**T.C.**
**KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**
**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

# BERNSTEIN CHENEY SHARMA OPERATÖRLERİ

**AYŞE TÜRKMENOĞLU**

**NİSAN 2018**

Matematik Anabilim Dalında Ayşe TÜRKMENOĞLU tarafından hazırlanan BERNSTEIN-CHENEY-SHARMA OPERATÖRLERİ adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin Yüksek Lisans Tezi olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Doç. Dr. Ali OLGUN
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan :Prof. Dr. FATMA TAŞDELEN YEŞİLDAL
Üye (Danışman):Doç. Dr. ALİ OLGUN
Üye :Prof. Dr. ALİ ARAL

16/03/2018

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Mustafa YİĞİTOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

**ÖZET**

BERNSTEIN CHENEY SHARMA OPERATÖRLERİ
TÜRKMENOĞLU,Ayşe
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. Ali OLGUN

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezin amacı ve kaynak özetleri hakkında bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde tezde kullanılacak temel teoremler, tanımlar ve bazı eşitsizlikler verilmişir.

Üçüncü bölümde tezin temelini oluşturan Bernstein Schuer operatörü tanımlanmış ve operatörün yakınsaklık özellikleri ile ilgili teoremler verilmiştir.

Dördüncü bölümde tezi oluşturan Bernstein Cheney Sharma operatörü tanımlanmış ve operatörün yakınsaklık özellikleri ile ilgili teoremler verilmiştir. Sonunda da amaca yönelik açıklamalar yapılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Gamma Operatörü, Lineer Pozitif Operatörler, Yaklaşım, Süreklilik Modülü, Bernstein Cheney Sharma Operatörü

# ABSTRACT

BERNSTEIN CHENEY SHARMA OPERATORS

TÜRKMENOĞLU, Ayşe
Kirikkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, Master Thesis
Supervisor: Doç. Dr. Ali OLGUN

The thesis consists of three chapters. The aim of the study is given in the first chapter.

In the second chapter, some fundamental concepts, definitions and inequalities used throughout the thesis are given.

In the third chapter, Bernstein Schuer Operators are defined and some theorems related to approximation properties of the operators are investigated.

In the fourth chapter, Bernstein Cheney Sharma Operators are defined and some theorems related to approximation properties of the operators are investigated. The last section is devoted to some explanations presenting our aims.

**Key Words:** Gamma Operator, Linear Positive Operators, Approximation, Modulus of Continuity, Bernstein Cheney-Sharma Operator

**TEŞEKKÜR**

Tezimin hazırlanması esnasında hiçbir yardımı esirgemeyen ve biz genç araştırmacılara büyük destek olan, bilimsel deney imkanlarını sonuna kadar bizlerin hizmetine veren, tez yöneticisi hocam, Sayın Doç. Dr. Ali OLGUN'a, tezimin birçok aşamasında yardım gördüğüm kuzenim Can YILDIRIM'a ve son olarak bana birçok konuda olduğu gibi, tezimi hazırlamam esnasında da yardımını esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

## SİMGELER DİZİNİ

| | |
|---|---|
| $C[a,b]$ | $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonların uzayı. |
| $B_n(f;.)$ | Bernstein operatörü. |
| $\omega(f;\delta)$ | $f$ fonksiyonunun süreklilik modülü. |
| $B_{n,p}(f;.)$ | Bernstein-Schurer Operatörü |
| $G_{n;p}(f;.)$ | Bernstein-Cheney Sharma Operatörü. |
| $\omega_p(.)$ | $p \in N_0$ için ağırlık fonksiyonları. |
| $\lVert f \rVert_p$ | $p \in N_0$ için $f$ fonksiyonunun normu. |

# 1. GİRİŞ

Korovkin teoreminin önemi lineer pozitif operatörler teorisinde bilinmektedir. Birçok matematikçi bu teorem ve uygulamalarını kullanmıştır ve halen kullanmaktadır. Operatörlerin yakınsaklık özellikleri ve yakınsaklık hızlarının belirlenmesinde bu teoremler temel teşkil etmektedir.

Son 65-70 yıldır birçok matematikçi bu teoremleri farklı fonksiyon uzaylarına genişletmiş ve bu uzaylarda çalışmalarını yapmışlardır. Örneğin Banach Latisleri, Banach Cebiri, Banach uzayları gibi.

Bu teorem yalnızca yaklaşımlar teorisinde değil, aynı zamanda diğer birçok alanda da ortaya çıkmıştır. Örneğin Fonksiyonel Analiz, Harmonik Analiz, ölçü teorisi, istatistik teorisi ve kısmi türevli denklemler bunlardan bazılarıdır.

Biz bu tezi hazırlarken sürekli fonksiyon uzaylarını göz önüne alacağız, çünkü bu teorem sürekli fonksiyon uzaylarında yakınsaklık için temel rolü oynar ve çok kullanışlı uygulamalara sahiptir.

Pozitif yaklaştırma metodları yaklaşımlar teorisinin temel araçlarındandır ve sürekli fonksiyonların yaklaşımlarıyla ilgili bir çok problemde karşımıza çıkarlar.

Bizde bu tezde Korovkin teoreminin iyi bilinen uygulamalarından olan Bernstein Schurer operatörü ve Bernstein-Cheney Sharma operatörünün yakınsaklık özelliklerini inceleyeceğiz.

Bu incelemeleri yaparken 1902 yılında Jensen tarafından genelleştirilen binom (iki terimli) teoremi yardımıyla oluşturulan bir özdeşlikten yararlanacağız.

Biliyoruz ki $x, y \in \mathbb{R}$ , $n, k \in \mathbb{N}$ $k \leq n$ olmak üzere Binom özdeşliği

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

olarak bilinir. Jensen 1902 de bu özdeşliğin

$$(x+y+nt)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x(x+kt)^{k-1}(y+(n-k)t)^{n-k}$$

şeklinde yazılabileceğini göstermiştir. Bu son özdeşlikte ise $y=1-x$ alındığında

$$(1+nt)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x(x+kt)^{k-1}(1-x+(n-k)t)^{n-k}$$

eşitliği elde edilir. Bu tezde operatörün modlarının hesaplanmasında bu özdeşlikten faydalanacağız.

Klasik Bernstein operatörü $n\geq 1$ $f\in C[0,1]$ olmak üzere

$$B_n(f)(x);=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bu operatörün bir çok genelleşmesi tanımlanmıştır. Bu genelleştirmelerden biri de

$p\in\mathbb{N}_0, n\in\mathbb{N}$ ve $B_{n,p}: C[0,1+p]\to C[0,1]$

$$B_n(f)(x);=\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}x^k(1-x)^{n+p-k}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$f\in C[0,1+p]$ $x\in[0,1]$

olarak tanımlanır ve Bernstein -Schuer operatörü olarak bilinir.

Jensen özdeşliği yardımı ve Bernstein operatörünü kullanarak başka bir genelleştirmede

$G_n : C[0,1] \to C[0,1]$ $r \in \mathbb{N}$ ve $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bir reel sayı dizisi olmak üzere

$$G_n(f)(x); = (1 + nt_n)^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x(x + kt_n)^{k-1}(1 - x + (n-k)t_n)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$f \in C[0,1]$ ve $x \in [0,1]$

şeklindedir ve Bernstein-Cheney Sharma operatörleri olarak bilinmektedir.

Biz bu tezde bu operatörün bazı özelliklerini ve yakınsaklık durumunu inceleyeceğiz. Bu işlemleri yaparken Jensen özdeşliği yardımı ile tanımlanan eşitlikten faydalanacağız.

## 1.1. Kaynak Özetleri

Bu tezde temel olarak F. Altomare ve M. Campiti tarafından yazılan Korovkin-type Approximation Theory and its Applications isimli kitabın 321-329 numaralı sayfalarında bulunan Cheney-Sharma ve Bernstein Cheney-Sharma operatörlerini inceleyeceğiz. Bu inceleme sırasında konu ile ilgili olarak verilen başka kaynaklardan da faydalanacağız. Operatörlerin incelenmesi sırasında konunun iyi anlaşılması için gerekli incelemeleri en geniş anlamda yapacağız. Kaynaklar kısmında tezde kullanacağımız diğer materyalleri vereceğiz.

## 1.2. Tezin Amacı

Tezin esas amacı yaklaşımlar teorisinde yapılan çok çeşitli çalışmalar ve bu çalışmalarda verilen farklı Lineer Pozitif Operatörleri göz önüne alarak teze temel olan makaledeki Bernstein Operatörünün değişik tiplerinin tanımlanması anlamak, bu tanımlamaya göre daha farklı operatörler tanımlayarak yeni çalışmalara imkan sağlamaktır. Ayrıca ispatlar yapılırken kullanılan metodların okuyucu tarafından kolayca anlaşılıp uygulamasını sağlamaktır.

# 2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Bu kısımda tezde yararlanacağımız bazı tanımları vereceğiz. Bunlar çok kullanılan lineer pozitif operatörlerin tanımı, sağladıkları özellikler, süreklilik modülünün tanımı, Bernstein operatörlerin tanımı, lineer pozitif operatörlerin düzgün yakınsaklığını veren Korovkin teoremi ve daha sonraki bölümlerde kullanacağımız tanımlar olacaktır.

## 2.1.Lineer Pozitif Operatörler

$X$ ve $Y$ lineer normlu iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer $X$ den alınan herhangibir $f$ fonksiyonuna $Y$ de bir $g$ fonksiyonu karşılık getiren bir $L$ kuralı varsa bu durumda $X$ uzayında bir operatör tanımlanmış olur ve

$$g(x) = L(f, x)$$

biçiminde gösterilir. $X$ uzayı $L$ operatörünün tanım bölgesidir ve $X = D(L)$ ile gösterilir. Bu durumda $L(f, x) = g(x)$, $Y$ uzayının bir elemanı olur ve bu şekildeki $g$ fonksiyonları kümesine $L$ operatörünün değer kümesi denir. Bu kümede $R(L)$ ile gösterilir.

**Tanım 2.1.1:** $L: X \to Y$ bir operatör olsun. Her $f_1, f_2 \in X$ ve $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$L(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2; x) = \alpha_1 L(f_1; x) + \alpha_2 L(f_2; x)$$

eşitliği sağlanıyor ise $L$ ye lineer operatör denir.

**Tanım 2.1.2:** $L: X \to Y$ bir lineer operatör olsun. Her $f \in X$ ve $f \geq 0$ için $L(f) \geq 0$ oluyor ise $L$ operatörüne lineer pozitif operatör denir.

$$f(t) \leq g(t) \Rightarrow L(f(t); x) \leq L(g(t); x)$$

eşitliği doğrudur.

**Tanım 2.1.3:** $X$ bir vektör uzayı olsun. Her $x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki koşulları sağlayan reel değerli $\|\cdot\|: X \times X \to \|X\|$ fonksiyonuna $X$ üzerinde bir norm denir.

$i)$ Tüm $x, y \in X$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$ii)$ Eğer$x \in X$ ve $\alpha$ skaler ise $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

$iii)$ Eğer $x \neq 0$ ise $\|x\| > 0$ .

Üzerinde $\|.\|$ ile tanımlanan $X$ lineer uzayına normlu vektör uzayı denir ve $(X, \|.\|)$ şeklinde gösterilir.

**Tanım 2.1.4:** $X$ ve $Y$ lineer normlu iki fonksiyon uzayı olsun.

$L: X \to Y$

Lineer bir operatör olsun. $X$ üzerindeki norm $\|.\|_X$, $Y$ üzerindeki normu $\|.\|_Y$

olmak üzere her $x \in X$ için

$\|L(X)\|_Y \leq M\|x\|_X$

olacak şekilde $M \geq 0$ varsa $L$ operatörüne sınırlı operatör denir.

**Tanım 2.1.5.** $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve aralığın tüm noktalarında sürekli olan fonksiyonlar uzayı $C[a, b]$ ile gösterilmektedir.

**Tanım 2.1.6:** $L: X \to Y$ bir operatör olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşı gelen bir $\delta(\varepsilon, f_0) > 0$sayısı bulunabiliyorsa öyle ki $\|f - f_0\|_X < \delta$ iken $\|L(f) - L(f_0)\|_Y < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanıyorsa , $L$ operatörü $f_0 \in X$ noktasında süreklidir denir [2].

**Tanım 2.1.7:** $(f_n)$ dizisi $f$ fonksiyonuna $A$ üzerinde düzgün yakınsaktır $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists\ n_0$ öyle ki $\forall\ n \geq n_0$ ve $\forall\ x \in A$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ .

**Tanım 2.1.8:** $\Gamma(x)$ ile göstereceğimiz Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

genelleştirilmiş integrali yardımıyla tanımlanır. Gamma fonksiyonuna bazen genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu da denir [1].

