

# ÇOK DEĞİŞKENLİ KALİTE KONTROL ÇİZELGELERİNİN DÖKÜM SANAYİNDE UYGULANMASI

**Suna ÇETİN ve Burak BİRGÖREN**

Endüstri Mühendisliği Bölümü, Mühendislik Fakültesi, Kırıkkale Üniversitesi, 71451 Kampüs Kırıkkale  
[sunaozel@gazi.edu.tr](mailto:sunaozel@gazi.edu.tr), [birgoren@kku.edu.tr](mailto:birgoren@kku.edu.tr)

(Geliş/Received: 15.11.2006; Kabul/Accepted: 13.06.2007)

## ÖZET

Kontrol çizelgelerinin kullanım amacı, bir süreçteki kalite değişkenlerinin normal dışı davranışlarını belirlemek ve bundan hareketle hata kaynaklarını ortaya çıkarmaktır. Çok değişkenli kalite kontrol çizelgeleri arasında en popüler olan Hotelling  $T^2$  çizelgeleri, birden fazla kalite değişkenini eşzamanlı gözlemek için kullanılır. Bu çalışmada Hotelling  $T^2$  çizelgeleri, bir pirinç döküm fabrikasında pirinç eritme sürecine uygulanmıştır. Süreç kontrol altındayken toplanan çok değişkenli süreç verilerine dayalı olarak Hotelling  $T^2$  çizelgesi oluşturulmuş, ardından çizelge yeni süreç verilerine uygulanmıştır. Kontrol dışı durumlara işaret eden çizelge sinyalleri incelenmiş, süreci iyileştirmek amacıyla hata kaynakları araştırılmıştır. Bu çalışmada Mason-Young-Tracy ayrıştırma yönteminden yararlanılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Çok değişkenli kalite kontrolü, kalite kontrol çizelgeleri, Hotelling  $T^2$  istatistiği, Mason-Young-Tracy ayrıştırma yöntemi.

## APPLICATION OF MULTIVARIATE STATISTICAL PROCESS CONTROL IN CASTING INDUSTRY

### ABSTRACT

The purpose of quality control charts is to detect abnormal behavior of quality variables and to determine the causes of quality problems using these abnormalities. Hotelling's  $T^2$  charts, the most popular multivariate quality control charts, are used to monitor several quality variables, simultaneously. In this study, Hotelling's  $T^2$  charts were applied to a melting process in a brass casting factory. A Hotelling's  $T^2$  chart was formed from multivariate data collected from the process when it was in control; then, the chart was applied to new process data. Chart signals that are out of control limits were analyzed, and associated root causes were investigated in order to improve the process. Mason-Young-Tracy decomposition method was employed in this investigation.

**Keywords:** Multivariate quality control, quality control charts, Hotelling's  $T^2$  statistic, Mason-Young-Tracy decomposition method.

### 1.GİRİŞ (INTRODUCTION)

Genellikle bir sürecin performansı birden fazla kalite değişkeni ile belirlenmektedir. Örneğin, metal yayların gerilmesinde  $X_1$ =kalınlık ve  $X_2$ =çap olmak üzere süreci etkileyen iki kalite değişkeni vardır. Bahsedilen bu değişkenlerin her biri için tek değişkenli kalite kontrol çizelgelerinin (Shewhart çizelgeleri) oluşturulması ve incelenmesi sıkça başvurulan bir yöntemdir. Ancak bu hem çok sayıda çizelgenin eş zamanlı incelenmesi anlamına gelmektedir, hem de değişkenler arasındaki ilişki (korelasyon) yok sayılacağından değişkenlerin hatalı

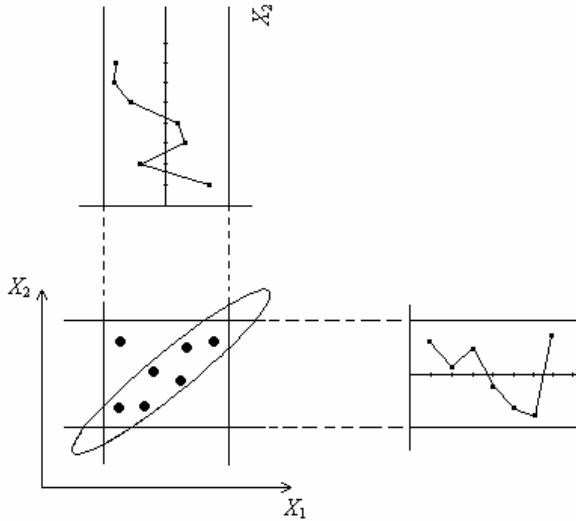
yorumlanmasına neden olmaktadır. Çünkü değişkenler bağımsız olarak ele alınmakta, diğer değişkenlerin etkisi ya da değişkenler arasındaki ilişki göz ardı edilmektedir. Her bir değişkenin ayrı ayrı çizelgesinin oluşturulmasına alternatif yaklaşım ise bir tane Çok Değişkenli Kalite Kontrol (ÇDDK) çizelgesi oluşturmaktır.

Bu çizelgeler içinde yaygın şekilde kullanılan Hotelling  $T^2$  çizelgesidir. Ayrıca çok değişkenli birikimli toplam (MCUSUM) ve çok değişkenli üstel ağırlıklı hareketli ortalama (MEWMA) çizelgeleri de tek değişkenli çizelgelerden uyarlanarak geliştiril-

miştir. Hotelling  $T^2$  çizelgesi geliştirilen en eski çok değişkenli çizelge olması ve hesaplamaların basitliği nedeniyle kullanıcılar tarafından çoğu zaman tercih edilmektedir. Ancak bu çizelge, değişken ortalamasındaki küçük sapmaların saptanmasında hassas değildir. MCUSUM ve MEWMA çizelgeleri bu tür küçük sapmaları Hotelling  $T^2$  çizelgelerine kıyasla daha çabuk saptayabilmektedir [1]; ancak kullanıcılar tarafından bilinmemeleri ve nispeten daha karmaşık hesaplamalar gerektirmeleri yüzünden kullanımları yaygınlaşmamıştır.

Çok değişkenli kalite kontrolü, bir ürüne ya da sürece ait birden fazla kalite değişkenini eşzamanlı değerlendiren ve böylece süreci kontrol altında tutmayı amaçlayan bir kalite kontrol yaklaşımıdır. Üretimin gittikçe otomatikleşen bilgi kontrollü sistemlerle yapılması, ürün kalitesinin saptanmasına yönelik daha bol ve çok değişkenli verinin düşük maliyetle toplanması, ÇDKK çizelgelerinin kullanımını kolaylaştırmakta ve teşvik etmektedir.

Çok değişkenli kalite kontrol yöntemleri değişkenler arasındaki korelasyonu da dikkate aldığı için tercih edilmektedir. Şekil 1’de bir süreçteki iki değişken için uygulanan tek değişkenli kontrol ve çok değişkenli kontrol arasındaki ayırım görülmektedir [2, 3].



