T.C.

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN BİR GENEL SABİT NOKTA TEOREMİ VE KUADRATİK İNTEGRAL DENKLEMLERE UYGULAMASI

EMRAH AKYÜZ

MAYIS 2018

Matematik Anabilim Dalında EMRAH AKYÜZ tarafından hazırlanan BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN BİR GENEL SABİT NOKTA TEOREMİ VE KUADRATİK İNTEGRAL DENKLEMLERE UYGULAMASI Adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. İshak ALTUN

Danışman Jüri Üyeleri

Başkan	: Prof. Dr. Hakan ŞİMŞEK	___________________
Üye (Danışman)	: Prof. Dr. İshak ALTUN	___________________
Üye	: Doç. Dr. Murat OLGUN	___________________

……/…../…….

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Mustafa YİĞİTOĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN BİR GENEL SABİT NOKTA TEOREMİ VE KUADRATİK İNTEGRAL DENKLEMLERE UYGULAMASI

AKYÜZ, Emrah
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. İshak ALTUN
Mayıs 2018, 48 sayfa

Temelinde sabit nokta teori çalışmalarını inceleyen bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde sabit nokta teorinin tarihsel bir gelişimi, nerelerde kullanıldığı ve uygulama alanlarından bahsedilmiştir. İkinci bölüm, tezde kullanılacak olan bazı temel metrik ve topolojik tanımlar ve özellikler ile kıyaslama fonksiyonları ve α-geçişlilik kavramını içermektedir. Üçüncü bölüm on kısma ayrılmıştır. Birinci kısımda α-ψ-büzülme dönüşümü kavramı yardımıyla verilen bir genel sabit nokta teoremi incelenmiştir. Diğer kısımlarda ise Berinde, Ciric ve Suzuki tip büzülme dönüşümleri de dahil olmak üzere literatürde bulunan pek çok büzülme dönüşümlerinin aynı zamanda bir α-ψ-büzülme dönüşümü olduğu gösterilmiş ve bunlardan elde edilen sabit nokta teoremlerinin birinci kısımda verilen teoremin birer sonucu olduğu gösterilmiştir. Ayrıca burada verilen genel sabit nokta teoremi dikkate alınarak, lineer olmayan integral denklemlerinin bir sınıfı için bir varlık teoremi sunulmuştur. Son bölüm ise tartışma ve sonuç için ayrılmıştır.

ABSTRACT

A GENERAL FIXED POINT THEOREM FOR CONTRACTION MAPPINGS AND APPLICATION TO QUADRATIC INTEGRAL EQUATIONS

AKYÜZ, Emrah
Kırıkkale University
Graduate School Of Natural And Applied Sciences
Department of Mathematics, M.Sc. Thesis
Supervisor: Prof. Dr. İshak ALTUN
May 2018, 48 pages

This thesis, which basically examines fixed point theory studies, consists of four sections. In the first section, where the historical development of fixed point theory is used and its some applications are mentioned. The second section contains some basic metrical and topological definitions and properties to be used in the thesis, comparison functions and the concept of α-admissibility. The third section is divided into ten parts. In the first part, a general fixed point theorem given by the concept of α- ψ-contraction mapping is examined. In the other sections, many contractive mappings in the literature, including Berinde, Ciric and Suzuki type contraction mappings, are shown to be an α- ψ-contraction mapping at the same time, and the fixed point theorems obtained there from have been shown to be a special case of the theorem given in the first part. Also taking into account the given general fixed point theorem, an existence result for a class of nonlinear integral equations is presented. The last section is reserved for discussion and conclusion.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın yürütülmesinde büyük emeği olan, her zaman sabırla bana yol gösteren, bilgileriyle çalışmamın tüm aşamalarında yardımlarını esirgemeyen değerli hocam ve tez danışmanım Prof. Dr. İshak ALTUN' a teşekkür ederim.

Yaşamım boyunca yanımda olan ve beni her konuda destekleyen, güvenen, hayatta sahip olduğum en değerli insanlar olan aileme sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ iv
1. GİRİŞ 1
1.1.Kaynak Özetleri 3
1.2.Çalışmanın Amacı 4
2. MATERYAL VE YÖNTEM 5
2.1. Bazı Temel Metrik ve Topolojik Kavramlar 5
2.2. Kıyaslama Fonskiyonları 11
2.3. α-Geçişli Dönüşümler 13
3. ARAŞTIRMA BULGULARI 15
3.1. α-ψ Büzülme Dönüşümleri 15
3.2. ψ Büzülme Dönüşümleri 23
3.3. Rasyonel Büzülme Dönüşümleri 25
3.3.1 Dass-Gupta Büzülme 25
3.3.2 Jaggi Büzülme 27
3.4. Berinde Tip Büzülme Dönüşümleri 29
3.5. Ciric Tip Büzülme Dönüşümleri 31
3.6. Suzuki Tip Büzülme Dönüşümleri 33
3.7. Döngüsel Dönüşüm 35
3.8. Edelstein Sabit Nokta Teoremi 37
3.9. Kısmi Sıralı Kümelerde Sabit Nokta Sonuçları 38
3.10.Lineer Olmayan Kuadratik İntegral Denklemlerin Bir Sınıfı İçin Varlık Sonuçları 40
4. TARTIŞMA VE SONUÇ 46
KAYNAKLAR 47

1.GİRİŞ

(X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in X$ keyfi bir noktası olmak üzere $x_n = Tx_{n-1}$ $n \in \mathbb{N}$ şeklinde tanımlı $\{x_n\}$ dizisine Picard iterasyon dizisi adı verilmektedir. Metrik sabit nokta teori çalışmalarının ispatında ilk aşama büzülme şartı dikkate alınarak Picard iterasyon dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunun gösterilmesidir. Ardından metrik uzayın tam olduğunun kabulü ile bu iterasyon dizisinin yakınsak olduğunun garanti edilmesi ve yakınsadığı noktanın bir sabit nokta olduğunun gösterilmesi ispatın ikinci aşaması olarak dikkate alınabilir. Bilindiği gibi, (X, d) bir metrik uzay $T: X \to X$ bir dönüşüm olmak üzere, her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y) \tag{1}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\lambda \geq 0$ varsa, T ye Lipschitz dönüşümü denir. (1) eşitsizliğini sağlayan λ sayılarının en küçüğüne T nin Lipschitz sabiti denir ve genellikle L ile gösterilir. Eğer $L < 1$ ise T ye büzülme dönüşümü $L \leq 1$ ise genişlemeyen dönüşüm denir. Eğer $x \neq y$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) < d(x, y) \tag{2}$$

eşitsizliği sağlanırsa T ye büzülebilir dönüşüm denir.

