KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

NON-LİNEER İNTEGRAL OPERATÖR AİLESİNİN NOKTASAL YAKINSAKLIĞI

Gamzenur SERİN

OCAK 2020

Matematik Anabilim Dalı'nda Gamzenur SERİN tarafından hazırlanan NON-LİNEER İNTEGRAL OPERATÖR AİLESİNİN NOKTASAL YAKINSAKLIĞI (POINTWISE CONVERGENCE OF NON-LINEAR INTEGRAL OPERATOR FAMILY) adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Ali OLGUN

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Dr. Öğr. Üyesi Sevgi ESEN ALMALI

Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan	:	Dr. Öğr. Üyesi Başar YILMAZ
Üye (Danışman)	:	Dr. Öğr. Üyesi Sevgi ESEN ALMALI
Üye	:	Dr. Öğr. Üyesi Gümrah UYSAL

29/01/2020

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Recep ÇALIN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

NON-LİNEER İNTEGRAL OPERATÖR AİLESİNİN NOKTASAL YAKINSAKLIĞI

SERİN, Gamzenur

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Sevgi ESEN ALMALI

Ocak 2020, 30 sayfa

Bu tezde, içerisinde yaklaşılan fonksiyonun üstel non-lineerliğini bulunduran operatör göz önüne alınmış ve $L_p(-\infty,\infty),\ 1<p<\infty$ ve $L_1(a,b)$ uzaylarından olan f fonksiyonuna p-Lebesgue noktalarındaki yakınsaklıkları çalışılmıştır. İkinci bölümde konuyla ilgili temel bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde ise esas sonuçlar detaylı olarak ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Non-lineer integral operatör, noktasal yakınsama, p-Lebesgue noktası.

ABSTRACT

POINTWISE CONVERGENCE OF THE NON-LINEAR INTEGRAL OPERATOR FAMILY

SERİN, Gamzenur

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics,M. Sc. Thesis

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Sevgi ESEN ALMALI

January 2020, 30 Pages

In this thesis, the operators containing power non-linearity with respect to the approximating function f are considered and the convergences at p-Lebesgue points of the function f which belongs to one of the spaces $L_p(-\infty,\infty),\ 1 < p < \infty$ and $L_1(a,b)$ are studied. In the second section, basic information is given. In the third section, the main results are proved in detail.

Key Words: Non-linear integral operator, pointwise convergence, p-Lebesgue point.

TEŞEKKÜR

Bu süreçte hiçbir bilgisini ve birikimini esirgemeyen ve beni yönlendiren sevgili danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Sevgi ESEN ALMALI'ya, buraya kadar gelmemi sağlayan başta İstatistik Bölümü ve Matematik Bölümü hocalarıma, tez aşamasında çalışma disiplinini örnek aldığım ve benden manevi desteğini esirgemeyen Sayın Prof. Dr. Yüksel BAYRAKTAR'a, Sayın Dr. Öğr. Üyesi Gümrah UYSAL'a, özverili şekilde çalışmamı sağlayan, maddi manevi bana destek veren ve her zaman yanımda olan aileme, teşekkür ederim.

SİMGELER DİZİNİ

R	: Reel sayılar kümesi
X	: Belirli bir fonksiyon uzayı
$\| \|_X$	: X üzerinde norm
L	: Lineer operatör
$K_\lambda(t)$	: Çekirdek ailesi
$\bigvee_a^b(f)$	: f fonksiyonunun, $[a,b]$ aralığı üzerindeki toplam salınımı

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET iii

ABSTRACT iv

TEŞEKKÜR v

SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ vi

İÇİNDEKİLER DİZİNİ vii

1. GİRİŞ 1

1.1. Kaynak Özetleri 2

1.2. Çalışmanın Amacı 2

2. TEMEL BİLGİLER 3

3. NON-LİNEER İNTEGRAL OPERATÖR AİLESİNİN NOKTASAL YAKINSAKLIĞI 7

4. TARTIŞMA 28

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 29

KAYNAKLAR 30

GİRİŞ

İntegral operatörler teorisi matematikte olduğu kadar mühendislikte de geniş uygulama alanına sahip bir teoridir. Bu teoride en çok kullanılan operatörler deltasal çekirdekli integral operatörlerdir (bkz: Gadjiev, 1998). Bu tip çekirdeklere Picard, Gauss-Weierstrass ve Poisson çekirdekleri örnek olarak verilebilir. Konuyla alakalı geniş bilgi (Butzer ve Nessel, 1971) kaynağında mevcuttur. Lineer integral teorisi için giriş ve başyapıt niteliğinde olan bazı çalışmalar Lebesgue (1909) ve Romanovskiĭ (1932) olarak verilebilir. Devam eden süreç bu çalışmaların doğrultusundadır. Bu çalışmalardan bazıları farklı fonksiyon uzayları ve farklı yaklaşım konseptleri altında Natanson (1960), Taberski (1962), Mamedov (1963), Esen (2002) ve Karslı (2006, 2010) tarafından sunulmuştur. Musielak (1983) ise teoriyi non-lineer integral teorisine çekirdek üzerine konulan bir Lipschitz koşulu yardımıyla genişletmiştir. Detaylı bilgi (Bardaro vd., 2003) kaynağında mevcuttur. Bu tezde içerisinde fonksiyonun üstel non-lineerliği bulunan ve Esen-Almalı (2017) tarafından incelenen operatör göz önüne alınmış ve $L_p(-\infty,\infty)$ ve $L_1(a,b)$ uzaylarından olan f fonksiyonuna p-Lebesgue noktalarındaki yakınsaklığı çalışılmıştır. Bu operatörlerin son yıllarda sonsuz toplam durumu Esen-Almalı (2017a), genelleştirilmiş Lebesgue noktası yakınsaklığı ve yakınsaklık hızı Esen-Almalı vd. (2017), ağırlıklı noktasal yaklaşımı Uysal (2018) ve iki katlı bazı genellemeleri Özalp-Güller (2019) tarafından çalışılmıştır.

1.1. Kaynak Özetleri

Bu tezde temel bilgiler için Rudin (1987)'in "Real and Complex Analysis", Hacısalihoğlu ve Haciyev (1995)'in "Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı", Natanson (1964)'un "Theory of Functions of a Real Variable Vol. 1" ve Aliprantis ve Burkinshaw (1998)'ın "Principles of Real Analysis", Mamedov (1963)'un "On the order of convergence of m-singular integrals at generalized Lebesgue points and in the space" ve Gadjiev (1998)'in "Deltasal Çekirdekli İntegral Operatörler Ders Notları" adlı eserlerinden yararlanılmıştır. Temel çalışmamız ise Esen-Almalı (2017b)'nın "On approximation properties for non-linear integral operators" adlı eserine dayanmaktadır.

1.2. Çalışmanın Amacı

Λ pozitif reel sayılardan (parametrelerden) oluşan bir indis kümesi olsun. Ayrıca, $\lambda \in \Lambda$ olmak üzere, $K_{\lambda,m}(x,t)$ λ'ya bağlı ve belirli şartları sağlayan bir çekirdekler ailesi olsun. Bu çalışmanın asıl amacı Esen-Almalı (2017b) tarafından çalışılan

$$L_\lambda(f;x) = \sum_{m=1}^{N} \int_a^b f^m(t) K_{\lambda,m}(x,t)dt\,,\ x \in (a,b) \qquad (1.1)$$

şeklindeki non-lineer integral operatör ailesinin noktasal yakınsaklığını elde etmektir. Bu tezde (1.1) operatör ailesinin $L_p(-\infty,\infty),\ 1 < p < \infty$ ve $L_1(a,b)$ uzaylarından olan f fonksiyonuna p-Lebesgue noktalarındaki yakınsaklığı çalışılmıştır. Burada, $N \geq 1$ sayısı keyfi bir doğal sayıdır ve (a,b) ise R'de keyfi bir sınırlı alt aralıktır.

2. TEMEL BİLGİLER

Bu kesimde temel tanımlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1. (Lineer Pozitif Operatör)

A ve B iki fonksiyon uzayı olsun. A' dan alınan bir f fonksiyonunu B'de bir g fonksiyonuna eşleyen **L** kuralına operatör denir. $\mathbf{L}: A \rightarrow B$ olmak üzere $\mathbf{L}(f;x) = g(x)$ ile gösterilir. $\alpha, \beta \in R$ ve $f, h \in A$ olmak üzere eğer

$$\mathbf{L}(\alpha f + \beta h; x) = \alpha \mathbf{L}(f;x) + \beta \mathbf{L}(h;x)$$

şartı sağlanıyorsa **L** bir lineer operatör belirtir. Öte yandan, $A^{+} = \{f \in A, f(x) \geq 0\}$ olmak üzere **L,** A^{+}' dan alınan herhangi bir f fonksiyonunu pozitif bir fonksiyona eşliyorsa bu durumda **L** bir lineer pozitif operatör belirtir (Hacısalihoğlu ve Haciyev, 1995).