**Şekil 1.** Tek Değişkenli ve Çok Değişkenli Kalite Kontrolü Arasındaki Ayrım (Difference between Univariate and Multivariate Quality Control)

Değişkenler arasındaki ilişki dikkate alınmazsa, Şekil 1’in üst ve sağında iki farklı değişkene ait Shewhart çizelgelerinde, noktalar alt ve üst kontrol sınırları arasındaysa süreç kontrol altında kabul edilecektir. Aynı ürüne ait değer çiftleri ayrı ayrı bu çizelgelerde gösterilmek yerine iki boyutlu uzayda işaretlenirse, çizelgelerdeki kontrol sınırları bu uzayda dikdörtgen bir alan oluşturur ve bu alan içindeki noktalar sürecin kontrol altında olduğunu gösterir. Ancak çok değişkenli kalite kontrol çizelgelerinde değişkenler

arasındaki bağımlılık ilişkisi de göz önüne alınmaktadır. Wierda’nın belirttiği gibi [4], Shewhart çizelgelerinin yakalayamadığı kontrol-dışı noktaları Hotelling  $T^2$  çizelgesinin yakalamasının nedeni, değişkenler arasındaki korelasyon yapısını hesaba katan,  $T^2$  istatistiğine dayalı eliptik bir kontrol bölgesi kullanmasıdır. Şekil 1’deki elips iki değişken arasında kuvvetli pozitif korelasyon olduğunu göstermektedir ve dikdörtgen alandan çok farklıdır.

Kontrol elipsini çizerek çok değişkenli gözlem değerlerini Şekil 1’de olduğu gibi elips üzerinde işaretlemek mümkündür, ancak bu durumda çizilen noktaların zaman ardışıklığı kaybolacaktır. Ayrıca kalite değişkeni sayısının ikiden fazla olması durumunda elipsleri (elipsoidleri) çizmek zorlaşacaktır. Bu zorlukları gidermek için her ürüne ait çok değişkenli gözlem değerlerinden bir  $T^2$  istatistik değeri üretilir; bu değerler zaman sırasıyla Hotelling  $T^2$  çizelgelerinde işaretlenir. Korelasyon yapısını dikkate alan bu çizelgeler, kontrol-dışı durumları doğru şekilde saptamaktadır, çok değişkenli gözlem değerlerinin tek bir  $T^2$  değerine indirgenmesi, Hotelling  $T^2$  çizelgelerinin yorumunu zorlaştırılmaktadır [3].

Bu çalışmada, bir pirinç döküm fabrikasında pirinç eritme sürecine Hotelling  $T^2$  çizelgelerinin uygulaması yapılmıştır. Fabrikada düzenli olarak pirinç içeriğindeki elementlerin ağırlık cinsinden yüzdeleri ölçülmektedir, ancak bu verilere kontrol çizelgeleri uygulanmamaktadır. Verinin düzenli toplanması ve bol olması, ayrıca ölçülen element sayısının çok olması nedeniyle süreç, Hotelling  $T^2$  çizelgelerinin uygulanması için çok elverişlidir. Çizelgelerin geleneksel uygulamasının yanı sıra, bu çalışmada, kontrol-dışı sinyallerin yorumlanmasında kullanılan MYT (Mason-Young-Tracy) ayrıştırma yöntemi de uygulanmış, böylece sinyallerin olası kaynakları konusunda saptamalar yapılmıştır. Takip eden bölümlerde, önce çizelgelerin oluşturulması ve uygulanması ele alınacak, sinyallerin yorumlanması için geliştirilen yöntemler tartışılıp bunlardan MYT ayrıştırma yöntemi izah edilecektir. Sonra uygulamanın ayrıntıları açıklanacaktır.

## 2. HOTELLİNG $T^2$ ÇİZELGELERİ (HOTELLİNG’S $T^2$ CHARTS)

$T^2$  istatistiği çok değişkenli normal dağılıma dayalı istatistiksel uzaklığın bir ölçütüdür; tek değişkenli student-t istatistiğinin çok değişkenli duruma genişletilmiş halidir.  $T^2$  istatistiği çok değişkenli normal dağılıma sahip bir ortalama vektörünün bir sabit değere eşit olup olmadığının test edildiği hipotez testlerinde kullanılır. Bu istatistiğin çizelgelere uyarlanması ile geliştirilen Hotelling  $T^2$  çizelgeleri ortalama vektöründeki kaymanın belirlenmesinde kullanılır. Hotelling  $T^2$  çizelgelerinin önemli bir dezavantajı süreçte kontrol-dışı durumu doğru şekilde belirlemesine rağmen hangi değişken ya da değişken

grubunun kontrol dışı olduğu konusunda bilgi vermemesidir [5].

Çizelge, süreç kontrol altındayken toplanan çok değişkenli verilerle oluşturulur. Süreç ortalama vektörü ve varyans-kovaryans matrisi tahmin edildikten sonra çizelgenin üst kontrol sınırı hesaplanır. Bu işleme birinci aşama adı verilir. Ardından gelen ikinci aşamada süreçten alınan gözlemlerden elde edilen  $T^2$  istatistik değerleri gözlem sırasıyla çizelgeye yerleştirilerek üst kontrol sınırının üstünde bir değer bulunup bulunmadığı takip edilir. Böyle bir değer kontrol-dışı durum sinyali olarak değerlendirilir ve olası hata kaynakları araştırılır.

Hotelling  $T^2$  çizelgeleri ardışık zamanlarda toplanmış tek gözlemlere uygulanabileceği gibi altgruplar halinde toplanmış gözlemlere de uygulanabilir. Bu çalışmada tek gözlemler kullanıldığı için, diğer deyişle altgrup büyüklüğü bir alındığı için, çizelgenin sadece bu koşullarda kullanımı hakkında bilgi verilecektir.

## 2.1. Tek Gözlemler için Üst Kontrol Sınırının Hesaplanması (Calculation of Upper Control Limits for Individual Observations)

Çizelgenin oluşturulduğu birinci aşamada, sürecin kontrol altında olup olmadığı test edilir ve ikinci aşamada kullanılacak kontrol sınırları belirlenir. Süreçten  $m$  adet gözlem alınarak  $X_1, X_2, \dots, X_m$  gibi bir ilk veri kümesi oluşturulur. Burada  $X_i = (X_{i,1}, X_{i,2}, \dots, X_{i,p})'$  gibi  $p$  değişkenli bir vektördür. İlk örnek kümesinde kontrol-dışı gözlemler saptanarak kümeden atılır; böylece elde edilen veri kümesi referans veri kümesi olarak tanımlanır. Bu küme kullanılarak Hotelling  $T^2$  çizelgesi oluşturulur. İleriye dönük bir yaklaşım olan ikinci aşamanın amacı ise sürecin birinci aşamada elde edilen dağılım yapısına uygunluğunu kontrol etmek ve sürecin kontrol altında olmasının devamlılığını sağlamaktır. Bunun için süreçten alınan  $X_{m+1}, X_{m+2}, \dots$  gözlemlerinin kontrol-dışı sinyal üretip üretmediği gözlenir [6, 7, 8].

