilik modülü monoton artandır.

(iii) Süreklilik modülünün tanımından dolayı

$$\omega(f; m\delta) = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |t-x| \leq m\delta}} |f(t) - f(x)|$$

yazılabileceğini biliyoruz. Ayrıca

$$|t - x| \leq m\delta \Rightarrow x - m\delta \leq t \leq x + m\delta$$

olup, $t = x + mh$ seçilirse

$$x - m\delta \leq x + mh \leq x + m\delta$$

$$\Rightarrow -m\delta \leq mh \leq m\delta$$

$$\Rightarrow -\delta \leq h \leq \delta$$

$$\Rightarrow |h| \leq \delta$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\omega(f; m\delta) = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |h| \leq \delta}} |f(x + mh) - f(x)|$$

şeklinde yazılabilir.

Diğer taraftan

$$\sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |h| \leq \delta}} |f(x + mh) - f(x)| = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |h| \leq \delta}} \left| \sum_{k=0}^{m-1} [f(x + (k+1)h) - f(x + kh)] \right|$$

şeklinde yazılabileceğinden bu eşitlik, sağ tarafına üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |h| \leq \delta}} |f(x + mh) - f(x)| &\leq \sum_{k=0}^{m-1} \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |h| \leq \delta}} |f(x + (k+1)h) - f(x + kh)| \\ &\leq \omega(f; \delta) + \dots + \omega(f; \delta) \\ &= m \omega(f; \delta) \end{aligned}$$

elde edilir.

(iv) $\lambda \in \mathbb{R}^+$ sayısının tam kısmı $[\lambda]$ ile gösterilirse

$$[\lambda] < \lambda < [\lambda] + 1$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu bilinmektedir. Şimdi bu eşitsizlikten ve (ii) de ispatlanan $\omega(f; \delta)$ nın azalmayan fonksiyon olması özelliğini göz önüne alarak

$$\omega(f; \lambda\delta) \leq \omega(f; ([\lambda] + 1)\delta)$$

eşitsizliği yazılabilir. $[\lambda]$ pozitif bir tamsayı olduğundan yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafına (iii) özelliği uygulanabilir.

Bu durumda

$$\omega(f; ([\lambda] + 1)\delta) \leq ([\lambda] + 1) \omega(f; \delta)$$

eşitsizliği elde edilir.

Ayrıca $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+$ için

$$[\lambda] + 1 \leq \lambda + 1$$

olduğu dikkate alındığında

$$\omega(f; ([\lambda] + 1)\delta) \leq (\lambda + 1) \omega(f; \delta)$$

olarak yazılabilir.

Sonuç olarak

$$\omega(f; \lambda\delta) \leq (\lambda + 1) \omega(f; \delta)$$

elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

(v) $|t - x| \leq \delta$ eşitsizliğindeki $\delta \rightarrow 0$ olması $t \rightarrow x$ olması anlamına gelir. f fonksiyonu sürekli olduğundan, süreklilik tanımına göre $t \rightarrow x$ için $|f(t) - f(x)| \rightarrow 0$ olduğundan ispat tamamlanır.

(vi) $\omega(f; \delta)$ ifadesinde $\delta = |t - x|$ seçilirse

$$\omega(f; |t - x|) = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |t - x| \leq \delta}} |f(t) - f(x)|$$

elde edilir. O halde $|f(t) - f(x)|$ lerin supremumu $\omega(f; |t - x|)$ olacağından, $|f(t) - f(x)|$ ifadesi $\omega(f; |t - x|)$ den küçük kalacaktır. Bu ise istenilendir.

(vii), (vi) özelliğinden

$$|f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t - x|) = \omega\left(f; \frac{|t - x|}{\delta} \delta\right)$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikte (iv) özelliği kullanılırsa

$$|f(t) - f(x)| \leq \left(\frac{|t - x|}{\delta} + 1\right) \omega(f; \delta)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi K_n operatörünün yakınsaklık özelliklerinden bahsedelim.

3. K_n OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde (1.11) olarak tanımlanan K_n operatörünün Karovkin teoreminin şartlarını gerçeklediğini gösterip, Yaklaşım hızını klasik süreklilik modülü yardımı ile vereceğiz. Bunun için önce bazı lemmaları verelim.

Lemma 3.1

Her $x \in [0, \infty)$ için, K_n operatörü

$$K_n(1; x) = 1 \quad (3.1)$$

$$K_n(s; x) = \frac{B'(nx)}{B(nx)} x + \frac{2A'(1)+A(1)}{2nA(1)} \quad (3.2)$$

$$K_n(s^2; x) = \frac{B''(nx)}{B(nx)} x^2 + \frac{2B'(nx)[A'(1)+A(1)]}{nA(1)B(nx)} + \frac{1}{n^2A(1)} \{A''(1) + 2A'(1) + \frac{A(1)}{3}\} \quad (3.3)$$

eşitliklerini sağlar.

İspat: Önce (1.8) de verilen Brenke tipli polinomların doğurucu fonksiyonu kullanılarak,

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) = A(1)B(nx) \quad (3.4)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k P_k(nx) = A'(1) B(nx) + nx A(1) B'(nx) \quad (3.5)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 P_k(nx) = n^2 x^2 A(1) B''(nx) + nx B'(nx) \{2A'(1) + A(1)\} \quad (3.6)$$

eşitliklerinin sağlandığını gösterelim. Daha sonra Lemmanın ispatını yapacağız.

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) = A(1)B(nx)$$

eşitliğini göstermek için

$$A(1) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \quad a_0 \neq 0 \quad B(nx) = \sum_{r=0}^{\infty} b_r (nx)^r$$

ifadelerini kullanalım.

$$\begin{aligned} A(1)B(nx) &= \sum_{r=0}^{\infty} a_r \sum_{r=0}^{\infty} b_r (nx)^r \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} a_k b_r (nx)^r \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} a_{k-r} b_r (nx)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \end{aligned}$$

şeklinde yazılarak istenilen eşitlik elde edilir.

$$\sum_{k=0}^{\infty} k P_k(nx) = A'(1)B(nx) + nx A(1)B'(nx)$$

eşitliğin doğruluğunu göstermek için

$$A(t)B(xt) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) t^k$$

eşitliğinde x yerine nx alınırsa

$$A(t)B(nxt) = \sum_{k=0}^{\infty} k P_k(nx) t^k$$

elde edilir.

Bu eşitliğin her iki tarafın t 'ye göre türevi alınır ve sağ tarafına k yerine $k + 1$ yazılırsa

$$\begin{aligned} A'(t)B(nxt) + (nx)A(t)B'(nxt) &= \sum_{k=1}^{\infty} P_k(nx) k t^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{k+1}(nx) (k + 1) t^k \end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra t yerine 1 alınırsa;

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_{k+1}(nx)(k+1) = A'(1)B(nx) + nx A(1)B'(nx)$$

bulunur.

Buradan

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} k P_k(nx) &= \sum_{k=1}^{\infty} k P_k(nx) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) P_{k+1}(nx) \\ &= A'(1)B(nx) + (nx)A(1)B'(nx) \end{aligned}$$

şeklinde istenilen eşitlik elde edilmiş olur.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P_k(nx) &= n^2 x^2 A(1)B''(nx) + nx B'(nx) \{2A'(1) + A(1)\} \\ &\quad + B(nx)\{A''(1) + A'(1)\} \end{aligned}$$

eşitliğini göstermek için,

$$0 + \sum_{k=1}^{\infty} k^2 P_k(nx) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2 P_{k+1}(nx)$$

eşitliğini göz önüne alarak ve

$$(k+1)^2 = k(k+1) + (k+1)$$

şeklinde yazılabileceğini dikkate alıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 P_k(nx) = \sum_{k=0}^{\infty} (k(k+1) + (k+1)) P_{k+1}(nx)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) P_{k+1}(nx) + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) P_{k+1}(nx) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) P_{k+1}(nx) + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) P_{k+1}(nx) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) P_{k+2}(nx) + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) P_{k+1}(nx) \quad (3.7)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Burada daha önce hesapladığımız (3.7) eşitliğinde k yerine $k+1$, x yerine nx alındıktan sonra (1.7) eşitliği yardımı ile

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) P_{k+1}(nx) t^k = A'(t)B(nxt) + (nx)A(t)B'(nxt)$$

eşitliğini yazabiliriz.

Bu ifadenin her iki tarafının t 'ye göre türev alınırsa;

$$\begin{aligned}
&A''(t) B(nxt) + 2nx B'(nxt) A'(t) + n^2 x^2 A(t) B''(nxt) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)k P_{k+1}(nx) t^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) P_{k+2}(nx) t^k
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

Bu eşitlikte t yerine 1 alınırsa,

$$\begin{aligned}
&A''(1) B(nx) + 2nx B'(nx) A'(1) + n^2 x^2 A(1) B''(nx) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) P_{k+2}(nx)
\end{aligned}$$

bulunur.