Banach sabit nokta teoremi, tam metrik uzay üzerinde tanımlı her büzülme dönüşümün bir tek sabit noktasının varlığını ve her Picard iterasyonunu bu sabit noktaya yakınsadığını ifade etmektedir. Yine Edelstein sabit nokta teoremi, kompakt metrik uzay üzerinde tanımlı her büzülebilir dönüşümün bir tek sabit noktası olduğu söyler. Bunların yanı sıra Kannan, Chaterjea, Zamfirescu, Reich, Hard-Rogers ve Ciric sabit nokta teoremleri literatürde bilinen temel sabit nokta teoremleridir.

Samet ve arkadaşları tarafında 2012 yılında α-ψ-büzülme kavramına giriş yapılmıştır. (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $\psi: [0, \infty) \to$

$[0, \infty)$ bir c-kıyaslama fonksiyonu ve $\alpha: X \times X \to \mathbb{R}$ her hangi fonksiyon olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$\alpha(x, y)d(Tx, Ty) \leq \psi(d(x, y))$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümüne bir α-ψ büzülme dönüşümü adı verilir. Aynı çalışmada yazarlar dönüşümün α- geçişli olmasının yanı sıra sürekliliğini de dikkate alarak (süreklilik yerine uzayın α- regüler olmasıda kabul edilir) tam metrik uzayda α-ψ büzülme dönüşümlerini sabit noktalarının varlığını garanti eden bir temel teorem ispatlamışlardır. Bu elde edilen teoremde α ve ψ fonksiyonlarının özel seçilmesi ile yukarıda bahsi geçen Banach ve Edelstein, sabit nokta teoremleri sonuç olarak verilmektedir.

Literatürde α-ψ büzülme kavramı kullanılarak hem tek değerli hem de küme değerli dönüşümler için elde edilmiş pek çok sabit nokta teoremi mevcuttur. Ayrıca elde edilen sonuçların çeşitli yönlerde uygulamaları da yapılmaktadır.

Bu tez çalışmasında, ilk olarak Samet tarafından kullanılan α-ψ büzülme kavramı dikkate alınarak elde edilen sabit nokta teoremleri incelenecektir. Ayrıca bu sonuçların kuadratik integral denklemlere uygulaması ele alınacaktır.

1.2. Kaynak Özeti

Metrik uzay ve topolojik uzaylar ile ilgili temel kavramlar için Koçak'ın "Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Araştırmalar", Soykan'ın "Fonksiyonel Analiz" adlı kitapları kullanılmıştır [1,2]. (c)-kıyaslama fonksiyonu, özellikleri ve örnekleri için Berinde'nin "Iterative Approximation of Fixed Points" adlı kitabı kullanılmıştır. [3]. α-geçişlilik kavramı ilk olarak Samet ve arkadaşları [4]. tarafından tanımlandığından α-geçişlilik kavramı için bu çalışmaya atıfta bulunulmuştur. Daha sonra α-ψ büzülme dönüşümü, α-regülerlik ve tezdeki genel sabit nokta teoremi için Samet [5]. ile Amiri ve arkadaşları [6]. nın çalışmaları dikkate alınmıştır. Ardından burada verilen genel sabit nokta teoreminin, literatürdeki bazı sonuçları içerdiğini belirtmek için, Berinde [3]. Dass ve Gupta [7]. Jaggi [8]. Berinde [9]. Ciric [10]. Suzuki [11]. Rus [12]. ile Pacurar ve Rus [13]. Edelstein [14]. Nieto ve Rodriguoz-Lopez [15]. gibi çalışmalar incelenmiştir. Son olarak elde edilen sonuçlarının bir uygulamasını görmek için Argyros [16]. un çalışması dikkate alınmıştır.

1.2. Çalışmanın Amacı

Bessem Samet 2014 yılında yayımladığı bir çalışmasında tam metrik uzarlarda, α-ψ-büzülme dönüşümleri için bir temel sabit nokta teoremi ispatlamıştır ve bu teoremin literatürde bulunan pek çok sonucun bir genelleştirilmesi olduğunu göstermiştir. Bu tez çalışmasında Samet'in elde etmiş olduğu bu sonuç detaylı bir biçimde incelenerek yapılacak yeni çalışmalara yön vermek amaçlanmıştır.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1.Bazı Temel Metrik ve Topolojik Kavramlar

Bu kısımda tez boyunca kullanacağımız metrik uzay, topolojik uzay ve metrik uzayın topolojisi, temel topolojik kavramlar, metrik uzayda yakınsaklık, süreklilik, Cauchy dizisi, metrik uzayda tamlık ve kompakt metrik uzay kavramlarını hatırlatacağız.

Tanım 2.1 X boş olmayan bir küme olmak üzere $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için

i) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
ii) $d(x,y) = d(y,x)$,
iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

koşullarını sağlıyorsa d ye X üzerinde bir metrik, (X,d) ikilisine de bir metrik uzay denir.

Tanım 2.2 (X,d) herhangi bir metrik uzay olsun. Bir $x_0 \in X$ ve $r > 0$ reel sayısı verildiğinde

$$B(x_0,r) = \{x \in X: d(x_0,x) < r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar,

$$D(x_0,r) = \{x \in X: d(x_0,x) \leq r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar,

$$S(x_0,r) = \{x \in X: d(x_0,x) = r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı yuvar yüzeyi denir.

Tanım 2.3 (X, d) bir metrik uzay ve U da X in bir alt kümesi olsun. Eğer her $x \in U$ için $B(x, r) \subseteq U$ olacak biçimde bir $r > 0$ sayısı varsa U kümesine açıktır denir. Eğer $X \backslash U$ kümesi açık ise o zaman U kümesine kapalı küme denir.