### I. Aşama

Bu aşamada sürecin kontrol altında olmasına özen gösterilerek genellikle  $m = 20-25$  adet gözlem alınır. Bu pratik uygulama tek değişkenli kontrol çizelgelerinden gelmektedir, ancak Hotelling  $T^2$  çizelgelerinde sağlıklı kestirimler yapabilmek için bu sayı yetersizdir. Kalite mühendisleri üretim kısıtları çerçevesinde daha yüksek  $m$  değerleri kullanmaya gayret göstermelidir.

$X_i = (X_{i,1}, X_{i,2}, \dots, X_{i,p})'$  kalite vektörünün  $\mu$  ortalamalı ve  $\Sigma$  kovaryans matrisli çok değişkenli

normal dağılım takip ettiği varsayılır. Birinci aşamada üst kontrol sınırı

$$\bar{ÜKS} = \frac{(m-1)^2}{m} \beta_{\alpha, p/2, (m-p-1)/2} \quad (1)$$

alınır. Burada  $\beta_{\alpha, p/2, (m-p-1)/2}$ ,  $p/2$  ve  $(m-p-1)/2$  parametrelili Beta dağılım yüzdeliğidir.  $\mu$  ve  $\Sigma$ 'nin tahminçileri  $\bar{X}$  ve  $S$  ile çizelgeye işaretlenecek  $T^2$  değerleri şöyle hesaplanır:

$$\bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i \quad (2)$$

$$S = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})' \quad (3)$$

$$T_i^2 = (X_i - \bar{X})' (S)^{-1} (X_i - \bar{X}) \quad (4)$$

Eşitlik 4'e göre hesaplanan  $m$  adet değerden Eşitlik 1'de verilen kontrol sınırını aşanlar, ilk veri kümesinden atılır, yeni (azalan)  $m$  değerine göre Eşitlik 1-4 kullanılarak yeni kontrol sınırı ve  $T^2$  değerleri hesaplanıp çizelgenir. Bu veri atma işlemi kontrol sınırları dışında nokta kalmayana kadar tekrar edilir. Bazı durumlarda, işlem üç-dört kez tekrar ettiği halde sınırlar dışında bazı noktalar kalır; bu kez, bu noktalar için herhangi bir olası hata kaynağı saptanamıyorsa işlem durdurulabilir.

### II. Aşama

Veri atma işleminin ardından elde edilen referans veri kümesinin hacmine  $m_s$  diyelim. Bu durumda ikinci aşamada kullanılacak üst kontrol sınırı ve işaretlenecek  $T^2$  değerleri şöyle olacaktır:

$$\bar{ÜKS} = \frac{p(m_s+1)(m_s-1)}{(m_s)^2 - m_s p} F_{\alpha, p, m_s-p} \quad (5)$$

$$T_i^2 = (X_i - \bar{X})' (S)^{-1} (X_i - \bar{X}) \quad (6)$$

Burada  $F_{\alpha, p, m_s-p}$ ,  $p$  ve  $m_s-p$  serbestlik dereceli  $F$  dağılım yüzdeliğidir. Ayrıca, Eşitlik 6'daki  $\bar{X}$  ve  $S$ 'nin referans veri kümesinden tahmin edildiğine dikkat edilmelidir; burada Eşitlik 4 ve 5,  $m$  yerine  $m_s$  kullanılarak referans veri kümesine uygulanmalıdır.

Pratikte kalite mühendisleri,  $m > 25$  ise Eşitlik 1 ve 5'te verilen birinci ve ikinci aşama kontrol sınırları yerine yaklaşık bir değer olarak  $p$  serbestlik dereceli ki-kare dağılım yüzdeliği kullanırlar:

$$\bar{ÜKS} = \chi_{\alpha, p}^2 \quad (7)$$

Ancak yapılan benzetim çalışmaları, bu yaklaşımın yanlış olduğu göstermiştir: Eşitlik 7'deki değer

Eşitlik 1 ve 5'teki kontrol sınırlarına yeterince yakın olması için  $m > 100$  önerilmektedir [1].

### 3. HOTELLİNG $T^2$ ÇİZELGELERİNDE KONTROL-DIŞI SINYALLERİN YORUMLANMASI (INTERPRETATION OF OUT-OF-CONTROL SIGNALS ON HOTELLİNG'S $T^2$ CHARTS)

Tek değişkenli kontrol çizelgelerinde sinyal oluşmasının nedeni ortalamadaki kayma ve/veya varyans yapısındaki değişikliklerdir.  $\bar{X}$  ya da  $X$  çizelgeleri ile ortalamadaki kayma,  $R$  ya da  $MR$  çizelgesi ile de varyans yapısındaki değişiklikler belirlenir. Çok değişkenli kalite kontrol ise daha karışıktır. Hotelling  $T^2$  çizelgelerinde sinyal, değişkenlerin birinin, bir kısmının ya da tümünün kontrol dışına çıkması ile oluşabilir. Ayrıca değişkenler arasındaki ilişkinin değişmesi nedeniyle de ortaya çıkabilir. Bu karmaşıklığın yanı sıra çok değişkenli süreçlerde  $p$  boyutlu vektörün tek bir istatistiğe dönüştürülmesi sinyal nedenlerinin belirlenmesini zorlaştırmaktadır [9]. Hataya neden olan değişkenlerin belirlenmesinin zorluğu üzerinde literatürde sıkça durulmuştur [10-20].

Bunlardan Jackson [10] ve Pignatiello vd. [11] sinyallerin yorumlanmasında Ana Bileşenler Analizini kullanarak aralarında korelasyon olan değişkenler yerine bunlardan elde edilen bağımsız ana bileşenlerin kontrolünü önermişlerdir. Bağımsızlık istenen bir özellik olmakla birlikte ana bileşenler, orijinal değişkenlerin ağırlıklı ortalaması biçiminde olması nedeniyle çoğu süreçte kolayca yorumlanamamaktadır.

Alt [12] ve Doganaksoy vd. [13] hangi değişken ortalamasının kaydığına belirlenmesinde Bonferroni aralıklarının kullanılmasını önermiştir. Blazek vd. [14] çok değişkenli ve tek değişkenli çizelgeleri, tek çizelge üzerinde grafik olarak göstermeyi önermişlerdir.

Murphy [15] kalite vektöründeki değişkenleri sinyale neden olmasından şüphe edilen ve edilmeyen iki kümeye bölmeyi önermektedir. Ancak bu yöntem sadece  $\Sigma$ 'nın bilinmesi durumunda geçerlidir. Ayrıca uygulamada olası birçok değişken grubundan sinyale neden olabilecek doğru grubun sezgisel olarak belirlenmesi kolay değildir. Chua vd. [16], değişkenlerin olası tüm alt kümelerini test eden bir yöntem önermiştir. Böylece belirsizlik azaltılacaktır. Ancak işlem fazlalığı nedeniyle pratikte uygulanması zordur.

Hawkins [17] gözlenen değişkenler arasında regresyon modelleri oluşturarak artık terimi için kontrol çizelgesi oluşturmaktadır. Bu yöntem özellikle değişkenler arasında yüksek düzeyde ve karmaşık kovaryans yapıları bulunduğu faydalı olmaktadır.