Bu eşitlik (3.7) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} k^2 P_k(nx) &= A''(1) B(nx) + 2nx B'(nx) A'(1) + n^2 x^2 A(1) B''(nx) \\
&= A'(1) B(nx) + nx A(1) B'(nx) \\
&= n^2 x^2 A(1) B''(nx) + nx B'(nx) \{2A'(1) + A(1)\} + B(nx) \{A''(1) \\
&\quad + A'(1)\}
\end{aligned}$$

olur.

şimdi (3.4), (3.5), (3.6) eşitliklerini kullanarak (3.1), (3.2) ve (3.3) eşitliklerini gösterelim.

$$K_n(1; x) = 1$$

eşitliğinin sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned}
K_n(1; x) &= \frac{n}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} 1 \, ds \\
&= \frac{n}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) s \Big|_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \\
&= \frac{n}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \left[\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} \right] \\
&= \frac{n}{A(1)B(nx)} \frac{A(1)B(nx)}{n} \\
&= 1
\end{aligned}$$

olarak istenilen eşitlik elde edilmiş olur.

Şimdi

$$K_n(s; x) = \frac{B'(nx)}{B(nx)}x + \frac{2A'(1) + A(1)}{2nA(1)}$$

eşitliğinin sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned}
K_n(s; x) &= \frac{n}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} s \, ds \\
&= \frac{n}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \frac{s^2}{2} \Bigg|_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \\
&= \frac{n}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \frac{1}{2} \left[\frac{(k+1)^2}{n^2} - \frac{k^2}{n^2} \right] \\
&= \frac{n}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \left[\frac{2k}{n^2} + \frac{1}{n^2} \right] \\
&= \frac{n}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} 2k \frac{P_k(nx)}{n^2} + \frac{n}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(nx)}{n^2} \\
&= \frac{2}{n A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} k P_k(nx) + \frac{1}{n A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \\
&= \frac{2}{n A(1)B(nx)} [A'(1) B(nx) + nx A(1)B'(nx)] \\
&\quad + \frac{1}{n A(1)B(nx)} A(1)B(nx) \\
&= \frac{2A'(1)}{n A(1)} + \frac{2xB'(nx)}{n B(nx)} + \frac{1}{n} \\
&= \frac{2A'(1) + A(1)}{2n A(1)} + \frac{B'(nx)}{B(nx)}
\end{aligned}$$

olarak istenilen eşitlik elde edilmiş olur.

Şimdi

$$K_n(s^2; x) = \frac{B''(nx)}{B(nx)} x^2 + \frac{2B'(nx)[A'(1) + A(1)]}{nA(1)B(nx)} \\ + \frac{1}{n^2 A(1)} \left\{ A''(1) + 2A'(1) + \frac{A(1)}{3} \right\}$$

eşitliğinin sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned} K_n(s^2; x) &= \frac{n}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} s^2 ds \\ &= \frac{n}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \frac{s^3}{3} \Bigg|_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \\ &= \frac{n}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \left[\frac{\left(\frac{k+1}{n}\right)^3 - \left(\frac{k}{n}\right)^3}{3} \right] \\ &= \frac{n}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \left[\frac{3k^2 + 3k + 1}{3n^3} \right] \\ &= \frac{1}{n^2 A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P_k(nx) + \frac{1}{n^2 A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} k P_k(nx) \\ &\quad + \frac{1}{3n^2 A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \\ &= \frac{1}{n^2 A(1)B(nx)} [n^2 x^2 A(1) B''(nx) + nx B'(nx) \{2A'(1) + A(1)\} + B(nx) \{A''(1) \\ &\quad + A'(1)\}] \\ &\quad + \frac{1}{n^2 A(1)B(nx)} A'(1) B(nx) + nx A(1) B'(nx) + \frac{1}{3n^2 A(1)B(nx)} A(1) B(nx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^2 B''(nx)}{B(nx)} + \frac{2xB'(nx)A'(1)}{n A(1)B(nx)} + \frac{2x B'(nx)}{n B(nx)} + \frac{A''(1)}{n^2 A(1)} + \frac{2A'(1)}{n^2 A(1)} + \frac{1}{3n^2} \\
&= \frac{B''(nx)}{B(nx)} x^2 + \frac{2B'(nx)[A'(1) + A(1)]}{n A(1)B(nx)} x + \frac{1}{n^2 A(1)} \left\{ A''(1) + 2A'(1) + \frac{A(1)}{3} \right\}
\end{aligned}$$

olarak istenilen eşitlik elde edilir.

Lemma 3.2 $x \in [0, \infty)$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}
K_n((s-x)^2; x) &= \left\{ \frac{B''(nx) - 2B'(nx) + B(nx)}{B(nx)} \right\} x^2 \\
&\quad + \left\{ \frac{2A'(1)[B'(nx) - B(nx)] + A(1)[2B'(nx) - B(nx)]}{n A(1)B(nx)} \right\} x \\
&\quad + \frac{1}{n^2 A(1)} \left\{ A''(1) + 2A'(1) + \frac{A(1)}{3} \right\}
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: Basit düzenlemeleri yaparak $K_n((s-x)^2; x)$ hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
K_n((s-x)^2; x) &= \frac{n}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (s-x)^2 ds \\
&= \frac{n}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (s^2 - 2xs + x^2) ds \\
&= \frac{n}{n A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \left[\frac{s^3}{3} - s^2 x + x^2 s \right] \Bigg|_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \\
&= \frac{n}{n A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \left[\frac{k^2 + k}{n^3} + \frac{1}{3n^3} - \frac{2kx + x}{n^2} \right] \\
&= \frac{n}{n^2 A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P_k(nx) + \frac{1}{n^2 A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} k P_k(nx) \\
&\quad + \frac{1}{3n^2 A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx)
\end{aligned}$$

$$- \frac{2x}{n A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} k P_k(nx) - \frac{x}{n A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) + \frac{x^2}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx)$$

Bu ifadede daha önce elde edilen (3.1), (3.2) ve (3.3) ifadeleri yerlerine yazılırlarsa

$$K_n((s-x)^2; x) = \frac{1}{n^2 A(1)B(nx)} [n^2 x^2 A(1)B''(nx) + nx B'(nx) \{2A'(1) + A(1)\} + B(nx) \{A''(1) + A'(1)\}]$$

$$+ \frac{1}{n^2 A(1)B(nx)} [A'(1)B(nx) + nx A(1) B'(nx)] + \frac{1}{3n^2 A(1)B(nx)} [A(1)B(nx)]$$

$$- \frac{2x}{n A(1)B(nx)} [A'(1)B(nx) + nx A(1) B'(nx)] - \frac{x}{n A(1)B(nx)} A(1)B(nx)$$

$$+ \frac{x^2}{A(1)B(nx)} A(1)B(nx)$$

olur. Burada gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$K_n((s-x)^2; x) = \frac{x^2 B''(nx)}{B(nx)} + \frac{2xB'(nx)A'(1)}{n A(1)B(nx)} + \frac{xB'(nx)}{nB(nx)} + \frac{A''(1)}{n^2 A(1)} + \frac{A'(1)}{n^2 A(1)}$$

$$= \frac{A'(1)}{n^2 A(1)} + \frac{xB'(nx)}{nB(nx)} + \frac{1}{3n^2} - \frac{2xA'(1)}{nA(1)} - \frac{2x^2 B(nx)}{nB(nx)} - \frac{x}{n} + x^2$$

$$= \left\{ \frac{B''(nx) - 2B'(nx) + B(nx)}{B(nx)} \right\} x^2 + \left\{ \frac{2A'(1)[B'(nx) - B(nx)] + A(1)[2B'(nx) - B(nx)]}{n A(1)B(nx)} \right\}$$

$$+ \frac{1}{n^2 A(1)} \left\{ A''(1) + 2A'(1) + \frac{A(1)}{3} \right\}$$

olarak elde edilir ki bu istenilendir.

Teorem 3.1 $f \in C[0, a], (a > 0)$ ve

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{B'(y)}{B(y)} = 1, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{B''(y)}{B(y)} = 1 \quad (3.8)$$

olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|K_n(f; x) - f(x)\| = 0$$

dir.