Önerme 2.1 (X, d) bir metrik uzay olsun. Bu durumda

i) (X, d) içindeki her açık yuvar açık kümedir.
ii) (X, d) içindeki her kapalı yuvar kapalı kümedir.

Tanım 2.4 (X, d) bir metrik uzay, A ve B de X in boş olmayan iki alt kümesi olsun. Bu durumda

$$D(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

sayısına A ve B kümeleri arasındaki uzaklık denir.$x \in X$ olmak üzere

$$D(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$$

sayısına *x* noktasının A kümesine olan uzaklığı,

$$d(A) = \sup\{d(a, b) : a, b \in A\}$$

ifadesine A kümesinin çapı denir.

Eğer $d(A) < \infty$ ise A kümesine sınırlı küme, eğer $d(A) = \infty$ ise A kümesine sınırsız küme denir.

Tanım 2.5 (X, d) metrik uzayında $\{x_n\}$ bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n \geq n_0$ için $x_n \in B(x, \varepsilon)$ olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisi *x* noktasına yakınsar denir. Kısaca $x_n \to x$ ile gösterilir.

Teorem 2.1 Metrik uzayda yakınsak bir dizinin limiti tektir.

İspat: (X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. $\{x_n\}$ dizisinin $x, y \in X$ gibiiki farklı noktaya yakınsadığını varsayalım $\varepsilon = \frac{d(x,y)}{2}$ diyelim. Şimdi $B(x, \varepsilon)B(y, \varepsilon) = \emptyset$ olduğunu gösterelim $z \in B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon)$ olsun. Bu durumda $d(x, z) < \varepsilon$ ve $d(y, z) < \varepsilon$ olur. Buradan

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

olur. Bu ise $2\varepsilon = d(x, y)$ olmasıyla çelişir. O halde $B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset$ olur. Şimdi $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsadığından bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı her $n \geq n_0$ için $x_n \in B(x, \varepsilon)$ olacak şekilde vardır. Benzer şekilde $\{x_n\}$ dizisi y noktasına yakınsadığından bir $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısı her $n \geq n_1$ için $x_n \in B(y, \varepsilon)$ olacak biçimde vardır. Bu durumda her $n \geq maks\{n_0, n_1\}$ için $x_n \in B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon)$ olur. Bu ise $B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset$ olmasıyla çelişir. O halde $\{x_n\}$ dizisi tek bir noktaya yakınsar.

Tanım 2.6 (X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ de X de bir dizi olsun. $n_k < n_{k+1}$ olmak üzere $\{x_{n_k}\}$ dizisine $\{x_n\}$ dizisinin bir alt dizisi denir.

Teorem 2.2 (X, d) bir metrik uzay olsun $\{x_n\}$ dizisi yakınsak ise her $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi de aynı noktaya yakınsar.

Tanım 2.7 Bir (X, d) metrik uzayında herhangi bir dizi $\{x_n\}$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $m, n \geq n_0$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı var ise $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir. Eğer (X, d) metrik uzayı içindeki her Cauchy dizisi bu uzayda bir noktaya yakınsıyor ise (X, d) ikilisine tam metrik uzay denir.

Teorem 2.3 (X, d) metrik uzayında yakınsak olan her dizi Cauchy dizisidir. Ayrıca her Cauchy dizisi sınırlıdır.

Önerme 2.2 (X, d) bir metrik uzay $\{x_n\}$ X de bir dizi ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < \infty$$

olsun. Bu durumda $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir.

İspat: $m, n \in \mathbb{N}, m > n$için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &= \sum_{i=n}^{m-1} d(x_i, x_{i+1}) \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} d(x_i, x_{i+1}) \end{aligned}$$

olur.

$$\sum_{i=n}^{\infty} d(x_i, x_{i+1})$$

verilen serinin kalan terimi olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$$

elde edilir ki bu $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

Tanım 2.8 (X, d) ve (Y, ρ) metrik uzaylar, $T: X \to Y$ herhangi bir fonksiyon ve $x \in X$ olsun. T fonksiyonunun x noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul X içinde herhangi bir $\{x_n\}$ dizisi x e yakınsak iken, Y içindeki $\{Tx_n\}$ dizisinin Tx e yakınsak olmasıdır.

Tanım 2.9 Bir (X, d) metrik uzayında açık kümelerin bir ailesi $\{G_i : i \in I\}$ olsun. Eğer $A \subseteq X$ için

$$A \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i$$

oluyorsa $\{G_i : i \in I\}$ ailesine A kümesinin bir açık örtüsü denir. Eğer açık örtünün

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k}$$

olacak biçimde bir $\{G_{i_k} : k = 1,2, \dots, n\}$ alt ailesi var ise, bu aileye $\{G_i : i \in I\}$ ailesinin sonlu alt örtüsü denir.

Tanım 2.10 (X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer A kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa A kümesine kompakt küme denir. Eğer X kompakt bir küme ise (X, d) uzayına kompakt metrik uzay denir. Kompakt bir metrik uzayda her dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır.

Tanım 2.11 X boş olmayan bir küme ve τ, X in kuvvet kümesi olan $P(X)$ in bir alt sınıfı olsun. Eğer τ sınıfı,

i) $\emptyset, X \in \tau$

ii) τ ya ait sonlu sayıdaki elemanların arakesiti τ ya aittir

iii) τ ya ait keyfi sayıdaki elemanların birleşimi τ ya aittir

koşullarını sağlıyorsa τ ya X üzerinde topoloji, (X, τ) ikilisine de topolojik uzay denir.

Tanım 2.12 (X, τ) bir topolojik uzay ve X in bazı açık alt kümelerinin sınıfı β olsun. X in her açık alt kümesi β nın bazı elemanlarının birleşimi olarak yazılabiliyorsa β ya τ için bir taban (baz) denir.

Tanım 2.13 (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $\tau_A = \{A \cap G : G \in \tau\}$ ailesi A üzerinde bir topolojidir. τ tarafından oluşturulan τ_A topolojisine τ dan indirgenen topoloji ve (A, τ_A) topolojik uzayına da (X, τ) topolojik uzayının alt uzayı denir.

