T.C
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

MODIFIED JAIN-BASKAKOV OPERATÖRLERİYLE YAKLAŞIM

SEMA EMREBAŞ MORGÜL

EYLÜL 2020

Matematik Anabilim Dalında Sema EMREBAŞ MORGÜL tarafından hazırlanan MODIFIED JAIN-BASKAKOV OPERATÖRLERİYLE YAKLAŞIM adlı Yüksek Lisans tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylıyorum.

Prof. Dr. ALİ OLGUN
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin Yüksek Lisans Tezi olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. ALİ OLGUN
Danışman

Jüri Üyeleri:

Başkan :Prof. Dr. Ali ARAL

Üye(Danışman) : Prof. Dr. ALİ OLGUN

Üye : Doç. Dr. RABİA AKTAŞ

20/09/2020

Bu Tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans Derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. RECEP ÇALIN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

MODIFIED JAIN-BASKAKOV
OPERATÖRLERİYLE YAKLAŞIM

EMREBAŞ MORGÜL, Sema
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. Ali OLGUN
Eylül 2020, 57 sayfa

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır. İkinci bölümde konuyla ilgili bazı temel tanımlar ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde Jain-Baskakov operatörü tanıtılmıştır. K-fonksiyoneli tanımlanmış. Jain-Baskakov operatöründe süreklilik modülü yardımıyla yakınsaklık oranı incelenmiştir. Dördüncü bölümde J.P. King; Jain-Baskakov operatörünün yakınsaklığını incelemiştir.

Anahtar Kelimeler: Baskakov operatörü, Yakınsaklık,
Korovkin teoremi, K-fonksiyoneli,
King-tipi operatör.

ABSTRACT

APPROACH WİTH MODIFIED JAIN-BASKAKOV OPERATORS

EMREBAŞ MORGÜL, Sema

Kırıkkale Universty

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Depatment of Mathematics, M. Sc. Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Ali OLGUN

SEPTEMBER 2020, 57 pages

This thesis consists of four chapters. The first chapter is reserved for introduction. In the second chapter, some fundamental definitions and theorems are given on the subject. In the third chapter, Jain-Baskakov operator is introduced. K-functional is defined. Convergence rate was investigated with the continuity module in Jain-Baskakov operator. In the fourth part, J.P. King; Jain-Baskakov examined the convergence of the operator.

Key Words: Baskakov operator, Convergenty, Korovkin theorem, K-functional, King-type operator.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca tecrübeleriyle, bilgisiyle yüksek lisans öğrenimimde ve tezimin hazırlanması esnasında hiçbir desteğini ve ilgisini esirgemeyen değerli danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Ali OLGUN’a, emeği geçen Kırıkkale Üniversitesi Matematik Bölümünün değerli hocalarına ve eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

$C[a,b]$	$[a,b]$ Aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı
$B_n(f,x)$	Baskakov operatörü
$\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(f,x)$	Jain-Baskakov operatörü
$\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}(f,x)$	King-Tipi Jain Baskakov operatörü
$\omega(f;\delta)$	Süreklilik modülü
$L_n(f,x)$	Lineer pozitif operatörler
$\lVert f\rVert_p$	L_p uzayı üzerinde tanımlı norm
$K(f;t)$	K - fonksiyoneli

BÖLÜM 1

1. GİRİŞ

Yaklaşımlar teorisi Matematik Analizinin önemli çalışma alanlarından birisidir. Bu alanda şimdiye kadar birçok çalışma yapılmıştır. Halen de çalışmalar yoğun olarak devam etmektedir. Bu çalışmaların çoğu lineer pozitif operatör dizileri için Korovkin tipi teoremlere dayanmaktadır. Yaklaşımlar teorisinde pozitif yaklaşım metodları temel rol oynar. Öyle ki sürekli fonksiyonların yaklaşımı ile ilgili ele alınan bir çok problemin incelenmesinde doğal olarak bu yol ortaya çıkar. Özellikle nitelikli özellikler gerektiren monotonluk, konvekslik ve şekil koruma gibi özellikler bunlardan bazılarıdır. P.P. Korovkin 1953 yılında $C[0,1]$ uzayında tanımlı $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lineer pozitif operatör dizisinin $f \in C[0,1]$ uzayı üzerinde tanımlı bir f fonksiyonuna düzgün olarak yakınsaması için (Yani $L_n(f) \to f$ olması için) gerekli olan çok basit, aynı zamanda çok kuvvetli olan kriterleri keşfetmiştir. $C[0,1]$ uzayında $[0,1]$ aralığı üzerinde bütün sürekli fonksiyonların $1, x$ ve x^2 ile aynı özelliklere sahip olduğunu görmüştür. Yani $[0,1]$ aralığı üzerinde $L_n(f) \to f$ olması için $f \in \{1, x, x^2\}$ olması yeterlidir. Daha sonra bu durum geliştirilerek yaklaşımlar teorisinin temelini oluşturmuştur.

Bu teori reel analiz, fonksiyonel analiz, harmonik analiz, ölçü teorisi, istatistik teorisi, toplanabilme ve uygulamalı matematik ile doğrudan bağlantılıdır.

Yaklaşımlar teorisinin başlangıcında basit ancak çok kullanışlı olan

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Bernstein operatörü temel oluşturmuştur. Daha sonra bu operatör kullanılarak birçok değişik operatör tanımlanmıştır. Bu operatörlerden biriside Baskakov operatörüdür. V.A. Baskakov 1957 yılında

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k (1+x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) : x \in [0,\infty) \;\; n \in N$$

şeklinde çok iyi bilinen Baskakov operatörünü tanımlamıştır ve bu operatörün yakınsaklık özellikleri incelenmiştir [2]. Daha sonra bir çok araştırmacı Baskakov operatörünün değişik tiplerinin yakınsaklık özelliklerini incelemişlerdir ([1], [2], [5], [6], [7], [10], [11]).

Baskakov operatörü baz alınarak Baskakov-Kantorovich operatörü, Baskakov-Durrmeyer operatörü, Jain-Baskakov operatörleri tanımlanmış ve bu operatörlerin çeşitli özellikleri incelenmiş ve halen incelemeler devam etmektedir.

1972'de Jain aşağıdaki lineer pozitif operatör sınıfını

$$\omega_\beta(v,nx) = nx(nx+v\beta)^{v-1}\frac{e^{-(nx+v\beta)}}{v!}\ , \tag{1.1}$$

$\beta \in [0,1)$, $f \in C(\mathbb{R}_+)$ olmak üzere

$$P_n^{[\beta]}(f,x) = \sum_{v=0}^{\infty} \omega_\beta(v,nx)\, f\left(\frac{v}{n}\right), \tag{1.2}$$

şeklinde tanımlamıştır [1]. Bu ifade literatürde Poisson-tipi dağılım olarak bilinmektedir. Bu operatörün çeşitli genellemeleri ve iki değişkenli halinin yakınsaklık özellikleri hakkında yapılan çalışmalar mevcuttur ([4], [9]). Poisson-tipi dağılım temel baz alınarak integrallenebilen fonksiyonlar için çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalardan birisinde (2015) yılında Patel ve Mishra integrallenebilen fonksiyonlar için Jain-Baskakov tipi bir operatörü aşağıdaki şekilde tanımladılar ve operatörün yakınsaklık özelliklerini incelediler [11].

$$\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(f,x) \ = \ \frac{(n-c)}{c}\sum_{v=0}^{\infty}\omega_\beta(v,nx)\int_0^\infty p_{n,v-1,c}(t)f(t)dt + \ e^{-nx}f(0) \tag{1.3}$$

Burada

$$p_{n,v-1,c}(t) = c\,\frac{\Gamma(n/c+v-1)}{\Gamma(v)\Gamma(n/c)}\,.\,\frac{(ct)^{v-1}}{(1+ct)^{n/c+v-1}} \tag{1.4}$$

olup, $\omega_\beta(v,nx)$ (1.1) de tanımlanan ifadedir.

Biz bu tezde Patel ve Mishra'nın bu çalışmalarında verdikleri bu operatörün yakınsaklık özelliklerini geniş bir şekilde irdeleyeceğiz. Amacımız bu tip operatörlerin değişik şekillerinin tanımlanması ve yeni operatörlerin yakınsaklık özelliklerinin incelenmesinde kaynak oluşturacak şekilde açıklamalarda bulunmaktır.

BÖLÜM 2

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

2.1. Lineer Pozitif Operatörler İle İlgili Temel Kavramlar

Bu bölümde lineer pozitif operatörlerle ilgili yaklaşımlar teorisine temel teşkil eden operatörlerin yaklaşım özelliklerini ve yaklaşım hızlarının belirlenmesinde faydalanılan tezde kullanılacak bazı tanımlar, temel kavramlar verilmiş ve gerekli açıklamalar yapılmıştır.

Tanım 2.1.1. (Noktasal Süreklilik) :

$A \subset \mathbb{R}$ ve $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. f fonksiyonu a noktasında süreklidir $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyle ki $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ dur.

Tanım 2.1.2. (Düzgün Süreklilik) :

$A \subset \mathbb{R}$ ve $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu A üzerinde süreklidir $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyle ki $|x-t| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan $\forall x, t \in A$ için $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$ dur.

Tanım 2.1.3. :

$[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve aralığın tüm noktalarında sürekli olan fonksiyonlar uzayı $C[a,b]$ ile gösterilmektedir.

Tanım 2.1.4. (Operatör) :

X ve Y iki vektör (lineer) uzay olsun. X de ki f fonksiyonunu Y deki bir g fonksiyonuna eşleyen ve $L : X \longrightarrow Y \quad f \longrightarrow L(f) = g$ şeklinde gösterilen dönüşüme operatör denir. Bu durum $L(f) = g$, $L(f(t); x) = g(x)$, $L(f; x) = g(x)$ şeklinde de ifade edilir.

Tanım 2.1.5. (Lineer Operatör) :

X ve Y lineer normlu fonksiyon uzayları olsun. $L: X \to Y$ operatörü, her $f, g \in X$ ve her $\propto, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$L\,(\propto f + \beta g\,) = \propto L\,(f\,) + \beta L(g)$$

eşitliğini sağlarsa, L operatörüne X den Y ye bir lineer operatör denir.

Tanım 2.1.6. (Lineer Pozitif operatör) :

$L: X \to Y$ lineer operatör ve

$$X^{+} = \{f \in X : f(t) \geq 0\},\ Y^{+} = \{\, g \in X : g(t) \geq 0\}$$

olmak üzere, L lineer operatörü X^{+} kümesindeki her bir f fonksiyonunu Y^{+} kümesinde bir fonksiyona dönüştürüyorsa, L operatörüne lineer pozitif operatör denir.

Lineer ve pozitif operatörler aşağıdaki özellikleri sağlar.

Lemma 2.1.1.

$L: X \to Y$ lineer pozitif operatör olsun. Bu durumda, $f, g \in X$ olmak üzere her t için

$$f(t) \leq g(t) \Rightarrow L(f(t); x) \leq L(g(t); x)$$

dir. Bu özelliğe L lineer pozitif operatörünün monotonluk özelliği denir.

Ayrıca monoton operatörler,

$$|L(f(t);x)| \leq L(|f(t)|;x)$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat:

$$f(t) \leq g(t) \Rightarrow\ g(t) - f(t) \geq 0 \text{ (pozitiflik özelliği)}$$

$$\Rightarrow L(g(t) - f(t);x) \geq 0$$

$$\Rightarrow L(g(t);x) - L(f(t);x) \geq 0 \text{ (lineer operatör özelliği)}$$

$$L(f(t);x) \leq L(g(t);x)$$

olur. Şimdi,

$$|L(f(t);x)| \leq L(|f(t)|;x)$$

eşitsizliği doğru olduğunu gösterelim. $-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$ ifadesi her f fonksiyonu için doğrudur. Böylece eşitsizliğe L operatörü uygulanırsa

$$L(-|f(t)|;x) \leq L(f(t);x) \leq L(|f(t)|;x)$$

$$-L(|f(t)|;x) \leq L(f(t);x) \leq L(|f(t)|;x)$$

ifadesi elde edilir. Mutlak değer özelliğinden,

$$|L(f(t);x)| \leq L(|f(t)|;x)$$

dir.

Tanım 2.1.7. (Operatör normu):

$L: X \to Y$ bir operatör olsun. $D(L) \subset X, L$ nin tanım kümesi olmak üzere $\forall f \in D(L)$ için

$$\|L(f;x)\|_Y \leq M\|f\|_X$$

eşitsizliğini sağlayan $M \in \mathbb{R}^+$ varsa L ye $D(L)$ de sınırlı operatör denir.

$$\|L\|_{X\to Y} = inf\{M: \|L(f;x)\|_Y \leq M\|f\|_X\ \}$$

sayısına L operatörünün normu denir.

2.2. Korovkin Teoremi

Yaklaşımlar teorisinde önemli bir yere sahip olan Korovkin Teoremi 1953 yılında P.P. Korovkin tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 2.2.1. (Korovkin Teoremi) :

$L_n: C[a,b] \to C[a,b]$ lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. $\alpha_n(x)$, $\beta_n(x)$ ve $\gamma_n(x)$, $[a,b]$ aralığı üzerinde düzgün olarak sıfıra yakınsayan diziler olmak üzere, $\forall x \in [a,b]$ için

$$L_n(1;x) = 1 + \alpha_n(x)$$

$$L_n(t;x) = x + \beta_n(x)$$

$$L_n(t^2;x) = x^2 + \gamma_n(x) \qquad (2.1)$$

koşulları sağlanıyorsa bu durumda $L_n(f;x)$, $[a,b]$ aralığı üzerinde $f(x)$ sürekli fonksiyonuna düzgün olarak yakınsar. Yani

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f;x) - f(x)\|_{C[a,b]} = \lim_{n\to\infty} max\,|L_n(f;x) - f(x)| = 0$$

dır.

2.3. Süreklilik Modülü Ve Özellikleri

Yaklaşımlar teorisinde operatörün yakınsaklığı kadar, yakınsama hızı da önemlidir. Bu sebeple operatörün yakınsama hızını veren bir fonksiyon olan ve süreklilik modülü olarak bilinen ifade aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

Tanım 2.3.1. Kabul edelim ki f, $[a,b]$ aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun. $x, y \in [a,b]$ için $|x-y| \leq \delta$ eşitsizliğini sağlayan $\delta > 0$ sayısı için $|f(x) - f(y)|$ ifadesinin en küçük üst sınırına

$$\omega(\delta) = \sup_{|x-y|\leq\delta} |f(x) - f(y)|$$

denirse, $\omega(\delta)$ değerine f nin süreklilik modülü denir. Bazen bu gösterim yerine $\omega_f(\delta)$ veya $\omega(\delta; f)$ gösterimleri de kullanılabilmektedir. $\omega(f;\delta)$ süreklilik modülü negatif olmayan ve artan bir fonksiyondur.