İspat: Lemma 3.1 deki ifadeler kullanılarak (3.4), (3.5) ve (3.6) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n(s^i; x) = x^i, \quad i = 0, 1, 2$$

olduğunu gösterirsek yukarıdaki yakınsaklık, $[0, \infty)$ aralığının her kompakt alt kümesinde düzgün olarak yakınsak olur. Gerçekten de

$$K_n(s^0; x) = K_n(1; x) = 1 \text{ olduğundan}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n(1; x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

dir.

$$K_n(s; x) = \frac{B'(nx)}{B(nx)} x + \frac{2A'(1)}{2nA(1)} + \frac{1}{2n} \text{ olduğundan}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n(s; x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{B'(nx)}{B(nx)} x + \frac{2A'(1)}{2nA(1)} + \frac{1}{2n} \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n(s; x) = x$$

dir.

$$K_n(s^2; x) = \frac{B''(nx)}{B(nx)} x^2 + \frac{2B'(nx)A'(1)}{nA(1)B(nx)} x + \frac{2B'(nx)}{nB(nx)} + \frac{A''(1)}{n^2 A(1)} + \frac{2A'(1)}{n^2 A(1)} + \frac{1}{3n^2}$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n(s^2; x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{B''(nx)}{B(nx)} x^2 + \frac{2B'(nx)A'(1)}{nA(1)B(nx)} x + \frac{2B'(nx)}{nB(nx)} + \frac{A''(1)}{n^2 A(1)} + \frac{2A'(1)}{n^2 A(1)} + \frac{1}{3n^2} \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n(s^2; x) = x^2$$

olarak elde edilirler ki bu göstermek istediğimizdir.

4. K_n OPERATÖRÜNÜN YAKLAŞIM HIZI

Bu kısımda K_n operatörünün klasik süreklilik modülü, ikinci süreklilik modülü ve Peetre K fonksiyoneli yardımıyla $K_n(f; x)$ operatörünün f ye yakınsama hızını belirleyeceğiz.

Kabul edelim ki $f \in \tilde{C}[0, \infty)$ aralığında tanım sürekli bir fonksiyon olsun. Keyfi $\delta > 0$ için süreklilik modülünün

$$w(f; \delta) = \sup_{\substack{x, y \in [0, \infty) \\ |x-y| \leq \delta}} |f(x) - f(y)|, \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlandığını biliyoruz.

Burada $\tilde{C}[0, \infty)$, $[0, \infty)$ üzerindeki düzgün sürekli fonksiyonların kümesini belirtir. Ayrıca herhangi bir $\delta > 0$ ve her $x \in [0, \infty)$ için süreklilik modülünün bilinen özellikleri gereğince

$$|f(x) - f(y)| \leq w(f; \delta) \left(\frac{|x - y|}{\delta} + 1 \right) \quad (4.2)$$

eşitsizliğinin sağlandığını biliyoruz. Bunları göz önüne alarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.1. $f \in \tilde{C}[0, \infty)$ olsun. K_n operatörü aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$$|K_n(f; x) - f(x)| \leq 2w(f; \sqrt{\lambda_n(x)}) \quad (4.3)$$

Burada $\lambda_n(x)$,

$$\begin{aligned} \lambda = \lambda_n(x) = K_n((s-x)^2; x) &= \left\{ \frac{B''(nx) - 2B'(nx) + B(nx)}{B(nx)} \right\} x^2 \\ &+ \left\{ \frac{2A'(1)[B'(nx) - B(nx)] + A(1)[2B'(nx) - B(nx)]}{nA(1)B(nx)} \right\} x \\ &+ \frac{1}{n^2 A(1)} \left\{ A''(1) + 2A'(1) + \frac{A(1)}{3} \right\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

dir.

İspat: (3.1), (4.2) ve K_n operatörünün lineerlik özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned} K_n(f; x) - f(x) &= \frac{n}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(s) ds - f(x) \\ &= \frac{n}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(s) ds \\ &\quad - \frac{n}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) ds \\ &= \frac{n}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (f(s) - f(x)) ds \end{aligned}$$

yazılabilir.

Bu eşitliğin her tarafının mutlak değeri alındıktan sonra sağ tarafın supremumu alınır, süreklilik modülünün tanımı ve diğer özellikleri gereğince

$$\begin{aligned}
|K_n(f; x) - f(x)| &= \left| \frac{n}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (f(s) - f(x)) ds \right| \\
&\leq \frac{n}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} |f(s) - f(x)| ds \\
&\leq \frac{n}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \sup_{\substack{x, s \in [0, \infty) \\ |x-s| \leq \delta}} |f(s) - f(x)| ds \\
&\leq \frac{n}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} w\left(f; \frac{|s-x|}{\delta}\right) ds \\
&\leq \frac{n}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(\frac{|s-x|}{\delta} + 1\right) w(f; \delta) ds \\
&= \frac{n}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} w(f; \delta) ds \\
&\quad + \frac{n}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{1}{\delta} |s-x| w(f; \delta) ds \\
&= \left\{ 1 + \frac{n}{\delta A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} |s-x| ds \right\} w(f; \delta) \tag{4.5}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

Bu son ifadede ki integrale Cauchy Schwarz eşitsizliğinin integral formu uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} |s-x| ds &\leq \sqrt{\left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} 1 ds\right)} \sqrt{\left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (s-x)^2 ds\right)} \\
&= \sqrt{\left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right)} \sqrt{\left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (s-x)^2 ds\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (s-x)^2 ds\right)}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

olur.

Bu eşitsizliğin her iki tarafına $\sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx)$ uygulanırsa

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} |s-x| ds \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \sqrt{\left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (s-x)^2 ds\right)} \tag{4.7}$$

elde edilir.

Son ifadenin sağ tarafındaki toplama Cauchy-Schwarz eşitsizliği tekrar uygulandığı taktirde;

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} |s-x| ds &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\left(\sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (s-x)^2 ds \right)} \\
&= \frac{\sqrt{A(1)B(nx)}}{\sqrt{n}} \sqrt{\left(\frac{A(1)B(nx)}{n} K_n((s-x)^2; x) \right)} \\
&= \frac{A(1)B(nx)}{n} \sqrt{K_n(s-x)^2; x)} \\
&= \frac{A(1)B(nx)}{n} \sqrt{\lambda_n(x)}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

elde edilir.

$\lambda_n(x)$ tanımı (4.4) ile verildi. Bu değer (4.5) ifadesinde kullanılırsa

$$|K_n(f; x) - f(x)| \leq \left\{ 1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{\lambda_n(x)} \right\} w(f; \delta) \tag{4.9}$$

olur.

$\delta = \sqrt{\lambda_n(x)}$ seçimi ile istenilen sonuç elde edilir.

$f \in C_B[0, \infty)$ için ikinci süreklilik modülü

$$w_2(f; \delta) := \sup_{0 < t \leq \delta} \|f(\cdot + 2t) - 2f(\cdot + t) + f(\cdot)\|_{C_B}, \tag{4.10}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $C_B[0, \infty)$, $[0, \infty)$ üzerinde tanımlanan ve $\|f\|_{C_B} = \sup_{x \in [0, \infty)} |f(x)|$ normuna

sahip ve düzgün sürekli olan fonksiyonların kümesini göstermektedir.

$f \in C_B[0, \infty)$ fonksiyonu için Peetre K - fonksiyoneli aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$K(f; \delta) := \inf_{g \in C_B^2[0, \infty)} \{ \|f - g\|_{C_B} + \delta \|g\|_{C_B^2} \}, \quad (4.11)$$

Burada,

$$C_B^2[0, \infty) := \{g \in C_B[0, \infty) : g', g'' \in C_B[0, \infty)\}, \quad (4.12)$$

olup norm için

$$\|g\|_{C_B^2} := \|g\|_{C_B} + \|g'\|_{C_B} + \|g''\|_{C_B}$$

eşitliği sağlanır.

Yukarıda tanımlanan $K_n(f; \delta)$ Peetre K -fonksiyoneli için

M bir sabit. f, δ dan bağımsız ve $\forall \delta > 0$ için

$$K_n(f; \delta) \leq M \{w_2(f; \sqrt{\delta}) + \min(1, \delta) \|f\|_{C_B}\} \quad (4.13)$$

eşitsizliği sağlanır. Buna göre aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.2 $f \in C_B^2[0, \infty)$ için

$$|K_n(f; x) - f(x)| \leq \zeta \|f\|_{C_B^2} \quad (4.14)$$

eşitsizliği sağlanır.

Burada,

$$\begin{aligned}
\zeta := \zeta_n(x) &= \left\{ \frac{B''(nx) - 2B'(nx) + B(nx)}{2B(nx)} \right\} x^2 \\
&+ \left\{ \frac{2A'(1)[B'(nx) - B(nx)] + A(1)[2(n+1)B'(nx) - (2n+1)B(nx)]}{2nA(1)B(nx)} \right\} x \\
&+ \frac{1}{2n^2A(1)} \left\{ A''(1) + 2A'(1) + \frac{A(1)}{3} \right\} + \frac{2A'(1) + A(1)}{2nA(1)}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

dır.