Hayter vd. [18] her bir değişkenin ortalamasına ait güven aralıklarının eşzamanlı incelenmesine dayanan bir yöntem geliştirmiştir. Yöntem normal dağılım varsayımının geçersiz olduğu durumlarda da kullanılabilir [3]. Lowry vd. [19] bu yöntemin geleneksel Bonferroni eşitsizliği yaklaşımından daha etkili olduğunu belirtmektedir.

Mason vd. [20] Ana Bileşenler Analizinden hareketle Hotelling  $T^2$  istatistiğinin bağımsız parçalara ayrılmasına yönelik Mason-Young-Tracy (MYT) ayrıştırma yöntemi olarak da bilinen bir yöntem geliştirmişlerdir. Yöntem, hem değişkenlerin tek tek kontrol dışında olup olmadığı hem de değişkenler arasındaki ilişkinin veri kümesinin yapısına uyup uymadığı hakkında bilgi vermektedir. Bu yöntem ayrıntılı olarak ele alınacaktır.

### 4. MASON-YOUNG-TRACY (MYT) AYRIŞTIRMA YÖNTEMİ (MASON-YOUNG-TRACY (MYT) DECOMPOSITION METHOD)

MYT ayrıştırma yönteminde  $T^2$  istatistiği koşullu ve koşulsuz olarak adlandırılan bağımsız bileşenlere ayrıştırılmaktadır;  $T_{(i)}^2$  terimi koşulsuz bileşeni,  $T_{(i,j)}^2$  terimi ise koşullu bileşeni ifade etmektedir. Koşulsuz bileşen, değişkenlerin tek tek kontrol dışında olması durumunda, koşullu bileşen, değişkenler arasındaki bağımlılık ilişkisinin veri kümesinin yapısına uymaması durumunda sinyal oluşturmaktadır [5, 6, 9].  $T^2$  istatistiği iki bağımsız terime parçalanabilir:

$$T^2 = T_{p-1}^2 + T_{p/1,2,\dots,p-1}^2 \quad (8)$$

Burada ilk terim koşulsuz, ikinci terim koşullu terimdir. Koşulsuz terim, ilk  $(p-1)$  değişken  $X_1, X_2, \dots, X_{p-1}$  kullanılarak üretilen bir  $T^2$  istatistiğidir:

$$T_{p-1}^2 = \left( X^{(p-1)} - \bar{X}^{(p-1)} \right)' S_{X^{(p-1)}}^{-1} \left( X^{(p-1)} - \bar{X}^{(p-1)} \right) \quad (9)$$

Koşullu terim ise ilk  $(p-1)$  değişkene koşullu olarak  $X_p$  değişkeni için üretilir. Koşullu terimin tekrarlı ayrıştırmasıyla

$$T^2 = T_1^2 + T_{2/1}^2 + T_{3/1,2}^2 + \dots + T_{p/1,2,\dots,p-1}^2 \quad (10)$$

elde edileceği görülebilir. Birinci terim yani koşulsuz terim

$$T_1^2 = \frac{(X_1 - \bar{X}_1)^2}{S_1^2} \quad (11)$$

ile hesaplanır; burada  $\bar{X}_1$  ve  $S_1^2$ ,  $X_1$  değişkeninin örnek ortalaması ve varyansdır. Ayrıştırma terimlerinin genel yapısı;

$$\begin{aligned}
T_{p/1,2,\dots,p-1}^2 &= T_{(x_1,x_2,\dots,x_p)}^2 - T_{(x_1,x_2,\dots,x_{p-1})}^2 \\
T_{p-1/1,2,\dots,p-2}^2 &= T_{(x_1,x_2,\dots,x_{p-1})}^2 - T_{(x_1,x_2,\dots,x_{p-2})}^2 \\
&\vdots \\
T_{2/1}^2 &= T_{(x_1,x_2)}^2 - T_1^2 \\
T_1^2 &= \frac{(X_1 - \bar{X}_1)^2}{S_1^2}
\end{aligned} \quad (12)$$

şeklinde [6]; burada parantez içindeki alt-inceksler,  $T^2$  istatistiğinin hangi değişkenler için üretildiğini göstermektedir.

Eşitlik 10'daki ayrıştırma, değişkenlerin farklı sıraları kullanılarak  $X_1$  yerine diğer değişkenler koşulsuz terim olacak şekilde de yapılabilir. Böylece elde edilen koşulsuz terimlerin ayrı ayrı çizelgelenmesi tek değişkenli Shewhart kontrol çizelgelerinin kullanımına eşdeğerdir. Genel  $T^2$ 'nin sinyal oluşturmadığı durumlarda ise koşullu terimler incelenerek yoruma gidilir. Değişken sayısının artması ile ( $p > 10$ ) terim sayısı artacağından hesaplamalar zorlaşacaktır. Bu nedenle sinyalin belirlenmesi ve yorumlanmasına ilişkin bir algoritma geliştirilmiştir [9]. Algoritma koşulsuz terimlerden başlayarak, artan koşullu terimlere (iki terimli, üç terimli, ...) doğru bir yol izlemektedir. Koşullu ve koşulsuz terimler, hesaplanan kritik değerlerle karşılaştırılır. Koşulsuz terim için kritik değer  $KD_Z$  ve koşullu terim için kritik değer  $KD_L$

$$\begin{aligned}
KD_Z &= \left( \frac{m_s + 1}{m_s} \right) F_{(\alpha, 1, m_s - 1)} \quad \text{ve} \\
KD_L &= \left[ \frac{(m_s + 1)(m_s - 1)}{m_s(m_s - k - 1)} \right] F_{(\alpha, 1, m_s - k)} \quad (13)
\end{aligned}$$

ile hesaplanır;  $k$  kullanılan değişken sayısını,  $m_s$  referans veri kümesinin büyüklüğünü ifade etmektedir.

Bu yöntem diğer yöntemlere göre hata teşhisine daha az hesaplama ile daha çabuk ulaşmaktadır [6, 9]. Yöntemin ayrıştırma algoritması Ek 1'de verilmektedir. Algoritma yorumlama kolaylığı nedeniyle genellikle ikili terimlere kadar yürütülür; bu durumda şu basit biçimi alır:

$X$  kalite vektörü için hesaplanan  $T^2$  istatistiği sinyal ürettiğinde;

**Adım 1:**  $X$  kalite vektöründeki her bir değişken için koşulsuz terimleri ( $T_i^2$ ) hesapla ve kritik değer ( $KD_Z$ ) ile karşılaştır. Eğer  $KD_Z$ 'den büyük koşulsuz terim yoksa Adım 2'ye geç. Eğer varsa, bu terime/terimlere

karşılık gelen değişkenler ( $X_i \ni T_i^2 > KD_Z$ ) sinyalden sorumludur; bunları  $X$ 'ten çıkar, daralan yeni  $X$  için  $T^2$  istatistiğini hesapla. Eğer bu istatistik, sinyal üretiyorsa Adım 2'ye geç.