Süreklilik modülü fonksiyonu aşağıdaki önemli özellikleri gerçekleyen bir fonksiyondur.

Lemma 2.3.1. ω fonksiyonu monoton artandır. Yani, $0 < \delta_1 \leq \delta_2$ için

$$\delta_1 \leq \delta_2 \Rightarrow \omega(f;\delta_1) \leq \omega(f;\delta_2)$$

dır.

İspat: $0 < \delta_1 \leq \delta_2$ olsun. Bu durumda $|x-y| \leq \delta_2$ koşulunu sağlayan (x, y) sayı çiftlerinin kümesi $|x-y| \leq \delta_1$ koşulunu sağlayan sayı çiftlerinin kümesinden daha kapsamlıdır. Kümelerdeki supremum kavramı göz önüne alınarak süreklilik modülünün tanımından dolayı

$$\omega(f;\delta_1) \leq \omega(f;\delta_2)$$

yazılabilir.

Lemma 2.3.2. $m \geq 1$ $(m \in \mathbb{N})$ olmak üzere,

$$\omega(f;m\delta) \leq m\omega(f;\delta)$$

dir.

İspat:

$$\omega(f;m\delta) = \sup_{\substack{x,y\in[a,b] \\ |x-y|\leq m\delta}} |f(x) - f(y)|$$

İfadesinde $x = y + mh$ seçilirse, $m \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\omega(f;m\delta) = \mathop{sup}_{\substack{x,y\in[a,b] \\ |mh|<m\delta}} |f(y+mh) - f(y)|$$

$$= \sup_{\substack{x\in[a,b]\\ |h|<\delta}} |f(y+mh) - f(y+(m-1)h) + f(y+(m-2)h) - \cdots + f(y+h) - f(y)|$$

$$= \sup_{\substack{y\in[a,b]\\ |h|<\delta}} \left| \sum_{k=1}^{m} f(y+kh) - f(y+(k-1)h) \right|$$

yazılabilir. Buradan da

$$\omega(f;m\delta) \le \sup_{\substack{y\in[a,b]\\ |h|<\delta}} \sum_{k=1}^{m} |f(y+kh) - f(y+(k-1)h)|$$

olur. Yukarıdaki toplamın içindeki ifade süreklilik modülü olması ile toplananların sayısı m tane olduğundan

$$\omega(f;m\delta) \le m\omega(f;\delta)$$

eşitsizliği elde edilir.

Süreklilik modülünün sağladığı önemli özelliklerden birisi de aşağıdaki gibidir.

Lemma 2.3.3. $\lambda > 0$ reel sayısı için,

$$\omega(f;\lambda\delta) \le (1+\lambda)\,\omega(f,\lambda)$$

İfadesi doğrudur.

İspat: m , λ nın tam kısmı olsun. O taktirde $m \le \lambda \le m+1$ olur. ω süreklilik modülünün monotonluk özelliği ve Lemma (2.3.2.) den

$$\omega(f;\lambda\delta) \le \omega(f;(m+1)\,\delta) \le (1+m)\omega(f;\delta) \le (1+\lambda)\omega(f;\delta)$$

olur. Dolayısı ile

$$\omega(f;\lambda\delta) \le (1+\lambda)\,\omega(f,\lambda)$$

olarak elde edilir.

Lemma 2.3.4. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(f,\delta) = 0$$

dır.

İspat: f fonksiyonu sürekli olduğundan süreklilik tanımı nedeniyle her $\varepsilon > 0$ için bir $\eta > 0$ vardır öyle ki $|x-y| < \eta$ olduğunda

$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ dır. Süreklilik modülünde $\delta < \eta$ alındığında $\omega(f,\delta) < \varepsilon$ dır. Yani

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(f,\delta) = 0$$

olur.

Tanım 2.1. (Hölder Eşitsizliği): $p,q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun.

$(a_i) = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$, $(b_i) = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$ şeklinde diziler olsun. Bu durumda

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} {a_i}^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=0}^{\infty} {b_i}^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine Hölder eşitsizliği denir.

Tanım 2.2. (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği) $(a_i) = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$,

$(b_i) = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$ şeklinde diziler olsun. Hölder eşitsizliği tanımı gereğince

$p = 2, q = 2$ alınırsa

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} {a_i}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=0}^{\infty} {b_i}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizliğe Cauchy-Schwarz eşitsizliği adı verilir.

Tanım 2.3. (Taylor Formülü): f fonksiyonu a noktasını ihtiva eden bir aralıkta $(n+1)$ ' inci mertebeden sürekli türevlere sahip olsun. Bu aralıkta her x için $f(x)$'in Taylor formülü,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

şeklindedir ve $K_n(x)$ ifadesine kalan terim, fark veya hata denirse

$$K_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

olmak üzere

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + K_n(x)$$

yazılabilir. Bu ifadeye kalan terimli Taylor formülü adı verilir.

Tanım 2.4. (Ağırlıklı uzay): M_f, f ye bağlı bir sabit olmak üzere $[0,\infty)$ aralığı üzerinde tanımlı $|f(x)| \leq M_f(1+x^m)$ koşulunu sağlayan fonksiyonlardan oluşan kümeye $B_{x^m}[0,\infty)$ ya da $B_{x^m}(\mathbb{R}^+)$ ağırlıklı fonksiyon uzayı denir.

Bu uzayda $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{1+x^m}$ ile sınırlı ve sürekli fonksiyonlardan oluşan alt uzay ise $C_{x^m}[0,\infty)$ ile gösterilir. Bu uzaydaki norm ise $\|f\|_{x^m} = \sup\limits_{x\in[0,\infty)} \frac{f(x)}{1+x^m}$ ile tanımlanır.

(Hacıyev ve Hacısalihoğlu 1995)

Yukarıdaki tanım gözönüne alındığında $C_{x^m}[0,\infty) \coloneqq B_{x^m}[0,\infty) \cap C[0,\infty)$ dur. Daha genel olarak ise $\rho(x)$ monoton artan, sürekli ve $\lim\limits_{x\to\infty} \rho(x) = \infty$ şartını sağlayan ağırlık fonksiyonu olmak üzere $B_\rho(\mathbb{R}^+)$ ve $C_\rho(\mathbb{R}^+)$ $\rho(x)$ ağırlıklı normlu uzaylardır.

Tanım 2.5. (K- fonksiyoneli) : $[0,\infty)$ aralığında tanımlı tüm reel değerli sınırlı ve sürekli f fonksiyonlarının oluşturduğu kümeye $C_B[0,\infty)$ ağırlıklı fonksiyon uzayı denir. Bu uzaydaki norm $\|f\| = \sup_{x\in[0,\infty)} |f(x)|$ şeklinde tanımlanır. Yine bu uzayda $\delta > 0$ için,

$$\mathcal{K}_2(f,\delta) = \inf_{x \in C_B^2[0,\infty)} \{ \|f-g\| + \delta\|g''\| \} \qquad (2.2)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Peetre - K fonksiyoneli adı verilir. Burada

$$C_B^2[0,\infty) = \{g \in C_B[0,\infty) \ : g', g'' \in C_B[0,\infty)\}$$

olup,

$$\omega_2(f,\sqrt{\delta}) = \sup_{0<h\le\sqrt{\delta}} \ \sup_{x\in[0,\infty)} |f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)|$$

$f \in C_B[0,\infty)$ nin ikinci dereceden süreklilik modülüdür. Üstelik $\exists M > 0$ sabiti için

$$\mathcal{K}_2(f,\delta) \le M\,\omega_2(f,\sqrt{\delta}) \qquad (2.3)$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 2.6. (Gamma Fonksiyonu):

$\Gamma(x)$ ile gösterilen Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

genelleştirilmiş integrali yardımıyla tanımlanır. Gamma fonksiyonu,

1) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
2) $\Gamma(n+1) = n! = n(n-1)! = n\Gamma(n)$
3) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

eşitliklerini sağlar.

Tanım 2.7. (Beta Fonksiyonu):

Beta fonksiyonu

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

$$(\mathrm{Re(x)}>0,\quad \mathrm{Re(y)}>0)$$

Genelleştirilmiş integrali yardımıyla tanımlanır. Bu tanıma eş değer olarak

$$B(x,y)=2\int_0^\infty (sin\theta)^{2x-1}\,(cos\theta)^{2y-1}d\theta$$

ve

$$B(x,y)=\int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}du$$

$$(\mathrm{Re(x)}>0,\quad \mathrm{Re(y)}>0)$$

yazılabilir. Beta fonksiyonu ile Gamma fonksiyonu cinsinden ifadesi ise

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

$$(x,y\neq 0,-1,-2,\dots)$$

şeklindedir. Ayrıca bu eşitlikten kolaylıkla görülebilir ki

$$B(x,y)=B(y,x)$$

olup, bu eşitlik Beta fonksiyonunun simetri özelliği olarak adlandırılır.

BÖLÜM 3

3.JAIN-BASKAKOV OPERATÖRÜ

1972'de Jain [5] aşağıdaki lineer pozitif operatör sınıfını

$$P_n^{[\beta]}(f,x)=\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\omega_\beta(\upsilon,nx)\,f\left(\frac{\upsilon}{n}\right), \tag{3.1}$$

tanımlayıp yakınsaklık özelliklerini incelemiştir. Burada

$$\omega_\beta(\upsilon,nx)=nx(nx+\upsilon\beta)^{\upsilon-1}\frac{e^{-(nx+\upsilon\beta)}}{\upsilon!}\;, \tag{3.2}$$

olup, $\beta\in[0,1)$, $f\in C(\mathbb{R}_+)$ dir. Yukarıda tanımlanan operatörde

$$\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{nx(nx+\upsilon\beta)^{\upsilon-1}e^{-(nx+\upsilon\beta)}}{\upsilon!}=1$$

dir. Bu eşitliği göstermek için

$$\emptyset(z)=\emptyset(0)+\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\frac{1}{\upsilon!}\left[\frac{d^{\upsilon-1}}{dz^{\upsilon-1}}\left(\left(f(z)\right)^{\upsilon}\emptyset'(z)\right)\Big|_{z\,=\,0}\right]\left(\frac{z}{f(z)}\right)^{\upsilon}$$

Lagrange formülünde $\emptyset(z)=e^{(nx)z}$ ve $f(z)=e^{\beta z}$ alınır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
e^{(nx)z}&=1+\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\frac{1}{\upsilon!}\left[\frac{d^{\upsilon-1}}{dz^{\upsilon-1}}\left(\left(e^{\beta z}\right)^{\upsilon}(nx)e^{(nx)z}\right)\Big|_{z\,=\,0}\right]z^{\upsilon}e^{-\upsilon\beta z}\\
&=1+\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\frac{1}{\upsilon!}\left[\frac{d^{\upsilon-1}}{dz^{\upsilon-1}}\left(nxe^{(nx+\upsilon\beta)z}\right)\Big|_{z\,=\,0}\right]z^{\upsilon}e^{-\upsilon\beta z}\\
&=1+\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\frac{1}{\upsilon!}\left[nx(nx+\upsilon\beta)^{\upsilon-1}e^{(nx+\upsilon\beta)z}\Big|_{z\,=\,0}\right]z^{\upsilon}e^{-\upsilon\beta z}\\
&=1+\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\frac{(nx)(nx+\upsilon\beta)^{\upsilon-1}}{\upsilon!}\left(ze^{-\beta z}\right)^{\upsilon}
\end{aligned}$$

olur. Bu eşitlikte $z = 1$ alınırsa

$$e^{nx} = 1 + \sum_{\upsilon=1}^{\infty} \frac{nx(nx+\upsilon\beta)^{\upsilon-1}}{\upsilon!}\ e^{-\upsilon\beta}$$

olarak elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı e^{-nx} ile çarpılırsa

$$1 = e^{-nx} + \sum_{\upsilon=1}^{\infty} \frac{nx(nx+\upsilon\beta)^{\upsilon-1}}{\upsilon!}\ e^{-(nx+\upsilon\beta)}$$

$$1 = \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{nx(nx+\upsilon\beta)^{\upsilon-1}}{\upsilon!}\ e^{-(nx+\upsilon\beta)}$$

olur.

Jain'in tanımladığı bu operatör baz alınarak bazı çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalardan biri de Patel ve Mishra tarafından yapılmıştır ve Jain-Baskakov operatörünün Durmeyerr modifikasyanu olarak ifade edilebilen

$$\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(f,x) = \frac{(n-c)}{c} \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \omega_\beta(\upsilon,nx) \int_0^\infty p_{n,\upsilon-1,c}(t) f(t)dt + e^{-nx} f(0) \qquad (3.3)$$

şeklindeki operatör üzerindedir [11].

Burada

$$p_{n,\upsilon-1,c}(t) = c\,\frac{\Gamma(n/c+\upsilon-1)}{\Gamma(\upsilon)\Gamma(n/c)} \cdot \frac{(ct)^{\upsilon-1}}{(1+ct)^{n/c+\upsilon-1}}$$

olup $\omega_\beta(\upsilon,nx)$ (3.2) ile tanımlanan ifadedir. Bu operatörde özel olarak $c = 1$ alınırsa [11] numaralı kaynakta verilen Jain-Baskakov Durmeyerr operatörü elde edilir.

Bu kısımda c parametresine bağlı değiştirilmiş Jain-Baskakov operatörünün yakınsaklık özelliklerinin incelenmesinde kolaylık sağlaması bakımından basit sonuçlar ve doğrudan elde edilebilecek ifadeler verilecektir.

Lemma 3.1. $m = 0, 1, 2, 3, 4$ için $P_n^{[\beta]}(t^m, x)$ ifadeleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$P_n^{[\beta]}(1,x) = 1\,, \qquad P_n^{[\beta]}(t,x) = \frac{x}{1-\beta}\,,$$

$$P_n^{[\beta]}(t^2,x) = \frac{x^2}{(1-\beta)^2} + \frac{x}{n(1-\beta)^3}\ ,$$

$$P_n^{[\beta]}(t^3,x) = \frac{x^3}{(1-\beta)^3} + \frac{3x^2}{n(1-\beta)^4} - \frac{(2\beta+1)x}{n^2(1-\beta)^5}\ ,$$

$$P_n^{[\beta]}(t^4,x) = \frac{x^4}{(1-\beta)^4} + \frac{6x^3}{n(1-\beta)^5} - \frac{(36\beta^4 - 72\beta^3 + 36\beta^2 - 8\beta - 7)x^2}{n^2(1-\beta)^6}$$

$$+ \frac{(105\beta^5 - 14\beta^4 - 2\beta^3 + 12\beta^2 + 8\beta + 1)x}{n^3(1-\beta)^7}$$

İspat: İspat için aşağıdaki eşitliği tanımlayalım.

$$S(r,\alpha,\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha+\beta k)^{k+r-1}}{k!} \cdot e^{-(\alpha+\beta k)} \qquad r = 0,1,2,\ldots \qquad (3.4)$$

öyle ki bu eşitlikte $r = 0$ için

$$\alpha\, S(0,\alpha,\beta) = 1$$

olur. Bu durumda

$$S(r,\alpha,\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k (\alpha+\beta k)\, S(r-1, \alpha+\beta k, \beta)$$

eşitliği sağlanır. Eşitliğin doğruluğunu inceleyelim.