İspat: f nin Taylor formülü (3.1) ve K_n 'in lineerliğinden aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

f nin Taylor formülü olan

$$f(t) = f(x) + \frac{(s-x)}{1!} f'(x) + \frac{(s-x)^2}{2!} f''(x)$$

ifadesinin her tarafına K_n operatörü uygulanırsa

$$K_n(f; x) - f(x) = f'(x)K_n((s-x); x) + \frac{1}{2} f''(\zeta) K((s-x)^2; x) \quad \zeta \in (x, s) \tag{4.16}$$

Burada $s > x$ için

$$K_n((s-x); x) = \left\{ \frac{B'(nx) - B(nx)}{B(nx)} \right\} x + \frac{2A'(1) + A(1)}{2nA(1)} \geq 0 \tag{4.17}$$

dır. Gerçekten pozitif bir aralıkta pozitif bir fonksiyonun integrali de pozitif olacağından

$$\begin{aligned}
K_n((s-x); x) &= \frac{n}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (s-x) ds \\
&= \frac{n}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \left[\frac{k}{n^2} + \frac{1}{2n^2} - \frac{x}{n} \right] \\
&= \frac{1}{nA(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} kP_k(nx) + \frac{1}{2nA(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) - \frac{x}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \\
&= \frac{1}{nA(1)B(nx)} [A'(1)B(nx) + nxA(1)B'(nx)] + \frac{1}{2nA(1)B(nx)} A(1)B(nx) \\
&\quad - \frac{x}{A(1)B(nx)} A(1)B(nx) \\
&= \frac{A'(1)}{nA(1)} + \frac{xB'(nx)}{B(nx)} + \frac{1}{2n} - x \\
&= \left\{ \frac{B'(nx) - B(nx)}{B(nx)} \right\} x + \left\{ \frac{2A'(1) + A(1)}{2nA(1)} \right\}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. (4.16) eşitliğinin her iki tarafının mutlak değeri alınıp $s \geq x$ için sağ tarafın supremumu alınarak Lemma 3.1 ve Lemma 3.2 (4.16) eşitliğine uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
|K_n(f; x) - f(x)| &\leq \left| \left(\frac{B'(nx) - B(nx)}{B(nx)} \right) x + \frac{2A'(1) + A(1)}{2nA(1)} \right| \sup |f'| \\
&\quad + \frac{1}{2} \left| \left(\frac{B'(nx) - 2B'(nx) + B(nx)}{B(nx)} \right) \right| x^2 \\
&\quad + \left| \frac{2A'(1)[B'(nx) - B(nx)] + A(1)[2B'(nx) - B(nx)]}{nA(1)B(nx)} \right| x \\
&\quad + \frac{1}{n^2 A(1)} \left| A''(1) + 2A'(1) + \frac{A(1)}{3} \right| \sup |f''|
\end{aligned}$$

olur.

Buradan ise

$$\begin{aligned}
|K_n(f; x) - f(x)| &\leq \left\{ \left(\frac{B'(nx) - B(nx)}{B(nx)} \right) x + \frac{2A'(1) + A(1)}{2nA(1)} \right\} \|f'\|_{C_B} \\
&+ \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{B''(nx) - 2B'(nx) + B(nx)}{B(nx)} \right] x^2 \right. \\
&+ \left. \left[\frac{2A'(1)[B'(nx) - B(nx)] + A(1)[2B'(nx) - B(nx)]}{nA(1)B(nx)} \right] x \right. \\
&+ \left. \frac{1}{n^2A(1)} \left[A''(1) + 2A'(1) + \frac{A(1)}{3} \right] \right\} \|f''\|_{C_B}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left\{ \left[\frac{B''(nx) - 2B'(nx) + B(nx)}{2B(nx)} \right] x^2 \right. \\
&+ \left. \left[\frac{2A'(1)[B'(nx) - B(nx)] + A(1)[2(n+1)B'(nx) - (2n+1)B(nx)]}{2nA(1)B(nx)} \right] x \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2n^2A(1)} \left[A''(1) + 2A'(1) + \frac{A(1)}{3} \right] + \frac{2A'(1) + A(1)}{2nA(1)} \right\} \|f\|_{C_B^2}
\end{aligned}$$

şeklinde istenilen eşitsizlik elde edilmiş olur.

Teorem 4.3 $f \in C_B[0, \infty)$ olsun, o takdirde

$$|K_n(f; x) - f(x)| \leq 2M\{w_2(f; \sqrt{\delta}) + \min(1, \delta) \|f\|_{C_B}\} \tag{4.19}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$\delta := \delta_n = \frac{\zeta_n(x)}{2}$ ve $M > 0$, δ ve f den bağımsız bir sabit olup; $\zeta_n(x)$ daha önce tanımlandığı gibidir.

İspat: Kabul edelim ki $g \in C_B^2[0, \infty)$ olsun. Teorem 4.2 den ve K_n nin lineerliğinden ve norm tanımından

$$\begin{aligned} |K_n(f; x) - f(x)| &\leq |K_n(f - g; x)| + |K_n(g; x) - g(x)| + |g(x) - f(x)| \\ &\leq 2\|f - g\|_{C_B} + \zeta\|g\|_{C_B^2} \\ &= 2\left\{\|f - g\|_{C_B} + \delta\|g\|_{C_B^2}\right\} \end{aligned}$$

yazılabilir.

Bu eşitsizliğin sol tarafı $g \in C_B^2[0, \infty)$ fonksiyonundan bağımsız olduğundan

$$|K_n(f; x) - f(x)| \leq 2K_n(f; \delta) \quad (4.20)$$

yazılabilir. Burada $K_n(f; \delta)$ Peetre's K-fonksiyoneli olup (4.20) de tanımlandığı gibidir. Peetre K -fonksiyoneli ve ikinci süreklilik modülü arasındaki bağlantı göz önüne alındığında

$$|K_n(f; x) - f(x)| \leq 2M\{w_2(f; \sqrt{\delta}) + \min(1, \delta)\|f\|_{C_B}\}$$

yazılabilir ki bu gösterilmek istenilendir.

Sonuç 4.1 Teorem 4.1 - Teorem 4.3 ve (3.8) kabulleri altında $n \rightarrow \infty$ için

δ_n , ζ_n ve λ_n sıfıra giderler.

5. ÖZEL DURUMLAR VE DİĞER ÖZELLİKLER

$g_k^{d-1}(x, h)$ Gould-Hopper polinomları Hermit tipi d-ortogonal polinomların kümesini oluşturur. Öyle ki bu polinomların doğurucu fonksiyonu;

$$e^{ht^{d+1}} \exp(xt) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{d+1}(x, h) \frac{t^k}{k!} \quad (5.1)$$

olup burada,

$$g_k^{d+1}(x, h) = \sum_{m=0}^{[(k/(d+1))]} \frac{k!}{m! (k - (d+1)m)!} h^m x^{k-(d+1)m} \quad (5.2)$$

şeklindedir. Ayrıca (5.2) ifadesi her zaman bir tamsayıdır.

[4] de yazarlar (3.8) şartları sağlanmak üzere Gould-Hopper polinomlarını $A(t) = e^{ht^{d+1}}$ ve $B(t) = e^t$ ifadeleri yardımıyla oluşturulan Brenke tipli polinomlar olduğunu $h \geq 0$ kabulü altında gösterip (1.10) ile verilen operatörü oluşturdular.

Bu operatörler Gould-Hopper polinomlarını içermekte olup

$$L_n^*(f; x) := e^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad (5.3)$$

şeklinde verilmektedir. Burada $x \in [0, \infty)$ dır.

(1.11) ile verilen ifade $A(t) = e^{ht^{d+1}}$ ve $B(t) = e^t$ özel durumuna karşılık Gould-Hopper polinomlarını içeren operatörün Kantorovich versiyonunu oluşturur ve $h \geq 0$ kabulü altında

$$K_n^*(f; x) := ne^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \quad (5.4)$$

şeklinde ifade edilir.

Sonuç 5.1

$h = 0$ için $g_k^{d+1}(nx, h) = (nx)^k$ olup (5.4) ile verilen operatör Szász Mirakyan Kantorovich operatörüne dönüşür.

Şimdi (5.4) ile verilen operatör için Voronovskaya tipi teoremi verebilmek için aşağıdaki Lemmayı verelim.