Teorem 2.4 Bir (X, τ) kompakt topolojik uzayının her kapalı alt kümesi de kompakttır.

Tanım 2.14 (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X in farklı her nokta çiftini içeren ayrık komşulukları varsa (X, τ) topolojik uzayına Hausdorff Uzay denir.

Teorem 2.5 Bir (X, τ) Hausdorff uzayında kompakt alt kümeler kapalıdır.

Teorem 2.6 (X, τ) bir topolojik uzay olsun. A, X in boş olmayan bir kompakt alt kümesi olsun. Eğer $T: A \to \mathbb{R}$ sürekli ise $Ta = supT(A)$ ve $Tb = infT(A)$ olacak biçimde $a, b \in A$ vardır.

Tanım 2.15 (X, d) bir metrik uzay $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$$

olacak biçimde $\alpha \geq 0$ sayısı varsa, T ye Lipschitz dönüşümü denir. Bu eşitsizliği sağlayan en küçük α sayısına T nin Lipschitz sabiti denir. T Lipschitz dönüşümü için $\alpha < 1$ ise T dönüşümüne büzülme dönüşümü, $\alpha \leq 1$ ise T Lipschitz dönüşümüne genişlemeyen dönüşüm denir. $x \neq y$ olacak biçimdeki her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ oluyorsa T ye büzülebilir dönüşüm denir.

Her Lipschitz fonksiyonu süreklidir. Çünkü her $\varepsilon > 0$ için $d(x, y) < \delta = \frac{\varepsilon}{\alpha}$ iken $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) < \alpha\delta = \varepsilon$ olup T Lipschitz fonksiyonu süreklidir.

Teorem 2.7 (Banach) (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir büzülme dönüşümü ise T nin X de bir tek sabit noktası vardır.

İspat: $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun.

$$x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \cdots, x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0$$

biçiminde tanımlı $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alalım. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\leq Ld(x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

$$\leq L^n d(x_0, x_1)$$

olur. O halde $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq L^n d(x_0, x_1) + L^{n+1} d(x_0, x_1) + \cdots + L^{m-1} d(x_0, x_1) \\ &= [L^n + L^{n+1} + \cdots + L^{m-1}] d(x_0, x_1) \\ &= \frac{L^n}{1-L} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

bulunur ki bu $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X tam olduğundan $lim x_n = z$ olacak biçimde bir $z \in X$ noktası vardır. Ayrıca T sürekli olduğundan

$$z = lim x_{n+1} = lim T x_n = T lim x_n = Tz$$

elde edilir ki bu T nin sabit noktasının var olduğunu gösterir. Şimdi $w \in X$ noktası T nin bir başka sabit noktası ise

$$0 < d(z, w) = d(Tz, Tw) \leq L d(z, w) < d(z, w)$$

olur ki bu $L < 1$ olduğundan bir çelişkidir. Yani T nin sabit noktası tekdir.

2.2 Kıyaslama Fonksiyonları

Bu kesimde kıyaslama fonksiyonlarını ve bazı özelliklerini inceleyeceğiz. İleride bu fonksiyonlar kullanılarak α-geçişli dönüşümler için bazı sabit nokta teoremlerini göz önüne alınacaktır. Kısalık olması açısından tez boyunca negatif olmayan reel sayıların kümesini $\mathbb{R}^+$ ile göstereceğiz.

İlk olarak $\psi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ bir fonksiyon olsun ve bu fonksiyon için aşağıdaki özellikleri göz önüne alalım:

ψ_1) ψ azalmayan, yani $t_1 \leq t_2$ için $\psi(t_1) \leq \psi(t_2)$,

ψ_2) Her $t > 0$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(t) < \infty$.

Bu durumda ψ_1 ve ψ_2 şartlarını sağlayan fonksiyona (c)- kıyaslama fonksiyonu adı verilir. (c)-kıyaslama fonksiyonlarının sınıfını Ψ ile gösterelim.

Lemma 2.1 Eğer $\psi \in \Psi$ ise her $t > 0$ için $\psi(t) < t$ dir.

İspat: Her $t > 0$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(t) < \infty$ olduğundan her $t > 0$ için $lim_{n\to\infty} \psi^n(t) = 0$ dır. En az bir $t_0 > 0$ için $\psi(t_0) \geq t_0$ olduğunu kabul edelim. ψ azalmayan bir fonksiyon olduğundan

$$t_0 \leq \psi(t_0) \leq \psi(\psi(t_0)) \leq \cdots \leq \psi^n(t_0)$$

olur. Son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$t_0 \leq \lim_{n\to\infty} \psi^n(t) = 0$$

olur ki bu bir çelişkidir. Bu durumda her $t > 0$için $\psi(t) < t$ dir.

Lemma 2.2 Eğer $\psi \in \Psi$ ise $\psi(0) = 0$ dır.

İspat: $\psi(0) \neq 0$ olsun. Bu durumda $\psi(0) = t_1 > 0$ olur. ψ azalmayan bir fonksiyon olduğundan $\psi(0) \leq \psi(t_1)$ ve Lemma 2.1 den

$$0 < t_1 = \psi(0) \leq \psi(t_1) < t_1$$

olur ki bu bir çelişkidir. Bu durumda $\psi(0) = 0$ elde edilir.

Lemma 2.3 Eğer $\psi \in \Psi$ ise ψ, sıfır noktasında süreklidir.

İspat: $\psi \in \Psi$ olsun. Bu durumda Lemma 2.2 gereğince $\psi(0) = 0$ dır. Şimdi $t_n \to 0^+$olsun. $\psi(t_n) \to \psi(0)$ olduğunu göstereceğiz.$t_n \to 0^+$olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq t_n$ olur. ψ fonksiyonunun azalmayan bir fonksiyon olduğu göz önüne alınırsa

$$0 = \psi(0) \leq \psi(t_n) \leq t_n$$

elde edilir. Son eşitsizlikten $n \to \infty$ için limit alınırsa $\psi(t_n) \to \psi(0)$ olur. Bu durumda ψ, sıfır noktasında süreklidir.

Örnek: $\psi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$fonksiyonu $\lambda \in [0,1)$ olmak üzere $\psi(t) = \lambda t$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\psi \in \Psi$dır.