$S(r,\alpha,\beta)$ fonksiyonu

$$S(r,\alpha,\beta) = \alpha S(r-1,\alpha,\beta) + \beta S(r, \alpha+\beta, \beta)$$

eşitliğini sağlar. Gerçekten,

$$S(r-1,\alpha,\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha+\beta k)^{k+r-2}}{k!} \; e^{-(\alpha+\beta k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \; (\alpha+\beta k)^{-1} \frac{(\alpha+\beta k)^{k+r-1}}{k!} \; e^{-(\alpha+\beta k)} = (\alpha+\beta k)^{-1} S(r,\alpha,\beta)$$

olur. Buradan

$$S(r,\alpha,\beta) = (\alpha+\beta k) S(r-1,\alpha,\beta)$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse,

$$S(r,\alpha,\beta) = \alpha S(r-1,\alpha,\beta) + \beta k S(r-1,\alpha,\beta)$$

olur. Ayrıca

$$\beta k S(r-1,\alpha,\beta) = \beta k \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha+\beta k)^{k+r-2}}{k!} \; e^{-(\alpha+\beta k)}$$

$$= \beta \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\alpha+\beta k)^{k+r-2}}{k!} \; e^{-(\alpha+\beta k)}$$

$$= \beta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha+\beta k)^{k+r-2}}{(k-1)!} \; e^{-(\alpha+\beta k)}$$

$$= \beta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha+\beta(k+1))^{k+1+r-2}}{k!} \; e^{-(\alpha+\beta(k+1))}$$

$$= \beta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha+\beta+\beta k)^{k+r-1}}{k!} \; e^{-(\alpha+\beta+\beta k)} \; = \beta S(r,\alpha+\beta,\beta)$$

eşitliği sağlanır. Bu ifade yerine yazılırsa

$$S(r,\alpha,\beta) = \alpha S(r-1,\alpha,\beta) + \beta S(r,\alpha+\beta,\beta) \qquad (*)$$

elde edilir. Buna göre

$$S(r,\alpha+\beta,\beta) = (\alpha+\beta) S(r-1,\alpha+\beta,\beta) + \beta S(r,\alpha+2\beta,\beta)$$

$$S(r,\alpha+2\beta,\beta) = (\alpha+2\beta) S(r-1,\alpha+2\beta,\beta) + \beta S(r,\alpha+3\beta,\beta)$$

$$\vdots$$

rekürans bağıntısı yazılabilir. Bu ifadeler $(*)$ da yerlerine yazılırlarsa

$$\begin{aligned} S(r,\alpha,\beta) &= \alpha S(r-1,\alpha,\beta) \\ &\quad + \beta\{(\alpha+\beta)S(r-1,\alpha+\beta,\beta) + \beta[(\alpha+2\beta)S(r-1,\alpha+2\beta,\beta) + \cdots]\} \\ &= \alpha S(r-1,\alpha,\beta) + \beta(\alpha+\beta)S(r-1,\alpha+\beta,\beta) \\ &\quad + \beta^2(\alpha+2\beta)S(r-1,\alpha+2\beta,\beta) + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k(\alpha+\beta k)\, S(r-1,\alpha+\beta k,\beta) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$S(r,\alpha,\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k(\alpha+\beta k)\, S(r-1,\alpha+\beta k,\beta)$$

eşitliği elde edilir.

Lemma 3.1 'in ispatı için $S(1,\alpha,\beta)$, $S(2,\alpha,\beta)$, $S(3,\alpha,\beta)$, $S(4,\alpha,\beta)$ ifadelerini bulalım.

$$\begin{aligned} S(1,\alpha,\beta) &= \alpha S(0,\alpha,\beta) + \beta S(1,\alpha+\beta,\beta) \\ &= 1 + \beta[(\alpha+\beta)S(0,\alpha+\beta,\beta) + \beta S(1,\alpha+2\beta,\beta)] \\ &= 1 + \beta\big[1 + \beta[(\alpha+2\beta)S(0,\alpha+2\beta,\beta) + \beta S(1,\alpha+3\beta,\beta)]\big] \\ &= 1 + \beta + \beta^2\big[1 + \beta[(\alpha+3\beta)S(0,\alpha+3\beta,\beta) + \beta S(1,\alpha+4\beta,\beta)]\big] \\ &= 1 + \beta + \beta^2 + \beta^3 + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k = \frac{1}{1-\beta} \end{aligned}$$

şeklinde bir geometrik seri ve dolayısıyla yakınsadığı değer elde edilir. Benzer işlemler yardımı ile

$$S(2,\alpha,\beta)=\alpha S(1,\alpha,\beta)+\beta S(2,\alpha+\beta,\beta)$$

$$=\alpha\frac{1}{1-\beta}+\beta[(\alpha+\beta)S(1,\alpha+\beta,\beta)+\beta S(2,\alpha+2\beta,\beta)]$$

$$=\alpha\frac{1}{1-\beta}+\beta(\alpha+\beta)\frac{1}{1-\beta}$$

$$+\beta^2[(\alpha+2\beta)S(1,\alpha+2\beta,\beta)+\beta S(2,\alpha+3\beta,\beta)]$$

$$=\alpha\frac{1}{1-\beta}+\beta(\alpha+\beta)\frac{1}{1-\beta}+\frac{\beta^2(\alpha+2\beta)}{1-\beta}$$

$$+\beta^3[(\alpha+3\beta)S(1,\alpha+3\beta,\beta)+\beta S(2,\alpha+4\beta,\beta)]$$

$$=\frac{\alpha}{1-\beta}+\frac{\beta(\alpha+\beta)}{1-\beta}+\frac{\beta^2(\alpha+2\beta)}{1-\beta}+\frac{\beta^3(\alpha+3\beta)}{1-\beta}+\cdots$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\beta^k(\alpha+k\beta)}{1-\beta}=\frac{\alpha}{1-\beta}\sum_{k=0}^{\infty}\beta^k+\frac{1}{1-\beta}\sum_{k=0}^{\infty}k\beta^{k+1}$$

$$=\frac{\alpha}{(1-\beta)^2}+\frac{\beta^2}{(1-\beta)^3}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde,

$$S(3,\alpha,\beta)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta^k(\alpha+k\beta)S(2,\alpha+k\beta,\beta)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta^k(\alpha+k\beta)\left[\frac{\alpha+k\beta}{(1-\beta)^2}+\frac{\beta^2}{(1-\beta)^3}\right]$$

$$=\frac{1}{(1-\beta)^2}\sum_{k=0}^{\infty}\beta^k(\alpha+k\beta)(\alpha+k\beta)+\frac{\beta^2}{(1-\beta)^3}\sum_{k=0}^{\infty}\beta^k(\alpha+k\beta)$$

$$=\frac{1}{(1-\beta)^2}\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha^2\beta^k+2\alpha k\beta^{k+1}+k^2\beta^{k+2})+\frac{\beta^2}{(1-\beta)^3}\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha\beta^k+k\beta^{k+1})$$

$$=\frac{1}{(1-\beta)^2}\left[\frac{\alpha^2}{1-\beta}+\frac{2\alpha\beta^2}{(1-\beta)^2}+\frac{\beta^3(1+\beta)}{(1-\beta)^3}\right]+\frac{\beta^2}{(1-\beta)^3}\left[\frac{\alpha}{1-\beta}+\frac{\beta^2}{(1-\beta)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{(1-\beta)^5}[\alpha^2(1-\beta)^2+3\alpha\beta^2(1-\beta)+\beta^3+2\beta^4]$$

$$=\frac{\alpha^2}{(1-\beta)^3}+\frac{3\alpha\beta^2}{(1-\beta)^4}+\frac{\beta^3+2\beta^4}{(1-\beta)^5}$$

ve

$$S(4,\alpha,\beta)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta^{k}(\alpha+k\beta)S(3,\alpha+k\beta,\beta)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\beta^{k}(\alpha+k\beta)\left[\frac{(\alpha+k\beta)^{2}}{(1-\beta)^{3}}+\frac{3(\alpha+k\beta)\beta^{2}}{(1-\beta)^{4}}+\frac{\beta^{3}+2\beta^{4}}{(1-\beta)^{5}}\right]$$

$$=\frac{1}{(1-\beta)^{3}}\sum_{k=0}^{\infty}\beta^{k}(\alpha+k\beta)^{3}+\frac{3\beta^{2}}{(1-\beta)^{4}}\sum_{k=0}^{\infty}\beta^{k}(\alpha+k\beta)^{2}+\frac{\beta^{3}+2\beta^{4}}{(1-\beta)^{5}}\sum_{k=0}^{\infty}\beta^{k}(\alpha+k\beta)$$

$$=\frac{1}{(1-\beta)^{3}}\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha^{3}\beta^{k}+3\alpha^{2}k\beta^{k+1}+3\alpha k^{2}\beta^{k+2}+k^{3}\beta^{k+3})$$
$$+\frac{3\beta^{2}}{(1-\beta)^{4}}\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha^{2}\beta^{k}+2\alpha k\beta^{k+1}+k^{2}\beta^{k+2})$$
$$+\frac{\beta^{3}+2\beta^{4}}{(1-\beta)^{5}}\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha\beta^{k}+k\beta^{k+1})$$

$$=\frac{1}{(1-\beta)^{3}}\left[\frac{\alpha^{3}}{1-\beta}+\frac{3\alpha^{2}\beta^{2}}{(1-\beta)^{2}}+\frac{3\alpha\beta^{3}(1+\beta)}{(1-\beta)^{3}}+\frac{\beta^{4}(1+\beta+\beta^{2})}{(1-\beta)^{4}}\right]$$
$$+\frac{3\beta^{2}}{(1-\beta)^{4}}\left[\frac{\alpha^{2}}{1-\beta}+\frac{2\alpha\beta^{2}}{(1-\beta)^{2}}+\frac{\beta^{3}(1+\beta)}{(1-\beta)^{3}}\right]$$
$$+\frac{\beta^{3}+2\beta^{4}}{(1-\beta)^{5}}\left[\frac{\alpha}{1-\beta}+\frac{\beta^{2}}{(1-\beta)^{2}}\right]$$

$$=\frac{\alpha^{3}}{(1-\beta)^{4}}+\frac{6\alpha^{2}\beta^{2}}{(1-\beta)^{5}}+\frac{3\alpha\beta^{3}}{(1-\beta)^{6}}+\frac{6\beta^{6}+5\beta^{5}+\beta^{4}}{(1-\beta)^{7}}$$

eşitlikleri elde edilir. Şimdi bu eşitlikleri kullanarak ispatı tamamlayalım.

$f(t)=1$ için

$$P_{n}^{[\beta]}(1,x)=\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\omega_{\beta}(\upsilon,nx)=\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{nx(nx+\upsilon\beta)^{\upsilon-1}}{\upsilon!}e^{-(nx+\upsilon\beta)}=1$$

olduğu açıktır.

Şimdi (3.1) de tanımlanan $P_n^{[\beta]}(t,x)$ de $f(t)=t$ alınırsa

$$P_n^{[\beta]}(t,x)=\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\omega_\beta(\upsilon,nx)\left(\frac{\upsilon}{n}\right)=\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\frac{nx(nx+\upsilon\beta)^{\upsilon-1}e^{-(nx+\upsilon\beta)}}{\upsilon!}\left(\frac{\upsilon}{n}\right)$$

$$=x\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\frac{(nx+\upsilon\beta)^{\upsilon-1}e^{-(nx+\upsilon\beta)}}{(\upsilon-1)!}$$

olur. Burada $\upsilon\to\upsilon+1$ yazılırsa

$$=x\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(nx+\upsilon\beta+\beta)^{\upsilon}e^{-(nx+\upsilon\beta+\upsilon)}}{\upsilon!}$$

olur. (3.4) eşitliği kullanılırsa

$$P_n^{[\beta]}(t,x)=xS(1,nx+\beta,\beta)=x\frac{1}{1-\beta}=\frac{x}{1-\beta}$$

olarak elde edilir.

Şimdi $f(t)=t^2$ alınırsa,

$$P_n^{[\beta]}(t^2,x)=\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\omega_\beta(\upsilon,nx)\left(\frac{\upsilon^2}{n^2}\right)=\frac{x}{n}\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\frac{(nx+\upsilon\beta)^{\upsilon-1}e^{-(nx+\upsilon\beta)}}{(\upsilon-1)!}\,\upsilon$$

olur. Burada $\upsilon\to\upsilon+1$ yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$=\frac{x}{n}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(nx+\upsilon\beta+\beta)^{\upsilon}e^{-(nx+\upsilon\beta+\beta)}}{\upsilon!}\,(\upsilon+1)$$

$$=\frac{x}{n}\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\frac{(nx+\upsilon\beta+\beta)^{\upsilon}e^{-(nx+\upsilon\beta+\beta)}}{\upsilon!}\,\upsilon+\frac{x}{n}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(nx+\upsilon\beta+\beta)^{\upsilon}e^{-(nx+\upsilon\beta+\beta)}}{\upsilon!}$$

elde edilir. Burada da ilk toplamda $\upsilon\to\upsilon+1$ yazılırsa

$$=\frac{x}{n}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(nx+\upsilon\beta+2\beta)^{\upsilon+1}e^{-(nx+\upsilon\beta+2\beta)}}{\upsilon!}+\frac{x}{n}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(nx+\upsilon\beta+\beta)^{\upsilon}e^{-(nx+\upsilon\beta+\beta)}}{\upsilon!}$$

elde edilir. Şimdi (3.4) eşitliği kullanılırsa

$$P_n^{[\beta]}(t^2,x) = \frac{x}{n}[S(2,nx+2\beta,\beta) + S(1,nx+\beta,\beta)]$$

$$= \frac{x}{n}\left[\frac{nx+2\beta}{(1-\beta)^2} + \frac{\beta^2}{(1-\beta)^3} + \frac{1}{1-\beta}\right]$$

$$= \frac{x}{n}\left[\frac{nx+2\beta-nx\beta-2\beta^2+\beta^2+1-2\beta+\beta^2}{(1-\beta)^3}\right]$$

$$= \frac{x}{n}\left[\frac{nx(1-\beta)}{(1-\beta)^3} + \frac{1}{(1-\beta)^3}\right]$$

$$= \frac{x^2}{(1-\beta)^2} + \frac{x}{n(1-\beta)^3}$$

olarak bulunur.