**Adım 2:** Yeni  $X$  vektöründeki değişkenler için koşullu terimleri ( $T_{i,j}^2$ ) hesapla. Kritik değerden büyük  $T_{i,j}^2$  değerine sahip tüm ( $X_i, X_j$ ) değişken çiftlerini  $X$ 'ten çıkar ( $X_i, X_j \ni T_{i,j}^2 > KD_L$ ). Bu durum sinyal nedeninin değişkenlerin ikili ilişkileri (korelasyonları) olduğunu ifade eder. Daralan yeni  $X$  için  $T^2$  istatistiğini hesapla. Eğer sinyal varsa, bu durumda daha karmaşık koşullu terimler (üç terimli, dört terimli, vs.) sinyalden sorumludur. Ancak bunların ifade ettiği bağımlılık ilişkilerinin yorumu zordur.

## 5. SANAYİ UYGULAMASI (INDUSTRIAL APPLICATION)

Bu çalışmada, Hotelling  $T^2$  çizelgeleri bir pirinç döküm fabrikasında pirinç eritme sürecine uygulanmıştır. Süreçte hazırlanan her eriyik pirinçten düzenli şekilde numune alınarak pirinç içeriğindeki elementlerin ağırlık cinsinden yüzdeleri ölçülmektedir. Döküm süreci, ocaklarda eritilen metalin kullanım amacına göre gerekli şekil verilerek katılaştırılması olarak tanımlanır. Pirinç, doğada tabii olarak bulunmayıp döküm yoluyla üretilen ağırlıklı olarak bakır - çinko ve gerekli hallerde kurşundan oluşan bir alaşımdır. Uluslararası DIN 17660 standartlarında on dokuz çeşit pirinç tanımlanmıştır. Bu pirinçler içerdikleri element yüzdelerine göre farklılık gösterir ve adlandırılır. Çalışma, fabrikada her gün dökümü yapılan ve toplam üretimin büyük kısmını oluşturan MS 58 pirinci için yapılmıştır. Bu pirincin içerdiği ağırlık cinsinden element yüzdeleri Tablo 1'de verilmektedir.

**Tablo 1.** MS 58 pirincinin yüzde içerikleri (Percent ingredients of MS 58 brass)

MS 58		
Element	Min(%)	Maks(%)
<b>Cu</b>	57	59
<b>Pb</b>	2.5	3.5
<b>Al</b>	0	0,1
<b>Fe</b>	0	0,5
<b>Ni</b>	0	0,5
<b>Sb</b>	0	0,02
<b>Sn</b>	0	0,4
<b>Zn</b>	Geri kalan	

Tablo 1'de min ve maks sütunları, elementlerin alaşımda bulunması gereken ağırlık cinsinden en az ve en fazla yüzde değerini vermektedir. Pirinç; Bakır(Cu), Kurşun(Pb), Alüminyum(Al), Demir(Fe), Nikel(Ni), Kalay(Sb), Antimon(Sn) elementlerinden oluşmaktadır. Son satır ise Çinko(Zn) ve

empüritelere (saflığı bozan maddelerin) toplamını ifade eder. Minimum ve maksimum oranlarının dışına çıkan bir element, alaşımın yapısını bozabileceği için ergitme işlemi esnasında sürece müdahale edilir.

Uygulamada pirinç içindeki elementlerin ağırlık cinsinden yüzde değerleri kalite değişkenlerini belirlemektedir. Ergitme ocağından alınan numunenin spektral analizle incelenmesiyle Tablo 1’de verilen ilk yedi elementin yüzde değerleri elde edilmekte ve bunlar  $p=7$  boyutlu  $X_i$  kalite vektörünü oluşturmaktadır. Bu durumda  $X_{i,1}$  = bakır yüzdesi,  $X_{i,2}$  = kurşun yüzdesi,  $X_{i,3}$  = demir yüzdesi,  $X_{i,4}$  = kalay yüzdesi,  $X_{i,5}$  = alüminyum yüzdesinin doğal logaritması (daha sonra logaritma alınmasının nedeni açıklanacaktır),  $X_{i,6}$  = nikel yüzdesi ve  $X_{i,7}$  = antimon yüzdesini ifade etmektedir.

Uygulama için Eylül-Kasım 2005 arasında gözlenen 3 aylık ölçüm değerleri kullanılmış ve analizlerde sadece MS 58 üretimi ele alınmıştır. MS 58 pirinci fabrikadaki toplam pirinç üretiminin büyük kısmını oluşturmaktadır; düzenli olarak her vardiyada üretilmektedir. Gözlemler MS 58 üretiminin sürekli gerçekleştiği bir ergitme ocağından alınmıştır. Firmada 3 vardiya halinde çalışılmaktadır. Çalışmanın ilk aşamasında, fabrikada rasyonel altgruplamayı sağlayacak çerçeveyi vardiyaların oluşturduğu düşünülmüştür. Buradan hareketle her vardiyadan 3 gözlem alınmış ancak 3 gözlemlilik altgruplardan oluşturulan Hotelling  $T^2$  çizelgesinde aşırı sayıda kontrol dışı sinyal elde edilmiştir. Bunun iki olası açıklaması değerlendirilmiştir: Birincisi, sürecin kontrol altında olmaması yani dağılımın değişmesi, ikincisi ise rasyonel altgruplamanın doğru gerçekleştirilmemesidir. İkinci seçeneğe başvurularak altgrup büyüklüğü  $n=1$  alınmıştır. İleride anlatılacağı gibi hem kontrol dışı sinyallerin sayısı makul düzeye indiği hem de normalliğin sağlandığı testlerle gösterilmiştir. İlk veri kümesi olarak kullanılan  $m=55$  gözlemin üç tanesi Tablo 2’de verilmiştir.

Hotelling  $T^2$  çizelgeleri, kalite vektörünün çok değişkenli normal dağılım takip ettiği varsayımına dayanır. Bu varsayımın doğruluğunu kontrol etmek için çoğu uygulamada bir ve iki değişkenli normalliğin kontrolü yeterli olmaktadır [21]. Bu

çalışmada sadece bir değişkenli normallik değerlendirilmiş, kalite vektörünün her bir elemanın normal dağılıp dağılmadığı Q-Q grafikleriyle test edilmiştir. Alüminyum dışındaki tüm elementlere ait değişkenlerin normal dağıldığı, alüminyuma ait değişkene ise logaritma dönüşümü uygulandıktan sonra normal dağıldığı görülmüştür. Bu nedenle  $X_{i,5}$  alüminyum yüzde değerlerinin doğal logaritmasını ifade etmektedir.

İlk veri kümesinden elde edilen  $\bar{X}$  ve  $S$  değerleri şöyledir.