**Teorem 2.1.1:** $X, Y$ normlu uzaylar $L: X \rightarrow Y$ lineer operatör olsun. Bu durumda $L$ operatörü için sınırlılık ve süreklilik birbirine denktir.

**Lemma 2.1.1:** Lineer pozitif operatörler dizisi monotondur.

**İspat :**Her $x$ için $g(x) \geq f(x)$ ise $g(x) - f(x) \geq 0$ dır. $L$ lineer pozitif operatör olduğundan

$$L(g - f; x) \geq 0$$

ve $L$ lineer olduğundan

$$L(g; x) - L(f; x) \geq 0$$

dır. Dolayısıyla

$$L(g; x) \geq L(f; x)$$

dır. Bu eşitsizlikte lineer pozitif $L$ operatörünün monoton olduğunu gösterir.

Ayrıca $L$ operatörünün monotonluğundan ve lineerliğinden

$$-|f| \leq f \leq |f| \Rightarrow L(-|f|; x) \leq L(f; x) \leq L(|f|; x)$$

$$\Rightarrow -L(|f|; x) \leq L(f; x) \leq L(|f|; x)$$

$$\Rightarrow \; |L(f; x)| \leq L(|f|; x)$$

yazılabilir.

**Tanım 2.1.9:** $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(L_n(f;x))$ dizisine operatör dizisi denir.

**Tanım 2.1.10:** $L_{\boldsymbol{n}}((t-x)^s;x)$ , $\{s=0,1,2,\dots\}$ ifadesine $(L_n)$ operatör dizisinin $s$ −yinci merkezi momenti denir.

**2.2 Lineer Pozitif Operatörler Dizisinin Yakınsaklık Koşulları**

Yaklaşım teorisinin amacı, keyfi bir fonksiyonun daha basit ve kullanışlı olan diğer fonksiyonlar cinsinden bir gösterimini elde etmektir. Bunun için bilinen temel teorem Weierstrass tarafından verilmiştir.

Weierstarss $[a,b]$ aralığında sürekli her $f$ fonksiyonuna bir polinomla yaklaşılabileceğini ifade etmiştir. Bu teoremin ifadesi aşağıdaki gibidir.

**Teorem 2.2.1.(Weierstrass Yaklaşım Teoremi)**

$f$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyon uzayının bir elemanı olmak üzere her $\varepsilon>0$ için $|f(x)-P_n(x)|<\varepsilon$ olacak şekilde $n.$ dereceden bir $\{P_n(x)\}$ polinom dizisi vardır. Başka bir ifade ile $[a,b]$ aralığında sürekli her $f$ fonksiyonu için $f(x)$ e $[a,b]$ aralığında düzgün yakınsayan bir $\{P_n(x)\}$ polinomlar dizisi vardır.

Lineer pozitif operatörlerin yaklaşım özellikleri ile ilgili temel teoremide Korovkin verilmiştir.

$x\in[0,1], 0\le\alpha_{n,k}\le 1$ ve $k<r$ için $\alpha_{n,k}\le\alpha_{n,r}$ olduğunda

$$L_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n} f(\alpha_{n,k})P_{n,k}(x), \qquad P_{n,k}(x)\ge 0$$

lineer pozitif operatörler dizisinin, $n\to\infty$ için $[0,1]$ aralığında sürekli $f$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olabilmesi için gerek ve yeter koşul üç tanedir.

Bunlar:

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(1;x) - 1\|_{C[0,1]} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t;x) - x\|_{C[0,1]} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t^2;x) - x^2\|_{C[0,1]} = 0$$

olup Korovkin teoremi olarak bilinir ve aşağıdaki şekilde ifade edilir.

**Teorem 2.2.2. (Korovkin Teoremi):** $\{L_n\}$ lineer pozitif operatörler dizisi olsun. $\alpha_n(x), \beta_n(x)$ ve $\gamma_n(x)$, $[a,b]$ de düzgün olarak sıfıra yakınsayan diziler olmak üzere her $x \in [a,b]$ için

$$L_n(1,x) = 1 + \alpha_n(x) \tag{2.2.1}$$

$$L_n(t,x) = x + \beta_n(x) \tag{2.2.2}$$

$$L_n(t^2,x) = x^2 + \gamma_n(x) \tag{2.2.3}$$

koşulları sağlanıyorsa bu durumda $L_n(f;x)$, $[a,b]$ aralığı üzerinde $f(x)$ e düzgün yakınsar. Burada $f[a,b]$ de sürekli, $a$ da sağdan $b$ de soldan sürekli ve $\mathbb{R}$ de sınırlı bir fonksiyondur.

**İspat :** $f$ fonksiyonu reel eksende sınırlı olduğundan tüm $x$ ler için

$$|f(x)| \leq M \tag{2.2.4}$$

olacak şekilde $M$ pozitif sayısı vardır. $f \in C[a,b]$ olduğu için $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki $t \in \mathbb{R}$ ve $x \in [a,b]$ için $|t-x| < \delta$ olduğunda

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon \tag{2.2.5}$$

sağlanır.

$x, t \in [a, b]$ olduğunda (2.2.5) eşitsizliği $f$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında düzgün sürekli olmasından dolayı gerçeklenir. $x \in [a, b]\,, t \notin [a, b]$ olduğunda ise (2.2.5) eşitsizliği $f$ fonksiyonu $a$ noktasında soldan ve $b$ noktasında sağdan sürekli bir fonksiyon olduğu için gerçeklenir. (2.2.4) ve (2.2.5) eşitsizliklerinden dolayı her $t \in \mathbb{R}$ ve $x \in [a, b]$ için

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + \frac{M}{\delta^2}(t - x)^2 \tag{2.2.6}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Gerçektende $|t - x| \geq \delta$ olduğunda ise $\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1$ olacağından $\frac{2M}{\delta^2}(t - x)^2 \geq 2M$ sağlanır. Bu durumda $\varepsilon > 0$ için (2.2.4) eşitsizliğinden dolayı

$$\begin{aligned} |f(t) - f(x)| &\leq |f(t)| + |f(x)| \\ &\leq 2M \\ &\leq \frac{2M}{\delta^2}(t - x)^2 + \varepsilon \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Bu da istenilendir. Lineer pozitif operatörlerin özelliklerinden dolayı

$$\|L_n(f; x) - f(x)\|_{C[a,b]} = \|L_n(f(t) - f(x); x) + f(x)L_n(1; x) - f(x)\|_{C[a,b]}$$

$$\leq \|L_n(f(t) - f(x); x)\|_{C[a,b]} + \|f\|_{C[a,b]}\|L_n(1; x) - 1\|_{C[a,b]}$$

$$\leq \|L_n(|f(t) - f(x)|; x)\|_{C[a,b]} + \|f\|_{C[a,b]}\|L_n(1; x) - 1\|_{C[a,b]}$$

eşitsizliği mevcuttur. Bu eşitsizlikteki ikinci terimi (2.2.1) den dolayı sıfıra yakınsar.

Yani ,

$\|f\|_{C[a,b]}\|L_n(1;x)-1\|_{C[a,b]} \leq \varepsilon_n \qquad (n \to \infty$ iken $\varepsilon_n \to 0)$

eşitsizliğini sağlayan $\varepsilon_n$ dizisi vardır. O halde

$$\|L_n(f;x)-f(x)\|_{C[a,b]} \leq \|L_n(|f(t)-f(x)|;x)\|_{C[a,b]} + \varepsilon_n \tag{2.2.8}$$

eşitsizliği sağlanır.(2.2.7) eşitsizliğinden ve lineer pozitif operatörün özelliklerinden dolayı

$$\|L_n(f;x)-f(x)\|_{C[a,b]} \leq L_n\left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2;x\right)$$

$$= \varepsilon L_n(1;x) + \frac{2M}{\delta^2}L_n((t-x)^2;x)$$

$$= \varepsilon L_n(1;x) + \frac{2M}{\delta^2}[L_n(t^2;x) - 2xL_n(t;x) + x^2L_n(1;x)]$$

$$= \varepsilon[L_n(1;x)-1] + \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\{[L_n(t^2;x)-x^2] - 2x[L_n(t;x)-x]$$

$$+x^2[L_n(1;x)-1]\}$$

$$= \varepsilon + \left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}x^2\right)[L_n(1;x)-1] + \frac{2M}{\delta^2}[L_n(t^2;x)-x^2] - \frac{4M}{\delta^2}x[L_n(t;x)-x]$$

elde edilir. $x \in [a,b]$ olduğundan

$$\left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}x^2\right) \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}b^2, \left(\frac{4M}{\delta^2}x \leq \frac{4M}{\delta^2}b\right)$$

dir. O halde

$$C_1 = \frac{2M}{\delta^2} b^2, \qquad C_2 = 2bC_1, \qquad C_3 = \varepsilon + C_1 b^2$$

şeklinde gösterirsek

$$\|L_n(f;x) - f(x)\|_{C[a,b]} \leq \varepsilon + C_1\|L_n(t^2;x) - x^2\| + C_2\|L_n(t;x) - x\| + C_3\|L_n(1;x) - 1\|$$

yazılabilir ve burada $\varepsilon > 0$ istenildiği kadar küçük seçilebilen bir sayıdır.(2.2.1), (2.2.2) ve (2.2.3) eşitsizliklerinden dolayı $n \to \infty$ için

$$\|L_n(|f(t) - f(x)|;x)\| \to 0$$

olur. Bu sonuç ve (2.2.6) eşitsizliğinden yararlanarak

$\|L_n(f;x) - f(x)\| \to 0$ olduğu görülür.

**2.3 Bernstein Operatörleri ve Yaklaşım Özellikleri**

$f \in C[0,1]$ ve $x \in [0,1]$ olsun.

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \tag{2.3.1}$$

biçiminde tanımlı olan lineer pozitif operatörlere Bernstein operatörleri denir [3].

**Teorem 2.3.1:** (2.3.1) ile verilen Bernstein operatörleri $[0,1]$ aralığında sürekli $f$ fonksiyonuna bu aralıkta düzgün yakınsar. Yani $f \in C[0,1]$ ise

$$B_n(f,x) \rightrightarrows f(x) \qquad x \in [0,1]$$

dir.

**İspat:** Öncelikle $B_n(f,x)$ in lineer ve pozitif bir operatör dizisi olduğunu gösterelim. Lineerliği için $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C[0,1]$ için,

$$B_n(af(t)+bg(t);x)=\sum_{k=0}^{n}\left(af\left(\frac{k}{n}\right)+bg\left(\frac{k}{n}\right)\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}af\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}bg\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=a\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}+b\sum_{k=0}^{n}g\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=aB_n(f(t);x)+bB_n(g(t);x)$$

olduğundan $B_n$ lineer bir operatördür. Ayrıca $k=0,1,2,\dots,n\in\mathbb{N}$ ve $x\in[0,1]$ için

$$\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\geq 0 \quad f\geq 0$$

olduğundan $B_n(f,x)\geq 0$ dır. Dolayısıyla $B_n(f,x)$ operatörü pozitiftir.

Korovkin teoremi gereğince

$(i)$ $B_n(1,x)\rightrightarrows 1$

$(ii)$ $B_n(t,x)\rightrightarrows x$

$(iii)$ $B_n(t^2,x)\rightrightarrows x^2$

olduğunu gösterirsek $B_n(f,x)\rightrightarrows f(x)$ olduğunu ispatlamış oluruz. Şimdi bunları gösterelim.

$(i)B_n(1,x)\rightrightarrows 1$ ve $f(x)=1$ için olduğunu görelim.

$$B_n(1,x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= (x + 1 - x)^n$$

$$= 1^n$$

$$= 1$$

$(ii)$ $B_n(t,x) \rightrightarrows x$ olduğunu görelim. Bunun için $f(x) = x$ alırsak

$$B_n(t,x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \qquad (k \to k+1)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(k)!\,(n-k-1)!} x^{k+1} (1-x)^{n-k-1}$$

$$= x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-k-1}$$

$$= x(x + 1 - x)^{n-1}$$

$$= x1^{n-1}$$

$$= x$$

elde edilir.