Şimdi de $f(t) = t^3$ alınırsa

$$P_n^{[\beta]}(t^3,x) = \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \omega_\beta(\upsilon,nx)\left(\frac{\upsilon^3}{n^3}\right) = \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{nx(nx+\beta)^{\upsilon-1}e^{-(nx+\beta)}}{\upsilon!}\left(\frac{\upsilon^3}{n^3}\right)$$

$$= \frac{x}{n^2}\sum_{\upsilon=1}^{\infty} \frac{(nx+\upsilon\beta)^{\upsilon-1}e^{-(nx+\upsilon\beta)}}{(\upsilon-1)!}\,\upsilon^2$$

olur. Burada $\upsilon \to \upsilon+1$ yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$= \frac{x}{n^2}\sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{(nx+\upsilon\beta+\beta)^{\upsilon}e^{-(nx+\upsilon\beta+\beta)}}{\upsilon!}\,(\upsilon+1)^2$$

$$= \frac{x}{n^2}\sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{(nx+\upsilon\beta+\beta)^{\upsilon}e^{-(nx+\upsilon\beta+\beta)}}{\upsilon!}\,(\upsilon^2+2\upsilon+1)$$

$$= \frac{x}{n^2}\left[\sum_{\upsilon=1}^{\infty} \frac{(nx+\upsilon\beta+\beta)^{\upsilon}e^{-(nx+\upsilon\beta+\beta)}}{(\upsilon-1)!}\,\upsilon\right.$$

$$\left. + 2\sum_{\upsilon=1}^{\infty} \frac{(nx+\upsilon\beta+\beta)^{\upsilon}e^{-(nx+\upsilon\beta+\beta)}}{(\upsilon-1)!} + \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{(nx+\upsilon\beta+\beta)^{\upsilon}e^{-(nx+\upsilon\beta+\beta)}}{\upsilon!}\right]$$

elde edilir. Burada birinci ve ikinci toplamda $\upsilon \to \upsilon + 1$ yazılırsa

$$= \frac{x}{n^2}\left[\sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{(nx + \upsilon\beta + 2\beta)^{\upsilon+1} e^{-(nx+\upsilon\beta+2\beta)}}{\upsilon!} \quad (\upsilon + 1)\right.$$

$$+ 2\sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{(nx + \upsilon\beta + 2\beta)^{\upsilon+!} e^{-(nx+\upsilon\beta+2\beta)}}{\upsilon!}$$

$$\left. + \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{(nx + \upsilon\beta + \beta)^{\upsilon} e^{-(nx+\upsilon\beta+\beta)}}{\upsilon!} \quad \right]$$

$$= \frac{x}{n^2}\left[\sum_{\upsilon=1}^{\infty} \frac{(nx + \upsilon\beta + 2\beta)^{\upsilon+1} e^{-(nx+\upsilon\beta+2\beta)}}{(\upsilon - 1)!}\right.$$

$$+ 3\sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{(nx + \upsilon\beta + 2\beta)^{\upsilon+1} e^{-(nx+\upsilon\beta+2\beta)}}{\upsilon!}$$

$$\left. + \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{(nx + \upsilon\beta + \beta)^{\upsilon} e^{-(nx+\upsilon\beta+\beta)}}{\upsilon!} \quad \right]$$

olur. Tekrar ilk toplamda $\upsilon \to \upsilon + 1$yazılırsa

$$P_n^{[\beta]}(t^3, x) = \frac{x}{n^2}\left[\sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{(nx + \upsilon\beta + 3\beta)^{\upsilon+2} e^{-(nx+\upsilon\beta+3\beta)}}{\upsilon!}\right.$$

$$+ 3\sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{(nx + \upsilon\beta + 2\beta)^{\upsilon+1} e^{-(nx+\upsilon\beta+2\beta)}}{\upsilon!}$$

$$\left. + \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{(nx + \upsilon\beta + \beta)^{\upsilon} e^{-(nx+\upsilon\beta+\beta)}}{\upsilon!} \quad \right]$$

şeklini alır. Şimdi (3.4) eşitliği kullanılırsa

$$P_n^{[\beta]}(t^3,x) = \frac{x}{n^2}[S(3,nx+3\beta,\beta)+3S(2,nx+2\beta,\beta)+S(1,nx+\beta,\beta)]$$

$$= \frac{x}{n^2}\left[\frac{(nx+3\beta)^2}{(1-\beta)^3}+\frac{3\beta^2(nx+3\beta)}{(1-\beta)^4}+\frac{\beta^3+2\beta^4}{(1-\beta)^5}+\frac{3(nx+2\beta)}{(1-\beta)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{3\beta^2}{(1-\beta)^3}+\frac{1}{1-\beta}\right]$$

$$= \frac{x}{n^2}\left[\frac{n^2x^2(1-\beta)^2+3nx(1-\beta)+2\beta+1}{(1-\beta)^5}\right]$$

$$= \frac{x^3}{(1-\beta)^3}+\frac{3x^2}{n(1-\beta)^4}-\frac{(2\beta+1)x}{n^2(1-\beta)^5}$$

olarak elde edilir.

Şimdi de $f(t)=t^4$ alınırsa

$$P_n^{[\beta]}(t^4,x) = \sum_{\upsilon=0}^{\infty}\omega_\beta(\upsilon,nx)\left(\frac{\upsilon^4}{n^4}\right) = \sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{nx(nx+\beta)^{\upsilon-1}e^{-(nx+\beta)}}{\upsilon!}\left(\frac{\upsilon^4}{n^4}\right)$$

$$= \frac{x}{n^3}\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\frac{(nx+\upsilon\beta)^{\upsilon-1}e^{-(nx+\upsilon\beta)}}{(\upsilon-1)!}\ \upsilon^3$$

olur. Burada $\upsilon \to \upsilon+1$ yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$P_n^{[\beta]}(t^4,x) = \frac{x}{n^3}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(nx+\upsilon\beta+\beta)^{\upsilon}e^{-(nx+\upsilon\beta+\beta)}}{\upsilon!}\ (\upsilon+1)^3$$

$$= \frac{x}{n^3}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(nx+\upsilon\beta+\beta)^{\upsilon}e^{-(nx+\upsilon\beta+\beta)}}{\upsilon!}\ (\upsilon^3+3\upsilon^2+3\upsilon+1)$$

$$= \frac{x}{n^3}\left[\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\frac{(nx+\upsilon\beta+\beta)^{\upsilon}e^{-(nx+\upsilon\beta+\beta)}}{(\upsilon-1)!}\ \upsilon^2\right.$$

$$+3\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\frac{(nx+\upsilon\beta+\beta)^{\upsilon}e^{-(nx+\upsilon\beta+\beta)}}{(\upsilon-1)!}\ \upsilon$$

$$+3\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\frac{(nx+\upsilon\beta+\beta)^{\upsilon}e^{-(nx+\upsilon\beta+\beta)}}{(\upsilon-1)!}$$

$$\left.+\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(nx+\upsilon\beta+\beta)^{\upsilon}e^{-(nx+\upsilon\beta+\beta)}}{\upsilon!}\right]$$

elde edilir. Bu ifadedeki birinci, ikinci ve üçüncü toplamda $\upsilon \to \upsilon + 1$ yazılır ve düzenlenirse

$$P_n^{[\beta]}(t^4, x) = \frac{x}{n^3}\left[\sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{(nx + \upsilon\beta + 2\beta)^{\upsilon+1} e^{-(nx+\upsilon\beta+2\beta)}}{\upsilon!} (\upsilon + 1)^2\right.$$

$$+ 3\sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{(nx + \upsilon\beta + 2\beta)^{\upsilon+1} e^{-(nx+\upsilon\beta+2\beta)}}{\upsilon!} (\upsilon + 1)$$

$$+ 3\sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{(nx + \upsilon\beta + 2\beta)^{\upsilon+1} e^{-(nx+\upsilon\beta+2\beta)}}{\upsilon!}$$

$$\left. + \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{(nx + \upsilon\beta + \beta)^{\upsilon} e^{-(nx+\upsilon\beta+\beta)}}{(\upsilon - 1)!} \right]$$

$$= \frac{x}{n^3}\left[\sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{(nx + \upsilon\beta + 2\beta)^{\upsilon+1} e^{-(nx+\upsilon\beta+2\beta)}}{\upsilon!} (\upsilon^2 + 2\upsilon + 1)\right.$$

$$+ 3\sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{(nx + \upsilon\beta + 2\beta)^{\upsilon+1} e^{-(nx+\upsilon\beta+2\beta)}}{\upsilon!} (\upsilon + 1)$$

$$+ 3\sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{(nx + \upsilon\beta + 2\beta)^{\upsilon+1} e^{-(nx+\upsilon\beta+2\beta)}}{\upsilon!}$$

$$\left. + \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{(nx + \upsilon\beta + \beta)^{\upsilon} e^{-(nx+\upsilon\beta+\beta)}}{(\upsilon - 1)!} \right]$$

$$
=\frac{x}{n^3}\left[\sum_{v=1}^{\infty}\frac{(nx+v\beta+2\beta)^{v+1}e^{-(nx+v\beta+2\beta)}}{(v-1)!}v\right.
$$

$$
+2\sum_{v=1}^{\infty}\frac{(nx+v\beta+2\beta)^{v+1}e^{-(nx+v\beta+2\beta)}}{(v-1)!}
$$

$$
+\sum_{v=0}^{\infty}\frac{(nx+v\beta+2\beta)^{v+1}e^{-(nx+v\beta+2\beta)}}{v!}
$$

$$
+3\sum_{v=1}^{\infty}\frac{(nx+v\beta+2\beta)^{v+1}e^{-(nx+v\beta+2\beta)}}{(v-1)!}
$$

$$
+3\sum_{v=0}^{\infty}\frac{(nx+v\beta+2\beta)^{v+1}e^{-(nx+v\beta+2\beta)}}{v!}
$$

$$
+3\sum_{v=0}^{\infty}\frac{(nx+v\beta+2\beta)^{v+1}e^{-(nx+v\beta+2\beta)}}{v!}
$$

$$
\left.+\sum_{v=0}^{\infty}\frac{(nx+v\beta+\beta)^{v}e^{-(nx+v\beta+\beta)}}{v!}\right]
$$

$$
=\frac{x}{n^3}\left[\sum_{v=1}^{\infty}\frac{(nx+v\beta+2\beta)^{v+1}e^{-(nx+v\beta+2\beta)}}{(v-1)!}v\right.
$$

$$
+5\sum_{v=1}^{\infty}\frac{(nx+v\beta+2\beta)^{v+1}e^{-(nx+v\beta+2\beta)}}{(v-1)!}
$$

$$
+7\sum_{v=0}^{\infty}\frac{(nx+v\beta+2\beta)^{v+1}e^{-(nx+v\beta+2\beta)}}{v!}
$$

$$
\left.+\sum_{v=0}^{\infty}\frac{(nx+v\beta+\beta)^{v}e^{-(nx+v\beta+\beta)}}{v!}\right]
$$

haline gelir. Burada da birinci ve ikinci toplamda $v \to v+1$ yazılır ve düzenlenirse

$$= \frac{x}{n^3}\left[\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(nx+\upsilon\beta+3\beta)^{\upsilon+2}e^{-(nx+\upsilon\beta+3\beta)}}{\upsilon!}(\upsilon+1)\right.$$

$$+5\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(nx+\upsilon\beta+3\beta)^{\upsilon+2}e^{-(nx+\upsilon\beta+3\beta)}}{\upsilon!}$$

$$+7\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(nx+\upsilon\beta+2\beta)^{\upsilon+1}e^{-(nx+\upsilon\beta+2\beta)}}{\upsilon!}$$

$$\left.+\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(nx+\upsilon\beta+\beta)^{\upsilon}e^{-(nx+\upsilon\beta+\beta)}}{\upsilon!}\right]$$

$$= \frac{x}{n^3}\left[\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\frac{(nx+\upsilon\beta+3\beta)^{\upsilon+2}e^{-(nx+\upsilon\beta+3\beta)}}{(\upsilon-1)!}\right.$$

$$+6\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(nx+\upsilon\beta+3\beta)^{\upsilon+2}e^{-(nx+\upsilon\beta+3\beta)}}{\upsilon!}$$

$$+7\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(nx+\upsilon\beta+2\beta)^{\upsilon+1}e^{-(nx+\upsilon\beta+2\beta)}}{\upsilon!}$$

$$\left.+\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(nx+\upsilon\beta+\beta)^{\upsilon}e^{-(nx+\upsilon\beta+\beta)}}{\upsilon!}\right]$$

elde edilir. Birinci toplamda $\upsilon \to \upsilon + 1$ yazılırsa

$$= \frac{x}{n^3}\left[\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(nx+\upsilon\beta+4\beta)^{\upsilon+3}e^{-(nx+\upsilon\beta+4\beta)}}{\upsilon!}\right.$$

$$+6\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(nx+\upsilon\beta+3\beta)^{\upsilon+2}e^{-(nx+\upsilon\beta+3\beta)}}{\upsilon!}$$

$$+7\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(nx+\upsilon\beta+2\beta)^{\upsilon+1}e^{-(nx+\upsilon\beta+2\beta)}}{\upsilon!}$$

$$\left.+\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(nx+\upsilon\beta+\beta)^{\upsilon}e^{-(nx+\upsilon\beta+\beta)}}{\upsilon!}\right]$$

olarak bulunur. Şimdi tekrar (3.4) eşitliği kullanılırsa

$$= \frac{x}{n^3}\left[S(4, nx + 4\beta, \beta) + 6S(3, nx + 3\beta, \beta) + 7S(2, nx + 2\beta, \beta) + S(1, nx + \beta, \beta)\right]$$

$$= \frac{x}{n^3}\left[\frac{(nx + 4\beta)^3}{(1-\beta)^4} + \frac{6\beta^2(nx + 4\beta)^2}{(1-\beta)^5} + \frac{(nx + 4\beta)\beta^3(11\beta + 4)}{(1-\beta)^6} + \frac{6\beta^6 + 8\beta^5 + \beta^4}{(1-\beta)^7}\right.$$

$$+ \frac{6(nx + 3\beta)^2}{(1-\beta)^3} + \frac{18(nx + 3\beta)\beta^2}{(1-\beta)^4} + \frac{6\beta^3 + 12\beta^4}{(1-\beta)^5} + \frac{7(nx + 2\beta)}{(1-\beta)^2}$$

$$\left. + \frac{7\beta^2}{(1-\beta)^3} + \frac{1}{1-\beta}\right]$$

$$= \frac{x}{n^3}\left[\frac{x^4}{(1-\beta)^4} + \frac{6x^3}{n(1-\beta)^5} - \frac{x^2(36\beta^4 - 72\beta^3 + 36\beta^2 - 8\beta - 7)}{n^2(1-\beta)^6}\right.$$

$$\left. + \frac{x(105\beta^5 - 14\beta^4 - 2\beta^3 + 12\beta^2 + 8\beta + 1)}{(1-\beta)^7}\right]$$

olarak elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Buna göre aşağıdaki Lemma verilebilir.