Uyarı 2.1. Bu tanıma göre (1.1) operatörlerinin $N = 1$ için lineer ve $N > 1$ için ise lineer olmadığı açıktır.

Tanım 2.2. (L_p Uzayı)

$1 \leq p < \infty$ olsun. p-inci kuvvetten Lebesgue anlamında integrallenebilir fonksiyonlar, D ile R veya sınırlı alt kümesi gösterilmek suretiyle, D üzerinde Lebesgue anlamında ölçülebilir ve

$$\int_D |f(x)|^p dx < \infty$$

şartını gerçekleyen reel değerli f fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonlardan oluşan kümeye p-inci kuvvetten Lebesgue anlamında integrallenebilir fonksiyonlar uzayı (kısaca L_p uzayı) denir ve $L_p(D)$ ile gösterilir. Bu uzayda

$$\|f\|_{L_p(D)} = \left(\int_D |f(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

ifadesi norm belirtir (Rudin, 1987).

Teorem 2.1. (Fubini Teoremi)

X ile Y uzaylarının ölçüleri sırasıyla μ ve ϑ ile gösterilmek üzere $f: X \times Y \to R$, $\mu \times \vartheta$ ölçüsüne göre integrallenebilir olsun. Bu durumda $\int_Y f(x,y)d\vartheta(y)$ ve $\int_X f(x,y)d\mu(x)$ integralleri mevcuttur ve

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \times \vartheta) = \int_X \left[\int_Y f(x,y)d\vartheta(y)\right] d\mu(x) = \int_Y \left[\int_X f(x,y)d\mu(x)\right] d\vartheta(y)$$

gerçeklenir (Aliprantis ve Burkinshaw, 1998).

Tanım 2.3. (Genelleştirilmiş Minkowsky Eşitsizliği)

g iki değişkenli fonksiyonu $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$ üzerinde tanımlı ve (Lebesgue anlamında) ölçülebilir bir fonksiyon ve $p \geq 1$ olmak üzere

$$\left(\int_\alpha^\beta \left|\int_\alpha^\beta g(x,y)dy\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_\alpha^\beta \left(\int_\alpha^\beta |g(x,y)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} dy$$

eşitsizliğine genelleştirilmiş Minkowsky Eşitsizliği veya Minkowsky İntegral Eşitsizliği denir. Sembolik olarak bu eşitsizlik

$$\left\|\int g\right\|_{L_p} \leq \int \|g\|_{L_p}$$

durumunu ifade eder (Gadjiev, 1998).

Teorem 2.2. f, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde Lebesgue integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad x \in [a,b]$$

şeklinde tanımlı belirsiz integral fonksiyonunun türevi $[a,b]$ üzerinde hemen hemen her yerde $f(x)$ fonksiyonuna eşittir (Natanson, 1964).

Tanım 2.4. (*p*-Lebesgue Noktası) $D \subset \mathbb{R}$ sınırlı aralığı üzerinde $f \in L_P(D), 1 < p < \infty$ olmak üzere

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{h} \int_0^{\pm h} |(f(t+x) - f(x)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

eşitliğini sağlayan *x* noktasına f fonksiyonunun *p*-Lebesgue noktası denir (Mamedov, 1963).

Teorem 2.3. $f \in L_1([x,y])$ olmak üzere $[x,y] \subset \mathbb{R}$ aralığındaki hemen hemen her nokta f fonksiyonunun bir Lebesgue noktasıdır (Natanson, 1964).

Tanım 2.5. (Stieltjes İntegrali)

Kabul olarak f ve g fonksiyonları $[a,b]$ üzerinde tanımlı ve sınırlı iki fonksiyon olsun. $[a,b]$ aralığının keyfi bir P parçalanması aşağıdaki biçimde verilsin:

$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots . < x_n = b$

$k = 1, 2, 3, \ldots, n$ için $\xi_k \epsilon [x_k - x_{k-1}]$ noktası seçilsin. $S(f,g,P)$ toplamı

$$S(f,g,P) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})]$$

şeklinde tanımlanır. Eğer bu toplam $\|P\| \to 0$ iken (keyfi parçalanmaların normu sıfıra yaklaşırken) ξ_k noktalarının seçilmesinden ve parçalanmanın düzgün olup olmamasına bağlı olmaksızın

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \|P\| \to 0}} S(f,g,P) = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \|P\| \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] = l$$

sonlu limitine yaklaşıyorsa bu limite f'nin g'ye göre Stieltjes integrali denir ve $\int_a^b f(x)dg(x)$ ile gösterilir. Özel halde $g(x) = x$ için Riemann İntegrali elde edilir (Natanson, 1964).

Teorem 2.4. (Hölder Eşitsizliği) $1 < p < \infty$ ve herhangi bir p reel sayısı için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Varsayalım ki $f \in L_p(R)$ ve $h \in L_q(R)$ olsun. Bu durumda $fh \in L_1(R)$ olur ve

$$\|fh\|_{L_1(R)} \leq \|f\|_{L_p(R)} \|h\|_{L_q(R)}$$

eşitsizliği sağlanır (Rudin, 1987).

Tanım 2.6. (Sınırlı Salınımlı Fonksiyon) g fonksiyonu $[\alpha_1, \alpha_2]$ aralığı üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. $B = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$, $[\alpha_1, \alpha_2]$ aralığının bir parçalanması ve $\mathcal{B}$ de bu aralığın tüm B parçalanmalarının kümesi olsun. g fonksiyonunun, $[\alpha_1, \alpha_2]$ aralığı üzerindeki toplam salınımı

$$\bigvee_{\alpha_1}^{\alpha_1}(g) = \sup_{B\epsilon\mathcal{B}} \sum_{k=1}^{n} |g(\gamma_1) - g(\gamma_{k-1})|$$

genişletilmiş reel sayısıdır. Ayrıca

$$\bigvee_{\alpha_1}^{\alpha_1}(g) < \infty$$

ise g fonksiyonu, $[\alpha_1, \alpha_2]$ aralığı üzerinde sınırlı salınımlıdır denir (Natanson, 1964).

Tanım 2.7. (Singüler İntegral) $K_n(t, x)$ herhangi bir çekirdek olduğunda

$$g_n(x) = \int_a^b K_n(t, x) g(t) dt$$

biçiminde olan integral singüler integral adını alır (Neri, 1971).

Teorem 2.5. I uç noktaları a ve b olan açık ya da kapalı bir aralık olsun. $f: I \to R$ ve $g: I \to R$ fonksiyonları $[a, b]$ üzerinde sınırlı salınımlı fonksiyonlar olsun. Ayrıca herhangi bir $x \in [a, b]$ noktası f ve g için ortak süreksizlik noktası olmasın. Eğer f ve $g,\ x = a$ ve $x = b$ noktalarında sürekli ise bu takdirde

$$\int_a^b f(t) dg(t) + \int_a^b g(t) df(t) = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

gerçeklenir (Natanson, 1964).

Önerme 2.1. Kabul edilsin ki a, b pozitif reel sayılar olsun. Bu takdirde
$(a + b)^p \leq 2^p(a^p + b^p), \quad 1 < p < \infty$
sağlanır (Rudin, 1987).

3. NON-LİNEER İNTEGRAL OPERATÖR AİLESİNİN NOKTASAL YAKINSAKLIĞI

Λ, pozitif λ reel sayılardan (parametrelerden) oluşan bir indis kümesi olsun. Ayrıca, $\lambda \in \Lambda$ olmak üzere, $K_{\lambda,m}(x,t)$ λ'ya bağlı ve belirli şartları sağlayan bir çekirdekler ailesi olsun. Bu çalışmanın asıl amacı (1.1) ile verilen

$$L_\lambda(f;x) = \sum_{m=1}^{N} \int_a^b f^m(t) K_{\lambda,m}(x,t)dt\,,\; x \in (a,b)$$

şeklindeki non-lineer integral operatör ailesinin noktasal yakınsaklığını elde etmektir. Bu kesimde (1.1) ailesinin $L_p(-\infty,\infty), 1 < p < \infty$ ve $L_1(a,b)$ uzaylarından olan f fonksiyonuna p-Lebesgue noktalarındaki yakınsaklığı çalışılmıştır. Burada, $N \geq 1$ sayısı keyfi bir doğal sayıdır. I, R'nin sınırlı ya da sınırsız bir alt aralığı olsun. Belirtelim ki bu operatör ailesinin uygulandığı fonksiyon I üzerinde sınırlı olduğu durumda $L_p(I)$'dan $L_p(I)$'ya iyi tanımlı olduğu Fubini teoremi ve genelleştirilmiş Minkowski eşitsizliği yardımıyla kolaylıkla görülebilir.