$(iii) B_n(t^2, x) \rightrightarrows x^2$ olduğunu görelim. Bunun için $f(x) = x^2$ alırsak

$$B_n(t^2, x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k^2}{n^2}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k^2}{n^2}\right) \frac{n!}{k!\,(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right) \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k}$$

yazılır. Bu eşitlikte $k$ yerine $k+1$ yazılırsa

$$B_n(t^2, x) \;\; = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k+1}{n}\right) \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} x^{k+1} (1-x)^{n-k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k+1}{n}\right) \binom{n-1}{k} x^{k+1} (1-x)^{n-k-1}$$

$$= x \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k+1}{n}\right) \binom{n-1}{k} x^{k} (1-x)^{n-k-1}$$

$$= x \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{n}\right) \binom{n-1}{k} x^{k} (1-x)^{n-k-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \binom{n-1}{k} x^{k} (1-x)^{n-k-1} \right]$$

$$= x \left[ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k} (1-x)^{n-k-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \binom{n-1}{k} x^{k} (1-x)^{n-k-1} \right]$$

$$= \; x \left[ \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} x^{k} (1-x)^{n-k-1} \right]$$

$$= x\left[\frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-k)!}x^{k}(1-x)^{n-k-1}\right], \quad (k \to k+1)$$

$$= x\left[\frac{1}{n} + \sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{1}{n}\right)\frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-2)!}x^{k+1}(1-x)^{n-k-2}\right]$$

$$= x\left[\frac{1}{n} + \sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{n-1}{n}\right)\frac{(n-2)!}{k!\,(n-k-2)!}x^{k+1}(1-x)^{n-k-2}\right]$$

$$= x\left[\frac{1}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)x\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}x^{k}(1-x)^{n-k-2}\right]$$

$$= x\left[\frac{1}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)x(x+1-x)^{n-2}\right]$$

$$= x\left[\frac{1}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)x(1)^{n-2}\right]$$

$$= x^2 + \frac{x-x^2}{n}$$

bulunur ve $B_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2$ , $(n \to \infty)$ elde edilir. Dolayısı ile $(i)$, $(ii)$ ve $(iii)$ şartları sağlandığından Korovkin teoremi gereğince $\forall f \in C[0,1]$ için $[0,1]$ aralığında

$$B_n(f,x) \rightrightarrows f(x) \qquad (n \to \infty)$$

bulunur.

## 2.4.Süreklilik Modülü

Lineer pozitif operatörlerin yakınsama hızının belirlenmesi için en önemli kavramlardan birisi olan süreklilik modülü keyfi sınırlı fonksiyonlar için tanımlanabilir. Birçok kullanışlı özelliği sürekli fonksiyonlar için geçerlidir.

**Tanım 2.4.1:**Kabul edelim ki $f, [a, b]$ aralığında tanımlanmış sınırlı bir fonksiyon olsun. Keyfi $\delta > 0$ için

$$\omega(f, \delta) = sup|f(t) - f(x)|, \quad |t - x| < \delta$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona $f$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki süreklilik modülü denir.

Süreklilik modülü yakınsama hızının belirlenmesinde önemli rol oynayan bazı özelliklere sahiptir. Bunların bazılarını ispatlarıyla verelim.

**Lemma 2.4.1:** $M \geq 1$ bir doğal sayı olmak üzere

$$\omega(f; M\delta) \leq M\omega(f, \delta)$$

dır.

**İspat:** $\omega(f, \delta) = sup|f(t) - f(x)|, \quad |t - x| < M\delta$

$$= sup|f(x + h) - f(x)|, \quad (t - x) \to h$$

$$= sup|f(x + h) + f(x + 2h) - f(x + 2h) + f(x + 3h) - f(x + 3h) + \cdots + f(x + kh) - f(x - kh) - f(x)|$$

$$= sup|f(x + Mh) - f(x)|, \quad (h \to Mh) \ \ |h| < \delta$$

$$= sup\left|\sum_{k=0}^{M-1} f(x + (k + 1)h - f(x + kh))\right|, \quad |h| < \delta$$

$$\leq \sum_{k=0}^{M-1} sup|f(x+(k+1)h) - f(x+kh)||h| < \delta$$

$$= M\omega(f,\delta)$$

**Lemma 2.4.2:** $\lambda > 0$ bir reel sayı olmak üzere

$$\omega(f;\lambda\delta) \leq (1+\lambda)\omega(f,\delta)$$

dır.

**İspat** : $[\![\lambda]\!] \leq \lambda < [\![\lambda]\!] + 1$ olduğundan

$\omega(f;\lambda\delta) \leq \omega(f;([\![\lambda]\!]+1)\delta)$

$\omega(f;\lambda\delta) \leq ([\![\lambda]\!]+1)\omega(f,\delta)$ $\{[\![\lambda]\!]+1$doğal sayı olduğundan$\}$

$\omega(f;\lambda\delta) \leq (1+\lambda)\omega(f,\delta)$

yazılabilir.

$\omega(f;\delta)$ tanımından kolaylıkla görülür ki $f$, $[a,b]$ aralığında sınırlı olduğundan

$\forall x,t \in [a,b]$ için

$|f(t)-f(x)| \leq \omega(f;|t-x|)$

$$= \omega\left(f;|t-x|\frac{\delta}{\delta}\right)$$

$$= \omega\left(f;\frac{|t-x|}{\delta}\delta\right) \quad \left\{\frac{|t-x|}{\delta} = \lambda \text{ olursa}\right\}$$

$$\leq \left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right)\omega(f,\delta)$$

dır. Bu özellikler dışında süreklilik modülünün başka özellikleri vardır. Ancak bu tezde bunları vermeyeceğiz.

## 3. Bernstein -Schurer Operatörleri

$p \in \mathbb{N}_0$ , $n \in \mathbb{N}$ ve her $f \in C[0,1+p]$ ve $x \in [0,1]$ olsun.

$B_{n,p}: C([0,1+p]) \to C([0,1+p])$ olmak üzere

$$B_{n,p}(f)(x) := \sum_{k=0}^{n+p} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n+p}{k} x^k (1-x)^{n+p-k}$$

biçiminde tanımlanan operatöre Bernstein Schuer operatörü denir. Bu operatörün lineer ve pozitif olduğu açıktır. Ayrıca bu operatör Korovkin teoreminin koşullarını gerçekler. Bunu görelim.

$e_i(x) = x^i$ , $i = 0,1,2,\ldots$ $\quad x \in [0,1+p]$ olmak üzere

$$B_{n,p}(e_0)(x) = \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} x^k (1-x)^{n+p-k}$$

$$= (x+1-x)^{n+p}$$

$$= 1$$

olur.

$$B_{n,p}(e_1)(x) = \sum_{k=0}^{n+p} \left(\frac{k}{n}\right)\binom{n+p}{k} x^k (1-x)^{n+p-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+p} \left(\frac{n+p}{n+p}\right)\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n+p}{k} x^k (1-x)^{n+p-k}$$

$$= \frac{n+p}{n} \sum_{k=0}^{n+p} \left(\frac{k}{n+p}\right)\binom{n+p}{k} x^k (1-x)^{n+p-k}$$

$$= \frac{n+p}{n} \sum_{k=0}^{n+p} \left(\frac{k}{n+p}\right) \frac{(n+p)!}{k!\,(n+p-k)!} x^k (1-x)^{n+p-k}$$

$$= \frac{n+p}{n} \sum_{k=1}^{n+p} \frac{(n+p-1)!}{(k-1)!\,(n+p-k)!} x^k (1-x)^{n+p-k}$$

Bu eşitlikte $k$ yerine $k+1$ yazılırsa

$$= \frac{n+p}{n} \sum_{k=0}^{n+p-1} \binom{n+p-1}{k} x^{k+1} (1-x)^{n+p-k-1}$$

$$= \frac{n+p}{n} x \sum_{k=0}^{n+p-1} \binom{n+p-1}{k} x^{k} (1-x)^{n+p-k-1}$$

$$= \left(1 + \frac{p}{n}\right) x$$

olarak elde edilir. $f(x) = x^2$ olduğunda

$$B_{n,p}(e_2)(x) = \sum_{k=0}^{n+p} \left(\frac{k^2}{n^2}\right) \binom{n+p}{k} x^k (1-x)^{n+p-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+p} \left(\frac{k^2}{n^2}\right) \left(\frac{(n+p)^2}{(n+p)^2}\right) \binom{n+p}{k} x^k (1-x)^{n+p-k}$$

$$= \frac{(n+p)^2}{n^2} \sum_{k=0}^{n+p} \left(\frac{k^2}{(n+p)^2}\right) \binom{n+p}{k} x^k (1-x)^{n+p-k}$$

$$= \frac{(n+p)^2}{n^2} \sum_{k=0}^{n+p} \left(\frac{k^2}{(n+p)^2}\right) \frac{(n+p)!}{k!\,(n+p-k)!} x^k (1-x)^{n+p-k}$$

$$= \frac{(n+p)^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n+p} \left(\frac{k}{n+p}\right) \frac{(n+p-1)!}{(k-1)!\,(n+p-k)!} x^k (1-x)^{n+p-k}$$

olarak elde edilir. Bu eşitlikte $k$ yerine $k+1$ yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$= \frac{(n+p)^2}{n^2} \sum_{k=0}^{n+p-1} \left(\frac{k+1}{n+p}\right) \frac{(n+p-1)!}{k!\,(n+p-k-1)!} x^{k+1} (1-x)^{n+p-k-1}$$

$$= \frac{(n+p)^2}{n^2} \left\{ \sum_{k=0}^{n+p-1} \left(\frac{k}{n+p}\right) \frac{(n+p-1)!}{k!\,(n+p-k-1)!} x^{k+1} (1-x)^{n+p-k-1} \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{n+p-1} \left(\frac{1}{n+p}\right) \frac{(n+p-1)!}{k!\,(n+p-k-1)!} x^{k+1} (1-x)^{n+p-k-1} \right\}$$

$$= \frac{(n+p)^2}{n^2} \left\{ \sum_{k=0}^{n+p-1} \left(\frac{k}{n+p}\right) \frac{(n+p-1)!}{k!\,(n+p-k-1)!} x^{k+1} (1-x)^{n+p-k-1} \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{n+p}\right) x \sum_{k=0}^{n+p-1} \binom{n+p-1}{k} x^k (1-x)^{n+p-k-1} \right\}$$

$$= \frac{(n+p)^2}{n^2} \left\{ \sum_{k=1}^{n+p-1} \left(\frac{1}{n+p}\right) \frac{(n+p-1)!}{(k-1)!\,(n+p-k-1)!} x^{k+1} (1-x)^{n+p-k-1} \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{n+p}\right) x \right\}$$

olur. Bu eşitlikte $k$ yerine $k+1$ yazılırsa

$$= \frac{(n+p)^2}{n^2}\left\{\sum_{k=0}^{n+p-2}\left(\frac{1}{n+p}\right)\frac{(n+p-1)!}{k!\,(n+p-k-2)!}x^{k+2}(1-x)^{n+p-k-2}+\left(\frac{1}{n+p}\right)x\right\}$$

$$= \frac{(n+p)^2}{n^2}\left\{\frac{x^2}{n+p}\sum_{k=0}^{n+p-2}\frac{(n+p-1)(n+p-2)!}{k!\,(n+p-k-2)!}x^{k}(1-x)^{n+p-k-2}+\left(\frac{1}{n+p}\right)x\right\}$$

$$= \frac{(n+p)^2}{n^2}\left\{\frac{(n+p-1)x^2}{n+p}\sum_{k=0}^{n+p-2}\frac{(n+p-2)!}{k!\,(n+p-k-2)!}x^{k}(1-x)^{n+p-k-2}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{n+p}\right)x\right\}$$

$$= \frac{(n+p)^2}{n^2}\left\{\frac{(n+p-1)x^2}{n+p}\sum_{k=0}^{n+p-2}\binom{n+p-2}{k}x^{k}(1-x)^{n+p-k-2}+\left(\frac{1}{n+p}\right)x\right\}$$

$$= \frac{(n+p)^2}{n^2}\left\{\frac{(n+p-1)x^2}{n+p}+\frac{1}{n+p}x\right\}$$

$$= \frac{(n+p)^2}{n^2}\left\{x^2+\frac{1}{n+p}(x-x^2)\right\}$$

$$= \left(\frac{n+p}{n}\right)^2 x^2+\frac{n+p}{n^2}(x-x^2)$$

olarak bulunur.

Böylece

$$\lim_{n\to\infty} B_{n,p}(1) = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} B_{n,p}(e_1) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{n}\right)x \ = x$$

$$\lim_{n\to\infty} B_{n,p}(e_2) = \left(\frac{n+p}{n}\right)^2 x^2 + \frac{n+p}{n^2}(x - x^2) = x^2$$

olduğu görülür.

Bu nedenle korovkin teoremi gereğince her $f \in [0,1+p]$ için

$$\lim_{n\to\infty} B_{n,p}(f) = f$$

düzgün olarak yakınsadığı görülmüş olur.

$\varphi_x(t) = t - x \quad x,t \in [0,1+p]$ fonksiyonu üzerinden $B_{n,p}$ operatörlerinin yakınsaklık hızının oranı belirlenebilir. Gerçektende

$$\begin{aligned}
B_{n,p}(\varphi_x)(x) &= B_{n,p}(e_1 - x.1)(x) \\
&= B_{n,p}(e_1)(x) - xB_{n,p}(1)(x) \\
&= \left(1 + \frac{p}{n}\right)x - x \\
&= x + \frac{p}{n}x - x \\
&= \frac{p}{n}x
\end{aligned}$$

ve

$$B_{n,p}({\varphi_x}^2)(x) = B_{n,p}((t-x)^2)(x)$$

$$= B_{n,p}(t^2 - 2xt + x^2)(x)$$

$$= B_{n,p}(e_2)(x) - 2xB_{n,p}(e_1)(x) + x^2 B_{n,p}(1)(x)$$

$$= \left(\frac{n+p}{n}\right)^2 x^2 + \frac{n+p}{n^2}(x-x^2) - 2x\left(1+\frac{p}{n}\right)x + x^2$$

$$= \frac{p^2}{n^2}x^2 + \frac{n+p}{n^2}x(1-x) \qquad (3.1.1)$$

olurlar.