Lemma 5.1

K_n^* operatörleri aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

$$K_n^*(1; x) = 1 \quad (5.5)$$

$$K_n^*(s; x) = x + \frac{h(d+1)}{n} + \frac{1}{2n} \quad (5.6)$$

$$K_n^*(s^2; x) = x^2 + \frac{2}{n}(h(d+1) + 1)x \frac{1}{n^2} \left[h(d+1)\{h(d+1) + d + 2\} + \frac{1}{3} \right] \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} K_n^*(s^3; x) = & x^3 + \frac{3x^2}{n} \left\{ h(d+1) + \frac{3}{2} \right\} \\ & + \frac{x}{n^2} \left\{ 3h^2(d+1)^2 + 3h(d+1)(d+3) + \frac{7}{2} \right\} \\ & + \frac{1}{n^3} \left\{ h^2(h+3)(d+1)^3 + h(d+1)^3 + \frac{3}{2}h(h+1)(d+1)^2 \right. \\ & \left. + h(d+1) + \frac{1}{4} \right\} \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned}
K_n^*(s^4; x) &= x^4 + \frac{4x^3}{n} \{h(d+1) + 2\} \\
&+ \frac{4x^2}{n} \{2h(h+1)(d+1)^2 + 6h(d+1) + 5\} \\
&+ \frac{x}{n} \{12h^2(d+1)^2(d+1) + 4h^3(d+1)^3 + 2h(d+1)(2d^2 + 10d + 5) + 6\} \\
&+ \frac{1}{n^4} \{h^3(h+6)(d+1)^4 + 8h(1+3h)(d+1)^3 - 9h(h+1)(d+1)^2 \\
&+ 7h(d+1) + 2h^3(d+1)^3 + 4d(d+1)^2h^2 \\
&+ 3h^2d^2(d+1)^2 + (d-2)(d-1)d(d+1)h + \frac{1}{5}\}
\end{aligned} \tag{5.9}$$

İspat: (5.1) ile verilen Gould-Hopper polinomlarının doğurucu fonksiyonu kullanılarak yukarıdaki eşitlikler kolayca gösterilebilir.

$$1) K_n^*(1; x) = 1$$

eşitliğini göstermek için.

$$\begin{aligned}
K_n^*(1; x) &= ne^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} 1 \, ds \\
&= n e^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \left[\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} \right] \\
&= n e^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \frac{1}{n} \\
&= e^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!}
\end{aligned}$$

(5.1) ifadesinde t yerine 1 ve x yerine nx yazılırsa

$$e^{nx+h} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!}$$

elde edilir. Bu ifade yukarıdaki eşitlikte kullanılırsa

$$\begin{aligned} K_n^*(1; x) &= e^{-nx-h} e^{nx+h} \\ &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

$$2) \quad K_n^*(s; x) = x + \frac{h(d+1)}{n} + \frac{1}{2n}$$

eşitliğinin doğruluğunu göstermek için.

$$\begin{aligned} K_n^*(s; x) &= n e^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} s \, ds \\ &= n e^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \left[\frac{s^2}{2} \right]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \\ &= n e^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \left[\frac{(k+1)^2}{2n^2} - \frac{k^2}{2n^2} \right] \\ &= n e^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \left[\frac{k}{n^2} + \frac{1}{2n^2} \right] \\ &= \frac{e^{-nx-h}}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} + \frac{e^{-nx-h}}{2n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \\ &= \frac{e^{-nx-h}}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{(k-1)!} + \frac{e^{-nx-h}}{2n} \cdot e^{nx+h} \end{aligned}$$

$$= \frac{e^{-nx-h}}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} + \frac{1}{2n}$$

olarak bulunur (5.1) ifadesinin her iki tarafının t ye göre türevini alırsak,

$$\begin{aligned} \{h(d+1)t^d + x\}e^{ht^{d+1}+xt} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(x, h) k t^{k-1}}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(x, h) t^{k-1}}{(k-1)!} \end{aligned}$$

$$\{h(d+1)t^d + x\}e^{ht^{d+1}+xt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1}^{d+1}(x, h) t^k}{k!}$$

$$\{h(d+1)t^d + x\}e^{ht^{d+1}+xt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1}^{d+1}(x, h) t^k}{k!}$$

olur.

Son bulduğumuz ifadede x yerine nx ve t yerine 1 alınırsa,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} = \{h(d+1) + nx\}e^{nx+h} \quad (5.10)$$

olur.

Bu değer $K_n^*(s; x)$ de yerine yazılırsa

$$K_n^*(s; x) = \frac{e^{-nx-h}}{n} \{h(d+1) + nx\}e^{nx+h} + \frac{1}{2n}$$

$$= x + \frac{h(d+1)}{n} + \frac{1}{2n}$$

olarak elde edilir.

$$3) \quad K_n^*(s^2; x) = x^2 + \frac{2}{n}(h(d+1) + 1)x \frac{1}{n^2} \left[h(d+1)\{h(d+1) + d + 2\} + \frac{1}{3} \right]$$

eşitliğin doğruluğunu göstermek için.

$$\begin{aligned}
K_n^*(s^2; x) &= ne^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} s^2 ds \\
&= ne^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \frac{s^3}{3} \Bigg|_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \\
&= ne^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \left[\frac{(k+1)^3}{3n^3} - \frac{k^3}{3n^3} \right] \\
&= ne^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \left[\frac{k^2}{n^3} + \frac{k}{n^3} + \frac{1}{3n^3} \right] \\
&= \frac{e^{-nx-h}}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} + \frac{e^{-nx-h}}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \\
&\quad + \frac{e^{-nx-h}}{3n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \\
&= \frac{e^{-nx-h}}{n^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k g_k^{d+1}(nx, h)}{(k-1)!} + \frac{e^{-nx-h}}{n^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{(k-1)!} \\
&\quad + \frac{e^{-nx-h}}{3n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{-nx-h}}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1) g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} + \frac{e^{-nx-h}}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} + \frac{1}{3n^2} \\
&= \frac{e^{-nx-h}}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} + \frac{e^{-nx-h}}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} \\
&\quad + \frac{e^{-nx-h}}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} + \frac{1}{3n^2} \\
&= \frac{e^{-nx-h}}{n^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{(k-1)!} + 2\{h(d+1) + nx\} + \frac{1}{3n^2}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1}^{d+1}(nx, h) t^k}{k!} = \{h(d+1)t^d + x\}e^{nx+h}$$

olup, bu ifadenin her iki tarafının t ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
[h(d+1)d t^{d-1} + (h(d+1) + x)^2]e^{ht^{d+1}+xt} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k g_{k+1}^{d+1}(x, h) t^{k-1}}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_{k+1}^{d+1}(x, h) t^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+2}^{d+1}(x, h) t^{k-1}}{k!}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Bu son eşitlikte t yerine 1, x yerine nx alınırsa,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+2}^{d+1}(nx, h)}{k!} = \{h(d+1)d + (h(d+1) + nx)^2\} e^{nx+h} \quad (5.11)$$

olur.

Buradan,

$$\begin{aligned} K_n^*(s^2; x) &= \frac{e^{-nx-h}}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+2}^{d+1}(nx, h)}{k!} + 2\{h(d+1) + nx\} + \frac{1}{3n^2} \\ &= \frac{h(d+1)d + (h(d+1) + nx)^2}{n^2} + 2\{h(d+1) + nx\} + \frac{1}{3n^2} \\ &= x^2 + \frac{2}{n} + (h(d+1) + 1)x + \frac{1}{n^2} \left[h(d+1)\{h(d+1) + d + 2\} + \frac{1}{3} \right] \end{aligned}$$

istenilen eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} \textbf{4) } K_n^*(s^3; x) &= x^3 + \frac{3x^2}{n} \left\{ h(d+1) + \frac{3}{2} \right\} \\ &\quad + \frac{x}{n^2} \left\{ 3h^2(d+1)^2 + 3h(d+1)(d+3) + \frac{7}{2} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{n^3} \left\{ h^2(h+3)(d+1)^3 + h(d+1)^3 + \frac{3}{2}h(h+1)(d+1)^2 \right. \\ &\quad \left. + h(d+1) + \frac{1}{4} \right\} \end{aligned}$$

gösterilmek istenilen eşitlik elde edilmiş olur.