Örnek: $\psi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$fonksiyonu

$$\psi(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{3}, & 0 \leq t \leq \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{18}, & \dfrac{2}{3} < t \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\psi \in \Psi$ dır.

Örnek: $\psi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$fonksiyonu $\psi(t) = \frac{t}{1+t}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon ψ_2 şartını sağlamadığından bir (c)-kıyaslama fonksiyonu değildir.

2.3. α - Geçişli Dönüşümler

Şimdi Samet tarafından verilen α-geçişlik tanımını ve bununla ilgili örnekleri verelim.

Tanım 2.16 X boş olmayan bir küme, $\alpha: X \times X \to \mathbb{R}^+$ bir fonksiyon ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\alpha(x,y) \geq 1$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için $\alpha(Tx, Ty) \geq 1$ oluyorsa T dönüşümüne α-geçişli dönüşüm denir.

Örnek: $X = \mathbb{R}^+$olmak üzere $T: X \to X$ dönüşümü her $x \in X$ için $Tx = \sqrt{x}$ ve $\alpha: X \times X \to \mathbb{R}^+$fonksiyonu

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} e^{x-y}, & x \geq y \\ 0, & x < y \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda T bir α-geçişli dönüşümdür.

Örnek: $X = (0, \infty)$ olmak üzere $T: X \to X$ dönüşümü her $x \in X$ için $Tx = 2^x$ ve $\alpha: X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 2, & x \geq y \\ 0, & x < y \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda T dönüşümü α-geçişlidir.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

Samet ve arkadaşları (c)-kıyaslama fonksiyonlarını ve α-geçişli dönüşümleri kullanarak α-ψ-büzülme kavramını vermişlerdir. Ardından bu yeni tip büzülmeler için bazı sabit nokta teoremleri elde etmişlerdir.

3.1.α-ψ-Büzülme Dönüşümü

Tanım 3.1 (X,d) bir metrik uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm $\psi \in \Psi$ ve $\alpha: X \times X \to \mathbb{R}^+$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in X$ için

$$\alpha(x,y)d(Tx,Ty) \leq \psi(d(x,y)) \tag{3.1}$$

şartı sağlanıyorsa T dönüşümüne bir α-ψ-büzülme dönüşümü denir.

Tanım 3.1 de eğer $\alpha(x,y) = 1$ ve $\delta \in [0,1)$ olmak üzere $\psi(t) = \delta t$ şeklinde alınırsa

$$d(Tx,Ty) \leq \delta d(x,y)$$

eşitsizliği elde edilir. Yani her Banach büzülme dönüşümü bir α-ψ-büzülme dönüşümüdür.

Tanım 3.2 (X,d) bir metrik uzay ve $\alpha: X \times X \to \mathbb{R}^+$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ ve $x_n \to x$ olacak şekildeki her $\{x_n\}$ dizisi için $\alpha(x_n, x) \geq 1$ oluyorsa (X,d) metrik uzayına α-regülerdir denir.

Tanım 3.3 X bir küme ve $\alpha: X \times X \to \mathbb{R}^+$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in X$ için $\alpha(x,z) \geq 1$ ve $\alpha(y,z) \geq 1$ olacak şekilde bir $z \in X$ var ise X kümesine (H) özelliğine sahiptir denir.

Teorem 3.1 (X,d) bir tam metrik uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm $\psi \in \Psi$ ve $\alpha: X \times X \to \mathbb{R}^+$ bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim:

a) T bir α-ψ-büzülme dönüşümüdür,

b) T bir α-geçişli dönüşümdür,

c) $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in X$ vardır.

Ayrıca eğer T sürekli veya X uzayı α-regüler oluyorsa T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir. Ek olarak X kümesi (H) özelliğine sahip ise T nin sabit noktası tektir.

İspat: $x_0 \in X$ noktası $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olacak şeklide bir nokta olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = T^{\mathrm{n}}x_0 = Tx_{n-1}$olacak şekil de X de bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlayalım. Eğer $x_{n_0} = x_{n_0+1}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa o zaman x_{n_0}, Tnin bir sabit noktası olur. Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq x_{n+1}$ olduğunu kabul edelim. T dönüşümü α-geçişli bir dönüşüm olduğundan

$$\alpha(x_0, x_1) = \alpha(x_0, Tx_0) \geq 1 \Rightarrow \alpha(Tx_0, Tx_1) = \alpha(x_1, x_2) \geq 1$$

olur. Bu şekilde devam edilirse her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$$

elde edilir. (3.1) eşitsizliğinde $x = x_{n-1}$ ve $y = x_n$ alındığında

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(T\,x_{n-1}, T\,x_n) \\ &\leq \alpha(x_{n-1}, x_n)\, d(T\,x_{n-1}, T\,x_n) \\ &\leq \psi(d(x_{n-1}, x_n)) \end{aligned}$$

elde edilir. Tümevarım yöntemiyle her $n \in \mathbb{N}$için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \psi^n(d(x_0, x_1))$$

olur. Şimdi, her $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ için

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1})$$

$$\leq \sum_{k=n}^{m-1} \psi^k(d(x_0, x_1))$$

$$\leq \sum_{k=n}^{\infty} \psi^k(d(x_0, x_1))$$

olur. $\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(d(x_0, x_1))$ serisinin yakınsaklığından $\{x_n\}$, X de bir Cauchy dizisi olur. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır.
Eğer T sürekli ise

$$z = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} Tx_n = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = Tz$$

elde edilir ki bu T nin sabit noktasının var olduğunu gösterir.