Esen-Almalı (2017b) tarafından verilen sınıf tanımı şöyledir:

Tanım 3.1. (A Sınıfı): $m = 1,2,\dots,N$ olsun. $(\mathrm{K}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $K_{\lambda,m}(x,t)$**:**$R \times R \to R_0^+$ fonksiyonlarının bir ailesi olmak üzere eğer $K_{\lambda,m}(x,t)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa "A sınıfına aittir" denir:

a) Her bir m için $K_{\lambda,m}(x,t)$, $\lambda \in \Lambda$ olmak üzere (a,b) aralığındaki her t için tanımlı negatif olmayan bir fonksiyondur.

b) Her bir m için $K_{\lambda,m}(x,t)$ fonksiyonu t değişkenine göre $[a,x]$ aralığında herhangi sabit bir x için azalmayan ve t değişkenine göre herhangi sabit bir x için $[x,b]$ aralığında artmayandır.

c) Her bir m için ve herhangi sabit x için

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b K_{\lambda,m}(x,t)dt = C_m$$

dir. Burada C_m negatif olmayan sonlu reel sayılardır.

d) Her bir m için $x \neq y$ olmak üzere

$$\lim_{\lambda \to \infty} K_{\lambda,m}(x,y) = 0$$

dir.

Bu tanımda (a,b) R'de keyfi bir sınırlı alt aralık veya $(a,b) = (-\infty, \infty)$ olarak göz önüne alınmıştır.

Bu kısımda $f \in L_1(a,b)$ fonksiyonlarına pozitif çekirdekli non-lineer integral operatörler ailesinin yakınsaklığı incelenmiştir.

Teorem 3.1. Kabul edelim ki (a,b) R'de keyfi bir sınırlı alt aralık, $f \in L_1(a,b)$ ve f, (a,b) aralığında sınırlı olsun. Eğer $K_{\lambda,m}(x,t)$, A sınıfına ait ise bu takdirde (1.1) ile tanımlı $L_\lambda(f;x)$ operatörü için $x \in (a,b)$ f'nin Lebesgue noktası olduğunda

$$\lim_{\lambda \to \infty} L_\lambda(f;x) = \sum_{m=1}^{N} C_m f^m(x)$$

gerçeklenir (Esen-Almalı, 2017b).

İspat.

$$L_\lambda(f;x) = \sum_{m=1}^{N} \int_a^b f^m(t) K_{\lambda,m}(x,t)dt$$

ifadesinin her iki tarafından

$$\sum_{m=1}^{N} C_m f^m(x)$$

ifadesi çıkarılıp ve mutlak değer içine alınırsa

$$\left| L_\lambda(f;x) - \sum_{m=1}^{N} C_m f^m(x) \right|$$

$$\leq \sum_{m=1}^{N} \int_a^b |f^m(t) - f^m(x)| \, K_{\lambda,m}(x,t)dt + |f^m(x)| \left| \sum_{m=1}^{N} \left[\int_a^b K_{\lambda,m}(x,t)dt - C_m \right] \right|$$

$$= I_1 + I_2$$

olur. Son eşitsizliğin sağ tarafının $\lambda \to \infty$ iken sıfıra gittiğini göstermek yeterlidir. I_2 ifadesi (c) şartından dolayı sıfıra gitmektedir. Şimdi I_1'in sıfıra gittiğini gösterelim.

Hipoteze göre x, f'nin bir Lebesgue noktasıdır. O halde Lebesgue noktası tanımından her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ bulunabilir ki $0 < h \leq \delta$ için

$$\int_{x}^{x\pm h} |f(t) - f(x)| dt < \varepsilon\, h$$

eşitsizliği sağlanır.

O halde bu $\delta > 0$ için I_1 integrali şu şekilde yazılabilir:

$$I_1 = \sum_{m=1}^{N} \left[\int_{a}^{x-\delta} + \int_{x-\delta}^{x} + \int_{x}^{x+\delta} + \int_{x+\delta}^{b} \right] |f^m(t) - f^m(x)| K_{\lambda,m}(x,t) dt$$

$=I_{11} + I_{12} + I_{13} + I_{14}$.

Her bir integralin sıfıra gittiğini gösterelim.

Önce I_{11}'i hesaplayalım:

$$I_{11} = \sum_{m=1}^{N} \int_{a}^{x-\delta} |f^m(t) - f^m(x)|\, K_{\lambda,m}(x,t) dt$$

ifadesi (b) şartından $K_{\lambda,m}(x,t)$ monoton artan olduğundan en büyük değerini üst sınırda alır. Üçgen eşitsizliğinden

$$I_{11} \leq \sum_{m=1}^{N} K_{\lambda,m}(x, x-\delta) \int_{a}^{x-\delta} |f^m(t)| dt + \int_{a}^{x-\delta} |f^m(x)|\, K_{\lambda,m}(x,t) dt$$

$$I_{11} \leq \sum_{m=1}^{N} \left\{ K_{\lambda,m}(x, x-\delta) \int_{a}^{x-\delta} |f^m(t)| dt + |f^m(x)| \int_{a}^{x-\delta} K_{\lambda,m}(x,t) dt \right\}$$

ve

$$I_{11} \leq \sum_{m=1}^{N} \left\{ K_{\lambda,m}(x, x-\delta) \|f^m(t)\|_{L_1(a,b)} + |f^m(x)|(b-a) \right\}$$

bulunur. Böylece $I_{11} \to 0$ olduğu görülür.

Şimdi I_{14} ü hesaplayalım:

$$I_{14} = \sum_{m=1}^{N} \int_{x+\delta}^{b} |f^m(t) - f^m(x)|\, K_{\lambda,m}(x,t) dt$$

(b) şartından $K_{\lambda,m}(x,t)$dt monoton azalan olduğundan en küçük değerini alt sınırda alır. Üçgen eşitsizliğinden

$$I_{14} \leq \sum_{m=1}^{N} K_{\lambda,m}(x,x+\delta) \int_{x+\delta}^{b} |f^m(t)|dt + \int_{x+\delta}^{b} |f^m(x)|\, K_{\lambda,m}(x,t)dt$$

$$I_{14} \leq \sum_{m=1}^{N} \left\{ K_{\lambda,m}(x,x+\delta) \int_{x+\delta}^{b} |f^m(t)|dt + |f^m(x)| \int_{x+\delta}^{b} K_{\lambda,m}(x,t)dt \right\}$$

ve

$$I_{14} \leq \sum_{m=1}^{N} \left\{ K_{\lambda,m}(x,x+\delta)\|f^m\|_{L_1(a,b)} + |f^m(x)|(b-a) \right\}$$

bulunur. Böylece $I_{14} \to 0$ olduğu görülür.

Şimdi I_{13}'ü hesaplayalım:

$$I_{13} = \sum_{m=1}^{N} \int_{x}^{x+\delta} |f^m(t) - f^m(x)|\, K_{\lambda,m}(x,t)dt$$

biçimindeki integralde hipoteze göre x, f'nin bir Lebesgue noktasıdır. O halde Lebesgue noktası tanımından her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ bulunabilir ki $0 < h \leq \delta$ için

$$\int_{x}^{x+h} |f(t) - f(x)|dt < \varepsilon\, h$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi bir F fonksiyonu tanımlayalım.

$$F(t) = \int_{x}^{t} |f(u) - f(x)|du$$

olsun. $\delta > 0$ olmak üzere $(u - x) \leq \delta$

$$dF(t) = |f(u) - f(x)|du$$

$$F(t) \leq \varepsilon(u - x)$$

olur. f sınırlı olduğundan

$$|f^m(u) - f^m(x)| \leq M|f(u) - f(x)|$$

olacak şekilde $M > 0$ mevcuttur.

$$I_{13} \leq M \sum_{m=1}^{N} \int_{x}^{x+\delta} K_{\lambda,m}(x,t)dF(t)$$

eşitsizliğin sağ kısmındaki integrale kısmi integrasyon uygulansın:

$K_{\lambda,m}(x,t)$=u ve $dF(t) = dv$ olsun.