$$\begin{aligned}
K_n^*(s^3; x) &= ne^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} s^3 ds \\
&= ne^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \left\{ \frac{k^3}{n^4} + \frac{3k^2}{2n^4} + \frac{k}{n^4} + \frac{1}{4n^4} \right\} \\
&= \frac{e^{-nx-h}}{n^3} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3 g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} + \frac{3}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \right\} \\
&= \frac{e^{-nx-h}}{n^3} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^2 g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} + \frac{3}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1) g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \right\} \\
&= \frac{e^{-nx-h}}{n^3} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} \right. \\
&\quad + \frac{3}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} \\
&\quad \left. + \frac{3}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \right\} \\
&= \frac{e^{-nx-h}}{n^3} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} + \frac{7}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} + \frac{7}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \right\}
\end{aligned}$$

$$= \frac{e^{-nx-h}}{n^3} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)g_{k+2}^{d+1}(nx, h)}{k!} + \frac{7}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+2}^{d+1}(nx, h)}{k!} + \frac{7}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \right\}$$

$$= \frac{e^{-nx-h}}{n^3} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k g_{k+2}^{d+1}(nx, h)}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+2}^{d+1}(nx, h)}{k!} + \frac{7}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+2}^{d+1}(nx, h)}{k!} \right. \\ \left. + \frac{7}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \right\}$$

$$= \frac{e^{-nx-h}}{n^3} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+3}^{d+1}(nx, h)}{k!} + \frac{9}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+2}^{d+1}(nx, h)}{k!} + \frac{7}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \right\}$$

olmak üzere

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+3}^{d+1}(nx, h)}{k!}$ ifadesinin eşitini bulmak için daha önceden hesapladığımız

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+2}^{d+1}(x, h)t^k}{k!} = [h(d+1)dt^{d-1} + (h(d+1) + x)^2]e^{ht^{d+1}+xt}$$

ifadesinin her iki tarafının t ye göre türevi alınır;

$$e^{ht^{d+1}+xt} [h(d+1)d(d-1)t^{d-2} + 3\{h^2(d+1)^2dt^{2d-1} + xh(d+1)dt^{d-1}\} \\ + (h(d+1)t^d + x)^3]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+3}^{d+1}(x, h)t^k}{k!}$$

elde edilir.

Bulduğumuz eşitlikte t yerine 1, x yerine nx alınırsa

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+3}^{d+1}(nx, h)}{k!} = e^{nx+h} [h(d+1)d(d-1) + 3\{h^2(d+1)^2d + nxh(d+1)d\} + (h(d+1) + nx)^3] \quad (5.12)$$

olur.

Buradan,

$$\begin{aligned} K_n^*(s^3; x) &= \frac{e^{-nx-h}}{n^3} \left\{ [h(d+1)d(d-1) + 3\{h^2(d+1)^2d + nxh(d+1)d\} \right. \\ &\quad \left. + (h(d+1) + nx)^3] + \frac{9}{2} [(h(d+1)d) + (h(d+1) + x)^2] \right. \\ &\quad \left. + \frac{7}{2} [h(d+1) + x] + \frac{1}{4} \right\} e^{h+nx} \\ &= \frac{h(d+1)d(d-1)}{n^3} + \frac{3}{n^3} h^2(d+1)^2d + \frac{3x}{n^2} h(d+1)d \\ &\quad + \frac{3}{n^3} (h(d+1) + nx)^3 + \frac{9}{2n^3} (h(d+1) + x)^2 \\ &\quad + \frac{7}{2n^3} (h(d+1) + x) + \frac{1}{4n^3} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} K_n^*(s^3; x) &= x^3 + \frac{3x^2}{n} \left\{ h(d+1) + \frac{3}{2} \right\} \\ &\quad + \frac{x}{n^2} \left\{ 3h^2(d+1)^2 + 3h(d+1)(d+3) + \frac{7}{2} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{n^3} \left\{ h^2(h+3)(d+1)^3 + h(d+1)^3 + \frac{3}{2} h(h+1)(d+1)^2 \right. \\ &\quad \left. + h(d+1) + \frac{1}{4} \right\} \end{aligned}$$

eşitliği sağlanmış olur.

$$\begin{aligned}
5) \quad K_n^*(s^4; x) &= x^4 + \frac{4x^3}{n} \{h(d+1) + 2\} \\
&+ \frac{4x^2}{n} \{2h(h+1)(d+1)^2 + 6h(d+1) + 5\} \\
&+ \frac{x}{n^3} \{12h^2(d+1)^2(d+1) + 4h^3(d+1)^3 + 2h(d+1)(2d^2 + 10d + 5) + 6\} \\
&+ \frac{1}{n^4} \{h^3(h+6)(d+1)^4 + 8h(1+3h)(d+1)^3 - 9h(h+1)(d+1)^2 \\
&+ 7h(d+1) + 2h^3(d+1)^3 + 4d(d+1)^2h^2 \\
&+ 3h^2d^2(d+1)^2 + (d-2)(d-1)d(d+1)h + \frac{1}{5}\}
\end{aligned}$$

eşitliğin doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
K_n^*(s^4; x) &= ne^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} s^4 ds \\
&= ne^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \left\{ \frac{(k+1)^5}{5n^5} - \frac{k^5}{5n^5} \right\} \\
&= ne^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \left\{ \frac{k^4}{n^5} + \frac{2k^3}{n^5} + \frac{2k^2}{n^5} + \frac{k}{n^5} + \frac{1}{5n^5} \right\} \\
&= \frac{e^{-nx-h}}{n^4} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^4 g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3 g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \right. \\
&\quad \left. + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} + \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \right\} \\
&= \frac{e^{-nx-h}}{n^4} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^3 g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^2 g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \right. \\
&\quad \left. + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1) g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \right\} + \frac{1}{5n^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{-nx-h}}{n^4} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3 g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} + 3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} \right. \\
&\quad + 3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} \\
&\quad + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} + 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} \\
&\quad \left. + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} \right\} + \frac{1}{5n^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{-nx-h}}{n^4} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3 g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} + 5 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} \right. \\
&\quad \left. + 9 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} + 6 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} \right\} + \frac{1}{5n^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{-nx-h}}{n^4} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^2 g_{k+2}^{d+1}(nx, h)}{k!} + 5 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1) g_{k+2}^{d+1}(nx, h)}{k!} \right. \\
&\quad \left. + 9 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+2}^{d+1}(nx, h)}{k!} + 6 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} \right\} + \frac{1}{5n^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{-nx-h}}{n^4} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 g_{k+2}^{d+1}(nx, h)}{k!} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+2}^{d+1}(nx, h)}{k!} \right. \\
&\quad + 5 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k g_{k+2}^{d+1}(nx, h)}{k!} \\
&\quad + 5 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+2}^{d+1}(nx, h)}{k!} \\
&\quad \left. + 9 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+2}^{d+1}(nx, h)}{k!} + 6 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} \right\} + \frac{1}{5n^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{-nx-h}}{n^4} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 g_{k+2}^{d+1}(nx, h)}{k!} + 7 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k g_{k+2}^{d+1}(nx, h)}{k!} + 15 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+2}^{d+1}(nx, h)}{k!} \right. \\
&\quad \left. + 6 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} \right\} + \frac{1}{5n^4} \\
&= \frac{e^{-nx-h}}{n^4} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1) g_{k+3}^{d+1}(nx, h)}{k!} + 7 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+3}^{d+1}(nx, h)}{k!} + 15 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+2}^{d+1}(nx, h)}{k!} \right. \\
&\quad \left. + 6 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} \right\} + \frac{1}{5n^4} \\
&= \frac{e^{-nx-h}}{n^4} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k g_{k+3}^{d+1}(nx, h)}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+3}^{d+1}(nx, h)}{k!} + 7 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+3}^{d+1}(nx, h)}{k!} \right. \\
&\quad \left. + 15 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+2}^{d+1}(nx, h)}{k!} + 6 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} \right\} + \frac{1}{5n^4} \\
&= \frac{e^{-nx-h}}{n^4} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+4}^{d+1}(nx, h)}{k!} + 8 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k g_{k+3}^{d+1}(nx, h)}{k!} + 15 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+2}^{d+1}(nx, h)}{k!} \right. \\
&\quad \left. + 6 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1}^{d+1}(nx, h)}{k!} \right\} + \frac{1}{5n^4}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+4}^{d+1}(nx, h)}{k!}$ ifadesinin eşitini bulmak için daha önceden hesapladığımız

$$\begin{aligned}
&e^{ht^{d+1}+xt} [h(d+1)d(d-1)t^{d-2} + 3\{h^2(d+1)^2 dt^{2d-1} + xh(d+1)dt^{d-1}\} \\
&\quad + (h(d+1)t^d + x)^3]
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+3}^{d+1}(x, h)t^k}{k!}$$

ifadesinin her iki tarafının t ye göre türevi alınırsa;

$$\begin{aligned}
& e^{ht^{d+1}+xt}\{6x^2h(d+1)dt^{d-1} + 4xh(d+1)d(d-1)t^{d-2} \\
& + h(d+1)d(d-1)(d-2)t^{d-3} + [6xh^2(d+1)^2 + 6xh^2(d+1)^2d]t^{2d-1} \\
& + 3h^2(d+1)^2d(2d-1)t^{2d-2} + 6h^3(d+1)^3dt^{3d-1} + (h(d+1)t^d + x)^4\} \\
& = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+4}^{d+1}(x, h)t^k}{k!}
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bulduğumuz ifadede t yerine 1 , x yerine nx alınırsa;

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+4}^{d+1}(nx, h)}{k!} &= e^{h+nx}\{6(nx)^2h(d+1)d + 4nxh(d+1)d(d-1) \\
&+ h(d+1)d(d-1)(d-2) \\
&+ [6nxh^2(d+1)^2 + 6nxh^2(d+1)^2d] \\
&+ 3h^2(d+1)^2d(2d-1) + 6h^3(d+1)^3d + (h(d+1) + x)^4\}
\end{aligned} \tag{5.13}$$

bulunur.