Şimdi de X in α-regüler olduğunu kabul edelim. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ eşitsizliği ve $n \to \infty$ için $x_n \to z$ olduğu göz önüne alınarak $\alpha(x_n, z) \geq 1$ olur. Böylece,

$$\begin{aligned} d(z, Tz) &\leq d(z, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tz) \\ &= d(z, x_{n+1}) + d(Tx_n, Tz) \\ &\leq d(z, x_{n+1}) + \alpha(x_n, z) d(Tx_n, Tz) \\ &\leq d(z, x_{n+1}) + \psi\big(d(x_n, z)\big) \end{aligned}$$

elde edilir. ψ fonksiyonunun sıfır noktasında sürekli olduğu dikkate alınır ve son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa $d(z, Tz) = 0$ olur. Yani $z = Tz$ elde edilir. Şimdi de ek olarak X kümesinin (H) özelliğine sahip olduğunu kabul ederek T nin sabit noktasının tek olduğunu gösterelim. z ve w, T'nin iki sabit noktası olsun. O zaman (H) özelliğinden dolayı $\alpha(z, u) \geq 1$ ve $\alpha(w, u) \geq 1$ olacak şekilde $u \in X$ vardır. T α-geçişli olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha(z, T^n u) \geq 1$$

$$\alpha(w, T^n u) \geq 1$$

elde edilir. Bu yüzden $\alpha(z, T^n u) \geq 1$ olduğu göz önüne alınırsa her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(z, T^n u) &= d(Tz, T(T^{n-1}u)) \\ &\leq \alpha(z, T^{n-1}u)\, d(Tz, T(T^{n-1}u)) \\ &\leq \psi(d(z, T^{n-1}u)) \\ &. \\ &. \\ &. \\ &\leq \psi^n(d(z, u)) \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $n \to \infty$ limit alınırsa $T^n u \to z$ elde edilir. Benzer şeklinde $n \to \infty$ için $T^n u \to w$ elde edilir. Metrik uzaylarda dizinin limitinin tekliğinden $z = w$ elde edilir.

Bu kesimde yine Samet tarından verilen α-ψ-büzülme dönüşümleri için bir başka sabit nokta teoremini detaylı bir şekilde inceleyeceğiz. Daha sonraki kesimlerde bu sonuç literatürde var olan pek çok sabit nokta teoremi ile karşılaştırılacaktır. Kısalık olması açısından $T: X \to X$ dönüşümünün sabit noktaların kümesini aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$Fix(T) = \{x \in X : Tx = x\}.$$

Ayrıca, $\psi \in \Psi$ olmak üzere aşağıdaki Σ_ψ kümesini dikkate alacağız:

$$\Sigma_\psi = \{ \sigma \in (0, \infty) : \sigma\psi \in \Psi \}$$

Şimdi aşağıdaki önermeyi ifade ve ispat edelim.

Önerme 3.1 (X, d) bir metrik uzay, $\alpha: X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon $\psi \in \Psi$ ve $T: X \to X$ bir α-ψ büzülme olsun. Kabul edelim ki

$$\xi_0 = x_0, \xi_p = Tx_0, \ \alpha(T^n\xi_i, T^n\xi_{i+1}) \geq \sigma^{-1}, \ n \in \mathbb{N}, \ i = 0, \dots, p-1, \tag{3.2}$$

özelliğini sağlayan en az bir pozitif p tamsayısı için $\{\xi_i\}_{i=0}^{p} \subset X$ sonlu dizisi ve $\sigma \in \Sigma_\psi$ var olsun. O zaman $\{T^n x_0\}$ dizisi Cauchy dizisidir.

İspat: $\varphi = \sigma\psi$ olsun. Σ_ψ tanımından $\varphi \in \Psi$ dır. $\{\xi_i\}_{i=0}^{p}$ dizisi (3.2) şartını sağlayan bir dizi olsun. Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} = Tx_n$ olacak şekilde X de tanımlı $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alalım. Şimdi

$$d(T^r\xi_i, T^r\xi_{i+1}) \leq \varphi^r\big(d(\xi_i, \xi_{i+1})\big), r \in \mathbb{N}, \;\; i = 0, \dots, p-1 \tag{3.3}$$

olduğunu gösterelim. $i \in \{0, \dots, p-1\}$ olsun. (3.2) den

$$\sigma^{-1}\, d(T\xi_i, T\xi_{i+1}) \leq \alpha(\xi_i, \xi_{i+1})\, d(T\xi_i, T\xi_{i+1}) \leq \psi(\, d(T\xi_i, T\xi_{i+1}))$$

elde edilir. Buradan,

$$d(T\xi_i, T\xi_{i+1}) \leq \varphi\big(d(\xi_i, \xi_{i+1})\big) \tag{3.4}$$

bulunur. Yine,

$$\sigma^{-1}\, d(T^2\xi_i, T^2\xi_{i+1}) \leq \alpha(T\xi_i, T\xi_{i+1})\, d(T(T\xi_i), T(T\xi_{i+1})) \leq \psi(\, d(T\xi_i, T\xi_{i+1})$$

eşitsizliğinden

$$d(T^2\xi_i, T^2\xi_{i+1}) \leq \varphi d\big((T\xi_i, T\xi_{i+1})\big) \tag{3.5}$$

elde edilir. φ azalmayan bir fonksiyon olduğundan (3.4) ve (3.5) den

$$d(T^2\xi_i, T^2\xi_{i+1}) \leq \varphi^2\big((\xi_i, \xi_{i+1})\big)$$

bulunur. Bu şekilde devam edilirse (3.3) eşitsizliği elde edilir. Üçgen eşitsizliği dikkate alınırsa her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(T^n x_0, T^{n+1} x_0) \\ &\leq d(T^n\xi_0, T^n\xi_1) + d(T^n\xi_1, T^n\xi_2) + \dots + d\big(T^n\xi_p, T^n\xi_{p-1}\big) \end{aligned}$$

$$=\sum_{i=0}^{p-1} d(T^n\xi_i, T^n\xi_{i+1}) \leq \sum_{i=0}^{p-1} \varphi^n\big(d(\xi_i,\xi_{i+1})\big)$$

bulunur. Yani $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \sum_{i=0}^{p-1} \varphi^n\big(d(\xi_i, \xi_{i+1})\big)$$

elde edilir. Şimdi $n < m$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \sum_{j=n}^{m-1} d\big(x_j, x_{j+1}\big) \\ &\leq \sum_{j=n}^{m-1}\sum_{i=0}^{p-1} \varphi^j\big(d(\xi_i, \xi_{i+1})\big) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=n}^{m-1} \varphi^j\big(d(\xi_i, \xi_{i+1})\big) \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan $n, m \to \infty$ için limit alınırsa

$$\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=n}^{m-1} \varphi^j\big(d(\xi_i, \xi_{i+1})\big) \to 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $n, m \to \infty$ için $d(x_n, x_m) \to 0$ olur. Yani $\{x_n\}$ dizisi (X, d) de bir Cauchy dizisidir.