$K_{\lambda,m}(x,t)$ azalan olduğundan -$K_{\lambda,m}(x,t)$ artandır.

$$I_{13} \leq M \sum_{m=1}^{N} \left(K_{\lambda,m}(x,t)F(t) \Big|_{X}^{X+\delta} + \int_{x}^{x+\delta} F(t)d(-K_{\lambda,m}(x,t)) \right)$$

$$I_{13} \leq M \sum_{m=1}^{N} \left\{ \left[K_{\lambda,m}(x,x+\delta)F(x+\delta) - K_{\lambda,m}(x,x)F(x)\right] + \int_{x}^{x+\delta} F(t)d(-K_{\lambda,m}(x,t)) \right\}$$

$$I_{13} \leq M \sum_{m=1}^{N} \left\{ \left[\left(K_{\lambda,m}(x,x+\delta)F(x+\delta)\right) + \int_{x}^{x+\delta} F(t)d(-K_{\lambda,m}(x,t)) \right] \right\}$$

$$\int_{x}^{x+\delta} F(t)d(-K_{\lambda,m}(x,t)) \leq \varepsilon \int_{x}^{x+\delta} (t-x)\, d(-K_{\lambda,m}(x,t))$$

ifadesine tekrar kısmi integrasyon uygulansın:

$(t-x) = u$ ve $d\left(-K_{\lambda,m}(x,t)\right) = dv$ olsun.

$$I_{13} \leq M \sum_{m=1}^{N} \left\{ \left(K_{\lambda,m}(x,x+\delta)F(x+\delta)\right) + \varepsilon \left[(t-x)\left(-K_{\lambda,m}(x,t)\right) \Big|_{X}^{X+\delta} + \int_{x}^{x+\delta} K_{\lambda,m}(x,t)dt \right] \right\}$$

$$I_{13} \leq M \sum_{m=1}^{N} \left\{ \left(K_{\lambda,m}(x,x+\delta)F(x+\delta)\right) + \varepsilon \left[(x+\delta-x)\left(-K_{\lambda,m}(x,x+\delta)\right) - (x-x)\left(-K_{\lambda,m}(x,x)\right) + \int_{x}^{x+\delta} K_{\lambda,m}(x,t)dt \right] \right\}$$

$$I_{13} \leq M \sum_{m=1}^{N} \left\{ \left(\varepsilon K_{\lambda,m}(x, x+\delta) F(x+\delta) \right) + \left[\varepsilon\delta \left(-K_{\lambda,m}(x, x+\delta) \right) + \varepsilon \int_{x}^{x+\delta} K_{\lambda,m}(x,t)dt \right] \right\}.$$

$F(x+\delta)$ fonksiyonu için $F(t) \leq \varepsilon(t-x)$ ifadesinden

$F(x+\delta) \leq \varepsilon(x+\delta-x) = \varepsilon\delta$ elde edilir.

$$I_{13} \leq M \sum_{m=1}^{N} \left(K_{\lambda,m}(x, x+\delta)\varepsilon\delta - \varepsilon\delta \left(K_{\lambda,m}(x, x+\delta) \right) + \varepsilon \int_{x}^{x+\delta} K_{\lambda,m}(x,t)dt \right)$$

$$I_{13} \leq \varepsilon M \sum_{m=1}^{N} \int_{x}^{x+\delta} K_{\lambda,m}(x,t)dt \leq \varepsilon M \sum_{m=1}^{N} \int_{a}^{b} K_{\lambda,m}(x,t)dt$$

bulunur. Böylece $I_{13} \to 0$ olduğu görülür.

Şimdi de I_{12}'yi hesaplayalım:

$$I_{12} = \sum_{m=1}^{N} \int_{x-\delta}^{x} |f^m(t) - f^m(x)| \, K_{\lambda,m}(x,t)dt$$

biçimindeki integralde hipoteze göre x, f'nin bir Lebesgue noktasıdır. O halde Lebesgue noktası tanımından her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ bulunabilir ki $0 < h \leq \delta$ için

$$\int_{x-h}^{x} |f(t) - f(x)|dt < \varepsilon h$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi bir G fonksiyonu tanımlayalım.

$$G(t) = \int_{t}^{x} |f(u) - f(x)|du$$

olsun. $\delta > 0$ olmak üzere $(x-u) \leq \delta$

$dG(t) = -|f(u) - f(x)|du$

$G(t) \leq \varepsilon(x-u)$

dir. f sınırlı olduğundan

$|f^m(u) - f^m(x)| \leq M|f(u) - f(x)|$

olacak şekilde $M > 0$ mevcuttur.

$$I_{12} \leq M \sum_{m=1}^{N} \int_{x-\delta}^{x} \left(-K_{\lambda,m}(x,t)\right) dG(t)$$

eşitsizliğin sağ kısmındaki integrale kısmi integrasyon uygulansın:

$K_{\lambda,m}(x,t)$=u ve $dG(t) = dv$ olsun.

$$I_{12} \leq M \sum_{m=1}^{N} -\left\{\left[K_{\lambda,m}(x,t)G(t)\Big|_{X-\delta}^{X}\right] - \int_{x-\delta}^{x} G(t)dK_{\lambda,m}(x,t)\right\}$$

$$I_{12} \leq M \sum_{m=1}^{N} -\left\{\left[K_{\lambda,m}(x,x)G(x) - K_{\lambda,m}(x,x-\delta)G(x-\delta)\right]\right.$$
$$\left. - \int_{x-\delta}^{x} G(t)d\,K_{\lambda,m}(x,t)\right\}$$

$$I_{12} \leq M \sum_{m=1}^{N} \left[\left(K_{\lambda,m}(x,x-\delta)G(x-\delta) + \int_{x-\delta}^{x} G(t)dK_{\lambda,m}(x,t)\right)\right].$$

$$\int_{x-\delta}^{x} G(t)dK_{\lambda,m}(x,t) \leq \int_{x-\delta}^{x} (x-t)\,dK_{\lambda,m}(x,t)$$

olduğundan tekrar kısmi integrasyon uygulansın:

$(t-x) = u$ ve $d\left(-K_{\lambda,m}(x,t)\right) = dv$ olsun. Bu durumda

$$I_{12} \leq M \sum_{m=1}^{N} \left\{\left(K_{\lambda,m}(x,x-\delta)G(x-\delta)\right)\right.$$
$$\left. + \varepsilon\left[(x-t)\left(K_{\lambda,m}(x,t)\right)\Big|_{X-\delta}^{X} + \int_{x-\delta}^{x} K_{\lambda,m}(x,t)dt\right]\right\}$$

elde edilir. $G(t) \leq \varepsilon(x-t)$ ifadesinden

$$G(x-\delta) \leq \varepsilon(x-x+\delta) = \varepsilon\delta$$

bulunur. Gerekli hesaplamalar yürütülürse

$$I_{12} \leq \varepsilon M \sum_{m=1}^{N} \int_{x-\delta}^{x} K_{\lambda,m}(x,t)dt \leq \varepsilon M \sum_{m=1}^{N} \int_{a}^{b} K_{\lambda,m}(x,t)dt$$

bulunur. Böylece $I_{12} \to 0$ olduğu görülür.

Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Ayrıca bu teoremde $a = \infty$, $b = -\infty$ alınırsa aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3. 2. $f \in L_1(R)$ ve f, R üzerinde sınırlı olsun. $K_{\lambda,m}(x,t)$, A sınıfına ait ise ve her $m = 1, 2, \dots, N$ olmak üzere her $\gamma > 0$ için

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\infty}^{x-\gamma} K_{\lambda,m}(x,t)dt = 0 \tag{3.1}$$

ve

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{x+\gamma}^{\infty} K_{\lambda,m}(x,t)dt = 0 \tag{3.2}$$

özellikleri sağlanıyor ise bu takdirde (1.1) ile tanımlı $L_\lambda(f;x)$ operatörü için f'nin her $x \in R$ Lebesgue noktasında

$$\lim_{\lambda\to\infty} L_\lambda(f;x) = \sum_{m=1}^{N} C_m f^m(x)$$

olur (Esen-Almalı, 2017b).

İspat.

$$L_\lambda(f,x) = \sum_{m=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} f^m(t)\, K_{\lambda,m}(x,t)dt$$

eşitliğin her iki tarafından

$$\sum_{m=1}^{N} C_m f^m(x)$$

ifadesini çıkarıp ve mutlak değer ile ifade büyütülürse

$$\left| L_\lambda(f,x) - \sum_{m=1}^{N} C_m f^m(x) \right|$$

$$\leq \sum_{m=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} |f^m(t) - f^m(x)|\, K_{\lambda,m}(x,t)dt + |f^m(x)| \left| \sum_{m=1}^{N} \left[\int_{-\infty}^{\infty} K_{\lambda,m}(x,t)dt - C_m \right] \right|$$

$$= A_1 + A_2$$

olur. Son eşitsizliğin sağ tarafının $\lambda \to \infty$ iken sıfıra gittiğini göstermek yeterlidir. A_2 ifadesi (c) şartından dolayı sıfıra gitmektedir. Şimdi A_1'in sıfıra gittiğini gösterelim.