**Teorem 3.1.1**: $f \in C([0,1+p])$ ve $x \in [0,1]$ için

$$\left|B_{n,p}(f)(x) - f(x)\right| \leq 2\omega\left(f, \sqrt{\frac{p^2x^2 + (n+p)x(1-x)}{n^2}}\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\delta = \sqrt{\frac{p^2x^2+(n+p)x(1-x)}{n^2}}$ dır.

**ispat:**

$$\left|B_{n,p}(f)(x) - f(x).1\right| = \left|B_{n,p}(f)(x) - f(x)B_{n,p}(1)(x)\right|$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n+p} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n+p}{k}x^k(1-x)^{n+p-k} - f(x)\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}x^k(1-x)^{n+p-k}\right|$$

$$= \left|\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}x^k(1-x)^{n+p-k}\left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right]\right|$$

Bu ifade Bernstein Schuer operatörünün monotonluğundan aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\leq \sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}x^k(1-x)^{n+p-k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|$$

Şimdi eşitsizliğin sağ tarafının supremumu alınırsa

$$= \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} x^k (1-x)^{n+p-k} \sup_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right|$$

elde edilir.

Süreklilik modülü tanımı kullanılırsa

$$\left|B_{n,p}(f)(x) - f(x)\right| \leq \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} x^k (1-x)^{n+p-k} \omega\left(f, \left|\frac{k}{n} - x\right|\right)$$

yazılabilir. Buradan da

$$= \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} x^k (1-x)^{n+p-k} \omega\left(f, \left|\frac{k}{n} - x\right| \frac{\delta}{\delta}\right)$$

yazılabilir. Eğer süreklilik modülünün özelliği kullanılırsa

$$\left|B_{n,p}(f)(x) - f(x)\right| \leq \omega(f,\delta) \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} x^k (1-x)^{n+p-k} \left(1 + \frac{1}{\delta}\left|\frac{k}{n} - x\right|\right)$$

$$= \omega(f,\delta) \left\{ \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} x^k (1-x)^{n+p-k} + \frac{1}{\delta} \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} x^k (1-x)^{n+p-k} \left|\frac{k}{n} - x\right| \right\}$$

$$= \omega(f,\delta) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta} \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} x^k (1-x)^{n+p-k} \left|\frac{k}{n} - x\right| \right\}$$

olur. Bu ifadeye  Couchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} x^k (1-x)^{n+p-k} \left|\frac{k}{n} - x\right| .1$$

$$\leq \left[\sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} x^k (1-x)^{n+p-k} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2\right]^{1/2} \left[\sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} x^k (1-x)^{n+p-k} (1)^2\right]^{1/2}$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} x^k (1-x)^{n+p-k} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2\right]^{1/2} .1$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} x^k (1-x)^{n+p-k} \left(\frac{k^2}{n^2} - 2x\frac{k}{n} + x^2\right)\right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{p^2x^2 + (n+p)x(1-x)}{n^2}\right]^{1/2}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece

$$\left|B_{n,p}(f)(x) - f(x\right| \leq \ \omega(f,\delta)\left\{1 + \frac{1}{\delta}\left[\frac{p^2x^2 + (n+p)x(1-x)}{n^2}\right]^{1/2}\right\}$$

olarak elde edilir.

$\delta = \sqrt{\frac{p^2x^2+(n+p)x(1-x)}{n^2}}$ seçilirse;

$$\left|B_{n,p}(f)(x) - f(x)\right| \leq 2\omega\left(f, \sqrt{\frac{p^2x^2 + (n+p)x(1-x)}{n^2}}\right)$$

elde edilir. Bu da gösterilmek istenendir.

**Teorem:3.1.2:** Eğer $f$ türevlenebilir ve $f' \in C([0,1+p])$ ise o taktirde

$$\left|B_{n,p}(f)(x)-f(x)\right| \le \frac{\rho}{n}|f'(x)|x$$

$$+2\sqrt{\frac{p^2x^2+(n+p)x(1-x)}{n^2}}\,\omega\left(f',\sqrt{\frac{p^2x^2+(n+p)x(1-x)}{n^2}}\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat:** Diferensiyel hesabın ortalama değer teoremi gereğince

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=f'(\xi)$$

$$\Rightarrow f(t)=f(x)+f'(\xi)(t-x)$$

olduğunu biliyoruz. Ayrıca

$$f(t)=f(x)+f'(\xi)(t-x)+(f(t)-f(x)-f'(\xi)(t-x))$$

ya da

$$f(t)-f(x)=f'(\xi)(t-x)+(f(t)-f(x)-f'(\xi)(t-x))$$

yazılabilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafına Bernstein-Schuer operatörü uygulanırsa

$$B_{n,p}(f(t)-f(x);x)=B_{n,p}(f'(x)(t-x)+\big(f(t)-f(x)-f'(x)(t-x)\big);x)$$

olur.

Bernstein –Schuer operatörünün lineerlik özelliğinden

$$B_{n,p}(f(t)-f(x);x)=B_{n,p}(f'(x)(t-x);x)+B_{n,p}\big(f(t)-f(x)-f'(x)(t-x)\big);x)$$

$$B_{n,p}(f(t)-f(x);x)=f'(x)B_{n,p}\big((t-x);x\big)+B_{n,p}\left((t-x)\left(\frac{f(t)-f(x)}{t-x}-f'(x)\right);x\right)$$

yazılabilir. Rolle teoreminden ise

$$B_{n,p}(f(t)-f(x);x)=f'(x)\frac{\rho}{n}x+B_{n,p}\big((t-x)(f'(\xi)-f'(x));x\big)$$

yazılabilir. Böylece

$$\left|B_{n,p}(f(t)-f(x);x)\right|=\left|f'(x)\frac{\rho}{n}x+B_{n,p}\big((t-x)(f'(\xi)-f'(x));x\big)\right|$$

$$\leq\left|f'(x)\frac{\rho}{n}x\right|+\left|B_{n,p}\big((t-x)(f'(\xi)-f'(x));x\big)\right|$$

$$=|f'(x)|\frac{\rho}{n}x+B_{n,p}(|t-x||f'(\xi)-f'(x)|;x)$$

$$=|f'(x)|\frac{\rho}{n}x+B_{n,p}(|t-x|sup|f'(\xi)-f'(x)|;x)$$

şeklinde düzenlenebilir.

Bu son eşitsizlikteki $B_{n,p}(|t-x|sup|f'(\xi)-f(x)|;x)$ ifadesini düzenleyelim. Süreklilik modülü tanımı ve özelliği gereğince $|\xi-x|<\delta$ olmak üzere

$$B_{n,p}(|t-x|sup|f'(\xi)-f(x)|;x)=B_{n,p}\big(|t-x|\omega(f';|\xi-x|)\big)$$

$$=B_{n,p}\left(|t-x|\omega\left(f';|\xi-x|\left(\frac{\delta}{\delta}\right)\right)\right)$$

$$=\omega(f',\delta)B_{n,p}\left(|t-x|\left(1+\frac{|\xi-x|}{\delta}\right);x\right)$$

$$= \omega(f', \delta)\left\{\left[B_{n,p}(|t-x|;x)\right.\right.$$

$$\left.\left. + B_{n,p}\left[\left(|t-x|\frac{|\xi - x|}{\delta}\right);x\right]\right]\right\} \tag{3.2.2}$$

yazılabilir. Couchy Schwarz eşitsizliği gereğince

$$B_{n,p}(|t-x|;x) \leq \sqrt{B_{n,p}(1^2;x)}\sqrt{B_{n,p}((t-x)^2;x)}$$

$$= \sqrt{B_{n,p}((t-x)^2;x)}$$

$$= \sqrt{\frac{p^2x^2 + (n+p)x(1-x)}{n^2}}$$

olur.

$$B_{n,p}\left[|t-x|\frac{|\delta - x|}{\delta};x\right] = \frac{1}{\delta}B_{n,p}[|t-x||\xi - x|;x]$$

ifadesi için $|\xi - x| \leq |t-x| \leq \delta$ olduğundan

$$B_{n,p}\left(|t-x|\frac{|\xi - x|}{\delta};x\right) \leq B_{n,p}(|t-x|;x)$$

$$\leq \sqrt{\frac{p^2x^2 + (n+p)x(1-x)}{n^2}}$$

olup bu değerler (3.2.2) de yerine yazılırsa

$$\left|B_{n,p}(f(t)-f(x);x)\right| \leq |f'(x)|\frac{\rho}{n}x$$

$$+2\sqrt{\frac{p^2x^2+(n+p)x(1-x)}{n^2}}\,\omega\left(f';\sqrt{\frac{p^2x^2+(n+p)x(1-x)}{n^2}}\right)$$

elde edilir ve bu gösterilmek istenendir.

# 4. Bernstein-Cheney-Sharma Operatörleri

Binom teoreminin bir genelleştirilmesi olan Jensen eşitsizliği yardımı ile aşağıdaki özdeşlikte yazılabilir.

$$(x+y+nt)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x(x+kt)^{k-1}(y+(n-k)t)^{n-k} \tag{4.1.1}$$

$$(1+nt)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x(x+kt)^{k-1}(1-x+(n-k)t)^{n-k} \tag{4.1.2}$$

Bu özellikler yardımı ile aşağıdaki $G_n(f)(x)$ operatörü tanımlanabilir.

$f \in C([0,1])$ , $x \in [0,1]$ ve her bir $n \in \mathbb{N}$ için $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitif reel sayı dizisini göz önüne alalım ve

$G_n: C[0,1] \to C[0,1]$ için

$$G_n(f)(x) := (1+nt_n)^{-n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x(x+kt_n)^{k-1}(1-x+(n-k)t_n)^{n-k} \tag{4.1.3}$$

operatörünü tanımlayalım.

Bu operatörler Bernstein Cheney Sharma operatörleri olarak adlandırılır ve $(t_n) = 0$ alınması ile elde edilen Bernstein operatörlerinin farklı bir genelleştirilmesi olarak bilinir [4].

$G_n$ operatör dizilerin yakınsaklığının incelenmesinde kolaylık sağlaması bakımından kulanışlı olan

$$S(j,n,p,x,y) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x+kt_p\right)^{k+j-1} \left(y+(n-k)t_p\right)^{n-k} \tag{4.1.4}$$

ifadesini tanımlayalım. Burada $x, y \in [0,1], p \in \mathbb{N}$ ve $j = 0,1, \dots, n$ dir.

Şimdi de $S(j, n, p, x, y)$ nin sağladığı bazı Lemmaları ispatlayalım.

**Lemma(4.1.1)**: $S(j, n, p, x, y)$ ifadesi

$$kt_p S(j-1, n, p, x, y) = nt_p S(j, n-1, p, x+t_p, y) \tag{4.1.5}$$

eşitliğini sağlar.

ispat: (4.1.4) tanımından faydalanarak

$$kt_p S(j-1, n, p, x, y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} kt_p \left(x + kt_p\right)^{k+j-2} \left(y + (n-k)t_p\right)^{n-k}$$

yazılabilir. Bu eşitliğin sağ tarafında $k$ yerine $k+1$ yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$kt_p S(j-1, n, p, x, y) = \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)t_p \binom{n}{k+1} \left(x + (k+1)t_p\right)^{k+j-1}$$

$$\times (y + (n-k-1)t_p)^{n-k-1}$$

$$= t_p \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \frac{n!}{(n-k-1)!\,(k+1)!} \left(x + t_p + kt_p\right)^{k+j-1} (y + (n-k-1)t_p)^{n-k-1}$$

$$= t_p \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \frac{n(n-1)!}{(n-k-1)!\,(k+1)k!} \left(x + t_p + kt_p\right)^{k+j-1} \left(y + (n-k-1)t_p\right)^{n-k-1}$$

$$= nt_p \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!\,k!} \left(x + t_p + kt_p\right)^{k+j-1} (y + (n-k-1)t_p)^{n-k-1}$$

$$= nt_p \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(x + t_p + kt_p\right)^{k+j-1} (y + (n-k-1)t_p)^{n-k-1}$$

$$= nt_p S\left(j, n-1, p, x + t_p, y\right)$$

eşitliği elde edilir. Buradan da

$$kt_p S(j-1, n, p, x, y) = nt_p S\left(j, n-1, p, x + t_p, y\right) \quad (4.1.6)$$

yazılabilir ki bu gösterilmek istenendir.