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} 58.414 \\ 2.0884 \\ 0.1042 \\ 0.1818 \\ -4.3891 \\ 0.1483 \\ 0.0100 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0.9914 & 0.0523 & 0.0021 & -0.018 & -0.1262 & 0.0147 & -0.0018 \\ 0.0523 & 0.1557 & 0.0024 & 0.0092 & -0.0146 & 0.0077 & 0.0007 \\ -0.0021 & 0.0024 & 0.0018 & 0.0014 & 0.0106 & 0.0013 & 0.0002 \\ 0.018 & 0.0092 & 0.0014 & 0.0059 & 0.0228 & 0.0044 & 0.0002 \\ -0.1262 & -0.146 & 0.0106 & 0.0228 & 1.0496 & 0.0262 & 0.0056 \\ 0.0147 & 0.0077 & 0.0013 & 0.0044 & 0.0262 & 0.0077 & 0.0003 \\ -0.0018 & 0.0007 & 0.0002 & 0.0002 & 0.0056 & 0.0003 & 0.0003 \end{bmatrix}$$

Örneğin Tablo 2’de yer alan 3. gözleme ait  $X$  vektörü  $X = [58.12 \ 2.77 \ 0.09 \ 0.18 \ 0.01 \ 0.12 \ 0.004]'$  için  $T_3^2$  değeri Eşitlik 4’te verilen formül kullanılarak

$$T_3^2 = (X_3 - \bar{X})' (S)^{-1} (X_3 - \bar{X}) = 24.2581 \text{ olarak}$$

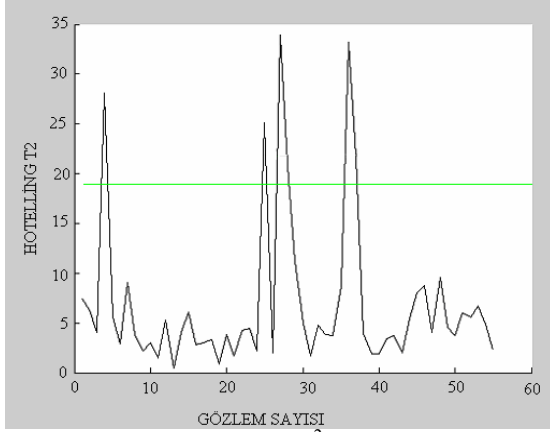
hesaplanır. Buradaki matris tersi alma işlemi ve vektör-matris çarpımları MATLAB ve MINITAB gibi birçok matematik ve istatistik paket programı yardımıyla hesaplanabilmektedir.

Üst kontrol sınırı Eşitlik 1 kullanılarak  $m=55$ ,  $p=7$  ve  $\alpha=0.0027$  değerleri ile 18.957 olarak hesaplanmıştır. İlk veri kümesi için oluşturulan  $T^2$  çizelgesi Şekil 2a’da verilmiştir. Bu çizelgede 4, 25, 27 ve 36. gözlemlere ait  $T^2$  değerleri kontrol sınırının üstünde

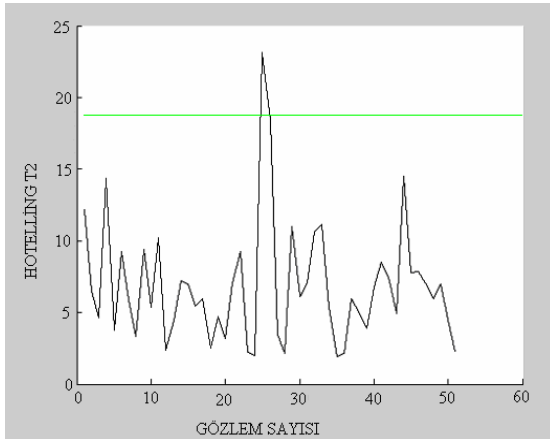
**Tablo 2.** İlk veri kümesinde bulunan üç gözlem (Three observations from the preliminary data set)

Tarih	Vardiya	Gözlem Sayısı	Elemet Yüzdeleri						
			Cu	Pb	Fe	Sn	Al	Ni	Sb
07.09.2004	1	1	58.8000	2.5900	0.0300	0.1400	0.0000	0.0200	0.0020
		2	60.0000	2.5300	0.0600	0.1300	0.0080	0.0600	0.0000
		3	58.1200	2.7700	0.0900	0.1800	0.0100	0.1200	0.0040

olduğundan ilk veri kümesinden çıkarılarak kalan 51 gözlem kullanılarak üst kontrol sınırı  $m=51$ ,  $p=7$  ve  $\alpha=0.0027$  değerleri ile 18.7366 olarak hesaplanmış ve Şekil 2b'deki yeni  $T^2$  çizelgesi oluşturulmuştur. Bu çizelgede de kontrol sınırının üstünde yer alan 25. gözleme ait değer ilk veri kümesinden çıkarılmıştır.



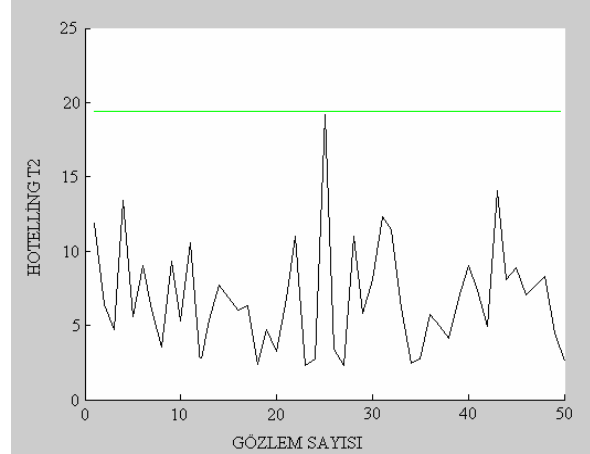
Şekil 2a. 55 gözlem için  $T^2$  çizelgesi ( $T^2$  Chart for 55 observations)



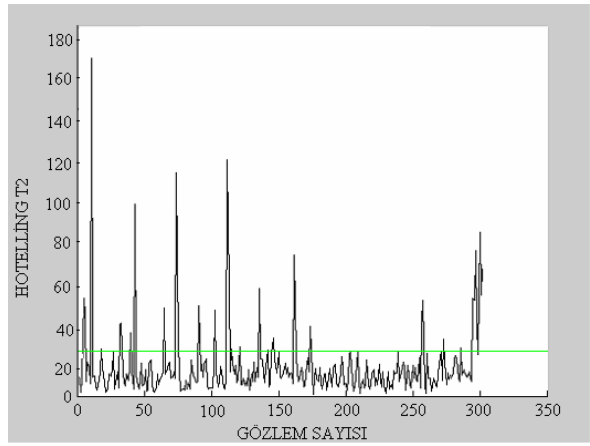
Şekil 2b. 51 gözlem için  $T^2$  çizelgesi ( $T^2$  Chart for 51 observations)

Kalan 50 gözlem için üst kontrol sınırı yine Eşitlik 1 kullanılarak 18.6760 olarak belirlenmiş ve  $T^2$  çizelgesi ise Şekil 3'te verilmiştir; burada tüm değerler kontrol sınırının altındadır, diğer bir deyişle kontrol dışı durum kalmamıştır. Dolayısıyla bu 50 gözlemden oluşan yeni küme, referans veri kümesi olarak kullanılacaktır. Böylece çizelge oluşturulmasında birinci aşama tamamlanmıştır ve ikinci aşamada kullanılacak üst kontrol sınırı Eşitlik 5 ile  $m=50$ ,  $p=7$ ,  $\alpha=0.0027$  alınarak 30.9236 olarak hesaplanmıştır.

İkinci aşamada yeni 302 gözlem değeri kullanılmıştır. Bu verilere ait  $T^2$  çizelgesi Şekil 4'te verilmiştir. Bu çizelgede 35 adet kontrol dışı sinyal belirlenmiştir; bu  $T^2$  değerlerinin koşullu ve koşulsuz bileşenleri MYT ayrıştırma yöntemi ile hesaplanmıştır. Ayrıştırmada koşulsuz ve koşullu terimler için kritik değerler Eşitlik 13'te  $m=50$  ve  $\alpha=0.0027$  kullanılarak  $KD_z=10.1884$  ve  $KD_L=10.400$  şeklinde hesaplanmıştır.