Hipoteze göre x, f'nin bir Lebesgue noktasıdır. O halde Lebesgue noktası tanımından her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ bulunabilir ki $0 < h \leq \delta$ için

$$\int_{x}^{x\pm h} |f(t) - f(x)|dt < \varepsilon\, h$$

eşitsizliği sağlanır.

O halde bu $\delta > 0$ için A_1 integrali şöyle yazılabilir:

$$A_1 = \sum_{m=1}^{N} \left[\int_{-\infty}^{x-\delta} + \int_{x-\delta}^{x} + \int_{x}^{x+\delta} + \int_{x+\delta}^{\infty} \right] |f^m(t) - f^m(x)| K_{\lambda,m}(x,t)dt$$

$$= A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14}.$$

Her bir integralin sıfıra gittiğini gösterelim.

Önce A_{11}'i hesaplayalım:

$$A_{11} = \sum_{m=1}^{N} \int_{-\infty}^{x-\delta} |f^m(t) - f^m(x)|\, K_{\lambda,m}(x,t)dt$$

(b) şartından $K_{\lambda,m}(x,t)$ monoton artan olduğundan en büyük değerini üst sınırda alır. Üçgen eşitsizliğinden

$$A_{11} \leq \sum_{m=1}^{N} K_{\lambda,m}(x, x-\delta) \int_{-\infty}^{x-\delta} |f^m(t)|dt + \int_{-\infty}^{x-\delta} |f^m(x)|\, K_{\lambda,m}(x,t)dt$$

$$A_{11} \leq \sum_{m=1}^{N} \left\{ K_{\lambda,m}(x, x-\delta) \int_{-\infty}^{x-\delta} |f^m(t)|dt + |f^m(x)| \int_{-\infty}^{x-\delta} K_{\lambda,m}(x,t)dt \right\}$$

ve

$$A_{11} \leq \sum_{m=1}^{N} \left\{ K_{\lambda,m}(x, x-\delta) \|f^m(t)\|_{L_1(R)} + |f^m(x)| \int_{-\infty}^{X-\delta} K_{\lambda,m}(x,t)dt \right\}$$

bulunur. Böylece $A_{11} \to 0$ olduğu görülür.

Şimdi A_{14}'ü hesaplayalım:

$$A_{14} = \sum_{m=1}^{N} \int_{x+\delta}^{\infty} |f^m(t) - f^m(x)|\, K_{\lambda,m}(x,t)dt$$

(b) şartından $K_{\lambda,m}(x,t)$ monoton azalan olduğundan en küçük değerini alt sınırda alır. Üçgen eşitsizliğinden

$$A_{14} \leq \sum_{m=1}^{N} K_{\lambda,m}(x, x+\delta) \int_{x+\delta}^{\infty} |f^m(t)|dt + \int_{x+\delta}^{\infty} |f^m(x)|\, K_{\lambda,m}(x,t)dt$$

$$A_{14} \leq \sum_{m=1}^{N} \left\{ K_{\lambda,m}(x, x+\delta) \int_{x+\delta}^{\infty} |f^m(t)|dt + |f^m(x)| \int_{x+\delta}^{\infty} K_{\lambda,m}(x,t)dt \right\}$$

ve

$$A_{14} \leq \sum_{m=1}^{N} \left\{ K_{\lambda,m}(x, x+\delta) \|f^m(t)\|_{L_1(R)} + |f^m(x)| \int_{x+\delta}^{\infty} K_{\lambda,m}(x,t)dt \right\}$$

bulunur. Böylece $A_{14} \to 0$ olduğu görülür.

Şimdi A_{13} ü hesaplayalım:

$$A_{13} = \sum_{m=1}^{N} \int_{x}^{x+\delta} |f^m(t) - f^m(x)|\, K_{\lambda,m}(x,t)dt$$

olduğundan burada hipoteze göre x, f*'nin* bir Lebesgue noktasıdır. O halde Lebesgue noktası tanımından her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ bulunabilir ki $0 < h \leq \delta$ için

$$\int_{x}^{x+h} |f(t) - f(x)|dt < \varepsilon\, h$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi bir F fonksiyonu tanımlayalım.

$$F(t) = \int_{x}^{t} |f(u) - f(x)|du$$

olsun. $\delta > 0$ olmak üzere $(u - x) \leq \delta$

$$dF(t) = |f(u) - f(x)|du$$

$$F(t) \leq \varepsilon(u - x)$$

dir. f sınırlı olduğundan

$$|f^m(u) - f^m(x)| \leq M|f(u) - f(x)|$$

olacak şekilde $M > 0$ mevcuttur. Şimdi

$$A_{13} \leq M \sum_{m=1}^{N} \int_{x}^{x+\delta} K_{\lambda,m}(x,t)dF(t)$$

eşitsizliğinin sağ kısmındaki integrale kısmi integrasyon uygulansın:

$K_{\lambda,m}(x,t)$=u ve $dF(t) = dv$ olsun.

$K_{\lambda,m}(x,t)$ azalan olduğundan -$K_{\lambda,m}(x,t)$ artandır.

$$A_{13} \leq M \sum_{m=1}^{N} \left(K_{\lambda,m}(x,t)F(t) \Big|_{X}^{X+\delta} + \int_{x}^{x+\delta} F(t)d(-K_{\lambda,m}(x,t)) \right)$$

$$A_{13} \leq M \sum_{m=1}^{N} \left\{ \left[K_{\lambda,m}(x,x+\delta)F(x+\delta) - K_{\lambda,m}(x,x)F(x)\right] + \int_{x}^{x+\delta} F(t)d(-K_{\lambda,m}(x,t)) \right\}$$

$$A_{13} \leq M \sum_{m=1}^{N} \left\{ \left[\left(K_{\lambda,m}(x,x+\delta)F(x+\delta)\right) + \int_{x}^{x+\delta} F(t)d(-K_{\lambda,m}(x,t)) \right] \right\}$$

$$\int_{x}^{x+\delta} F(t)d(-K_{\lambda,m}(x,t)) \leq \varepsilon \int_{x}^{x+\delta} (t-x)\, d(-K_{\lambda,m}(x,t))$$

ifadesine tekrar kısmi integrasyon uygulansın:

$(t-x) = u$ ve $d\left(-K_{\lambda,m}(x,t)\right) = dv$ olmak üzere

$$A_{13} \leq M \sum_{m=1}^{N} \left\{ \left(K_{\lambda,m}(x,x+\delta)F(x+\delta)\right) + \varepsilon \left[(t-x)\left(-K_{\lambda,m}(x,t)\right) \Big|_{X}^{X+\delta} + \int_{x}^{x+\delta} K_{\lambda,m}(x,t)dt \right] \right\}$$

$$A_{13} \leq M \sum_{m=1}^{N} \Bigg\{ \big(K_{\lambda,m}(x, x+\delta) F(x+\delta)\big) + \varepsilon \Bigg[(x+\delta-x)\Big(-K_{\lambda,m}(x, x+\delta)\Big) - (x-x)\Big(-K_{\lambda,m}(x,x)\Big) + \int_{x}^{x+\delta} K_{\lambda,m}(x,t)dt \Bigg] \Bigg\}$$

$$\leq M \sum_{m=1}^{N} \Bigg\{ \Big(K_{\lambda,m}(x, x+\delta) F(x+\delta)\Big) + \Bigg[\varepsilon\delta \Big(-K_{\lambda,m}(x, x+\delta)\Big) + \varepsilon \int_{x}^{x+\delta} K_{\lambda,m}(x,t)dt \Bigg] \Bigg\}.$$

$F(x+\delta)$ fonksiyonu için

$$F(t) \leq \varepsilon(t-x)$$

ifadesinden

$$F(x+\delta) \leq \varepsilon(x+\delta-x) = \varepsilon\delta$$

bulunur.

$$A_{13} \leq M \sum_{m=1}^{N} \left(K_{\lambda,m}(x, x+\delta)\varepsilon\delta - \varepsilon\delta \Big(K_{\lambda,m}(x, x+\delta)\Big) + \varepsilon \int_{x}^{x+\delta} K_{\lambda,m}(x,t)dt \right)$$

$$\leq \varepsilon M \sum_{m=1}^{N} \int_{x}^{x+\delta} K_{\lambda,m}(x,t)dt \leq \varepsilon M \sum_{m=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\lambda,m}(x,t)dt$$

bulunur. Böylece $A_{13} \to 0$ olduğu görülür.