Aşağıdaki teorem T dönüşümünün sürekli olduğu göz önüne alınarak elde edilmiştir.

Teorem 3.2 (X, d) bir tam metrik uzay $\alpha: X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon $\psi \in \Psi$ ve $T: X \to X$ bir α-ψ büzülme olsun. Eğer (3.2) şartı sağlanıyorsa $\{T^n x_0\}$ dizisi bir $x^* \in X$ noktasına yakınsar, üstelik T sürekli ise x^*, T'nın bir sabit noktası olur.

İspat: Önerme 3.3 den $\{T^{n}x_0\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir (X,d) bir tam metrik uzay olduğundan

$\lim_{n\to\infty} d(T^{n}x_0, x^*) = 0$ olacak şekilde $x^* \in X$ vardır.

T sürekli olduğundan

$\lim_{n\to\infty} d(T^{n+1}x_0, Tx^*) = 0$ elde edilir. Metrik uzayda limit noktası tek olduğundan

$Tx^* \ = \ x^*$ elde edilir. O halde x^*, T 'nın bir sabit noktası olur.

Teorem 3.3 (X,d) bir tam metrik uzay $\alpha: X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $\psi \in \Psi$ ve $T: X \to X$ bir α-ψ büzülme olsun. Eğer (3.2) şartı sağlanıyorsa $\{T^{n}x_0\}$ dizisi bir $x^* \in X$ noktasına yakınsar.

Üstelik

$$\lim_{n\to\infty} \alpha\left(T^{\gamma(n)}x_0, x^*\right) = \ell \in (0,\infty)$$

olacak şekilde

$\{T^{n}x_0\}$ dizisinin bir $\left\{T^{\gamma(n)}x_0\right\}$ alt dizisi varsa x^*, T 'nın bir sabit noktasıdır.

İspat: Önerme 3.3 den $\{T^{n}x_0\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir.(X,d) bir tam metrik uzay olduğundan $\{T^{n}x_0\}$ dizisi bir $x^* \in X$ noktasına yakınsar. Şimdi kabul edelim ki

$$\lim_{n\to\infty} \alpha\left(T^{\gamma(n)}x_0, x^*\right) = \ell \in (0,\infty) \tag{3.6}$$

olacak şekilde $\{T^{n}x_0\}$ dizisinin bir $\left\{T^{\gamma(n)}x_0\right\}$ alt dizisi var olsun. O zaman T, α-ψ büzülme olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha\left(T^{\gamma(n)}x_0, x^*\right) d\left(T^{\gamma(n)+1}x_0, Tx^*\right) \leq \psi d\left(T^{\gamma(n)}x_0, x^*\right)$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $n \to \infty$ limit alınırsa

$$\ell\, d(x^*, Tx^*) \leq \psi(0) = 0$$

elde edilir.

O halde x^*, T 'nın bir sabit noktası olur.

Aşağıdaki teorem de sabit noktanın tekliği için yeterlilik şartı verilmektedir.

Teorem 3.4 (X, d) bir tam metrik uzay, $\alpha: X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon $\psi \in \Psi$ ve $T: X \to X$ bir α-ψ büzülme olsun. Ayrıca kabul edelim ki

$i)$ $Fix(T) \neq \emptyset$
$ii)$ $x \neq y$ olacak şekilde her $(x, y) \in Fix(T) \times Fix(T)$ için, $\alpha(x, y) < 1$ ise $n \in \mathbb{N}, i = 0, \dots, p-1$ için X'de sonlu bir $\{\zeta_i(x, y)\}_{i=0}^{q} \subset X$ dizisi ve bir $\eta \in \Sigma_\psi$ olup aşağıdaki eşitsizlik sağlanıyorsa

$\zeta_0(x, y) = x$, $\zeta_q(x, y) = y$, $\alpha(T^{\mathrm{n}}\zeta_i(x, y), T^{\mathrm{n}}\zeta_{i+1}(x, y)) \geq \eta^{-1}$

T bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: $\varphi = \eta\psi \in \Psi$ olsun. $u\ v \in X, T$'nin iki farklı sabit noktası olsun. O zaman $d(u, v) > 0$ dır. Şimdi aşağıdaki iki durumu göz önüne alalım.

Durum 1: $\alpha(u, v) \geq 1$ olun. T dönüşümü α-ψ büzülme olduğundan

$$d(u, v) \leq \alpha(u, v) d(Tu, Tv) \leq \psi(d(u, v))$$

elde edilir. Böylece

$\psi(d(u, v)) < d(u, v)$ olduğundan $d(u, v) < d(u, v)$ elde edilir bu çelişkidir.

Durum 2: $\alpha(u, v) < 1$ olsun. Kabulümüzden $n \in \mathbb{N}$, $i = 0, \dots, p-1$ için

$\zeta_0(u,v) = u, \zeta_q(u,v) = v$, ve $\alpha(T^{\mathrm{n}}\zeta_i(u,v), T^{\mathrm{n}}\zeta_{i+1}(u,v)) \geq \eta^{-1}$ olacak şekilde sonlu bir $\{\zeta_i(x,y)\}_{i=0}^{q}$ dizisi vardır. Önerme 3.1'in ispatında olduğu gibi

$$d(T^r\zeta_i(u,v), T^r\zeta_{i+1}(u,v)) \leq \varphi^r(d(\zeta_i(u,v), \zeta_{i+1}(u,v))) \tag{3.7}$$

$r \in \mathbb{N}, i = 0, \ldots, q-1$ eşitsizliği elde edilir. Son olarak (3.7) de üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} d(u,v) &= d(T^{\mathrm{n}}u, T^{\mathrm{n}}v) \\ &\leq \sum_{i=0}^{q-1} d(T^{\mathrm{n}}\zeta_i(u,v), T^{\mathrm{n}}\zeta_{i+1}(u,v)) \\ &\leq \sum_{i=0}^{q-1} \varphi^n(d(\zeta_i(u,v), \zeta_{i+1}(u,v))) \end{aligned}$$

elde edilir. $n \to \infty$ limit alınırsa $d(u,v) = 0$ bulunur. Bu $d(u,v) > 0$ olmasıyla çelişir. O halde T bir tek sabit noktaya sahiptir.