Şekil 3. 50 gözlem için  $T^2$  çizelgesi ( $T^2$  Chart for 50 observations)



Şekil 4. İkinci aşamada kullanılan gözlemler için  $T^2$  çizelgesi ( $T^2$  chart for observations in phase 2)

Koşulsuz terimler değişkenlerin bireysel etkileri ve ikili koşullu terimler değişkenlerin ikili ilişkileri hakkında bilgi vermektedir. Üçlü, dörtlü vs. terimleri yorumlamak zor olduğundan çalışmada ikili koşullu terimlere kadar işlem yapılmıştır. Burada örnek olması açısından kontrol dışı sinyal üreten gözlemlerden sadece 32. gözleme ait ayrıştırma terimleri ele alınmıştır.

4. bölümde yer alan Adım 1 takip edilerek bu gözlem için koşulsuz terimler hesaplanmış ve Tablo 3'te verilmiştir. Koşulsuz terimler  $KD_z$  değerinden küçük olduğundan Adım 2'ye geçilerek ikili koşullu terimler hesaplanmış ve Tablo 4'te verilmiştir.

Tablo 4 incelendiğinde  $T_{6/4}^2$  ve  $T_{4/6}^2$  değerlerinin kritik değer  $KD_L$ 'den yüksek olduğu görülmektedir. Bu değişkenler atıldıktan sonra kalan 1, 2, 3, 5 ve 7. değişkenlerinden oluşan 5 boyutlu kalite vektörü için  $T^2=13.7430$  ve Eşitlik 5 kullanılarak  $\bar{ÜKS} = 23.99$  olarak hesaplanır;  $T^2 < \bar{ÜKS}$  olduğundan kontrol-dışı durumun 4. ve 6. değişkenler arasındaki ilişkiden kaynaklandığını söylemek mümkündür. 32. gözlemden 4. ve 6. değişkene ait değerler sırasıyla 0.26 ve 0.14 olduğu bilinmektedir. Değişkenler için en küçük, en

**Tablo 3.** Kontrol dışı sinyal üreten 32.Gözlem için Koşulsuz Terimler (Unconditional terms for the 32<sup>nd</sup> observation producing an out-of-control

$T_1^2$	5.6661	$T_2^2$	0.4218	$T_3^2$	1.4824	$T_4^2$	1.7446
$T_5^2$	2.9464	$T_6^2$	5.995	$T_7^2$	1.4697		

**Tablo 4.** 32. Gözlem için İkili Koşullu Terimler (Bivariate conditional terms for the 32<sup>nd</sup> observation)

$T_{1/2}^2$	5.799	$T_{2/1}^2$	0.5546	$T_{3/1}^2$	1.6295	$T_{4/1}^2$	2.1846	$T_{5/1}^2$	4.5098
$T_{1/3}^2$	5.8132	$T_{2/3}^2$	0.552	$T_{3/2}^2$	1.6126	$T_{4/2}^2$	1.4936	$T_{5/2}^2$	2.8668
$T_{1/4}^2$	6.1061	$T_{2/4}^2$	0.1708	$T_{3/4}^2$	5.6411	$T_{4/3}^2$	5.9034	$T_{5/3}^2$	2.2496
$T_{1/5}^2$	7.2294	$T_{2/5}^2$	0.3421	$T_{3/5}^2$	0.7855	$T_{4/5}^2$	3.5771	$T_{5/4}^2$	4.7789
$T_{1/6}^2$	6.8824	$T_{2/6}^2$	0.6765	$T_{3/6}^2$	0.2836	$T_{4/6}^2$	18.1062*	$T_{5/6}^2$	0.8161
$T_{1/7}^2$	4.2772	$T_{2/7}^2$	0.2849	$T_{3/7}^2$	2.5446	$T_{4/7}^2$	1.0977	$T_{5/7}^2$	6.6406
$T_{6/1}^2$	7.2113	$T_{7/1}^2$	0.0808						
$T_{6/2}^2$	6.2497	$T_{7/2}^2$	1.3328						
$T_{6/3}^2$	4.7962	$T_{7/3}^2$	2.5319						
$T_{6/4}^2$	22.3566*	$T_{7/4}^2$	0.8227						
$T_{6/5}^2$	3.8647	$T_{7/5}^2$	5.1638						
$T_{6/7}^2$	8.4007	$T_{7/6}^2$	3.8754						

büyük ve ortalama değerler hesaplanarak Tablo 5’de verilen özet tablo oluşturulmuştur.

Tablo 5’te  $X_4$  ve  $X_6$ ’nın en küçük-en büyük sınırları içinde kaldığı ancak ortalama değerlerinin üstünde olduğu görülmektedir. Ayrıca referans veri kümesinden hesaplanan korelasyon matrisi incelendiğinde bu iki değişken arasında güçlü bir korelasyon olduğu saptanmıştır. Mühendisler bu gözlemin alındığı şarjda  $X_4$  ve  $X_6$ ’nın temsil ettiği nikel ve kalay yüzdelерinde beklenmeyen bir sapma olduğuna hükmetmiştir.

Kontrol-dışı 35 adet gözlem arasında  $T_{6/4}^2$  ve/veya  $T_{4/6}^2$  değerlerinin sinyal verdiği toplam 4 gözlem saptanmıştır. Pirinç üretimi birçok hammadde (saf ve hurda malzeme) karıştırılarak gerçekleştirilmektedir. Büyük olasılıkla, bu şarjlarda kullanılan hammadde içeriklerindeki beklenmedik bir değişim, nikel ve kalay yüzdeleri arasındaki korelasyon ilişkisini değiştirmiştir. Hurda malzeme içeriklerinde ciddi değişkenlik olduğu öteden beri bilinmektedir. Bu kalite probleminin çözümü için hurda malzemelerin düzenli spektral analize sokulması, böylece hammadde içeriklerindeki değişkenliğin kontrolü planlanmaktadır.

MYT ayrıştırma yöntemi, kontrol-dışı 35 gözlemden 9 gözlemden sinyal kaynağını koşulsuz terimler ve koşullu terimler türünden saptamayı başarmıştır. Diğer gözlemlerde Ek 1. de verilen algoritma üçlü, dördü ve daha yüksek dereceli koşulsuz terimler için çalıştırılarak sinyalden sorumlu karmaşık korelasyon yapıları ortaya çıkarılabilir. Ancak mühendislerle birlikte yürütülen çalışmalarda, mühendislerin, ikili ilişkilerin yorumlanmasında bile sıkıntı yaşadıkları gözlemlendiği için daha yüksek dereceli terimler ele alınmamıştır.