Şimdi de A_{12} yi hesaplayalım:

$$A_{12} = \sum_{m=1}^{N} \int_{x-\delta}^{x} |f^m(t) - f^m(x)| \, K_{\lambda,m}(x,t)dt$$

biçimindeki integralde, hipoteze göre x, f'nin bir Lebesgue noktasıdır. O halde Lebesgue noktası tanımından her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta \geq h > 0$ bulunabilir ki

$$\int_{x-h}^{x} |f(t) - f(x)| dt < \varepsilon h$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi bir G fonksiyonu tanımlayalım.

$$G(t) = \int_{t}^{x} |f(u) - f(x)| du$$

olsun. $\delta > 0$ olmak üzere $(x - u) \leq \delta$

$dG(t) = -|f(u) - f(x)| du$

$G(t) \leq \varepsilon(x - u)$

dir. f sınırlı olduğundan

$|f^m(u) - f^m(x)| \leq M|f(u) - f(x)|$

olacak şekilde $M > 0$ mevcuttur.

$$A_{12} \leq M \sum_{m=1}^{N} \int_{x-\delta}^{x} \left(-K_{\lambda,m}(x,t)\right) dG(t)$$

eşitsizliğin sağ kısmındaki integrale kısmi integrasyon uygulansın:

$K_{\lambda,m}(x,t)$=u ve $dG(t) = dv$ olmak üzere

$$A_{12} \leq M \sum_{m=1}^{N} -\left\{\left[K_{\lambda,m}(x,t)G(t)\right]\Big|_{X-\delta}^{X} - \int_{x-\delta}^{x} G(t) dK_{\lambda,m}(x,t)\right\}$$

$$\leq M \sum_{m=1}^{N} -\left\{\left[K_{\lambda,m}(x,x)G(x) - K_{\lambda,m}(x,x-\delta)G(x-\delta)\right] - \int_{x-\delta}^{x} G(t) d\, K_{\lambda,m}(x,t)\right\}$$

$$\leq M \sum_{m=1}^{N} \left[\left(K_{\lambda,m}(x,x-\delta)G(x-\delta) + \int_{x-\delta}^{x} G(t) dK_{\lambda,m}(x,t)\right)\right]$$

$$\int_{x-\delta}^{x} G(t) dK_{\lambda,m}(x,t) \leq \varepsilon \int_{x-\delta}^{x} (x-t)\, dK_{\lambda,m}(x,t)$$

integraline tekrar kısmi integrasyon uygulansın:

$(t - x) = u$ ve $d\left(-K_{\lambda,m}(x,t)\right) = dv$ olsun. Bu takdirde

$$A_{12} \leq M \sum_{m=1}^{N} \left\{\left(K_{\lambda,m}(x,x-\delta)G(x-\delta)\right)\right.$$
$$\left. + \varepsilon\left[(x-t)\left(K_{\lambda,m}(x,t)\right)\Big|_{X-\delta}^{X} + \int_{x-\delta}^{x} K_{\lambda,m}(x,t) dt\right]\right\}$$

$$A_{12} \leq M \sum_{m=1}^{N} \Bigg\{ \big(K_{\lambda,m}(x, x-\delta) G(x-\delta)\big) + \varepsilon \Bigg[(x-x)\Big(K_{\lambda,m}(x,x)\Big) + (x-x+\delta)\big(K_{\lambda,m}(x-\delta)\big) + \int_{x-\delta}^{x} K_{\lambda,m}(x,t)dt \Bigg] \Bigg\}$$

$$A_{12} \leq M \sum_{m=1}^{N} \Bigg\{ \Big(K_{\lambda,m}(x, x-\delta) G(x-\delta)\Big) + \varepsilon\delta \left(K_{\lambda,m}(x, x-\delta) + \int_{x-\delta}^{x} K_{\lambda,m}(x,t)dt \right) \Bigg\}.$$

$G(x+\delta)$ fonksiyonu için $G(t) \leq \varepsilon(x-t)$ ifadesinden

$G(x-\delta) \leq \varepsilon(x-x+\delta) = \varepsilon\delta$

bulunur.

$$A_{12} \leq M \sum_{m=1}^{N} \left(K_{\lambda,m}(x, x-\delta)\varepsilon\delta - \varepsilon\delta\Big(K_{\lambda,m}(x, x-\delta)\Big) + \varepsilon \int_{x-\delta}^{x} K_{\lambda,m}(x,t)dt \right)$$

$$A_{12} \leq \varepsilon M \sum_{m=1}^{N} \int_{x-\delta}^{x} K_{\lambda,m}(x,t)dt \leq \varepsilon M \sum_{m=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\lambda,m}(x,t)dt$$

bulunur. Böylece $A_{12} \to 0$ olduğu görülür.

Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Şimdi, bir önceki teoremin $L_p(R)$ $(1 < p < \infty)$ versiyonunu ifade ve ispat edelim.

Teorem 3.3. $f \in L_p(R)$ $(1 < p < \infty)$ ve f, R üzerinde sınırlı olsun. $K_{\lambda,m}(x,t)$ A sınıfına ait ise ve her $m = 1, 2, \ldots, N$ olmak üzere her $\gamma > 0$ için

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\infty}^{x-\gamma} K_{\lambda,m}(x,t)dt = 0 \qquad (3.1)$$

ve

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{x+\gamma}^{\infty} K_{\lambda,m}(x,t)dt = 0 \qquad (3.2)$$

özellikleri sağlanıyor ise bu takdirde (1.1) ile tanımlı $L_\lambda(f;x)$ operatörü için f'nin her $x \in R$ p-Lebesgue noktasında

$$\lim_{\lambda\to\infty} L_\lambda(f;x) = \sum_{m=1}^{N} C_m f^m(x)$$

olur.

İspat.

$$L_\lambda(f;x) = \sum_{m=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} f^m(t)\, K_{\lambda,m}(x,t)dt$$

eşitliğin her iki tarafından

$$\sum_{m=1}^{N} C_m f^m(x)$$

ifadesini çıkarıp ve mutlak değer ile ifade büyütülürse

$$\left|L_\lambda(f;x) - \sum_{m=1}^{N} C_m f^m(x)\right|^p$$

$$\leq 2^p \left(\sum_{m=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} |f^m(t) - f^m(x)|\, K_{\lambda,m}(x,t)dt\right)^p$$

$$+2^p |f^m(x)|^p \left|\sum_{m=1}^{N} \left[\int_{-\infty}^{\infty} K_{\lambda,m}(x,t)dt - C_m\right]\right|^p$$

$$\leq 2^{(N+1)p} \sum_{m=1}^{N} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f^m(t) - f^m(x)|\, K_{\lambda,m}(x,t)dt\right)^p$$

$$= 2^{(N+1)p} A_1 + 2^p (A_2)^p$$

olur. Burada,

$$\left(\sum_{m=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} |f^m(t) - f^m(x)|\, K_{\lambda,m}(x,t)dt\right)^p$$

$$\leq 2^{Np} \sum_{m=1}^{N} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f^m(t) - f^m(x)|\, K_{\lambda,m}(x,t)dt\right)^p$$

ilişkisinin sağlandığı açıktır. Son eşitsizliğin sağ tarafının $\lambda \to \infty$ iken sıfıra gittiğini göstermek yeterlidir. A_2 ifadesi (c) şartından dolayı sıfıra gitmektedir. Şimdi A_1'in sıfıra gittiğini gösterelim.

Hipoteze göre x, f'nin bir p-Lebesgue noktasıdır. O halde Lebesgue noktası tanımından her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ bulunabilir ki $0 < h \leq \delta$ için

$$\int_{x}^{x \pm h} |f(t) - f(x)|^p dt < \varepsilon^p h$$

eşitsizliği sağlanır.

O halde bu $\delta > 0$ için A_1 integrali Hölder eşitsizliği uygulanarak şöyle yazılabilir:

$$A_1 \leq \sum_{m=1}^{N} \left[\int_{-\infty}^{x-\delta} + \int_{x-\delta}^{x} + \int_{x}^{x+\delta} + \int_{x+\delta}^{\infty} \right] |f^m(t) - f^m(x)|^p K_{\lambda,m}(x,t) dt$$

$$\times \left(\int_{-\infty}^{\infty} K_{\lambda,m}(x,t) dt \right)^{\frac{p}{q}}$$

$$=(A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14})\left(\int_{-\infty}^{\infty} K_{\lambda,m}(x,t) dt\right)^{\frac{p}{q}}.$$

Her bir integralin limit durumunda sıfıra gittiğini gösterelim.