O halde (4.1.6) eşitliğini (4.1.4) de yerine yazılırsa teorem ispatlanmış olur.

**Teorem**: (4.1.2) ifadesi

$$S(j, n, p, x, y) = xS(j-1, n, p, x, y) + nt_p S\left(j, n-1, p, x + t_p, y\right) \quad (4.1.7)$$

eşitliğini sağlar.

**İspat**: (4.1.4) eşitliği gereğince

$$S(j-1, n, p, x, y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x + kt_p\right)^{k+j-2} \left(y + (n-k)t_p\right)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x + kt_p)^{k+j-1} \left(y + (n-k)t_p\right)^{n-k} \frac{1}{x + kt_p}$$

$$= \left(\frac{1}{x + kt_p}\right) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x + kt_p)^{k+j-1} \left(y + (n-k)t_p\right)^{n-k}$$

$$= \left(\frac{1}{x + kt_p}\right) S(j, n, p, x, y)$$

yazılabilir. Daha sonra $S(j, n, p, x, y)$ yalnız bırakıldığında

$$S(j,n,p,x,y) = \left(x + kt_p\right)S(j-1,n,p,x,y)$$

$$= xS(j-1,n,p,x,y) + kt_pS(j-1,n,p,x,y)$$

eşitliği elde edilir.

**Lemma(4.1.3) :** $S(j,n,p,x,y)$ ifadesi

$$xS(0,n,p,x,y) = (x + y + nt_p)^n \tag{4.1.8}$$

eşitliğini sağlar.

**İspat:** Jensen eşitliği ve (4.1.4) tanımı gereğince

$$xS(0,n,p,x,y) = x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x+t_p)^{k+j-1}(y+(n-k)t_p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x\left(x+t_p\right)^{k+j-1}(y+(n-k)t_p)^{n-k}$$

$$= (x + y + nt_p)^n$$

yazılır. Böylece ispat tamamlanır.

**Lemma(4.1.4):** $S(j,n,p,x,y)$ ifadesi için

$$S(1,n,p,x,y) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k!\left(t_p\right)^k\left(x+y+nt_p\right)^{n-k} \tag{4.1.9}$$

dir.

**İspat:** Teorem (4.1.2) den dolayı

$$S(1,n,p,x,y) = xS(0,n,p,x,y) + nt_pS(1,n-1,p,x+t_p,y)$$

yazılabilir. O halde bu eşitlik ardışık olarak uygulanırsa

$$S(1,n,p,x,y) = xS(0,n,p,x,y) + nt_pS(1,n-1,p,x+t_p,y)$$

$$= \left(x+y+nt_p\right)^n + nt_p[\left(x+t_p\right)S\left(0,n-1,p,x+t_p,y\right)$$

$$+(n-1)t_pS\left(1,n-2,p,x+2t_p,y\right)]$$

$$= (x+y+nt_p)^n + nt_p\left(x+t_p\right)S\left(0,n-1,p,x+t_p,y\right)$$

$$+n(n-1)(t_p)^2\, S\left(1,n-2,p,x+2t_p,y\right)$$

$$= \left(x+y+nt_p\right)^n + \ nt_p\left(x+t_p+y+(n-1)t_p\right)^{n-1}$$

$$+n(n-1){t_p}^2\left[\left(x+2t_p\right)S\left(0,n-2,x+2t_p,p,y\right) + (n-2)t_pS\left(1,n-3,p,x+3t_p,y\right)\right]$$

$$= \left(x+y+nt_p\right)^n + \ nt_p\left(x+y+nt_p\right)^{n-1} + n(n-1){t_p}^2\left(x+y+nt_p\right)^{n-2}$$

$$+n(n-1)(n-2){t_p}^3S(1,n-3,p,x+3t_p,y)$$

$$\vdots$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} k!\,{t_p}^k\left(x+y+nt_p\right)^{n-k}$$

bulunur. Bu da ispatlanmak istenilendir.

**Teorem 4.1.5:** (4.1.4) olarak tanımlanan ifadede $j = 1$ alınırsa

$$S(1,n,p,x,y) = \int_0^\infty exp(-s)\left(x+y+nt_p+st_p\right)^n ds \tag{4.1.10}$$

şeklinde integral gösterimi elde edilir [4].

**İspat:** İspat için faktöriyel fonksiyonu olarak da bilinen Gama fonksiyonun tanımından yararlanabilir.

$$\Gamma(k+1) = k! = \int_0^\infty s^k exp(-s) ds \tag{4.1.11}$$

eşitliği vardır. Bu eşitlik kullanılarak $S(1,n,p,x,y)$ ifadesi (4.9) ve (4.11) eşitlikleri yardımıyla aşağıdaki gibi yazılır.

$$S(1,n,p,x,y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! \left(t_p\right)^k \left(x+y+nt_p\right)^{n-k}$$

$$S(1,n,p,x,y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(t_p\right)^k \left(x+y+nt_p\right)^{n-k} \int_0^\infty s^k exp(-s) ds$$

toplam sonlu olduğunan

$$S(1,n,p,x,y) = \int_0^\infty \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(st_p\right)^k \left(x+y+nt_p\right)^{n-k} exp(-s) ds$$

şeklinde yazılabilir.Bu ifadede Lemma 4.1.3 kullanılırsa

$$S(1,n,p,x,y) = \int_0^\infty \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(st_p\right)^k \left(x+y+nt_p\right)^{n-k}\right] exp(-s) ds$$

$$= \int_0^\infty \left(x+y+nt_p+st_p\right)^n exp(-s) ds$$

olarak elde edilir.

**Lemma 4.1.6:** $S(j,n,p,x,y)$ ifadesi için

$$S(2,n,p,x,y) = \sum_{k=0}^{n}\left(x+kt_p\right)\binom{n}{k}k!\,{t_p}^k S\left(1,n-k,p,x+kt_p,y\right) \qquad (4.1.12)$$

eşitliği sağlanır.

**İspat:** Teorem 4.1.2 de verilen (4.7) eşitliği kullanılarak $S(2,n,p,x,y)$ aşagıdaki gibi yazılır ve bu yazılım n kez tekrar edilirse teorem ispatlanır ve (4.8) eşitliği n kez tekrar edilirse lemma ispatlanır. Gerçektende

$$S(2,n,p,x,y) = xS(1,n,p,x,y) + nt_pS(2,n-1,p,x+t_p,y)$$

$$= \; xS(1,n,p,x,y) + nt_pS(2,n-1,p,x+t_p,y)$$

$$= x\,S(1,n,p,x,y) + nt_p\big[\left(x+t_p\right)S\left(1,n-1,p,x+t_p,y\right)$$

$$+(n-1)t_pS(2,n-2,x+2t_p,y)\big]$$

$$= \; x\,S(1,n,p,x,y) + \; nt_p\left(x+t_p\right)S\left(1,n-1,p,x+t_p,y\right) + n(n-1){t_p}^2S(2,n-2,x+$$
$$2t_p,y)$$

$$= x\,S(1,n,p,x,y) + \; nt_p\left(x+t_p\right)S\left(1,n-1,p,x+t_p,y\right) + n(n-1){t_p}^2$$

$$\times\left[\left(x+2t_p\right)S\left(1,n-2,p,x+2t_p,y\right) + (n-2)t_pS(2,n-3,p,x+3t_p)\right]$$

$$\vdots$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(x+kt_p\right)\binom{n}{k}k!\,{t_p}^k\,S(1,n-k,p,x+kt_p,y)$$

olarak bulunur.

**Teorem 4.1.7:** $S(j,n,p,x,y)$ ifadesinde $j=2$ için

$$S(2,n,p,x,y)=\int_0^\infty\int_0^\infty exp(-s-u)(x(x+y+nt_p+st_p+ut_p)^n + n{t_p}^2u(x+y+nt_p+st_p+ut_p)^{n-1})dsdu \qquad (4.1.13)$$

eşitliği sağlanır.

**İspat:** İspat için yine Gama fonksiyonun faktöriyel özelliklerinden faydalanalım.

$k!=\int_0^\infty s^k exp(-s)ds$ eşitliği Lemma 4.1.4 de yerine yazılırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$S(2,n,p,x,y)=\sum_{k=0}^{n}(x+kt_p)\binom{n}{k}k!\,{t_p}^kS(1,n-k,p,x+kt_p,y)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(x+kt_p)\binom{n}{k}\int_0^\infty exp(-s)s^kds(t_p)^kS(1,n-k,p,x+kt_p,y)\,ds$$

$$=\int_0^\infty\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}exp(-s)\left(st_p\right)^k(x+kt_p)\;S\left(1,n-k,p,x+kt_p,y\right)ds$$

$$=\int_0^\infty\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}exp(-s)\left(st_p\right)^k(x+kt_p)$$

$$\times\int_0^\infty exp(-u)(x+kt_p+y+(n-k)t_p+ut_p)^{n-k}duds$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty exp(-s-u)(x+kt_p)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(st_p\right)^k\left(x+y+nt_p+ut_p\right)^{n-k}dsdu$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty exp(-s-u)\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(st_p\right)^k \left(x+y+nt_p+ut_p\right)^{n-k}\right](x+kt_p)dsdu$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty exp(-s-u)\left[x\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(st_p\right)^k \left(x+y+nt_p+ut_p\right)^{n-k}\right.$$

$$\left.+t_p\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(st_p\right)^k \left(x+y+nt_p+ut_p\right)^{n-k} k\right] dsdu$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty exp(-s-u)\left[x(x+y+nt_p+ut_p+st_p)^n\right.$$

$$\left.+t_p\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k(k-1)!\,(n-k)!} k\left(st_p\right)^k \left(x+y+nt_p+ut_p\right)^{n-k}\right] dsdu$$

olur.

Bu son eşitliğin toplam kısmında $k \to k+1$ yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$S(2,n,p,x,y) = \int_0^\infty \int_0^\infty exp(-s-u)\left[x(x+y+nt_p+ut_p+st_p)^n\right.$$

$$\left.+nt_p\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \left(st_p\right)^{k+1} \left(x+y+nt_p+ut_p\right)^{n-k-1}\right] dsdu$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty exp(-s-u)\left[x(x+y+nt_p+ut_p+st_p)^n\right.$$

$$\left.+nst_p{}^2\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(st_p\right)^k \left(x+y+nt_p+ut_p\right)^{n-k-1}\right] dsdu$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty exp(-s-u)\left[x(x+y+nt_p+ut_p+st_p)^n\right.$$

$+nst_p{}^2(x+y+nt_p+ut_p+st_p)^{n-1}\big]dsdu$

olarak elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

**Teorem 4.1.8** : Eğer $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ler pozitif reel sayı dizileri ve

$$\lim_{n\to\infty} nt_n = 0$$

ise bu durumda her $f \in C([0,1])$ için

$$\lim_{n\to\infty} G_n(f) = f$$

dir.Yani $G_n(f)$, $f$ ye $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsaktır.

**İspat:** İspat için Korovkin teoremi kullanılacak bunun için

$i) G_n(1)(x) \rightrightarrows 1$

$ii) G_n(e_1)(x) \rightrightarrows x$

$iii) G_n(e_2)(x) \rightrightarrows x^2$

olduğu gösterilirse $G_n(f) \rightrightarrows f$ olduğunu gösterilmiş olur. Bunları göstermek için

$$G_n(f)(x) = (1+nt_n)^{-n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x(x+kt_n)^{k-1}(1-x+(n-k)t_n)^{n-k}$$

tanımından yararlanılırsa ve $f(x) = 1$ için

$$G_n(1)(x) = (1+nt_n)^{-n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x(x+kt_n)^{k-1}(1-x+(n-k)t_n)^{n-k}$$

$$= (1+nt_n)^{-n}(1+nt_n)^n$$

$$= 1$$

olarak elde edilir. Şimdi $f(x) = x$ ise bu durumda

$$G_n(e_1)(x) = (1 + nt_n)^{-n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} x(x + kt_n)^{k-1}(1 - x + (n-k)t_n)^{n-k}$$

$$= x(1 + nt_n)^{-n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \frac{k}{n} (x + kt_n)^{k-1}(1 - x + (n-k)t_n)^{n-k}$$

$$= x(1 + nt_n)^{-n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!} (x + kt_n)^{k-1}(1 - x + (n-k)t_n)^{n-k}$$

$$= x(1 + nt_n)^{-n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} (x + kt_n)^{k-1}(1 - x + (n-k)t_n)^{n-k}$$

yazılabilir. Bu eşitlikte sağ tarafta $k$ yerine $k + 1$ yazılırsa

$$= x(1 + nt_n)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (x + (k+1)t_n)^{k}(1 - x + (n-k-1)t_n)^{n-k-1}$$

$$= x(1 + nt_n)^{-n} S(1, n-1, n, x + t_n, 1 - x)$$

$$G_n(e_1)(x) = x(1 + nt_n)^{-n} S(1, n-1, n, x + t_n, 1 - x) \qquad (4.14)$$

olur.