Lemma 3.2. $n > 5c > 0$ için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

$$\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(1, x) = 1\ ,$$

$$\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(t, x) = \frac{nx}{(n-2c)(1-\beta)}\ ,$$

$$\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(t^2, x) = \frac{n^2}{(n-2c)(n-3c)}\left[\frac{x^2}{(1-\beta)^2} + \frac{x(\beta^2 - 2\beta + 2)}{n(1-\beta)^3}\right],$$

$$\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(t^3, x) = \frac{n^2x^2\big(-(1-\beta)nx + 3(\beta^2 - 2\beta + 2)\big)}{(1-\beta)^4(n-2c)(n-3c)(n-4c)} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(t^4, x) = \frac{n^3x^3\big((1-\beta)nx + 6(\beta^2 - 2\beta + 2)\big)}{(1-\beta)^4(n-2c)(n-3c)(n-4c)(n-5c)} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

İspat : İspatı yaparken işlem kolaylığı açısından aşağıdaki eşitliği kullanacağız.

$$\int_0^\infty t^j p_{n,v-1,c}(t)dt = \int_0^\infty t^j c\frac{\Gamma(n/c+v-1)}{\Gamma(v)\Gamma(n/c)}\;\frac{(ct)^{v-1}}{(1+ct)^{n/c+v-1}}dt$$

Bunun için önce Gamma ve Beta fonksiyonlarının

$$\int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}du = \beta(x,y) = \frac{\Gamma(\mathrm{x})\Gamma(\mathrm{y})}{\Gamma(\mathrm{x}+\mathrm{y})}$$

eşitliğini sağladığını göz önüne alarak ifadeyi ispatlayalım.

$$\int_0^\infty t^j p_{n,v-1,c}(t)dt = \int_0^\infty t^j c\frac{\Gamma(n/c+v-1)}{\Gamma(v)\Gamma(n/c)}\;\frac{(ct)^{v-1}}{(1+ct)^{n/c+v-1}}dt$$

$$= \frac{c\,\Gamma\left(\frac{n}{c}+v-1\right)}{c^{j+1}\Gamma(v)\Gamma\left(\frac{n}{c}\right)}\int_0^\infty \frac{(ct)^{j+v-1}}{(1+ct)^{\frac{n}{c}+v-1}}\,dt$$

$$= \frac{c\,\Gamma\left(\frac{n}{c}+v-1\right)}{c^{j+1}\Gamma(v)\Gamma\left(\frac{n}{c}\right)}\beta\left(j+v,\frac{n}{c}-j-1\right)$$

$$= \frac{c\,\Gamma\left(\frac{n}{c}+v-1\right)}{c^{j+1}\Gamma(v)\Gamma\left(\frac{n}{c}\right)}\;\frac{\Gamma(j+v)\Gamma\left(\frac{n}{c}-j-1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{c}+v-1\right)}$$

$$= \frac{c\,\Gamma\left(\frac{n}{c}-j-1\right)\Gamma(j+v)}{c^{j+1}\,\Gamma(v)\,\Gamma\left(\frac{n}{c}\right)}$$

$$= \frac{c\,\Gamma(v)v(v+1)\dots(v+j-1)\left(\frac{n}{c}-j-2\right)\left(\frac{n}{c}-j-3\right)\dots\Gamma\left(\frac{n}{c}-j\right)}{c^{j+1}\,\Gamma(v)\left(\frac{n}{c}-1\right)\left(\frac{n}{c}-2\right)\dots\left(\frac{n}{c}-j-1\right)\left(\frac{n}{c}-j\right)\Gamma\left(\frac{n}{c}-j\right)}$$

$$= \frac{cv(v+1)\dots(v+j-1)}{c^{j+1}\left(\frac{n-c}{c}\right)\left(\frac{n-2c}{c}\right)\dots\left(\frac{n-(j+1)c}{c}\right)}$$

$$= \frac{cv(v+1)\dots(v+j-1)}{(n-c)(n-2c)\dots(n-(j+1)c)}$$

olarak elde edilir. Bu eşitlik bize terim sayısını da vermektedir.

Örneğin; $j = 1$ için,

$$\int_0^\infty t^1 p_{n,v-1,c}(t)dt = \frac{cv}{(n-c)(n-2c)}$$

şeklindedir. $j = 2$ için,

$$\int_0^\infty t^2 p_{n,v-1,c}(t)dt = \frac{cv(v+1)}{(n-c)(n-2c)(n-3c)}$$

şeklindedir. Aynı şekilde $j = 3, j = 4$ için de benzer ifadeler bulunabilir. Şimdi Lemmanın ispatını yapalım. Bunun için $\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(1,x)$ operatöründe $f = 1$ alınırsa,

$$\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(1,x) = \frac{n-c}{c}\sum_{v=1}^{\infty}\omega_\beta(v,nx)\int_0^\infty p_{n,v-1,c}(t)dt + e^{-nx} = \frac{n-c}{c}\sum_{v=1}^{\infty}\omega_\beta(v,nx)\frac{c}{n-c}$$

$$= P_n^{[\beta]}(1,x) = 1$$

elde edilir.

Şimdi $f = t$ alınırsa,

$$\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(t,x) = \frac{n-c}{c}\sum_{v=1}^{\infty}\omega_\beta(v,nx)\int_0^\infty t p_{n,v-1,c}(t)dt = \frac{n-c}{c}\sum_{v=1}^{\infty}\omega_\beta(v,nx)\frac{cv}{(n-c)(n-2c)}$$

$$= \frac{n}{n-2c}\sum_{v=1}^{\infty}\omega_\beta(v,nx)\frac{v}{n} = \frac{n}{n-2c}P_n^{[\beta]}(t,x) = \frac{n}{n-2c}\,\frac{x}{1-\beta}$$

$$= \frac{nx}{(n-2c)(1-\beta)}$$

olarak bulunur.

Şimdi de $f = t^2$ alınırsa,

$$\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(t^2,x) = \frac{n-c}{c}\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\omega_{\beta}(\upsilon,nx)\int_0^{\infty} t^2 p_{n,\upsilon-1,c}(t)dt$$

$$= \frac{n-c}{c}\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\omega_{\beta}(\upsilon,nx)\frac{c\upsilon(\upsilon+1)}{(n-c)(n-2c)(n-3c)}$$

$$= \frac{n^2}{(n-2c)(n-3c)}\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\omega_{\beta}(\upsilon,nx)\frac{\upsilon^2}{n^2} + \frac{n}{(n-2c)(n-3c)}\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\omega_{\beta}(\upsilon,nx)\frac{\upsilon}{n}$$

$$= \frac{n^2}{(n-2c)(n-3c)}\left(P_n^{[\beta]}(t^2,x) + \frac{1}{n}P_n^{[\beta]}(t,x)\right)$$

$$= \frac{n^2}{(n-2c)(n-3c)}\left(\frac{x^2}{(1-\beta)^2} + \frac{x}{n(1-\beta)^3} + \frac{x}{n(1-\beta)}\right)$$

$$= \frac{n^2}{(n-2c)(n-3c)}\left[\frac{x^2}{(1-\beta)^2} + \frac{x(\beta^2-2\beta+2)}{n(1-\beta)^3}\right]$$

olarak elde edilir.

Şimdi de $f = t^3$ alınırsa,

$$\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(t^3,x) = \frac{n-c}{c}\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\omega_{\beta}(\upsilon,nx)\int_0^{\infty} t^3 p_{n,\upsilon-1,c}(t)dt$$

$$= \frac{n-c}{c}\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\omega_{\beta}(\upsilon,nx)\frac{c\upsilon(\upsilon+1)(\upsilon+2)}{(n-c)(n-2c)(n-3c)(n-4c)}$$

$$= \frac{n^3}{(n-2c)(n-3c)(n-4c)}\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\omega_{\beta}(\upsilon,nx)\frac{\upsilon^3+3\upsilon^2+2\upsilon}{n^3}$$

$$= \frac{n^3}{(n-2c)(n-3c)(n-4c)}\left(P_n^{[\beta]}(t^3,x) + \frac{3}{n}P_n^{[\beta]}(t^2,x) + \frac{2}{n^2}P_n^{[\beta]}(t,x)\right)$$

$$= \frac{n^2x^2\left(-(1-\beta)xn + 3(\beta^2-2\beta+2)\right)}{(1-\beta)^4(n-2c)(n-3c)(n-4c)} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

olarak bulunur.

Şimdi de $f = t^4$ alınır ve benzer işlemler yapılırsa,

$$\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(t^4,x) = \frac{n-c}{c}\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\omega_{\beta}(\upsilon,nx)\int_0^{\infty} t^4 p_{n,\upsilon-1,c}(t)dt$$

$$= \frac{n-c}{c}\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\omega_{\beta}(\upsilon,nx)\frac{c\upsilon(\upsilon+1)(\upsilon+2)(\upsilon+3)}{(n-c)(n-2c)(n-3c)(n-4c)(n-5c)}$$

$$= \frac{n^4}{(n-2c)(n-3c)(n-4c)(n-5c)}$$

$$\times\left[P_n^{[\beta]}(t^4,x) + \frac{6}{n}P_n^{[\beta]}(t^3,x) + \frac{11}{n^2}P_n^{[\beta]}(t^2,x) + \frac{6}{n^3}P_n^{[\beta]}(t,x)\right]$$

$$= \frac{n^3x^3\big((1-\beta)xn + 6(\beta^2-2\beta+2)\big)}{(1-\beta)^5(n-2c)(n-3c)(n-4c)(n-5c)} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

olarak elde edilir. Şimdi aşağıdaki Lemmayı verelim.

Lemma 3.3. $n > 5c > 0$ için,

$$\mu_{1,n,c}^{\beta} = \mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(t-x,x) = \frac{x\big(n\beta+2c(1-\beta)\big)}{(n-2c)(1-\beta)},$$

$$\mu_{2,n,c}^{\beta} = \mathcal{D}_{n,c}^{\beta}((t-x)^2,x)$$

$$= \frac{x^2(n^2\beta^2 + n(c+4c\beta-5c\beta^2) + 6c^2 - 12c^2\beta + 6c^2\beta^2)}{(n-2c)(n-3c)(1-\beta)^2}$$

$$+ \frac{nx(\beta^2-2\beta+2)}{(n-2c)(n-3c)(1-\beta)^3},$$

$$\mu_{4,n,c}^{\beta} = \mathcal{D}_{n,c}^{\beta}((t-x)^4,x)$$

$$= \frac{(1-\beta)n^3\beta^2x^4(2c(3+4\beta-7\beta^2)+\beta^2n) + 6n^3\beta^2x^2(\beta^2-2\beta+2)}{(n-2c)(n-3c)(n-4c)(n-5c)(1-\beta)^5} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: İspat Lemma 3.2. den yararlanılarak yapılacaktır. Bunun için yardımcı bir $\mu_{i,n,c}^{\beta}(t^i,x) = \mathcal{D}_{n,c}^{\beta}\big((t-x)^i,x\big) \quad i = 1,2,4$ operatörünü kullanalım. Ayrıca biliyoruz ki $\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}$ operatörü lineerdir. Buna göre, gereken düzenlemeler yapılarak

$$\mu_{1,n,c}^{\beta} = \mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(t-x,x) = \mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(t,x) - x\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(1,x)$$

$$= \mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(t,x) - x1$$

$$= \frac{nx - nx + n\beta + 2cx - 2\beta cx}{(n-2c)(1-\beta)}$$

$$= \frac{x\big(n\beta + 2c(1-\beta)\big)}{(n-2c)(1-\beta)}$$

olur.

$$\mu_{2,n,c}^{\beta} = \mathcal{D}_{n,c}^{\beta}((t-x)^2,x) = \mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(t^2,x) - 2x\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(t,x) + x^2\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(1,x)$$

$$= \frac{n^2}{(n-2c)(n-3c)}\left[\frac{x^2}{(1-\beta)^2} + \frac{x(\beta^2-2\beta+2)}{n(1-\beta)^3}\right] - 2x\frac{nx}{(n-2c)(1-\beta)} + x^2 1$$

$$= \frac{x^2}{(n-2c)(n-3c)(1-\beta)^2}[n^2 + (6nc - 2n^2)(1-\beta) + (n-2c)(n-3c)(1-\beta)^2]$$

$$+ \frac{nx(\beta^2-2\beta+2)}{(n-2c)(n-3c)(1-\beta)^3}$$

$$= \frac{x^2(n^2\beta^2 + n(c + 4c\beta - 5c\beta^2) + 6c^2 - 12c^2\beta + 6c^2\beta^2)}{(n-2c)(n-3c)(1-\beta)^2}$$

$$+ \frac{nx(\beta^2-2\beta+2)}{(n-2c)(n-3c)(1-\beta)^3}$$

olarak elde edilir. Ve son olarak operatörün lineerliğini de kullanarak,

$$\mu_{4,n,c}^{\beta}=\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}((t-x)^4,x)$$

$$=\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(t^4,x)-4x\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(t^3,x)+6x^2\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(t^2,x)-4x^3\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(t,x)+x^4\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(1,x)$$

$$=\frac{n^3x^3\big((1-\beta)xn+6(\beta^2-2\beta+2)\big)}{(1-\beta)^5(n-2c)(n-3c)(n-4c)(n-5c)}$$

$$-4x\frac{n^2x^2\big(-(1-\beta)nx+3(\beta^2-2\beta+2)\big)}{(1-\beta)^4(n-2c)(n-3c)(n-4c)}$$

$$+6x^2\frac{n^2}{(n-2c)(n-3c)}\left[\frac{x^2}{(1-\beta)^2}+\frac{x(\beta^2-2\beta+2)}{n(1-\beta)^3}\right]$$

$$-4x^3\frac{nx}{(n-2c)(1-\beta)}+x^4 1$$

$$=\frac{(1-\beta)n^3\beta^2x^4(2c(3+4\beta-7\beta^2)+\beta^2)+6n^3\beta^2x^2(\beta^2-2\beta+2)}{(n-2c)(n-3c)(n-4c)(n-5c)(1-\beta)^5}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

olarak elde edilir. Şimdi (3.3) ile tanımlanan $\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(f,x)$ operatörünün yakınsaklık özellikleri ile ilgili bazı Teorem ve sonuçlar verilecektir.