Önce A_{11}'i hesaplayalım:

$$A_{11} = \sum_{m=1}^{N} \int_{-\infty}^{x-\delta} |f^m(t) - f^m(x)|^p K_{\lambda,m}(x,t) dt$$

integrali için, (b) şartından $K_{\lambda,m}(x,t)$ monoton artan olduğundan en büyük değerini integralin üst sınırında alır. Üçgen eşitsizliğinden

$$A_{11} \leq 2^p \sum_{m=1}^{N} \left\{ K_{\lambda,m}(x, x-\delta) \int_{-\infty}^{x-\delta} |f^m(t)|^p dt + |f^m(x)|^p \int_{-\infty}^{x-\delta} K_{\lambda,m}(x,t) dt \right\}$$

ve

$$A_{11} \leq \sum_{m=1}^{N} \left\{ K_{\lambda,m}(x, x-\delta) \left(\|f^m(t)\|_{L_p(R)} \right)^p + |f^m(x)|^p \int_{-\infty}^{x-\delta} K_{\lambda,m}(x,t) dt \right\}$$

bulunur. Böylece $A_{11} \rightarrow 0$ olduğu görülür.

Şimdi A_{14}'ü hesaplayalım:

$$A_{14} = \sum_{m=1}^{N} \int_{x+\delta}^{\infty} |f^m(t) - f^m(x)|^p K_{\lambda,m}(x,t) dt$$

(b) şartından $K_{\lambda,m}(x,t)$ monoton azalan olduğundan en küçük değerini alt sınırda alır. Üçgen eşitsizliğinden

$$A_{14} \leq 2^p \sum_{m=1}^{N} \left\{ K_{\lambda,m}(x, x+\delta) \int_{x+\delta}^{\infty} |f^m(t)|^p dt + |f^m(x)|^p \int_{x+\delta}^{\infty} K_{\lambda,m}(x,t)dt \right\}$$

ve

$$A_{14} \leq 2^p \sum_{m=1}^{N} \left\{ K_{\lambda,m}(x, x+\delta) \left(\|f^m(t)\|_{L_p(R)} \right)^p + |f^m(x)|^p \int_{x+\delta}^{\infty} K_{\lambda,m}(x,t)dt \right\}$$

bulunur. Böylece $A_{14} \to 0$ olduğu görülür.

Şimdi A_{13}'ü hesaplayalım:

$$A_{13} = \sum_{m=1}^{N} \int_{x}^{x+\delta} |f^m(t) - f^m(x)|^p \, K_{\lambda,m}(x,t)dt$$

biçimindeki integralde, hipoteze göre x, f'nin bir p-Lebesgue noktasıdır. O halde p-Lebesgue noktası tanımından her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta \geq h > 0$ bulunabilir ki

$$\int_{x}^{x+h} |f(t) - f(x)|^p dt < \varepsilon^p \, h$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi bir F fonksiyonu tanımlayalım.

$$F(t) = \int_{x}^{t} |f(u) - f(x)|^p du$$

olsun. $\delta > 0$ olmak üzere $(u - x) \leq \delta$

$dF(t) = |f(u) - f(x)|^p du$

$F(t) \leq \varepsilon^p (u - x)$

dir. f sınırlı olduğundan

$|f^m(u) - f^m(x)|^p \leq M |f(u) - f(x)|^p$

olacak şekilde $M > 0$ mevcuttur.

$$A_{13} \leq M \sum_{m=1}^{N} \int_{x}^{x+\delta} K_{\lambda,m}(x,t)dF(t)$$

eşitsizliğin sağ kısmındaki integrale kısmi integrasyon uygulansın:

$K_{\lambda,m}(x,t)$=u ve $dF(t) = dv$ olsun.

$K_{\lambda,m}(x,t)$ azalan olduğundan -$K_{\lambda,m}(x,t)$ artandır.

$$A_{13} \leq M \sum_{m=1}^{N} \left(K_{\lambda,m}(x,t)F(t)\Big|_{X}^{X+\delta} + \int_{x}^{x+\delta} F(t)d(-K_{\lambda,m}(x,t)) \right)$$

$$A_{13} \leq M \sum_{m=1}^{N} \left\{ \left[K_{\lambda,m}(x,x+\delta)F(x+\delta) - K_{\lambda,m}(x,x)F(x)\right] \right.$$

$$\left. + \int_{x}^{x+\delta} F(t)d(-K_{\lambda,m}(x,t)) \right\}$$

$$A_{13} \leq M \sum_{m=1}^{N} \left\{ \left[\left(K_{\lambda,m}(x,x+\delta)F(x+\delta)\right) + \int_{x}^{x+\delta} F(t)d(-K_{\lambda,m}(x,t)) \right] \right\}$$

$$\int_{x}^{x+\delta} F(t)d(-K_{\lambda,m}(x,t)) \leq \varepsilon^{p} \int_{x}^{x+\delta} (t-x)\, d(-K_{\lambda,m}(x,t))$$

ifadesine tekrar kısmi integrasyon uygulansın:

$(t-x) = u$ ve $d\left(-K_{\lambda,m}(x,t)\right) = dv$ olmak üzere

$$A_{13} \leq M \sum_{m=1}^{N} \left\{ \left(K_{\lambda,m}(x,x+\delta)F(x+\delta)\right) \right.$$

$$\left. + \varepsilon^{p} \left[(t-x)\left(-K_{\lambda,m}(x,t)\right)\Big|_{X}^{X+\delta} + \int_{x}^{x+\delta} K_{\lambda,m}(x,t)dt \right] \right\}$$

$$A_{13} \leq M \sum_{m=1}^{N} \left\{ \left(K_{\lambda,m}(x,x+\delta)F(x+\delta)\right) \right.$$

$$+ \varepsilon^{p} \left[(x+\delta-x)\left(-K_{\lambda,m}(x,x+\delta)\right) - (x-x)\left(-K_{\lambda,m}(x,x)\right) \right.$$

$$\left. \left. + \int_{x}^{x+\delta} K_{\lambda,m}(x,t)dt \right] \right\}$$

$$A_{13} \leq M \sum_{m=1}^{N} \left\{ \left(K_{\lambda,m}(x,x+\delta)F(x+\delta)\right) \right.$$

$$\left. + \varepsilon^{p} \left[\delta\left(-K_{\lambda,m}(x,x+\delta)\right) + \int_{x}^{x+\delta} K_{\lambda,m}(x,t)dt \right] \right\}.$$

$F(x+\delta)$ fonksiyonu için $F(t) \leq \varepsilon^p(t-x)$ ifadesinden

$F(x+\delta) \leq \varepsilon^p(x+\delta-x) = \varepsilon^p\delta$

elde edilir.

$$A_{13} \leq M \sum_{m=1}^{N} \left(K_{\lambda,m}(x,x+\delta)\varepsilon^p\delta - \varepsilon^p\delta\left(K_{\lambda,m}(x,x+\delta)\right) + \varepsilon^p \int_{x}^{x+\delta} K_{\lambda,m}(x,t)dt \right)$$

$$A_{13} \leq \varepsilon^p M \sum_{m=1}^{N} \int_{x}^{x+\delta} K_{\lambda,m}(x,t)dt \leq \varepsilon^p M \sum_{m=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\lambda,m}(x,t)dt$$

bulunur. Böylece $A_{13} \to 0$ olduğu görülür.