$S(1, n, p, x, y) = \int_0^\infty exp(-s)(x + y + nt_p + st_p)^n ds$ eşitliği (4.14) eşitliğinde yerine yazılırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$G_n(e_1)(x) = x(1 + nt_n)^{-n} \int_0^\infty exp(-s)(x + t_n + 1 - x + (n-1)t_n + st_n)^{n-1} ds$$

$$= x(1+nt_n)^{-n}\int_0^{\infty} exp(-s)(1+nt_n+st_n)^{n-1}ds$$

$$=\frac{x}{(1+nt_n)^n}\int_0^{\infty} exp(-s)(1+nt_n+st_n)^{n-1}ds$$

$$=\frac{x}{1+nt_n}\int_0^{\infty} exp(-s)\left(\frac{1+nt_n+st_n}{1+nt_n}\right)^{n-1} ds$$

$$=\frac{x}{1+nt_n}\int_0^{\infty} exp(-s)\left(1+\frac{st_n}{1+nt_n}\right)^{n-1} ds$$

olarak elde edilir.

Diğer taraftan

$(1+u)^{n-1} \leq exp((n-1)u)$ eşitsizliğinde $u=\frac{st_n}{1+nt_n}$ olarak alınırsa

$$G_n(e_1)(x)=\frac{x}{1+nt_n}\int_0^{\infty} exp(-x)\left(1+\frac{st_n}{1+nt_n}\right)^{n-1} ds$$

$$\leq\frac{x}{1+nt_n}\int_0^{\infty} exp(-s)exp((n-1)\frac{st_n}{1+nt_n})ds$$

$$=\frac{x}{1+nt_n}\int_0^{\infty} exp\left(\frac{-s-snt_n+n+nst_n-st_n}{1+nt_n}\right)ds$$

$$=\frac{x}{1+nt_n}\int_0^{\infty} exp\left(-s\left(\frac{1+t_n}{1+nt_n}\right)\right)ds$$

$$=\frac{x}{1+nt_n}\left(-\frac{1+nt_n}{1+t_n}\right)exp\left(-s\left(\frac{1+t_n}{1+nt_n}\right)\right)\Big|_a^b$$

$$=\frac{x}{1+t_n}$$

olur. Ayrıca

$$\frac{x}{1+nt_n} \le \frac{x}{1+nt_n}\int_0^\infty exp(-s)\left(1+\frac{st_n}{1+nt_n}\right)^{n-1} ds = G_n(e_1)(x)$$

Olduğundan

$$\frac{x}{1+nt_n} \le G_n(e_1)(x) \le \frac{x}{1+t_n}$$

eşitsizliği elde edilir.

$\lim_{n\to\infty} nt_n = 0$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} G_n(e_1) = x$ olur.

$G_n(e_2)(x)$ yi hesaplamak için$f(x) = x^2$alınarak benzer işlemler yapılırsa

$$G_n(e_2)(x) = (1+nt_n)^{-n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{k}{n}\right)^2 x(x+kt_n)^{k-1}(1-x+(n-k)t_n)^{n-k}$$

$$= (1+nt_n)^{-n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{n.(n-1)!}{k.(k-1)!\,(n-k)!} x(x+kt_n)^{k-1}(1-x+(n-k)t_n)^{n-k}$$

$$= (1+nt_n)^{-n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} x(x+kt_n)^{k-1}(1-x+(n-k)t_n)^{n-k}$$

olur. Bu eşitliğin sağ tarafında $k$ yerine $k+1$ yazılırsa

$$= (1+nt_n)^{-n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{n}\frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} x(x+(k+1)t_n)^{k}$$

$$\times (1-x+(n-k-1)t_n)^{n-k-1}$$

$$= (1+nt_n)^{-n}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!}x(x+(k+1)t_n)^k(1-x\right.$$

$$+(n-k-1)t_n)^{n-k-1}$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!}x(x+(k+1)t_n)^k(1-x+(n-k-1)t_n)^{n-k-1}\right\}$$

$$= (1+nt_n)^{-n}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\binom{n-1}{k}x(x+(k+1)t_n)^k(1-x+(n-k-1)t_n)^{n-k-1}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x(x+(k+1)t_n)^k(1-x+(n-k-1)t_n)^{n-k-1}\right\}$$

$$= (1+nt_n)^{-n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\binom{n-1}{k}x(x+(k+1)t_n)^k(1-x+(n-k-1)t_n)^{n-k-1}$$

$$+\frac{1}{n}G_n(e_1)(x)$$

olur. Bu ifadede gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$=\frac{1}{n}G_n(e_1)(x)+(1+nt_n)^{-n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n}\binom{n-1}{k}x(x+(k+1)t_n)^k$$

$$\times(1-x+(n-k-1)t_n)^{n-k-1}$$

$$=\frac{1}{n}G_n(e_1)(x)+(1+nt_n)^{-n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n}\frac{(n-1)(n-2)!}{k(k-1)!\,(n-1-k)!}x(x+(k+1)t_n)^k$$

$$\times(1-x+(n-k-1)t_n)^{n-k-1}$$

$$= \frac{1}{n} G_n(e_1)(x) + (1 + nt_n)^{-n} \frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-2)!}{(k-1)!\,(n-1-k)!} x(x + (k+1)t_n)^k$$

$$\times (1 - x + (n-k-1)t_n)^{n-k-1}$$

olarak elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafında $k$ yerine $k+1$ yazılırsa

$$= \frac{1}{n} G_n(e_1)(x) + (1 + nt_n)^{-n} \frac{n-1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x(x + (k+2)t_n)^{k+1}$$

$$\times (1 - x + (n-k-2)t_n)^{n-k-2}$$

şeklinde yazılabilir. Eğer

$$S(j,n,p,x,y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x + kt_p\right)^{k+j-1} \left(y + (n-k)t_p\right)^{n-k}$$

eşitliği kullanılırsa

$$G_n(e_2) = \frac{1}{n} G_n(e_1)(x) + \frac{n-1}{n} x(1 + nt_n)^{-n} S(2, n-2, n, x + 2t_n, 1 - x)$$

olur.

$$S(2,n,p,x,y) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s} e^{-u} \Big( x\big(x + y + nt_p + st_p + ut_p\big)^n + nt_p{}^2 u$$

$$\times \left(x + y + nt_p + st_p + ut_p\right)^{n-1} \Big)\, dsdu$$

olduğu dikkate alınıp yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{n-1}{n}x(1+nt_n)^{-n}S(2,n-2,n,x+2t_n,1-x)=\frac{n-1}{n}x(1+nt_n)^{-n}$$

$$\times\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s}e^{-u}((x+2t_n)(x+2t_n+1-x+(n-2)t_n+st_n+ut_n)^{n-2}$$

$$+n-2)t_n{}^2u(x+2t_n+1-x+(n-2)t_n+st_n+ut_n)^{n-3})dsdu$$

$$=\frac{n-1}{n}x(1+nt_n)^{-n}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s}e^{-u}\big((x+2t_n)(1+nt_n+st_n+ut_n)^{n-2}$$

$$+(n-2)t_n{}^2u(1+nt_n+st_n+ut_n)^{n-3})dsdu$$

$$=\frac{n-1}{n}x(1+nt_n)^{-n}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s}e^{-u}\big((x+2t_n)(1+nt_n+st_n+ut_n)^{n-2}dsdu$$

$$+\frac{n-1}{n}x(1+nt_n)^{-n}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s}e^{-u}\big((n-2)t_n{}^2u(1+nt_n+st_n+ut_n)^{n-3}dsdu$$

$$\leq\frac{n-1}{n}x(1+nt_n)^{-n}(x+2t_n)\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s}e^{-u}((1+nt_n+st_n+ut_n)^{n})dsdu$$

$$+(n-1)x(1+nt_n)^{-n}t_n{}^2\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s}e^{-u}(u(1+nt_n+st_n+ut_n)^{n-1})dsdu$$

$$=:\alpha(n,x)+\beta(n,x)$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi $\alpha(n,x)$ ve $\beta(n,x)$ değerlerini hesaplayalım.

$(1+u)^{n-1}\leq\exp((n-1)u)$ eşitsizliği kullanılarak gerekli işlemler yapılırsa

$$\beta(n,x)=\frac{x(n-1)t_n{}^2}{1+nt_n}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s}e^{-u}u\left(\frac{1+nt_n+st_n+ut_n}{1+nt_n}\right)^{n-1}dsdu$$

$$=\frac{x(n-1)t_n{}^2}{1+nt_n}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s}e^{-u}u\left(1+\frac{st_n+ut_n}{1+nt_n}\right)^{n-1}dsdu$$

$$\leq \frac{x(n-1){t_n}^2}{1+nt_n}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s-u}ue^{(n-1)\left(\frac{st_n+ut_n}{1+nt_n}\right)}dsdu$$

$$= \frac{x(n-1){t_n}^2}{1+nt_n}\int_0^\infty\int_0^\infty uexp\left(\frac{-s-snt_n-u-unt_n+nst_n+unt_n-st_n-ut_n}{1+nt_n}\right)dsdu$$

$$= \frac{x(n-1){t_n}^2}{1+nt_n}\int_0^\infty\int_0^\infty uexp\left(\frac{(-s-u)(1+t_n)}{1+nt_n}\right)dsdu$$

$$= \frac{x(n-1){t_n}^2}{1+nt_n}\int_0^\infty\int_0^\infty uexp\left(\frac{(-s)(1+t_n)}{1+nt_n}\right)exp\left(\frac{(-u)(1+t_n)}{1+nt_n}\right)dsdu$$

$$= \frac{x(n-1){t_n}^2}{1+nt_n}\int_0^\infty uexp\left(\frac{(-u)(1+t_n)}{1+nt_n}\right)\left[\int_0^\infty exp\left(\frac{(-s)(1+t_n)}{1+nt_n}\right)ds\right]du$$

$$= \frac{x(n-1){t_n}^2}{1+nt_n}\int_0^\infty uexp\left(\frac{(-u)(1+t_n)}{1+nt_n}\right)\left[\frac{-1-nt_n}{1+t_n}\exp(-s)\Big|_0^\infty\right]du$$

$$= \frac{x(n-1){t_n}^2}{1+nt_n}\int_0^\infty \frac{1+nt_n}{1+t_n}uexp\left(\frac{(-u)(1+t_n)}{1+nt_n}\right)du$$

$$= \frac{x(n-1){t_n}^2}{1+nt_n}\frac{1+nt_n}{1+t_n}\int_0^\infty uexp\left(\frac{(-u)(1+t_n)}{1+nt_n}\right)du$$

$$= \frac{x(n-1){t_n}^2}{1+t_n}\int_0^\infty uexp\left(\frac{(-u)(1+t_n)}{1+nt_n}\right)du$$

$$= \frac{x(n-1){t_n}^2}{1+t_n}\left[-u\frac{1+nt_n}{1+t_n}\exp\left(-u\frac{1+t_n}{1+nt_n}\right)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty\frac{1+nt_n}{1+t_n}\exp\left(-u\frac{1+t_n}{1+nt_n}\right)du\right]$$

$$= \frac{x(n-1){t_n}^2}{1+t_n}\left[0-\frac{1+nt_n}{1+t_n}\int_0^\infty \exp\left(-u\frac{1+t_n}{1+nt_n}\right)du\right]$$

$$= \frac{x(n-1){t_n}^2}{1+t_n}\left[\left(\frac{1+nt_n}{1+t_n}\right)^2 \exp\left(-u\frac{1+t_n}{1+nt_n}\right)\Big|_0^\infty\right]$$

$$= \frac{x(n-1){t_n}^2}{1+nt_n}\left(\frac{1+nt_n}{1+t_n}\right)^3$$

olarak bulunur. Böylece

$$\beta(n,x) \leq \frac{x(n-1){t_n}^2}{1+nt_n}\left(\frac{1+nt_n}{1+t_n}\right)^3$$

yazılabilir. Benzer şekilde

$$exp(nu)(1-nu^2) \leq (1+u)^n \leq exp(nu) \tag{4.1.15}$$

eşitsizliği yardımı ile de

$$\frac{n-1}{n}(1+nt_n)^2 x(x+2t_n)(1-6n{t_n}^2) \leq \alpha(n,x) \leq \frac{n-1}{n}(1+nt_n)^2 x(x+2t_n)$$

yazılabilir.Bunu görmek için gerekli işlemler yapılırsa

$$\alpha(n,x) = \frac{n-1}{n}(1+nt_n)^{-n}x(x+2t_n)\int_0^\infty\int_0^\infty \exp(-u)\exp(-s)$$

$$\times (1+nt_n+st_n+ut_n)^n dsdu$$

$$= \frac{n-1}{n}\, x(x+2t_n)\int_0^\infty\int_0^\infty \exp(-s-u)\left(\frac{1+nt_n+st_n+ut_n}{1+nt_n}\right)^n dsdu$$

$$= \frac{n-1}{n}\, x(x+2t_n)\int_0^\infty\int_0^\infty \exp(-s-u)\left(1+\frac{st_n+ut_n}{1+nt_n}\right)^n dsdu$$

$$\leq \frac{n-1}{n}\, x(x+2t_n)\int_0^\infty\int_0^\infty \exp(-s-u)exp\left(n\frac{st_n+ut_n}{1+nt_n}\right) dsdu$$

$$= \frac{n-1}{n}\, x(x+2t_n) \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \exp\left(\frac{-s - snt_n - u - unt_n + nst_n + nut_n}{1+nt_n}\right) dsdu$$

$$= \frac{n-1}{n}\, x(x+2t_n) \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \exp\left(\frac{-s-u}{1+nt_n}\right) dsdu$$

$$= \frac{n-1}{n}\, x(x+2t_n) \int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} \exp\left(\frac{-s}{1+nt_n}\right) ds\right] \exp\left(\frac{-u}{1+nt_n}\right) du$$

$$= \frac{n-1}{n}\, x(x+2t_n) \int_0^{\infty} (1+nt_n)\exp\left(\frac{-u}{1+nt_n}\right) du$$

$$= \frac{n-1}{n}\, x(x+2t_n)(1+nt_n)^2$$

olur. Ayrıca $\alpha(n,x)$ için aşağıdaki işlemler yapılabilir.