Teorem 3.1. $f\in C_B[0,\infty)$ ve $n>3c>0$ için,

$$\left|\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(f,x)-f(x)\right|\leq\omega\left(f,\mu_{1,n,c}^{\beta}(x)\right)+M\omega_2\left(f,\sqrt{\left(\mu_{1,n,c}^{\beta}(x)\right)^2+\mu_{2,n,c}^{\beta}(x)}\right)$$

eşitliği sağlanır. Burada M pozitif bir sabittir.

İspat: İspatta kolaylık olması bakımından $\widehat{\mathcal{D}}_{n,c}^{\beta}(f,x)$ yardımcı operatörünü aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$\widehat{\mathcal{D}}_{n,c}^{\beta}(f,x)=\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(f,x)-f\left(x+\frac{(2c-2c\beta+n\beta)x}{(n-2c)(1-\beta)}\right)+f(x)$$

Şimdi kabul edelim ki $g \in W_\infty^2 = \{g \in C_B[0,\infty);\ g', g'' \in C_B[0,\infty)\}$ ve $x, t \in [0,\infty)$ olsun. Bu durumda g fonksiyonunun Taylor açılımı dikkate alınırsa;

$$g(t) = g(x) + (t-x)g'(x) + \int_x^t (t-u)g''(u)du$$

eşitliği yazılabilir. Bu ifadeye $\widehat{\mathcal{D}}_{n,c}^{\beta}$ operatörü uygulanırsa,

$$\widehat{\mathcal{D}}_{n,c}^{\beta}(g,x) = g(x) + g'(x)\widehat{\mathcal{D}}_{n,c}^{\beta}\big((t-x),x\big) + \widehat{\mathcal{D}}_{n,c}^{\beta}\left(\int_x^t (t-u)g''(u)du\,,x\right)$$

elde edilir. $\widehat{\mathcal{D}}_{n,c}^{\beta}$ operatörünün lineerliği göz önüne alınarak ifade düzenlenirse,

$$\widehat{\mathcal{D}}_{n,c}^{\beta}(g,x) - g(x) = g'(x)\widehat{\mathcal{D}}_{n,c}^{\beta}\big((t-x),x\big) + \widehat{\mathcal{D}}_{n,c}^{\beta}\left(\int_x^t (t-u)g''(u)du\,,x\right)$$

şeklinde yazılabilir. $\widehat{\mathcal{D}}_{n,c}^{\beta}(g,x)$ in tanımından dolayı

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{D}}_{n,c}^{\beta}((t-x),x) &= \mathcal{D}_{n,c}^{\beta}((t-x),x) - f\left(x + \frac{(2c-2c\beta+n\beta)x}{(n-2c)(1-\beta)}\right) + f(x) \\
&= \mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(t,x) - x\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(1,x) - \left[x + \frac{(2c-2c\beta+n\beta)x}{(n-2c)(1-\beta)}\right] + x \\
&= \frac{nx}{(n-2c)(1-\beta)} - x - \left[x + \frac{(2c-2c\beta+n\beta)x}{(n-2c)(1-\beta)} - x\right] \\
&= \frac{nx - x(n-n\beta-2c+2c\beta)}{(n-2c)(1-\beta)} - \frac{(2c-2c\beta+n\beta)x}{(n-2c)(1-\beta)} \\
&= \frac{(2c-2c\beta+n\beta)x - (2c-2c\beta+n\beta)x}{(n-2c)(1-\beta)} = 0
\end{aligned}$$

olup, bu değer yerine yazıldıktan sonra her iki tarafın mutlak değeri alınıp,

$$\left|\int_x^t (t-u)g''(u)du\right| \le (t-x)^2\|g''\|$$

eşitsizliği de kullanılarak,

$$\left|\widehat{\mathcal{D}}_{n,c}^{\beta}(g,x)-g(x)\right| \leq \widehat{\mathcal{D}}_{n,c}^{\beta}\left(\left|\int_{x}^{t}(t-u)g''(u)du\right|,x\right)$$

$$\leq \mathcal{D}_{n,c}^{\beta}((t-x)^2,x)\|g''\| + \left|\int_{x}^{x+\frac{(2c-2c\beta+n\beta)x}{(n-2c)(1-\beta)}}\left(x+\frac{(2c-2c\beta+n\beta)x}{(n-2c)(1-\beta)}-u\right)g''(u)du\right|$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu ifade de $\mu_{2,n,c}^{\beta}$ değeri göz önüne alınarak

$$\left|\widehat{\mathcal{D}}_{n,c}^{\beta}(g,x)-g(x)\right| \leq \left[\mu_{2,n,c}^{\beta}(x)+\left(\frac{(2c-2c\beta+n\beta)x}{(n-2c)(1-\beta)}\right)^2\right]\|g''\| \qquad (3.5)$$

eşitsizliği ve $\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(f,x)$in tanımı gereği

$$\left|\ \mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(f,x)\right| \leq \frac{(n-c)}{c}\sum_{v=1}^{\infty}\omega_{\beta}(v,nx)\int_{0}^{\infty}p_{n,v-1,c}(t)|f(t)|dt+e^{-nx}\,|f(0)| \leq \|f\|$$

olur. Ayrıca

$$f(t)-f(x)=f(t)-g(t)-f(x)+g(x)+g(t)-g(x)$$

eşitliği yazılabilir, bu eşitliğin her iki tarafına $\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(f,x)$ operatörü uygulanıp, $\widehat{\mathcal{D}}_{n,c}^{\beta}(f,x)$ yardımcı operatörünün tanımı da göz önüne alınarak her iki tarafın mutlak değeri alınırsa

$$\left|\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(f,x)-f(x)\right| \leq \left|\ \widehat{\mathcal{D}}_{n,c}^{\beta}(f-g,x)-(f-g)(x)\right| + \left|\ \widehat{\mathcal{D}}_{n,c}^{\beta}(g,x)-g(x)\right|$$

$$+\left|x+\frac{(2c-2c\beta+n\beta)x}{(n-2c)(1-\beta)}-f(x)\right|$$

ifadesi yazılabilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafının supremumu alınır , süreklilik modülünün tanımı ve (3.5) ifadesi kullanılırsa

$$\left|\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(f,x)-f(x)\right| \leq 2\|f-g\| + \left[\mu_{2,n,c}^{\beta}(x) + \left(\frac{(2c-2c\beta+n\beta)x}{(n-2c)(1-\beta)}\right)^2\right]\|g''\|$$

$$+\omega\left(f,\frac{(2c-2c\beta+n\beta)x}{(n-2c)(1-\beta)}\right)$$

olarak elde edilir. Bu son ifadenin $g \in W^2$ üzerinden infimumu alınır, K-fonksiyonelinin

$$K_2(f,\delta) = \inf_{g\in W^2}\{\|f-g\| + \delta\|g''\|\}$$

tanımını göz önüne alıp,

$$\delta = \mu_{2,n,c}^{\beta}(x) + \left(\frac{(2c-2c\beta+n\beta)x}{(n-2c)(1-\beta)}\right)^2$$

olarak tanımlanırsa

$$\left|\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(f,x)-f(x)\right| \leq \inf_{g\in W^2}\{\|f-g\| + \delta\|g''\|\} + \omega\left(f,\frac{(2c-2c\beta+n\beta)x}{(n-2c)(1-\beta)}\right)$$

$$\leq \mathcal{K}_2\left(f,\mu_{2,n,c}^{\beta}(x) + \left(\frac{(2c-2c\beta+n\beta)x}{(n-2c)(1-\beta)}\right)^2\right) + \omega\left(f,\frac{(2c-2c\beta+n\beta)x}{(n-2c)(1-\beta)}\right)$$

ifadesi elde edilir. K-fonksiyoneli için bilinen (2.3) eşitsizliği de kullanılırsa

$$\left|\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(f,x)-f(x)\right| \leq M\omega_2\left(f,\sqrt{\mu_{2,n,c}^{\beta}(x) + \left(\frac{(2c-2c\beta+n\beta)x}{(n-2c)(1-\beta)}\right)^2}\right)$$

$$+\omega\left(f,\frac{(2c-2c\beta+n\beta)x}{(n-2c)(1-\beta)}\right)$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

M_f sadece f ye bağlı bir sabit olmak üzere $\mathbb{R}^+$ kümesi üzerinde tanımlı ve $|f(x)| \leq M_f(1 + x^2)$ eşitsizliğini sağlayan tüm f fonksiyonlarının kümesi $B_{\rho_0}(\mathbb{R}^+)$ ile gösterilsin. Bu durumda

$$C_{\rho_0}(\mathbb{R}^+) = \left\{ f \in B_{\rho_0}(\mathbb{R}^+) : f\ sürekli\ ve\ x \to \infty\ için\ \frac{f(x)}{\rho_0(x)}\ yakınsak \right\}$$

kümesi tanımlanabilir.

a pozitif bir sayı olmak üzere $[0, a]$ kapalı aralığı üzerinde f fonksiyonunun alışılmış süreklilik modülü

$$\omega_a(f, \delta) = \sup_{|t-x| \leq \delta} \sup_{x,t \in [0,a]} |f(t) - f(x)| \qquad (3.6)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Ayrıca bilinmektedir ki $f \in C_{\rho_0}(\mathbb{R}^+)$ fonksiyonlarının $\omega_a(f, \delta)$ süreklilik modülünün limiti sıfıra gider.

Şimdi bu tanımlamaları göz önüne alarak (3.3) ile tanımlanan $\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(f, x)$ operatörü için aşağıdaki yakınsaklık teoremi verilebilir.

Teorem 3.2. $a > 0$ olmak üzere $[0, a + 1] \subset \mathbb{R}^+$ sonlu alt aralığı üzerinde f nin süreklilik modülü $\omega_{a+1}(f, \delta)$ ve $f \in C_{\rho_0}(\mathbb{R}^+)$ olsun. Bu durumda her $n > 3c$ için

$$\left\| \mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(f) - f \right\|_{C[0,a]} \leq 6M_f(1 + a^2)\mu_{2,n,c}^{\beta}(x) + 2\omega_{a+1}\left(f, \sqrt{\mu_{2,n,c}^{\beta}(x)}\right)$$

ifadesi doğrudur.

İspat : $x \in [0, a]$ ve $t > a + 1$ için, $t - x > 1$ olduğundan $|f(x)| \leq M_f(1 + x^2)$ eşitsizliği sağlandığından

$$\begin{aligned} |f(t) - f(x)| &\leq M_f(1 + t^2) + M_f(1 + x^2) \\ &\leq M_f(2 + t^2 + x^2) \\ &\leq M_f(2 + 3x^2 + 2(t - x)^2) \\ &\leq 6M_f(1 + a^2)(t - x)^2 \qquad (3.7) \end{aligned}$$

yazılabilir.

$x \in [0,a]$ ve $t \leq a+1$ için, f in süreklilik modülünün tanımı ve süreklilik modülünün sağladığı $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için

$\omega(f,\lambda\delta) \leq (1+\lambda)\omega(f,\delta)$

özelliği göz önüne alındığında $\delta > 0$ için

$$|f(t)-f(x)| \leq \omega_{a+1}(f,|t-x|) \leq \omega_{a+1}\left(f,\frac{|t-x|\delta}{\delta}\right)$$

$$\leq \left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right)\omega_{a+1}(f,\delta) \qquad (3.8)$$

yazılabilir.

(3.7) ve (3.8) ifadelerinden aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$|f(t)-f(x)| \leq 6M_f(1+a^2)(t-x)^2 + \left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right)\omega_{a+1}(f,\delta) \qquad (3.9)$$

Burada $x \in [0,a]$ ve $t \geq 0$ dır. Böylece (3.9) ifadesinin her iki tarafına $\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(f,x)$ operatörü uygulanırsa, operatörün lineerliği gereğince

$$\left|\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(f,x)-f(x)\right| \leq \mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(|f(t)-f(x)|,x)$$

$$\leq 6M_f(1+a^2)\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}((t-x)^2,x) + \omega_{a+1}(f,\delta)\left(1+\frac{\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(|t-x|,x)}{\delta}\right)$$

olur. Bu ifadenin sağ tarafının ikinci toplamında süreklilik modülünün içindeki $\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(|t-x|,x)$ ifadesine Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(|t-x|,x) = \sqrt{\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(1,x)}\sqrt{\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}((t-x)^2,x)} = \sqrt{\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}((t-x)^2,x)}$$

olacağından ifade

$$\left|\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(f,x)-f(x)\right|$$

$$\leq 6M_f(1+a^2)\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}((t-x)^2,x)+\omega_{a+1}(f,\delta)\left(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}((t-x)^2,x)}\right)$$

şeklinde yazılabilir. Lemma 3.3. te tanımlanan $\mu_{2,n,c}^{\beta}(x)$ ifadesi göz önüne alındığında ifade

$$\left|\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(f,x)-f(x)\right|\leq 6M_f(1+a^2)\mu_{2,n,c}^{\beta}(x)+\omega_{a+1}(f,\delta)\left(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{\mu_{2,n,c}^{\beta}(x)}\right)$$

şekline dönüşür. Burada $\delta=\sqrt{\mu_{2,n,c}^{\beta}(x)}$ olarak seçilirse,

$$\left|\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(f,x)-f(x)\right|\leq 6M_f(1+a^2)\mu_{2,n,c}^{\beta}(x)+2\omega_{a+1}\left(f,\sqrt{\mu_{2,n,c}^{\beta}(x)}\right)$$

elde edilir. Bu teoremin ispatını tamamlar.

Şimdi de $\mathbb{R}^+$ ağırlıklı yaklaşım için aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.3 Eğer $n>3c$, $\lim_{n\to\infty}\beta_n=0$ ve $f\in C_{\rho_0}(\mathbb{R}^+)$ ise, o taktirde

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(f)-f\right\|_{\rho_0}=0$$

ifadesi doğrudur.

İspat : İspat için Korovkin teoreminin şartlarının sağladığını göstermek yeterlidir.

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(t^r,x)-x^r\right\|_{\rho_0}=0,\ \ r=0,1,2. \qquad (3.10)$$

ifadesini sağladığını göstermek yeterlidir. Önce $r=0$ için bakalım. Bunun için Lemma 3.2 de verilen sonuçlar kullanılırsa,

$$\left\|\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(1,x)-1\right\|_{\rho_0}=\sup_{x\in[0,\infty)}\left|\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(1,x)-1\right|=\sup_{x\in[0,\infty)}|1-1|=0$$

elde edilir.