## 6. SONUÇ (CONCLUSIONS)

Bu çalışmada çok değişkenli kontrol çizelgeleri ele alınmış ve pirinç üretimi gerçekleştirilen bir firmada bu çizelgelerin bir uygulaması yapılmıştır. Verilerin normal dağılıma uygunluğu Q-Q grafikleri ile test edilmiştir. Alüminyum dışındaki tüm elementlere ait değişkenlerin normal dağılıma uyduğu, alüminyuma ait dağılımın ise logaritma dönüşümü ile normal dağılıma yakalandığı görülmüştür.

Literatürde çok değişkenli kontrol çizelgeleri konusunda yapılmış çalışmalar daha çok teoriktir. Uygulama niteliğinde olan çalışmalarda da değişken

**Tablo 5.** Referans Veri Kümesi İçin İstatistiksel Özet Tablo (Statistical summary table for reference data set)

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$
En küçük	56.2500	1.3400	0.0300	0.0700	-6.9078	0.0070	0
En büyük	60.6000	2.9600	0.1700	0.3000	-2.2073	0.2700	0.0260
Ortalama	58.3740	2.0532	0.0980	0.1756	-4.4368	0.1349	0.0066
Varyans	0.9549	0.1402	0.0011	0.0041	1.072	0.0035	0.00003
Std.Sapma	0.9772	0.3745	0.0345	0.0648	1.0356	0.0592	0.0055



sayısı ve veri sayısı sınırlı tutulmuştur. Ayrıca sinyallerin yorumlanmasında kontrol dışı tüm noktaların analizi yerine birkaç noktanın analizi örnek olarak verilmiştir. Oysa bu çalışmada, 7 değişkenli süreç bol veri kullanılarak analiz edilmiş ve kontrol dışı olan tüm noktalar yorumlanmış; mühendis gözü ile, süreç bilgisi ve analiz sonuçları birlikte değerlendirilmiştir.

Firmada yapılacak ileriki uygulamalarda, geliştirilen kontrol çizelgelerinin reel zamanlı uygulanması (her yeni veri işaretlendiğinde olası kontrol dışı durumların araştırılması ve yorumlanması) ve kontrol-dışı sinyaller üzerinde beyin fırtınası gibi yöntemlerle fikir alışverişi sonucunda bu çalışma kapsamında fark edilmeyen birçok hata kaynağının da ortaya çıkartılması beklenmektedir. MYT ayrıştırma yönteminin açıklayamadığı sinyaller için geleneksel olarak mühendis ve ustaların görüşüne başvurulur. Hotelling  $T^2$  çizelgelerinin firmada düzenli uygulamasıyla bu süreç uzmanlarının sinyal yorumlama becerileri doğal olarak gelişecektir. MYT ayrıştırma yönteminin getirdiği açıklamalar, özellikle çizelge kullanımının ilk döneminde süreç uzmanlarına hata kaynaklarına ulaşmak için bir başlangıç noktası sunmaktadır.

#### SEMBOLLER (SYMBOLS)

$X$	Gözlem Vektörü
$\bar{X}$	Örnek Ortalama Vektörü
$S$	Örnek Kovaryans Matrisi
$m$	İlk Veri Kümesi Büyüklüğü
$p$	Değişken Sayısı
$T^2$	Hotelling $T^2$ İstatistiği
$T^2_{(i)}$	Mason-Young-Tracy Ayrıştırma Yönteminde Koşulsuz Terim
$T^2_{(i,j)}$	Mason-Young-Tracy Ayrıştırma Yönteminde Koşullu Terim

#### TEŞEKKÜR

Bu çalışma DPT 2003 K120770 kodlu proje kapsamında yapılmıştır. Devlet Planlama Teşkilatına projeye desteklerinden dolayı teşekkür ederiz.

#### KAYNAKLAR (REFERENCES)

- Lowry, C. A., Montgomery, D. C., "A Review of Multivariate Control Charts", **IIE Transactions**, 27, 800-810, 1995.
- Uyar, Y., **Çok Değişkenli Kalite Kontrolü**, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi, 1993.
- Montgomery, D.C., **Introduction to Statistical Quality Control**, 4th. ed., Wiley&Sons, New York, 2001.
- Wierda, S.J., "Multivariate Statistical Process Control- Recent Results and Directions for Future Research", **Statistica Neerlandica**, 48(2), 147-168, 1994.
- Tracy, N.D., Young, J.C., Mason, R. L., "Decomposition of  $T^2$  for Multivariate Control Chart Interpretation", **Journal of Quality Technology**, 27(2), 99-108, 1995.
- Mason, R.L., Young, J.C., **Multivariate Statistical Process Control with Industrial Applications**, ASA-SIAM, Philadelphia, 2001.
- Tracy, N.D., Young, J.C., Mason, R. L., "Multivariate Control Charts for Individual Observations", **Journal of Quality Technology**, 24(2), 88-95, 1992.
- Mason, R.L., Young, J.C., "Interpretive Features of a  $T^2$  Chart in Multivariate SPC", **Quality Progress**, 33(4), 84-89, 2000.
- Tracy, N.D., Young, J.C., Mason, R.L., "A Practical Approach for Interpreting Multivariate  $T^2$  Control Chart Signals", **Journal of Quality Technology**, 29(4), 396-406, 1997.
- Jackson, J.E., "Multivariate Quality Control", **Communications in Statistics – Theory and Methods**, 14(11), 2657-2688, 1985.
- Pignatello, J.J., Runger, G.C., "Comparisons of Multivariate CUSUM Charts", **Journal of Quality Technology**, 22(3), 173-186, 1990.
- Alt, F.B., **Multivariate Quality Control**, S. Kotz and N.L. Johnson (eds.), Encyclopedia of Statistical Science, 6, Wiley, New York, (1985).
- Doganaksoy, N., Faltin, F.W., Tucker, W.T., "Identification of Out of Control Quality Characteristics in a Multivariate Manufacturing Environment", **Communications in Statistics – Theory and Methods**, 20(9), 2775-2790, 1991.
- Blazek, L.W., Novic B., Scott D.M., "Displaying Multivariate Data Using Polyplots", **Journal of Quality Technology**, 19, 69-74, 1987.
- Murphy B.J., "Selecting Out of Control Variables with the  $T^2$  Multivariate Quality Control Procedures", **The Statistician**, 36, 571-583, 1987.
- Chua, M., Montgomery, D.C., "Investigation and Characterization of a Control Scheme for Multivariate Quality Control", **Quality and Reliability Engineering International**, 8, 37-44, 1992.
- Hawkins, D.M., "Multivariate Quality Based on Regression-Adjusted Variables", **Technometrics**, 33(1), 61-75, 1991.
- Hayter, A.J., Tsui, K.L., "Identification and Quantification in Multivariate Quality Control Problems", **Journal of Quality Technology**, 26(3), 197-208, 1994.
- Lowry, C.A., Woodall, W.H., Champ, C.W., Rigdon, S.E., "A Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart", **Technometrics**, 34(1), 46-53, 1992.

20. Mason., R.L., Tracy, N.D., Young, J.C., "Use of Hotelling's  $T^2$  Statistics in Multivariate Control Charts", **Joint Statistical Meetings**, San Francisco, California, 1995.

21. Johnson, R.A., Wichern, D.W., **Applied Multivariate Statistical Analysis**, 5th ed., Prentice Hall, New Jersey, 2002.

**Ek1:**