$$\alpha(n,x) = \frac{n-1}{n}(1+nt_n)^{-n} x(x+2t_n) \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \exp(-u)\exp(-s)$$

$$\times (1+nt_n+st_n+ut_n)^n$$

$$= \frac{n-1}{n}\, x(x+2t_n) \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \exp(-s-u) \left(\frac{1+nt_n+st_n+ut_n}{1+nt_n}\right)^n dsdu$$

$$= \frac{n-1}{n}\, x(x+2t_n) \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \exp(-s-u) \left(1+\frac{st_n+ut_n}{1+nt_n}\right)^n dsdu$$

yazılabilir.

(4.1.15) eşitsizliği gereğince

$$\alpha(n,x) \geq \frac{n-1}{n}\, x(x+2t_n) \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \exp(-s-u) exp\left(n\frac{st_n+ut_n}{1+nt_n}\right)$$

$$\times \left(1 - n\left(\frac{st_n+ut_n}{1+nt_n}\right)^2\right) dsdu$$

$$= \frac{n-1}{n}\ x(x+2t_n)\int_0^\infty\int_0^\infty \exp\left(\frac{-s-u}{1+nt_n}\right)\left(1-\mathrm{n}\left(\frac{st_n+ut_n}{1+nt_n}\right)^2\right)dsdu$$

$$= \frac{n-1}{n}\ x(x+2t_n)\left\{\int_0^\infty\int_0^\infty \exp\left(\frac{-s-u}{1+nt_n}\right)dsdu\right.$$

$$\left.-\int_0^\infty\int_0^\infty exp\left(\frac{-s-u}{1+nt_n}\right)nt_n{}^2\left(\frac{s+u}{1+nt_n}\right)^2 dsdu\right\}$$

$$= \frac{n-1}{n}\ x(x+2t_n)\left\{(1+nt_n)^2-\int_0^\infty\int_0^\infty nt_n{}^2 exp\left(\frac{-s-u}{1+nt_n}\right)\left(\frac{s+u}{1+nt_n}\right)^2 dsdu\right\}$$

$$= \frac{n-1}{n}\ x(x+2t_n)\left\{(1+nt_n)^2 - nt_n{}^2\int_0^\infty\int_0^\infty exp\left(\frac{-s-u}{1+nt_n}\right)\left(\frac{s+u}{1+nt_n}\right)^2 dsdu\right\}$$

olur. Bu son eşitlikteki genelleştirilmiş integral hesaplanırsa;

$$\int_0^\infty\int_0^\infty exp\left(\frac{-s-u}{1+nt_n}\right)(s+u)^2 dsdu$$
$$-\int_0^\infty\int_0^\infty exp\left(\frac{-s-u}{1+nt_n}\right)(s^2+u^2+2su)dsdu$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty exp\left(\frac{-s-u}{1+nt_n}\right)(s^2)dsdu + \int_0^\infty\int_0^\infty exp\left(\frac{-s-u}{1+nt_n}\right)(u^2)dsdu$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty exp\left(\frac{-s-u}{1+nt_n}\right)(2su)dsdu$$

şeklinde yazılabilir. Bu integrallerde kısmi integrasyon yardımı ile hesaplanabilirler. Buna göre

$$I = \int_0^\infty\int_0^\infty exp\left(\frac{\overline{\phantom{s}}\ s-u}{1+nt_n}\right)(s^2)dsdu$$

$$= \int_0^{\infty} exp\left(\frac{-u}{1+nt_n}\right) \lim_{R\to\infty} \left[\int_0^{R} exp\left(\frac{-s}{1+nt_n}\right)(s^2)ds\right] du$$

$$= \int_0^{\infty} exp\left(\frac{-u}{1+nt_n}\right) \lim_{R\to\infty} \left[-(1+nt_n)s^2 exp\left(\frac{-s}{1+nt_n}\right)\Big|_0^R\right.$$

$$\left. + \int_0^{R} 2s(1+nt_n)exp\left(\frac{-s}{1+nt_n}\right)ds\right] du$$

$$= \int_0^{\infty} exp\left(\frac{-u}{1+nt_n}\right) \lim_{R\to\infty} \left[-(1+nt_n)R^2 exp\left(\frac{-R}{1+nt_n}\right)\right.$$

$$\left. +2(1+nt_n)\left[\int_0^{R} exp\left(\frac{-s}{1+nt_n}\right)sds\right]\right] du$$

$$= \int_0^{\infty} exp\left(\frac{-u}{1+nt_n}\right) \lim_{R\to\infty} \left[-(1+nt_n)R^2 exp\left(\frac{-R}{1+nt_n}\right)\right.$$
$$+ 2(1+nt_n)[-s(1+nt_n)$$

$$\left.\times\, exp\left(\frac{-s}{1+nt_n}\right)\Big|_0^R + \int_0^{R}(1+nt_n)exp\left(\frac{-s}{1+nt_n}\right)\Big]\right] du$$

$$= \int_0^{\infty} exp\left(\frac{-u}{1+nt_n}\right) \lim_{R\to\infty} \left[-(1+nt_n)R^2 exp\left(\frac{-R}{1+nt_n}\right) + 2(1+nt_n)\right.$$

$$\left.\times\left[-R(1+nt_n)exp\left(\frac{-R}{1+nt_n}\right) + (1+nt_n)\int_0^{R} exp\left(\frac{-s}{1+nt_n}\right)ds\right]\right] du$$

$$= \int_0^{\infty} exp\left(\frac{-u}{1+nt_n}\right) \lim_{R\to\infty} \left[-(1+nt_n)R^2 exp\left(\frac{-R}{1+nt_n}\right) + 2(1+nt_n)\right.$$

$$\left.\times\left[-R(1+nt_n)exp\left(\frac{-R}{1+nt_n}\right) - (1+nt_n)^2 exp\left(\frac{-s}{1+nt_n}\right)\Big|_0^R\right]\right] du$$

$$= \int_0^\infty exp\left(\frac{-u}{1+nt_n}\right) \lim_{R\to\infty} \left[-(1+nt_n)R^2 exp\left(\frac{-R}{1+nt_n}\right) + 2(1+nt_n)\right.$$

$$\left.\times\left[-R(1+nt_n)exp\left(\frac{-R}{1+nt_n}\right) - (1+nt_n)^2 exp\left(\frac{-R}{1+nt_n}\right) + (1+nt_n)^2\right]\right] du$$

$$= \int_0^\infty exp\left(\frac{-u}{1+nt_n}\right) 2(1+nt_n)^3 du$$

$$= 2(1+nt_n)^3 \int_0^\infty exp\left(\frac{-u}{1+nt_n}\right) du$$

$$= 2(1+nt_n)^3 \lim_{L\to\infty} \int_0^L exp\left(\frac{-u}{1+nt_n}\right) du$$

$$= 2(1+nt_n)^3 \lim_{L\to\infty} \left[-(1+nt_n)exp\left(\frac{-u}{1+nt_n}\right)\Big|_0^L\right]$$

$$= 2(1+nt_n)^3 \lim_{L\to\infty} \left[-(1+nt_n)exp\left(\frac{-L}{1+nt_n}\right) + (1+nt_n)\right]$$

$$= 2(1+nt_n)^4$$

olarak elde edilir.

Benzer işlemler yardımı ile

$$\text{II} = \int_0^\infty \int_0^\infty exp\left(\frac{-s-u}{1+nt_n}\right)(u^2) ds du$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty exp\left(\frac{-s}{1+nt_n}\right) exp\left(\frac{-u}{1+nt_n}\right)(u^2) du ds$$

$$= \int_0^\infty exp\left(\frac{-s}{1+nt_n}\right) \lim_{R\to\infty}\left[\int_0^R exp\left(\frac{-u}{1+nt_n}\right)(u^2) du\right] ds$$

$$= \int_0^\infty exp\left(\frac{-s}{1+nt_n}\right) \lim_{R\to\infty}\left[-(1+nt_n)u^2 exp\left(\frac{-u}{1+nt_n}\right)\Bigg|_0^R + \int_0^R 2u(1+nt_n)exp\left(\frac{-u}{1+nt_n}\right)du\right]ds$$

$$= \int_0^\infty exp\left(\frac{-s}{1+nt_n}\right) \lim_{R\to\infty}\left[-(1+nt_n)R^2 exp\left(\frac{-R}{1+nt_n}\right) + 2(1+nt_n)\left[\int_0^R exp\left(\frac{-u}{1+nt_n}\right)udu\right]\right]ds$$

$$= \int_0^\infty exp\left(\frac{-s}{1+nt_n}\right) \lim_{R\to\infty}\left[-(1+nt_n)R^2 exp\left(\frac{-R}{1+nt_n}\right) + 2(1+nt_n)\right.$$

$$\left.\times\left[-u(1+nt_n)exp\left(\frac{-u}{1+nt_n}\right)\Bigg|_0^R\right] + \int_0^R (1+nt_n)exp\left(\frac{-u}{1+nt_n}\right)du\right]\ ds$$

$$= \int_0^\infty exp\left(\frac{-s}{1+nt_n}\right) \lim_{R\to\infty}\left[-(1+nt_n)R^2 exp\left(\frac{-R}{1+nt_n}\right) + 2(1+nt_n)\right.$$

$$\left.\times x\left[-R(1+nt_n)exp\left(\frac{-R}{1+nt_n}\right)\right] + (1+nt_n)\int_0^R exp\left(\frac{-u}{1+nt_n}\right)du\right]ds$$

$$= \int_0^\infty exp\left(\frac{-s}{1+nt_n}\right) \lim_{R\to\infty}\left[-(1+nt_n)R^2 exp\left(\frac{-R}{1+nt_n}\right) + 2(1+nt_n)\right.$$

$$\left.\times\left[-R(1+nt_n)exp\left(\frac{-R}{1+nt_n}\right)\right] - (1+nt_n)^2 exp\left(\frac{-s}{1+nt_n}\right)\Bigg|_0^R\right]ds$$

$$= \int_0^\infty exp\left(\frac{-s}{1+nt_n}\right) \lim_{R\to\infty}\left[-(1+nt_n)R^2 exp\left(\frac{-R}{1+nt_n}\right) + 2(1+nt_n)\right.$$

$$\left.\times\left[-R(1+nt_n)exp\left(\frac{-R}{1+nt_n}\right)\right] - (1+nt_n)^2 exp\left(\frac{-R}{1+nt_n}\right) + (1+nt_n)^2\right]\ ds$$

$$= \int_0^\infty exp\left(\frac{-s}{1+nt_n}\right) 2(1+nt_n)^3 ds$$

$$= 2(1+nt_n)^3 \int_0^\infty exp\left(\frac{-s}{1+nt_n}\right) ds$$

$$= 2(1+nt_n)^3 \lim_{L\to\infty} \int_0^L exp\left(\frac{-s}{1+nt_n}\right) ds$$

$$= 2(1+nt_n)^3 \lim_{L\to\infty} \left[-(1+nt_n)exp\left(\frac{-s}{1+nt_n}\right)\Big|_0^L\right]$$

$$= 2(1+nt_n)^3 \lim_{L\to\infty} \left[-(1+nt_n)exp\left(\frac{-L}{1+nt_n}\right) + (1+nt_n)\right]$$