Şimdi $n > 2c$ için $r = 1$ durumuna bakalım. Bu durumda

$$\left\|\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(t,x) - x\right\|_{\rho_0} = \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{\left|\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(t,x) - x\right|}{1+x^2} = \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{\left|\frac{nx}{(n-2c)(1-\beta_n)} - x\right|}{1+x^2}$$

$$\leq \left|\frac{n}{(n-2c)(1-\beta_n)} - 1\right| \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{x}{1+x^2}$$

$$\leq \frac{n - n + n\beta_n + 2c - 2c\beta_n}{(n-2c)(1-\beta_n)}$$

$$\leq \frac{n\beta_n + 2c(1-\beta_n)}{(n-2c)(1-\beta_n)}$$

$$= \frac{2c}{(n-2c)} + \frac{n\beta_n}{(n-2c)(1-\beta_n)}$$

olarak elde edilir. $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$ olduğundan $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(t,x) - x\right\|_{\rho_0} = 0$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde $n > 3c$ için eşitliği gösterelim.

$$\left\|\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(t^2,x) - x^2\right\|_{\rho_0} = \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{\left|\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(t^2,x) - x^2\right|}{1+x^2}$$

$$= \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{\left|\frac{n^2}{(n-2c)(n-3c)}\left[\frac{x^2}{(1-\beta_n)^2} + \frac{x\left({\beta_n}^2 - 2\beta_n + 2\right)}{n(1-\beta_n)^3}\right] - x^2\right|}{1+x^2}$$

$$\leq \left|\frac{n^2}{(n-2c)(n-3c)(1-\beta_n)^2} - 1\right| \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$+ \left|\frac{n\left({\beta_n}^2 - 2\beta_n + 2\right)}{(n-2c)(n-3c)(1-\beta_n)^3}\right| \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{x}{1+x^2}$$

$$\leq \frac{n^2 - (n-2c)(n-3c)(1-\beta_n)^2}{(n-2c)(n-3c)(1-\beta_n)^2} + \frac{n\left({\beta_n}^2 - 2\beta_n + 2\right)}{(n-2c)(n-3c)(1-\beta_n)^3}$$

olur. $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$ olduğundan $n \to \infty$ limit aldığında

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(t^2,x) - x^2 \right\|_{\rho_0} = 0$$

olur. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Şimdi de aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.4. $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$ olsun. $\lambda > 0$ ve her bir $f \in C_{\rho_0}(\mathbb{R}^+)$ için

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{\left|\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(f,x) - f(x)\right|}{(1+x^2)^{1+\lambda}} = 0$$

ifadesi doğrudur.

İspat : Herhangi $x_0 > 0$ sabiti için, $C_{\rho_0}(\mathbb{R}^+)$ daki norm tanımı $\|f\|_{\rho_0} = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} \frac{|f(x)|}{1+x^2}$ ve mutlak değerin özellikleri kullanılırsa

$$\sup_{x\in[0,\infty)} \frac{\left|\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(f,x) - f(x)\right|}{(1+x^2)^{1+\lambda}} \le \sup_{x\le x_0} \frac{\left|\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(f,x) - f(x)\right|}{(1+x^2)^{1+\lambda}} + \sup_{x\ge x_0} \frac{\left|\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(f,x) - f(x)\right|}{(1+x^2)^{1+\lambda}}$$

$$\le \left\|\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(f) - f\right\|_{C[0,x_0]} + \sup_{x\ge x_0} \frac{\left|\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}\left(\frac{f(1+t^2)}{1+t^2},x\right)\right|}{(1+x^2)^{1+\lambda}} + \sup_{x\ge x_0} \frac{|f(x)|}{(1+x^2)^{1+\lambda}}$$

$$\le \left\|\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(f) - f\right\|_{C[0,x_0]} + \|f\|_{\rho_0} \sup_{x\ge x_0} \frac{\left|\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(1+t^2,x)\right|}{(1+x^2)^{1+\lambda}}$$

$$+ \sup_{x\ge x_0} \frac{|f(x)|}{(1+x^2)^{1+\lambda}}$$

eşitsizliği yazılabilir. Yukarıdaki eşitsizliğin ilk terimi Teorem 3.3. 'den sıfıra gider. Sabit bir $x_0 > 0$ için Lemma 3.2. göz önüne alındığında $\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(1,x)$ ve $\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(t^2,x)$ değerleri yerlerine yazılıp, $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$ olduğu göz önüne alınarak $n \to \infty$ için limite geçilirse

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\ge x_0} \frac{\left|\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(1+t^2,x)\right|}{(1+x^2)^{1+\lambda}} = 0$$

olduğu görülür. Yeteri kadar büyük bir $x_0 > 0$ değeri seçilerek eşitsizlikteki son ifade istenildiği kadar küçültülebilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi (3.3) ile tanımlanan $\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(f,x)$ operatörü için aşağıdaki Voronovskaya tipi teorem verilebilir.

Teorem 3.5. $b > 0$ ve $\beta_n \in (0,1)$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = l \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $x \in (0,b)$ sabit noktasında ikinci basamaktan türevlenebilen her bir $f \in C[0,b]$ için,

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(f,x) - f(x)\right) = x(l+2c)f'(x) + \frac{x(2+xc)}{2}f''(x)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $x \in (0,b)$ de ikinci basamaktan türevlenebilen f fonksiyonununTaylor açılımı

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(t-x)^k = f(x) + f'(x)\,(t-x) + \frac{f''(x)(t-x)^2}{2!} + (t-x)^2\lambda_x(t)$$

şeklindedir. Bu ifadenin son terimindeki $\lambda_x(t)$,

$$\lim_{t\to x} \lambda_x(t) = 0$$

dır. Bu Taylor açılımına $\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}$ operatörü uygulanır ve operatörün lineerliği kullanılırsa

$$\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(f(t);x) = \mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(f(x);x) + \mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(f'(x)(t-x)\,;x) + \mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}\left(\frac{f''(x)(t-x)^2}{2!}\,;x\right)$$
$$+\, \mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(\lambda_x(t)\,(t-x)^2\,;x)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadede gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(f;x) = f(x)\,\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(1;x) + f'(x)\,\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}((t-x)\,;x) + \frac{f''(x)}{2!}\,\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}((t-x)^2\,;x)$$
$$+\, \mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(\lambda_x(t)\,(t-x)^2\,;x)$$

şeklinde yazılabilir. Eşitlikte $\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(1;x)$ ifadesinin değeri yerine yazılırsa

$$\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(f;x) = f(x) + f'(x)\,\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}((t-x)\,;x) + \frac{f''(x)}{2!}\,\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}((t-x)^2\,;x)$$

$$+\,\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(\lambda_x(t)\,(t-x)^2\,;x)$$

elde edilir. $f(x)$ eşitliğin diğer tarafına atılır ve her iki tarafını n ile çarpılırsa

$$n\left[\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(f;x) - f(x)\right] = f'(x)\,n\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}((t-x)\,;x) + \frac{f''(x)}{2!}\,n\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}((t-x)^2\,;x)$$

$$+n\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(\lambda_x(t)\,(t-x)^2\,;x) \qquad (3.11)$$

ifadesi elde edilir. Eşitlikteki son terimde Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$n\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(\lambda_x(t)\,(t-x)^2\,;x) \le \left[n\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}((t-x)^4\,;x)\right]^{\frac{1}{2}}\left[n\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(\lambda_x^2(t)\,;x)\right]^{\frac{1}{2}}$$

olur. Biliyoruz ki $\lambda^2(x;x) = 0$ ve $\lambda^2(\cdot\,;x) \in C_B[0,\infty)$ olduğunda $x \in (0,b)$ için

$$\lim_{n\to\infty} n\,\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(\lambda_x^2(t)\,;x) = \lambda_x^2(x;x) = 0$$

olur. Diğer taraftan Lemma 3.3. den

$$\lim_{n\to\infty} n\,\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}((t-x)^4\,;x) = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} n\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(\lambda_x(t)\,(t-x)^2\,;x) = 0$$

olur. Eğer (3.11) deki eşitlikte $n \to \infty$ limit alınır ve lemma 3.3. teki eşitlikler kullanılırsa,

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(f;x)-f(x)\right]$$

$$= f'(x)\lim_{n\to\infty}\left[\,n\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}((t-x)\,;x)\right]+\frac{f''(x)}{2!}\lim_{n\to\infty}\left[\,n\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}((t-x)^2\,;x)\right]$$

$$+\lim_{n\to\infty}\left[\,n\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(\lambda_x(t)\,(t-x)^2\,;x)\right]$$

olur. Bu ifadede $\mu_{1,n,c}^{\beta}(x)=x(l+2c)$ ve $\mu_{2,n,c}^{\beta}(x)=x(2+xc)$ değerleri yerine yazılırsa

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\mathcal{D}_{n,c}^{\beta_n}(f;x)-f(x)\right]=f'(x)\,x(l+2c)+\frac{x(2+xc)}{2}f''(x)$$

olarak elde edilir.

Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

BÖLÜM 4

4.1. KİNG TİPİ YAKLAŞIM

2003 yılında J.P. King operatörlerin yakınsaklık hızını artırmak için, klasik Bernstein polinomlarını değiştirip yine e_0 ve e_2 test fonksiyonları korunacak şekilde dizisel bir yol önerdi [6]. Daha sonra bir çok araştırmacı bu teoriye bir çok katkıda bulundu. Şimdi (3.3) ile tanımlanan $\mathcal{D}_{n,c}^{\beta}(f,x)$ operatörü için King tipi bir yaklaşım verilecek;

$\beta \in [0,1)$, $x \in [0,\infty)$ ve $f \in C_{\rho_0}(\mathbb{R}^+)$ olsun. Bu durumda King tipi lineer pozitif operatör aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

$$\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}(f,x) = \frac{(n-c)}{c}\sum_{v=1}^{\infty}\omega_\beta(v,nr_n(x))\int_0^\infty p_{n,v-1,c}(t)f(t)dt + e^{-nnr_n(x)}f(0) \quad (4.1)$$

Burada $r_n(x) = \frac{(n-2c)(1-\beta)x}{n}$ dir ve $\omega_\beta(v,nx)$ ve $p_{n,v-1,c}(t)$ ifadeleri sırasıyla (1.1) ve (1.4) de tanımlandığı gibidir. $\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}(f,x)$ operatörü için aşağıdaki Lemmalar verilebilir.

Lemma 4.1. $\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}(f,x)$ operatörü için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}(1,x) = 1\,,$$

$$\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}(t,x) = x\,,$$

$$\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}(t^2,x) = \frac{n-2c}{(n-3c)}x^2 + \frac{(\beta^2-2\beta+2)}{(n-3c)(1-\beta)^2}x \qquad n > 3c \ için,$$

$$\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}(t^3,x) = \frac{nx^2\big((1-\beta^2)(n-4c)x + 3(\beta^2-2\beta+2)\big)}{(1-\beta)^2(n-3c)(n-4c)} + o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad n > 4c \ için,$$

$$\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}(t^4,x) = \frac{n^2x^3\big((1-\beta)^2(n-6c)x + 6(\beta^2-2\beta+2)\big)}{(1-\beta)^2(n-3c)(n-4c)(n-5c)} + o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad n > 5c \ için.$$

İspat : İspat için $\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}$ operatörünün lineerliğinden ve Lemma 3.2. de elde edilen ifadelerden faydalanacağız. Açıktır ki $\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}$ operatörü lineerdir. Yani, a, b sabitleri için $\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}(a+bt,x) = a + bx$ şeklindedir. Buna göre;

$f(t)=1$ ise

$$\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}(1,x) = \frac{(n-c)}{c}\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\omega_\beta\big(\upsilon,nr_n(x)\big)\int_0^\infty p_{n,\upsilon-1,c}(t)dt$$

$$=\frac{n-c}{c}\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\omega_\beta\big(\upsilon,nr_n(x)\big)\frac{c}{n-c}=1$$

olur.

$f(t)=t$ ise

$$\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}(t,x) == \frac{(n-c)}{c}\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\omega_\beta\big(\upsilon,nr_n(x)\big)\int_0^\infty t\,p_{n,\upsilon-1,c}(t)dt$$

$$=\frac{n-c}{c}\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\omega_\beta(\upsilon,nx)\frac{c\upsilon}{(n-c)(n-2c)}=\frac{n\frac{(n-2c)(1-\beta)x}{n}}{(n-2c)(1-\beta)}=x$$

olur.

$f(t)=t^2$ ise

$$\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}(t^2,x)=\frac{n-c}{c}\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\omega_\beta\big(\upsilon,nr_n(x)\big)\int_0^\infty t^2.\,p_{n,\upsilon-1,c}(t)dt$$

$$=\frac{n-c}{c}\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\omega_\beta\big(\upsilon,nr_n(x)\big)\frac{c\upsilon(\upsilon+1)}{(n-c)(n-2c)(n-3c)}$$

$$=\frac{n^2}{(n-2c)(n-3c)}\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\omega_\beta\big(\upsilon,nr_n(x)\big)\frac{\upsilon^2}{n^2}+\frac{n}{(n-2c)(n-3c)}\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\omega_\beta\big(\upsilon,nr_n(x)\big)\frac{\upsilon}{n}$$

$$=\frac{n^2}{(n-2c)(n-3c)}\left[\frac{\left(\frac{(n-2c)(1-\beta)x}{n}\right)^2}{(1-\beta)^2}+\frac{\frac{(n-2c)(1-\beta)x}{n}(\beta^2-2\beta+2)}{n(1-\beta)^3}\right]$$

$$=\frac{(n-2c)x^2}{(n-3c)}+\frac{(\beta^2-2\beta+2)x}{(n-3c)(1-\beta)^2}$$

olur.

$f(t) = t^3$ ise

$$\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}(t^3, x) = \frac{n-c}{c} \sum_{v=1}^{\infty} \omega_\beta\big(v, nr_n(x)\big) \int_0^\infty t^3 . p_{n,v-1,c}(t) dt$$

$$= \frac{n-c}{c} \sum_{v=1}^{\infty} \omega_\beta\big(v, nr_n(x)\big) \frac{cv(v+1)(v+2)}{(n-c)(n-2c)(n-3c)(n-4c)}$$

$$= \frac{n^3}{(n-2c)(n-3c)(n-4c)} \sum_{v=1}^{\infty} \omega_\beta\big(v, nr_n(x)\big) \frac{v^3 + 3v^2 + 2v}{n^3}$$

$$= \frac{n^3 \left(\frac{(n-2c)(1-\beta)x}{n}\right)^3}{(1-\beta)^3 (n-2c)(n-3c)(n-4c)} + \frac{3n^2 \left(\frac{(n-2c)(1-\beta)x}{n}\right)^2 (\beta^2 - 2\beta + 2)}{(1-\beta)^4 (n-2c)(n-3c)(n-4c)}$$

$$= \frac{nx^2\big((1-\beta^2)(n-4c)x + 3(\beta^2 - 2\beta + 2)\big)}{(1-\beta)^2 (n-3c)(n-4c)}$$

olur.