Şimdi de A_{12}'yi hesaplayalım:

$$A_{12} = \sum_{m=1}^{N} \int_{x-\delta}^{x} |f^m(t) - f^m(x)|\, K_{\lambda,m}(x,t)dt$$

biçimindeki integralde, hipoteze göre x, f'nin bir p-Lebesgue noktasıdır. O halde p-Lebesgue noktası tanımından her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta \geq h > 0$ bulunabilir ki

$$\int_{x-h}^{x} |f(t) - f(x)|^p dt < \varepsilon h$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi bir G fonksiyonu tanımlayalım.

$$G(t) = \int_{t}^{x} |f(u) - f(x)|^p du$$

olsun. $\delta > 0$ olmak üzere $(x-u) \leq \delta$

$dG(t) = -|f(u) - f(x)|^p du$

$G(t) \leq \varepsilon^p(x-u)$

dir. f sınırlı olduğundan

$|f^m(u) - f^m(x)| \leq M|f(u) - f(x)|^p$

olacak şekilde $M > 0$ mevcuttur.

$$A_{12} \leq M \sum_{m=1}^{N} \int_{x-\delta}^{x} \left(-K_{\lambda,m}(x,t)\right) dG(t)$$

eşitsizliğin sağ kısmındaki integrale kısmi integrasyon uygulansın:

$K_{\lambda,m}(x,t)$=u ve $dG(t) = dv$ olmak üzere

$$A_{12} \leq M \sum_{m=1}^{N} -\left\{\left[K_{\lambda,m}(x,t)G(t)\right]\Big|_{X-\delta}^{X} - \int_{x-\delta}^{x} G(t)dK_{\lambda,m}(x,t)\right\}$$

$$A_{12} \leq M \sum_{m=1}^{N} -\left\{\left[K_{\lambda,m}(x,x)G(x) - K_{\lambda,m}(x,x-\delta)G(x-\delta)\right]\right.$$
$$\left. - \int_{x-\delta}^{x} G(t)d\,K_{\lambda,m}(x,t)\right\}$$

$$A_{12} \leq M \sum_{m=1}^{N} \left[\left(K_{\lambda,m}(x,x-\delta)G(x-\delta) + \int_{x-\delta}^{x} G(t)dK_{\lambda,m}(x,t)\right)\right]$$

$$\int_{x-\delta}^{x} G(t)dK_{\lambda,m}(x,t) \leq \varepsilon^{p} \int_{x-\delta}^{x} (x-t)\,dK_{\lambda,m}(x,t)$$

bulunur. Son integrale tekrar kısmi integrasyon uygulansın:

$(t-x) = u$ ve $d\left(-K_{\lambda,m}(x,t)\right) = dv$ olsun. Bu takdirde

$$A_{12} \leq M \sum_{m=1}^{N} \left\{\left(K_{\lambda,m}(x,x-\delta)G(x-\delta)\right)\right.$$
$$\left. + \varepsilon^{p}\left[(x-t)\left(K_{\lambda,m}(x,t)\right)\Big|_{X-\delta}^{X} + \int_{x-\delta}^{x} K_{\lambda,m}(x,t)dt\right]\right\}$$

$$A_{12} \leq M \sum_{m=1}^{N} \left\{\left(K_{\lambda,m}(x,x-\delta)G(x-\delta)\right)\right.$$
$$+ \varepsilon^{p}\left[(x-x)\left(K_{\lambda,m}(x,x)\right) + (x-x+\delta)\left(K_{\lambda,m}(x-\delta)\right)\right.$$
$$\left.\left. + \int_{x-\delta}^{x} K_{\lambda,m}(x,t)dt\right]\right\}$$

$$A_{12} \leq M \sum_{m=1}^{N} \left\{\left(K_{\lambda,m}(x,x-\delta)G(x-\delta)\right)\right.$$
$$\left. + \varepsilon^{p}\delta\left(K_{\lambda,m}(x,x-\delta) + \int_{x-\delta}^{x} K_{\lambda,m}(x,t)dt\right)\right\}.$$

$G(x+\delta)$ fonksiyonu için $G(t) \leq \varepsilon^p (x-t)$ ifadesinden

$G(x-\delta) \leq \varepsilon^p (x-x+\delta) = \varepsilon^p \delta$

bulunur. İlerlersek ise

$$A_{12} \leq M \sum_{m=1}^{N} \left(K_{\lambda,m}(x, x-\delta) \varepsilon^p \delta - \varepsilon^p \delta \left(K_{\lambda,m}(x, x-\delta) \right) + \varepsilon^p \int_{x-\delta}^{x} K_{\lambda,m}(x,t) dt \right)$$

$$A_{12} \leq \varepsilon^p M \sum_{m=1}^{N} \int_{x-\delta}^{x} K_{\lambda,m}(x,t) dt \leq \varepsilon^p M \sum_{m=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\lambda,m}(x,t) dt$$

bulunur. Böylece limit durumunda $A_{12} \to 0$ olduğu görülür.

Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

4. TARTIŞMA

Λ pozitif reel sayılardan (parametrelerden) oluşan bir indis kümesi olsun. Ayrıca, $\lambda \in \Lambda$ olmak üzere, $K_{\lambda,m}(x,t)$ λ'ya bağlı ve belirli şartları sağlayan bir çekirdekler ailesi olsun. Bu çalışmanın asıl amacı Esen-Almalı (2017b) tarafından çalışılan ve (1.1) ile verilen

$$L_\lambda(f;x) = \sum_{m=1}^{N} \int_a^b f^m(t) K_{\lambda,m}(x,t)dt\,,\ x \in (a,b)$$

şeklindeki non-lineer integral operatör ailesinin noktasal yakınsaklığını elde etmektir. Bu tezde (1.1) ailesinin $L_p(-\infty,\infty)$ ve $L_1(a,b)$ uzaylarından olan f fonksiyonuna p-Lebesgue noktalarındaki yakınsaklığı ispatlanmıştır. Burada, $N \geq 1$ sayısı keyfi bir doğal sayıdır ve (a,b) R'de keyfi bir sınırlı alt aralıktır.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde (1.1) operatörler ailesinin $L_p(-\infty,\infty)$ ve $L_1(a,b)$ uzaylarından olan f fonksiyonuna p-Lebesgue noktalarındaki yakınsaklığı ispatlanmıştır. Literatür verilerimize göre aynı operatör için farklı tipte yakınsaklık araştırmalarının da yapılabileceği öngörülmektedir.

KAYNAKLAR

Aliprantis, C. D., Burkinshaw, O., Principles of Real Analysis 3rd ed., AcademicPress, New York, 1998.

Bardaro, C., Musielak, J., Vinti, G., Nonlinear Integral Operators and Applications, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2003.

Butzer, P. L., Nessel, R. J., 1971. Fourier Analysis and Approximation, Academic Press, 554 p., New York and London.

Esen, S., Konvolüsyon Tipinde Olmayan İntegral Operatörler Ailesinin Karakteristik Noktalarda Yakınsaklığı ve Yakınsaklık Hızı, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 2002.

Esen-Almalı, S., Approximation of a class of non-linear integral operators, Celal Bayar Univ. J. of Sci., 13 (2): 407-411, 2017a.

Esen-Almalı, S., On approximation properties for non-linear integral operators, New Trends in Mathematical Sciences 5 (4): 123-129, 2017b.

Esen-Almalı, S., Uysal, G., Mishra, V. N., Özalp-Güller, Ö., On singular integral operators involving power nonlinearity, Korean J. Math. 25 (4): 483-494, 2017.

Gadjiev, A. D., Deltasal Çekirdekli İntegral Operatörler Ders Notları, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Ankara, 1998.

Hacisalihoglu, H. H., Haciyev, A. D., Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı, A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletme Yayınları, Ankara, 1995.

Karslı, H., İki Parametreye Bağlı Singüler İntegrallerin ve Türevlerinin Yakınsaklık Özellikleri, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 2006.

Karslı, H., On approximation properties of non-convolution type nonlinear integral operators, Anal. Theory Appl. 26 (2): 140-152, 2010.

Lebesgue, H., Sur les intégrales singulières, Annales de la faculté des sciences de

Toulouse Sér. 3, 1: 25-117, 1909.

Mamedov, R. G., On the order of convergence of m-singular integrals at generalized Lebesgue points and in the space (in Russian), Izv. Akad.Nauk. SSSR Ser. Mat., 27 (2): 287-304, 1963.

Musielak, J., On Some Approximation Problems in Modular Spaces, In Constructive Function Theory (Proc. Int. Conf.,Varna, June 1-5, 1981), 455-461, Publ. House Bulgarian Acad. Sci., Sofia, 1983.

Natanson, I. P., Theory of Functions of a Real Variable Vol. 2, Translated from the Russian by Leo F. Boron, Frederick Ungar Pub. Co., New York, 1960.

Natanson, I. P., Theory of Functions of a Real Variable Vol. 1, Translated from the Russian by Leo F. Boron, Frederick Ungar Pub. Co., New York, 1964.

Neri, U., Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, Berlin-New York, 1971.

Özalp-Güller, Ö., Lineer Olmayan İntegral Operatör Ailesinin Yakınsaklığı, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 2019.

Romanovskiĭ, P. I., Quelques considérations sur la théorie des intégrales singulières, Math. Zeitschrift, 34: 35-49, 1932.

Rudin, W., Real and Complex Analysis, Mc-Graw Hill Book Co., London, 1987.

Taberski, R., Singular integrals depending on two parameters, Prace Mat. 7: 173-179, 1962.

Uysal, G., Weighted convergence aspects of a particular class of singular integral operators. Presented at the International Conference on Mathematics and Related Sciences (ICMRS 2018) AIP Conference Proceedings, Volume: 1991, Article Number: 020016, 2018.