$$= 2(1+nt_n)^4$$

elde edilir. Son olarak

$$III = \int_0^\infty \int_0^\infty 2suexp\left(\frac{-s-u}{1+nt_n}\right) dsdu$$

$$= 2\int_0^\infty \int_0^\infty suexp\left(\frac{-s}{1+nt_n}\right) exp\left(\frac{-u}{1+nt_n}\right) dsdu$$

$$= 2\int_0^\infty uexp\left(\frac{-u}{1+nt_n}\right)\left[\int_0^\infty exp\left(\frac{-s}{1+nt_n}\right) sds\right] du$$

$$= 2\int_0^\infty uexp\left(\frac{-u}{1+nt_n}\right) \lim_{R\to\infty}\left[\int_0^R exp\left(\frac{-s}{1+nt_n}\right) sds\right] du$$

$$= 2\int_0^\infty uexp\left(\frac{-u}{1+nt_n}\right) \lim_{R\to\infty}\left[-s(1+nt_n)exp\left(\frac{-s}{1+nt_n}\right)\Big|_0^R\right.$$

$$\left. +(1+nt_n)\int_0^R exp\left(\frac{-s}{1+nt_n}\right) ds\right] du$$

$$= 2\int_0^\infty uexp\left(\frac{-u}{1+nt_n}\right)\lim_{R\to\infty}\left[-R(1+nt_n)exp\left(\frac{-R}{1+nt_n}\right)\right.$$

$$\left.-(1+nt_n)^2 exp\left(\frac{-s}{1+nt_n}\right)\Big|_0^R\right] du$$

$$= 2\int_0^\infty uexp\left(\frac{-u}{1+nt_n}\right)\lim_{R\to\infty}\left[-R(1+nt_n)exp\left(\frac{-R}{1+nt_n}\right)\right.$$

$$\left.-(1+nt_n)^2 exp\left(\frac{-R}{1+nt_n}\right)+(1+nt_n)^2\right] du$$

$$= 2\int_0^\infty uexp\left(\frac{-u}{1+nt_n}\right)(1+nt_n)^2 du$$

$$= 2(1+nt_n)^2\int_0^\infty uexp\left(\frac{-u}{1+nt_n}\right) du$$

$$= 2(1+nt_n)^2\lim_{L\to\infty}\left[\int_0^L uexp\left(\frac{-u}{1+nt_n}\right) du\right]$$

$$= 2(1+nt_n)^2\lim_{L\to\infty}\left[-u(1+nt_n)exp\left(\frac{-u}{1+nt_n}\right)\Big|_0^L + (1+nt_n)\int_0^L exp\left(\frac{-u}{1+nt_n}\right) du\right]$$

$$= 2(1+nt_n)^2\lim_{L\to\infty}\left[-L(1+nt_n)exp\left(\frac{-L}{1+nt_n}\right) - (1+nt_n)^2 exp\left(\frac{-u}{1+nt_n}\right)\Big|_0^L\right]$$

$$= 2(1+nt_n)^2\lim_{L\to\infty}\left[-L(1+nt_n)exp\left(\frac{-L}{1+nt_n}\right) - (1+nt_n)^2 exp\left(\frac{-L}{1+nt_n}\right)\right.$$

$$\left.+(1+nt_n)^2\right]$$

$$= 2(1+nt_n)^4$$

bulunur. Buradan görülmektedir ki I ,II ve III yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\int_0^\infty \int_0^\infty exp\left(\frac{-s-u}{1+nt_n}\right)(s+u)^2 dsdu = 6(1+nt_n)^4$$

olarak elde edilir. Böylece

$$\alpha(n,x) \geq \frac{n-1}{n} x(x+2t_n)\left[(1+nt_n)^2 - \frac{nt_n{}^2}{(1+nt_n)^2} 6(1+nt_n)^4\right] \qquad (4.16)$$

$$= \frac{n-1}{n} x(x+2t_n)[(1+nt_n)^2 - nt_n{}^2 6(1+nt_n)^2]$$

$$= \frac{n-1}{n} x(x+2t_n)(1+nt_n)^2(1-6nt_n{}^2)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ifadeler göz önüne alınırarak (4.16) eşitsizliğin her tarafının $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\alpha(n,x) \to x^2$$

olur. Böylece $G_n$ operatörü için $x \in [0,1]$ için

$$G_n(e_2) = \frac{1}{n} G_n(e_1) + \left(\frac{n-1}{n}\right) x(1+nt_n)^{-n} S(2, n-2, n, x+2t_n, 1-x)$$

ifadesi gereğince

$$G_n(e_2) = \frac{1}{n}\left(\frac{x}{1+nt_n}\right) + \alpha(n,x) + \beta(n,x)$$

$$\leq \frac{x}{n(1+nt_n)} + \left(\frac{n-1}{n}\right) x(x+2t_n)(1+nt_n)^2$$
$$+ \frac{x(n-1)t_n{}^2}{1+nt_n}\left(\frac{1+nt_n}{1+t_n}\right)^3$$

$$\lim_{n\to\infty} G_n(e_2) = x^2$$

olarak bulunur. Bu da $G_n(f)(x)$ operatörünün Korovkin teoreminin koşullarını sağladığını gösterir.

Şimdi aşağıdaki teorem verilebilir

**Teorem 4.1.9 :** $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bir pozitif reel sayı dizisi $f \in C[0,1]$, $x \in [0,1]$ ve $G_n: [0,1] \to [0,1]$ operatörü için

$$|G_n(f)(x) - f(x)| \leq 2\omega(f,\delta)$$

dır. Burada

$$\delta = \left[\frac{n-1}{n}x(x+2t_n)(1+nt_n)^2 + \frac{x(n-1)}{1+nt_n}\left(\frac{1+nt_n}{1+t_n}\right)^3 - \frac{2x^2}{1+nt_n} + x^2\right]^{1/2}$$

dır.

**ispat:** $G_n(f)$ operatörü için

$$G_n(f)(x) - f(x) = (1+nt_n)^{-n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x(x+kt_n)^{k-1}$$

$$\times (1-x+(n-k)t_n)^{n-k} - f(x)$$

yazılabilir. $G_n(e_0) = 1$ olduğundan

$$G_n(f)(x) - f(x) = (1+nt_n)^{-n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x(x+kt_n)^{k-1}(1-x+(n-k)t_n)^{n-k}$$

$$-f(x)(1+nt_n)^{-n}\sum_{k=0}^{n} f(x)\binom{n}{k} x(x+kt_n)^{k-1}(1-x+(n-k)t_n)^{n-k}$$

yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa

$$|G_n(f)(x) - f(x)| = \left|(1+nt_n)^{-n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x(x+kt_n)^{k-1}(1-x+(n-k)t_n)^{n-k}\right.$$

$$\left.-(1+nt_n)^{-n} \sum_{k=0}^{n} f(x)\binom{n}{k} x(x+kt_n)^{k-1}(1-x+(n-k)t_n)^{n-k}\right|$$

$$= \left|(1+nt_n)^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x(x+kt_n)^{k-1}(1-x+(n-k)t_n)^{n-k}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)\right|$$

şeklinde düzenlenebilir. Bu eşitsizliği her iki tarafının supremumu alınırsa

$$|G_n(f)(x) - f(x)|$$

$$\leq (1+nt_n)^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x(x+kt_n)^{k-1}(1-x+(n-k)t_n)^{n-k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|$$

$$\leq (1+nt_n)^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x(x+kt_n)^{k-1}(1-x+(n-k)t_n)^{n-k} sup\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|$$

elde edilir. Süreklilik modülü tanımı ve bilinen temel özellikleri gereğince de

$\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta$ için

$$|G_n(f)(x) - f(x)| \leq (1+nt_n)^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x(x+kt_n)^{k-1}(1-x+(n-k)t_n)^{n-k}\omega\left(f, \left|\frac{k}{n} - x\right|\right)$$

$$= (1+nt_n)^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x(x+kt_n)^{k-1}(1-x+(n-k)t_n)^{n-k}\omega\left(f, \left|\frac{k}{n} - x\right| \frac{\delta_n}{\delta_n}\right)$$

$$\leq (1+nt_n)^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x(x+kt_n)^{k-1}(1-x+(n-k)t_n)^{n-k}\omega(f, \delta_n)$$

$$\times\left(1+\frac{1}{\delta_n}\left|\frac{k}{n}-x\right|\right)$$

$$=\omega(f,\delta_n)(1+nt_n)^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x(x+kt_n)^{k-1}(1-x+(n-k)t_n)^{n-k}$$

$$\times\left(1+\frac{1}{\delta_n}\left|\frac{k}{n}-x\right|\right)$$

$$=\omega(f,\delta_n)\left[(1+nt_n)^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x(x+kt_n)^{k-1}(1-x+(n-k)t_n)^{n-k}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\delta_n}(1+nt_n)^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x(x+kt_n)^{k-1}(1-x+(n-k)t_n)^{n-k}\left|\frac{k}{n}-x\right|\right]$$

$$=\omega(f,\delta_n)\left[1+\frac{1}{\delta_n}(1+nt_n)^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x(x+kt_n)^{k-1}\right.$$

$$\left.(1-x+(n-k)t_n)^{n-k}\left|\frac{k}{n}-x\right|\right]$$

$$=\omega(f,\delta_n)\left[1+\frac{1}{\delta_n}G_n\left(\left|\frac{k}{n}-x\right|;x\right)\right]$$

elde edilir.Buna göre Couchy-shwarz eşitsizliği gereğince

$$G_n(f.g;x)\le[G_n(f^2;x)]^{1/2}.[G_n(g^2;x)]^{1/2}$$

olarak yazılabileceğinden

$$|G_n(f)(x)-f(x)|\le\ \omega(f,\delta_n)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\sqrt{G_n\left[\left(\frac{k}{n}-x\right)^2;x\right]}.\sqrt{G_n[1^2;x]}\right]$$

yazılabilir. $G_n[1^2;x]=1$ olduğundan

$$|G_n(f)(x)-f(x)|\leq \omega(f,\delta_n)\left\{1+\frac{1}{\delta_n}[G_n(e_2)(x)-2xG_n(e_1)(x)+x^2]^{1/2}\right\}$$

$$= \omega(f,\delta_n)\left\{1+\frac{1}{\delta_n}\left[\frac{n-1}{n}x(x+2t_n)(1+nt_n)^2+\frac{x(n-1)}{1+nt_n}\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\frac{1+nt_n}{1+t_n}\right)^3-\frac{2x^2}{1+nt_n}+x^2\right]^{1/2}\right\}$$

olarak elde edilir.Eğer

$\delta_n=\left[\frac{n-1}{n}x(x+2t_n)(1+nt_n)^2+\frac{x(n-1)}{1+nt_n}\left(\frac{1+nt_n}{1+t_n}\right)^3-\frac{2x^2}{1+nt_n}+x^2\right]^{1/2}$ seçilirse

$|G_n(f)(x)-f(x)|\leq 2\omega(f,\delta_n)$ olur. Bu da istenilendir.

# 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Lineer pozitif operatörler teorisinde tanımlanan operatörlerdeki temel amaç operatörün basit bir fonksiyon kullanılarak yakınsaklık özelliklerini ve yakınsaklık hızını belirlemektir. Bu işlemler yapılırken matematiğin temel özelliklerinden yararlanıldığı gibi işlemlerin daha kolay yürütülebilmesi için çeşitli rekürans bağıntılarından faydalanılmaktadır. Bu rekürans bağıntıları çok karmaşık görünen bir çok işlemi çok daha basit hale getirerek zaman ve sonuç açısından bir çok fayda sağlamaktadır.Bu tezde de Bernstein -Schurer operatörü ile Bernstein Cheney-Sharma operatörünün Korovkin teoreminin şartlarını sağladığı gösterilmiştir ve yakınsama hızları verilmiştir. Bunlar yapılırken tanımlanan bir rekürans bağıntısı kullanılmıştır. Görülmüştür ki bu rekürans bağıntısı işlemlerde oldukça kolaylık sağlamaktadır.Bu sebeple bu tez bu tip rekürans bağıntılarının tanımlanması ve kullanılması bakımından kaynak olacak bir yapıdadır. Amaç bu tip operatörlerin genişletilmesi ve geniştilmelerde rekürans bağıntılarının tanımların kullanım özelliklerinin açıklanmasına yöneliktir

# KAYNAKLAR

[1] Altın, A., Uygulamalı Matematik, Ankara, Gazi Kitabevi, 131-141, 2011.

[2] Balcı, M., Matematik Analiz 1, Ankara, 165-168, 7. Basım, Balcı Yayınları, 2008.

[3] Acar, T., Genelleştirilmiş Bernstein Operatörlerin Yakaşım özellikleri, Kırıkkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 2015.

[4] Altomare F. and Campiti M., Korovkin-type Approximation Theory and its Applications, 321-329, 1994.