Son olarak $f(t) = t^4$ ise

$$\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}(t^4, x) = \frac{n-c}{c} \sum_{v=1}^{\infty} \omega_\beta\big(v, nr_n(x)\big) \int_0^\infty t^4 . p_{n,v-1,c}(t) dt$$

$$= \frac{n-c}{c} \sum_{v=1}^{\infty} \omega_\beta\big(v, nr_n(x)\big) \frac{cv(v+1)(v+2)(v+3)}{(n-c)(n-2c)(n-3c)(n-4c)(n-5c)}$$

$$= \frac{n^2x^3\big((1-\beta)^2(n-6c)x + 6(\beta^2 - 2\beta + 2)\big)}{(1-\beta)^2 (n-3c)(n-4c)(n-5c)}$$

olarak elde edilir.

Lemma 4.2. Eğer $\mu_{i,n,c}^{*\beta}(t^i,x) = \mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}(t-x,x)$ $i=1,2,4.$ Şeklinde tanımlarsak

$$\mu_{1,n,c}^{*\beta} = \mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}(t-x,x) = 0,$$

$$\mu_{2,n,c}^{*\beta} = \mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}((t-x)^2,x) = \frac{c}{n-3c}x^2 + \frac{(\beta^2-2\beta+2)}{(n-3c)(1-\beta)^2}x, \qquad n>3c,$$

$$\mu_{4,n,c}^{*\beta} = \mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}((t-x)^4,x) = o\left(\frac{1}{n}\right), \qquad n>5c.$$

ifadeleri doğrudur.

İspat : İspat için Lemma 4.1. de elde edilenler kullanılır ve operatörün lineerliğinden yararlanılırsa

$$\mu_{1,n,c}^{*\beta} = \mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}(t-x,x) = \mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}(t,x) - x\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}(1,x) = x - x1 = 0$$

$$\begin{aligned}
\mu_{2,n,c}^{*\beta} = \mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}((t-x)^2,x) &= \mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}(t^2,x) - 2x\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}(t,x) + x^2\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}(1,x) \\
&= \frac{n-2c}{(n-3c)}x^2 + \frac{(\beta^2-2\beta+2)}{(n-3c)(1-\beta)^2}x - 2x.x + x^2 \\
&= \left(\frac{n-2c}{n-3c} - 1\right)x^2 + \frac{(\beta^2-2\beta+2)}{(n-3c)(1-\beta)^2}x \\
&= \left(\frac{n-2c-n+3c}{n-3c}\right)x^2 + \frac{(\beta^2-2\beta+2)}{(n-3c)(1-\beta)^2}x \\
&= \frac{c}{n-3c}x^2 + \frac{(\beta^2-2\beta+2)}{(n-3c)(1-\beta)^2}x
\end{aligned}$$

olur.

$$\mu_{4,n,c}^{*\beta} = \mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}((t-x)^4,x)$$

$$= \mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}(t^4,x) - 4x\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}(t^3,x) + 6x^2\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}(t^2,x) - 4x^3\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}(t,x) + x^4\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}(1,x)$$

$$= \frac{n^2x^3\big((1-\beta)^2(n-6c)x + 6(\beta^2-2\beta+2)\big)}{(1-\beta)^2(n-3c)(n-4c)(n-5c)}$$

$$-4x\frac{nx^2\big((1-\beta^2)(n-4c)x + 3(\beta^2-2\beta+2)\big)}{(1-\beta)^2(n-3c)(n-4c)}$$

$$+6x^2\left(\frac{n-2c}{(n-3c)}x^2 + \frac{(\beta^2-2\beta+2)}{(n-3c)(1-\beta)^2}x\right) - 4x^3x + x^4 + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{n^2x^3\big((1-\beta)^2(n-6c)x + 6(\beta^2-2\beta+2)\big)}{(1-\beta)^2(n-3c)(n-4c)(n-5c)}$$

$$-\frac{4nx^3\big((1-\beta^2)(n-4c)x + 3(\beta^2-2\beta+2)\big)(n-5c)}{(1-\beta)^2(n-3c)(n-4c)(n-5c)}$$

$$+6x^2\left(\frac{\big((n-2c)(1-\beta^2)(n-4c)(n-5c)\big)x^2 + \big((\beta^2-2\beta+2)(n-4c)(n-5c)\big)x}{(1-\beta)^2(n-3c)(n-4c)(n-5c)}\right)$$

$$-3x^4 + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{x^4\beta\big((72n^2c - 8n^3 + 120c^3)(1-\beta)\big) + x^3\big((240c^2 + 12nc)(1-\beta)\big) + 108x^4c^2n(2-\beta+\beta^2)}{(1-\beta)^2(n-3c)(n-4c)(n-5c)}$$

$$= o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Teorem 4.1. $\lim_{n\to\infty}\beta_n = 0$ olmak üzere, $n > 3c$ için $\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}$ operatörü (4.1) ile tanımlanan operatör olsun. $B \subset \mathbb{R}^+$ kompakt kümesi ve $f \in C_{\rho_0}(\mathbb{R}^+)$ için,

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta_n}(f,x) = f(x)$$

Yakınsaması $x \in B$ için düzgündür.

İspat : İspatı Lemma 4.1. ve Korovkin teoreminden yararlanarak yapalım.

Lemma 4.1. den,

$$\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta_n}(1,x) = 1\,,$$

$$\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta_n}(t,x) = x\ \,,$$

$$\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta_n}(t^2,x)=\frac{n-2c}{(n-3c)}x^2+\frac{\left({\beta_n}^2-2\beta_n+2\right)}{(n-3c)(1-\beta)^2}x \quad n>3c,$$

olduklarını biliyoruz. Buna göre,

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta_n}(1,x)=\lim_{n\to\infty}1=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta_n}(t,x)=x\lim_{n\to\infty}1=x\,,$$

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta_n}(t^2,x)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n-2c}{(n-3c)}x^2+\frac{\left({\beta_n}^2-2\beta_n+2\right)}{(n-3c)(1-\beta)^2}x\right]$$

$$=x^2\lim_{n\to\infty}\frac{n-2c}{n-3c}+x\lim_{n\to\infty}\frac{\left({\beta_n}^2-2\beta_n+2\right)}{(n-3c)(1-\beta)^2}=x^2 1+x0=x^2$$

dir. Bu sonuçlar $\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta_n}$ operatörünün Korovkin teoreminin şartlarını sağladığını gösterir. Dolayısıyla,

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta_n}(f,x)=f(x)$$

yakınsaması $x\in B$ için düzgündür.

Teorem 4.2. $f\in C_B(\mathbb{R}^+)$, $0<\beta<1$ ve $n>3$ olmak üzere,

$$\left|\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}(f,x)-f(x)\right|\le C_1\omega_2\left(f,\sqrt{\mu_{2,n,c}^{*\beta}}\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada C_1 pozitif bir sabittir.

İspat : $g\in W_\infty^2$ ve $x\in[0,\infty)$ olsun. g fonksiyonunun Taylor açılımından

$$g(t)=g(x)+g'(x)(t-x)+\int_x^t(t-u)g''(u)du \quad t\in[0,\infty)$$

ifadesi yazılabilir. Bu eşitliğin her tarafına $\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}$ operatörü uygulanır, operatörün lineerliği ve Lemma 4.1. de elde edilen sonuçlar kullanılırsa

$$\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}(g,x)=\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}\left[g(x)+g^{'}(x)(t-x)+\int_{x}^{t}(t-u)g^{''}(u)du\right] \qquad t\in[0,\infty)$$

$$=g(x)\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}(1,x)+g'(x)\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}(t-x,x)+\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}\left(\int_{x}^{t}(t-u)g''(u)du\right)$$

eşitliğinden,

$$\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}(g,x)-g(x)=\mathcal{D}_{n}^{*\beta}\left(\int_{x}^{t}(t-u)g''(u)du\right) \qquad (4.2)$$

elde edilir.

Ayrıca biliyoruz ki $C_B[0,\infty)$ üzerindeki norm tanımından

$$\left|\int_{x}^{t}(t-u)g''(u)du\right|\leq(t-x)^2\|g''\|$$

yazılabilir. Böylece (4.2) ifadesinin her iki tarafın mutlak değeri alındıktan sonra operatör uygulanırsa

$$\left|\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}(g,x)-g(x)\right|=\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}((t-x)^2,x)\|g''(x)\|=\mu_{2,n,c}^{*\beta}\|g''\|$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca

$$\left|\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}(f,x)\right|\leq\|f\|$$

olduğundan

$$\left|\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}(f,x)-f(x)\right|\leq\left|\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}(f-g,x)-(f-g)(x)\right|+\left|\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}(g,x)-g(x)\right|$$

$$\leq 2\|f-g\|+\mu_{2,n,c}^{*\beta}\|g''\|$$

yazılabilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafından $g\in W^2$ ler için infimum alındıktan sonra K-fonksiyoneli için bilinen (2.3) özelliğinden yararlanılırsa

$$\left|\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}(f,x)-f(x)\right|\leq C_1\omega_2\left(f,\sqrt{\mu_{2,n,c}^{*\beta}}\right)$$

olarak elde edilir ve ispat tamamlanmış olur. Şimdi $\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta}$ operatörü için aşağıdaki Voronovskaya tipi teorem verilebilir.

Teorem 4.3. : $b > 0$, $\beta_n \in (0,1)$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} n\beta_n = 0$ olsun. bu durumda $x \in (0, b)$ için, $f \in C[0, b]$ de ikinci basamaktan türevlenebilen f fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta_n}(f,x) - f(x)\right) = x(2 + xc)\frac{f''(x)}{2}$$

ifadesi doğrudur.

İspat : f fonksiyonunun Taylor açılımı

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{f''(x)(t-x)^2}{2!} + (t-x)^2\lambda_x(t)$$

olup,

$$\lim_{t\to x} \lambda_x(t) = 0$$

olduğu bilinmektedir. Şimdi f nin Taylor açılımının her iki tarafına $\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta_n}$ operatörü uygulanıp operatörün lineerliği kullanılırsa

$$\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta_n}(f(t),x) = f(x)\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta_n}(1,x) + f'(x)\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta_n}\big((t-x),x\big) + \frac{f''(x)}{2!}\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta_n}((t-x)^2,x)$$
$$+ \mathcal{D}_{n,c}^{*\beta_n}((t-x)^2\lambda_x(t),x)$$

yazılabilir. Bu ifade düzenlenirse,

$$\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta_n}(f(t),x) = f(x) + \frac{f''(x)}{2}\mu_{2,n,c}^{*\beta_n} + \mathcal{D}_{n,c}^{*\beta_n}((t-x)^2\lambda_x(t),x)$$

şeklinde yazılabilir. Her iki taraf n ile çapılırsa

$$n\left(\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta_n}(f(t),x) - f(x)\right) = \frac{f''(x)}{2}n\mu_{2,n,c}^{*\beta_n} + n\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta_n}((t-x)^2\lambda_x(t),x)$$

olur. Burada son terimin $n \to \infty$ giderken sıfır olduğunu gösterilim.

Son terime Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$n\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta_n}((t-x)^2\lambda_x(t),x) \leq \left[n^2\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta_n}((t-x)^4,x)\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[n\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta_n}(\lambda_x^2(t),x)\right]^{\frac{1}{2}}$$

olur.

Biliyoruz ki,

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{D}_{n,c}^{*\beta_n}(f(t),x) = f(x)$$

yakınsaklığı var. Böylece Teorem 3.5. in ispatı da göz önüne alınarak,

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{D}_{n,c}^{*\beta_n}(\lambda_x^2(t),x) = \lambda_x^2(t) = \lim_{t\to x} \lambda_x^2(t) = 0$$

yazılabilir.

$$\lim_{n\to\infty} n\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta_n}((t-x)^2\lambda_x(t),x) = 0$$

olur. Diğer taraftan Lemma 4.2. den de

$$\lim_{n\to\infty} n\, \mu_{1,n,c}^{*\beta_n} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} n\, \mu_{2,n,c}^{*\beta_n} = x(2+xc),$$

$$\lim_{n\to\infty} n\, \mu_{4,n,c}^{*\beta_n} = 0.$$

olarak elde edilirler. Böylece ifade

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\mathcal{D}_{n,c}^{*\beta_n}(f(t),x) - f(x)\right) = \frac{f''(x)}{2} \lim_{n\to\infty} n\mu_{2,n,c}^{*\beta_n} = x(2+xc)\frac{f''(x)}{2}$$

olur. [1] de Teorem 2.1 i kullanarak ispat tamamlanmış olur.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde bir c parametresine bağlı olarak değiştirilmiş Jain-Baskakov tipi bir operatör ve operatörün değişik formlarının yakınsaklık özellikleri incelenmiş bazı doğrudan sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca operatörün ağırlıklı uzaylarda yaklaşım özelliklerinden bahsedilmiş, düzgün yakınsaklık ve noktasal yakınsaklık durumları incelenmiştir. Bu incelemeler yapılırken okuyucunun konuya hakimiyetinin sağlanabilmesi için olabildiği kadar açılarak verilmiştir. Bu sebepten dolayı sonuç olarak tezin bu konularda araştırma yapan kişiler için bir kaynak oluşturabileceği düşünülmektedir.

KAYNAKÇA

[1] D. Cardenas- Morales, P. Garrancho, I. Rasa, *Asymptotic formulae via a Korovkin-type result*, Abstract and Applied Analysis, Volume 2012, Article ID 217464, 12 pages.

[2] A. Erençin, Başcanbaz Tunca G., *Approximation properties of a class of lineer positive operators in weighted spaces.* Comptes rendusde L'Academire bulgare des Sciences volüme 63 No 10 (2010) 1397-1404.

[3] A. Farcas, *An asymptotic forluma for Jain's operators*, Stud. Univ Babes Bolyai Math.,57 (2012), No. 4, 511-517.

[4] D. Agratini, *On an Approximation process of integral type*. App. Math. Compt. 236 (2014) 195-201.

[5] A.D. Gadjiev, *Theorems of the type of PP Korovkin theorems*, Mat. Zametki 20:5 (1976), 781-786.

[6] A.D. Gadjiev, R.O. Efendiyev, E. Ibikli, *On Korovkin type theorem in the space of locally integrable functions*, Czeshoslov. Math. J. 53:1 (2003), 45-53.

[7] A. Wati, S. Khatoon, *On order of approximation of funetions by generalized Baskakov operators*. İndian J-pure appl. Math. (2004) 35(3), 347-358.

[8] G.C. Jain, *Approximation of functions by a new class of linear operators* J. Aust. Math. Soc. 13:3, (1972) 271-276.

[9] V. N. Mishra, P. Patel, *Some approximation properties of Modified Jain-Beta operators*. Journal of Cal of Variations Vol. 2013 ID489249.

[10] J.P. King, *Pozitive linear operators which preserve x^2*, Acta Math. Hung. 99:3 (2003), 203-208.

[11] P. Patel, V.N. Mishra, *Jain-Baskakov Operators and its Different Generalization*, Acta Math Vietman DOI 10.1007/s40306-014-0077-9.

[12] P.P. Korovkin, *On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 90 (1953), 961-964.