Buradan gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned}
K_n^*(s^4; x) &= \frac{e^{-nx-h}}{n^4} \{6(nx)^2h(d+1)d + 4nxh(d+1)d(d-1) \\
&+ h(d+1)d(d-1)(d-2)h(d+1) \\
&+ [6nxh^2(d+1)^2 + 6nxh^2(d+1)^2d] + 3h^2(d+1)^2d(2d-1) \\
&+ 6h^3(d+1)^3d + (h(d+1) + x)^4\} e^{nx+h} \\
&+ \frac{8e^{-nx-h}}{n^4} \{h(d+1)d(d-1) \\
&+ 3[h^2(d+1)^2d + nxh(d+1)d] \\
&+ (h(d+1) + nx)^3\} e^{nx+h}
\end{aligned}$$

$$+ \frac{15e^{-nx-h}}{n^4} \{h(d+1)d + (h(d+1)nx)^2\}e^{nx+h}$$

$$+ \frac{6e^{-nx-h}}{n^4} \{h(d+1) + nx\}e^{nx+h}$$

olur.

Böylece

$$\begin{aligned} K_n^*(s^4; x) = & x^4 + \frac{4x^3}{n} \{h(d+1) + 2\} \\ & + \frac{4x^2}{n} \{2h(h+1)(d+1)^2 + 6h(d+1) + 5\} \\ & + \frac{x}{n} \{12h^2(d+1)^2(d+1) + 4h^3(d+1)^3 \\ & + 2h(d+1)(2d^2 + 10d + 5) + 6\} \\ & + \frac{1}{n^4} \left\{ h^3(h+6)(d+1)^4 + 8h(1+3h)(d+1)^3 - 9h(h \right. \\ & + 1)(d+1)^2 + 7h(d+1) + 2h^3(d+1)^3 + 4d(d+1)^2h^2 \\ & \left. + 3h^2d^2(d+1)^2 + (d-2)(d-1)d(d+1)h + \frac{1}{5} \right\} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilmiş olur.

Lemma 5.2

$x \in [0, \infty)$ için

$$K_n^*((s-x)^2; x) = \frac{x}{n} + \frac{1}{n^2} \left[h(d+1)\{h(d+1) + d + 2\} + \frac{1}{3} \right] \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} K_n^*((s-x)^4; x) = & \frac{3x^2}{n^2} + \frac{x}{n^3} \{6h(h+2)(d+1)^2 + 2h(d+1)(-3d+2) + 5\} \\ & + \frac{1}{n^4} \left\{ h^3(h+6)(d+1)^4 + 2h(h^2 + 12h + 4)(d+1)^3 + 7h(d+1) \right. \\ & - 9h(h+1)(d+1)^2 + 4d(d-1)(d+1)^2h^2 \\ & \left. + 3h^2d^2(d+1)^2 + (d-2)(d-1)d(d+1)h + \frac{1}{5} \right\} \end{aligned} \quad (5.15)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: Lemma 5.1 i kullanarak istenilen eşitlikleri gösterelim.

$$\begin{aligned}
K_n^*((s-x)^2; x) &= ne^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (s-x)^2 ds \\
&= ne^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (s^2 - 2sx + x^2) ds \\
&= ne^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \left\{ \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} s^2 ds - 2x \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} s ds \right. \\
&\quad \left. + x^2 \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} 1 ds \right\} \\
&= ne^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} s^2 ds \\
&\quad + 2x ne^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} s ds \\
&\quad + x^2 ne^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} 1 ds
\end{aligned}$$

Lemma 5.1'deki eşitlikler yukarıda yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&= x^2 + \frac{2}{n} (h(d+1) + 1)x + \frac{1}{n^2} \left[h(d+1) \{ h(d+1) + d + 2 \} + \frac{1}{3} \right] \\
&\quad - 2x \left\{ x + \frac{h(d+1)}{n} + \frac{1}{2n} \right\} + x^2
\end{aligned}$$

Bu son eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$K_n^*((s-x)^2; x) = \frac{x}{n} + \frac{1}{n^2} \left[h(d+1) \{ h(d+1) + d + 2 \} + \frac{1}{3} \right]$$

şeklinde istenilen eşitlik elde edilmiş olur.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned} K_n^*((s-x)^4; x) &= ne^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (s-x)^4 ds \\ &= ne^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (s^4 - 4s^3x + 6s^2x^2 - 4sx^3 + x^4) ds \\ &= ne^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} s^4 ds \\ &\quad - 4xe^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} s^3 ds \\ &\quad + 6x^2 ne^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} s^2 ds \\ &\quad - 4x^3 ne^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} s ds \\ &\quad + x^4 ne^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} 1 ds \end{aligned}$$

Lemma 5.1'deki eşitlikler son eşitlikte yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
K_n^*((s-x)^4; x) &= x^4 + \frac{4x^3}{n} \{h(d+1) + 2\} \\
&\quad + \frac{3x^2}{n^2} \{2h(h+1)(d+1)^2 + 6h(d+1) + 5\} \\
&= \frac{x}{n^3} \{12h^2(d+1)^2(d+2) + 4h^3(d+1)^3 + 2h(d+1)(2d^2 + 10 + 15) + 6\} \\
&= \frac{1}{n^4} \left\{ h^3(h+6)(d+1)^4 + 8h(1+3h)(d+1)^3 - 9h(h+1)(d+1)^2 \right. \\
&\quad \left. + 7h(d+1) + 2h^3(d+1)^3 + 4d(d-1)(d+1)^2 + h^2 \right. \\
&\quad \left. + 3h^2d^2(d+1)^2 + (d-2)(d-1)d(d+1)h + \frac{1}{5} \right\} \\
&\quad - 4x \left\{ x^3 + \frac{3x^2}{n} \left[h(d+1) + \frac{3}{2} \right] + \frac{x}{n^2} \left[3h^2(d+1)^2 + 3h(d+1)(d+3) + \frac{7}{2} \right] + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{n^3} \left[h^2(h+3)(d+1)^3 + h(d+1)^3 + \frac{3}{2}h(h+1)(d+1)^2 + h(d+1) + \frac{1}{4} \right] \right\} \\
&\quad + 6x^2 \left\{ x^2 + \frac{2}{n} (h(d+1) + 1)x + \frac{1}{n^2} \left[h(d+1)[h(d+1) + d + 2] + \frac{1}{3} \right] \right\} \\
&\quad - 4x^3 \left\{ x + \frac{h(d+1)}{n} + \frac{1}{2n} \right\} + x^2
\end{aligned}$$

elde edilir.

Son eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned}
K_n^*((s-x)^4;) &= \frac{3x^2}{n^2} + \frac{x}{n^3} \{6h(h+2)(d+1)^2 + 2h(d+1)(-3d+2) + 5\} \\
&\quad + \frac{1}{n^4} \left\{ h^3(h+6)(d+1)^4 + 2h(h^2 + 12h + 4)(d+1)^3 + 7h(d+1) \right. \\
&\quad \left. - 9h(h+1)(d+1)^2 + 4d(d-1)(d+1)^2h^2 + 3h^2d^2(d+1)^2 \right. \\
&\quad \left. + (d-2)((d-1)h(d+1) + \frac{1}{5}) \right\}
\end{aligned}$$

olarak istenilen eşitlik bulunur.

Teorem 5.1

$f \in C^2[0, a]$ olsun. Bu taktirde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [K_n^*(f; x) - f(x)] = f'(x) \left\{ h(d+1) + \frac{1}{2} \right\} + \frac{xf''(x)}{2!} \quad (5.16)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Taylor teoremi gereğince ikinci basamaktan türevlenebilir bir f fonksiyonu için

$$f(s) = f(x) + (s-x)f'(x) + \frac{(s-x)^2}{2!}f''(x) + (s-x)^2\mu(s; x) \quad (5.17)$$

eşitliği yazılabilir.

Burada $\mu(s; x) \in C[0, a]$ ve $\lim_{s \rightarrow x} \mu(s; x) = 0$ 'dır.

K_n^* operatörü (5.17) eşitliğinin her iki tarafına uygulanırsa;

$$\begin{aligned} K_n^*(f; x) &= f(x) + f'(x)K_n^*(s-x; x) + \frac{f''(x)}{2!}K_n^*((s-x)^2; x) \\ &+ K_n^*((s-x)^2\mu(s; x); x) \end{aligned} \quad (5.18)$$

elde edilir. Burada $f(x)$ eşitliğin sağ tarafına atıldıktan sonra

Lemma (5.1) ve Lemma (5.2) göz önüne alındığında (5.18) eşitliği

$$\begin{aligned} n[K_n^*(f; x) - f(x)] &= \left\{ \frac{h(d+1)}{n} + \frac{1}{2n} \right\} f'(x) \\ &+ n \left\{ \frac{x}{n} + \frac{1}{n^2} \left[h(d+1)\{h(d+1) + d+2\} + \frac{1}{3} \right] \right\} \frac{f''(x)}{2!} \\ &+ n K_n^*((s-x)^2\mu(s; x); x) \end{aligned} \quad (5.19)$$

şeklinde yazılabilir.

Burada,

$$K_n^*((s-x)^2\mu(s;x);x) = ne^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx,h)}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (s-x)^2\mu(s;x)ds \quad (5.20)$$

olduğu göz önüne alınarak

$n K_n^*((s-x)^2\mu(s;x);x)$ ifadesinin sağ tarafına Cauchy Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

Yani

$$\begin{aligned} \int f g dx &\leq \left(\int f^2 dx \right)^{1/2} \left(\int g^2 dx \right)^{1/2} \\ \text{eşitsizliğinde } f &= (s-x)^2, \quad g = n \mu(s-x) \text{ alınırsa} \\ n K_n^*((s-x)^2\mu(s;x);x) &\leq n^2 e^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx,h)}{k!} \sqrt{\left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (s-x)^4 ds \right)} \sqrt{\left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \mu^2(s;x) ds \right)} \\ &\leq \sqrt{\left(n^3 e^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx,h)}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (s-x)^4 ds \right)} \\ &\leq \sqrt{\left(n^3 e^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx,h)}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \mu^2(s;x) ds \right)} \\ &= \sqrt{n^2 K_n^*((s-x)^4;x)} \sqrt{K_n^*(\mu^2(s;x);x)} \end{aligned} \quad (5.21)$$

eşitsizliği sağlanır.

Lemma 5.2 göz önüne alındığında

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 K_n^*((s-x)^4; x) = 3x^2 \quad (5.22)$$

olur.

Diğer taraftan

$\mu(s; x) \in C[0, a]$ ve $\lim_{s \rightarrow x} \mu(s; x) = 0$ olup, Teorem 3.1 den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n^*(\mu^2(s; x); x) = \mu^2(x; x) = 0 \quad (5.23)$$

olur.

(5.21) (5.22) ve (5.23) ifadelerini göz önüne alındığında ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n K_n^*((s-x)^2 \mu(s; x); x) = 0 \quad (5.24)$$

olduğu görülür.

(5.19) ve (5.24) eşitlikleri kullanılarak $n \rightarrow \infty$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n [K_n^*(f; x) - f(x)] = f'(x) \left\{ h(d+1) + \frac{1}{2} \right\} + \frac{f''(x)}{2!} x \quad (5.25)$$

elde edilir. Böylelikle teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 5.2 $h = 0$ alındığında Teorem 5.1 Szász Mirakyan Kantorovich operatörü için bilinen (1.12) Voronovskaya tipli teoremi verir.

TARTIŞMA VE SONUÇ

Yaklaşımlar teorisindeki gelişmeler her geçen gün matematiğin diğer dalları ile bağlantılı olarak devam etmektedir. Özel fonksiyonlar ve ortogonal polinomlar ailelerinin sağladığı özellikler ve doğurucu fonksiyonlarının yardımı ile birçok bağıntı elde edilebilmektedir. Bu bağıntılar kullanılarak da birçok problemin çözümü daha kolay hale gelmektedir. Bu bağıntılar yardımıyla birçok karmaşık ifade daha anlaşılır hale gelmekte olup sonuçlar hem analitik hem de nümerik olarak daha iyi elde edilebilmektedir. Ortogonal polinom ailelerinden olan Brenke tipli polinomlar ve onların bazı genellemeleri de son zamanlarda gelişme gösteren çalışma alanlarından biridir.

Bu tezde ortogonal polinom ailelerinden olan Brenke tipli polinomlar yardımı ile oluşturulan ve integrallenebilir fonksiyonlar için tanımlanan bir operatörün yaklaşımlar teorisi kullanılarak yakınsaklık özellikleri incelenmiş ve yakınsaklık hızlarından bahsedilmiştir. Ayrıca bazı özel durumlar göz önüne alınarak inceleme detaylandırılmıştır. Bu yapılırken de ana kaynak olarak F. Taşdelen, R. Aktaş ve A. Altın tarafından 2012 yılında yazılan “Brenke Tipli Polinomlar İçeren Szász Operatörlerinin Bir Kantorovich Tipi” isimli çalışmaları incelenmiştir.

Sonuçta yapılan çalışma bu alandaki gelişmelere katkı sağlayacak şekilde bir Türkçe kaynak olması amaçlanarak yapılmıştır ve amaca uygun olacağı düşünülmektedir.

KAYNAKÇA

- [1] O. Szász , “Generalization of S. Bernstein’s polynomials to the infinite interval,” Journal of Research of the National Bureau of Standards, vol. 45, no. 3, pp. 239–245, 1950.
- [2] A. Jakimovski and D. Leviatan, “Generalized Szász operators for the approximation in the infinite interval,” Mathematica, vol. 11, pp. 97–103, 1969.
- [3] M. E. H. Ismail, “On a generalization of Szász operators,” Mathematica, vol. 39, no. 2, pp. 259–267, 1974.
- [4] S. Varma, S. Sucu, and G. İçöz, “Generalization of Szász operators involving Brenke type polynomials,” Computers & Mathematics with Applications, vol. 64, no. 2, pp. 121–127, 2012.
- [5] T. S. Chihara, An Introduction to Orthogonal Polynomials, Gordon and Breach, New York, NY, USA, 1978.
- [6] P. L. Butzer, “On the extensions of Bernstein polynomials to the infinite interval,” Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 5, pp. 547–553, 1954.
- [7] O. Duman, M. A. Özarslan, and B. Della Vecchia, “Modified Szász -Mirakjan-Kantorovich operators preserving linear functions,” Turkish Journal of Mathematics, vol. 33, no. 2, pp. 151–158, 2009.
- [8] D. Miclaus, “The voronovskaja type theorem for the Szász-Mirakjan-Kantorovich operators,” Journal of Science and Arts, vol. 2, no. 13, pp. 257–260, 2010.
- [9] G. Nowak and A. Sikorska-Nowak, “Some approximation properties of modified Szász -Mirakjan- Kantorovich operators,” Revue d’Analyse Numerique et de Theorie de l’Approximation, vol. 38, no. 1, pp. 73–82, 2009.

- [10] V. Totik, "Approximation by Szász-Mirakjan-Kantorovich operators in L_p ($1 < p < \infty$)," *Analysis Mathematica*, vol. 9, no. 2, pp. 147–167, 1983.
- [11] G. Başcanbaz-Tunca and A. Erencin, "A Voronovskaya type theorem for q -Szász-Mirakjan-Kantorovich operators," *Revue d'Analyse Numérique et de Théorie de l'Approximation*, vol. 40, no. 1, pp. 14–23, 2011.
- [12] S. Varma and F. Tasdelen, "Szász type operators involving Charlier polynomials," *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 56, no. 5-6, pp. 118–122, 2012.
- [13] Z. Walczak, "On approximation by modified Szász-Mirakjan operators," *Glasnik Matematicki*, vol. 37, no. 57, pp. 303–319, 2002.
- [14] F. Altomare and M. Campiti, *Korovkin-Type Approximation Theory and Its Applications*, vol. 17 of *De Gruyter Studies in Mathematics*, Appendix A By Michael Pannenberg and Appendix B By Ferdinand Beckho, Walter De Gruyter, Berlin, Germany, 1994.
- [15] Z. Ditzian and V. Totik, *Moduli of Smoothness*, Springer, New York, NY, USA, 1987.
- [16] H. W. Gould and A. T. Hopper, "Operational formulas connected with two generalizations of Hermite polynomials," *Duke Mathematical Journal*, vol. 29, no. 1, pp. 51–63, 1962.
- [17] K. Douak, "The relation of the d -orthogonal polynomials to the Appell polynomials," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 70, no. 2, pp. 279–295, 1996.
- [18] Fatma Tasdelen, Rabia Aktaş, and Abdullah Altın, "A Kantorovich Type of Szász Operators Including Brenke-Type Polynomials", 2012