3.2. ψ-Büzülme Dönüşümü

Tanım 3.4 (X,d) bir metrik uzay $\psi \in \Psi$ ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \psi(d(x,y)) \tag{3.8}$$

oluyorsa T ye ψ-büzülme dönüşümü denir.

Teorem 3.5 (X,d) bir metrik uzay $\psi \in \Psi$ ve $T: X \to X$ bir ψ-büzülme dönüşümü olsun. O halde T α-ψ-büzülme olacak şekilde $\alpha: X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon vardır.

İspat: Her $x, y \in X$ için $\alpha(x,y) = 1$ şeklinde tanımlı $\alpha: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu göz önüne alırsak (3.8) eşitsizliğinden T bir α-ψ-büzülme dönüşümü olur.

Berinde tarafında verilen aşağındaki sabit nokta sonucu Teorem 3.2 kullanılarak ispatlanabilmektedir.

Sonuç 3.1 (X, d) bir tam metrik uzay, $\psi \in \Psi$ ve $T: X \to X$ bir ψ-büzülme dönüşümü olsun. O zaman T bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: T dönüşümü bir ψ-büzülme dönüşümü olduğundan her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \le d(x, y)$ eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla T süreklidir. Ayrıca Teorem 3.5 den T aynı zamanda bir α-ψ-büzülme dönüşümü olup $p = 1$ ve $\sigma = 1$ için (3.2) eşitsizliği sağlanır. O zaman Teorem 3.2 den T dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir. Son olarak Teorem 3.4 den T dönüşümünün sabit noktası tekdir.

Not: Yukarıda ki sonuçta $k \in (0,1)$ olmak üzere $\psi(t) = kt$ fonksiyonunu göz önüne alırsak literatürde iyi bilinen Banach Sabit Nokta Teoremi elde edilir.

Şimdi Teorem 3.5 in karşıtının doğru olmadığını gösteren bir örnek verelim.

Örnek: $X = [0,1]$ kümesini alışılmış metrik ile göz önüne alalım. $T: X \to X$ ve $\alpha: X \times X \to \mathbb{R}^+$dönüşümleri aşağıdaki gibi tanımlansın: her $x \in X$ için

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \frac{1}{2}, & x \notin [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

ve her $x, y \in X$ için

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x, y \in [0, \frac{1}{4}] \\ 0, & diğer\ durumlar \end{cases}.$$

Bu durumda T sürekli olmadığından bir ψ-büzülme değildir ancak $\psi(t) = \frac{t}{2}$ dikkate alındığından bir α-ψ-büzülme olur.

3.3. Rasyonel Büzülme Dönüşümleri

3.3.1 Dass-Gupta Büzülme

Tanım 3.5 (X,d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \leq \mu d(y,Ty)\frac{1+d(x,Tx)}{1+d(x,y)} + \lambda d(x,y) \tag{3.9}$$

eşitsizliğini sağlayan $\mu + \lambda < 1$olacak şekilde $\mu, \lambda \geq 0$ sabit sayıları varsa, T ye Dass-Gupta dönüşümü denir.

Teorem 3.6 Her Dass-Gupta dönüşümü bir α-ψ-büzülme dönüşümüdür.

İspat: $T: X \to X$ bir Dass-Gupta dönüşümü olsun. O halde her $x, y \in X$ için (3.9) eşitsizliğinden

$$d(Tx,Ty) - \mu d(y,Ty)\frac{1+d(x,Tx)}{1+d(x,y)} \leq \lambda d(x,y),$$

elde edilir. Buradan, $Tx \neq Ty$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için

$$\left(1 - \mu\frac{d(y,Ty)\big(1+d(x,Tx)\big)}{\big(1+d(x,y)\big)d(Tx,Ty)}\right) d(Tx,Ty) \leq \lambda d(x,y) \tag{3.10}$$

olur. $\psi: [0,\infty) \to [0,\infty)$ ve $\alpha: X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonları sırasıyla her $t \geq 0$ için

$$\psi(t) = \lambda t \tag{3.11}$$

ve

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} 1 - \mu\frac{d(y,Ty)\big(1+d(x,Tx)\big)}{\big(1+d(x,y)\big)d(Tx,Ty)}, & Tx \neq Ty \\ 0 & diğer\ durumlar \end{cases} \tag{3.12}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda α ve ψ fonksiyonları göz önüne alınarak (3.10) dan

$$\alpha(x,y)d(Tx,Ty) \leq \psi\big(d(x,y)\big)$$

elde edilir. O halde T bir α-ψ-büzülmedir dönüşümüdür.

Sonuç 3.2 Tam metrik uzay üzerindeki her Dass-Gupta dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: Keyfi $x_0 \in X$ noktası göz önüne alalım. Eğer bazı $r \in \mathbb{N}$ için $T^r x_0 = T^{r+1}x_0$ ise $T^r x_0$, T nin bir sabit noktası olur. Şimdi, her $r \in \mathbb{N}$ için $T^r x_0 \neq T^{r+1}x_0$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için (3.12) göz önüne alınırsa

$$\alpha(T^{\mathrm{n}}x_0, T^{n+1}x_0) = 1 - \mu\frac{d(T^{n+1}x_0, T^{n+2}x_0)(1 + d(T^n x_0, T^{n+1}x_0)\,)}{(1 + d(T^n x_0, T^{n+1}x_0)\,)d(T^{n+1}x_0, T^{n+2}x_0)}$$

$$= 1 - \mu > 0$$

elde edilir. Diğer taraftan (3.11) den her $t \geq 0$ için

$$(1-\mu)^{-1}\psi(t) = \frac{\lambda}{1-\mu}t$$

bulunur.

$\mu + \lambda < 1$ olduğundan $(1-\mu)^{-1}\psi \in \Psi$ elde edilir. Buradan ise $(1-\mu)^{-1} \in \Sigma_\psi$ bulunur. $p = 1$ ve $\sigma = (1-\mu)^{-1}$ olarak alınırsa (3.2) eşitsizliği sağlanır. O zaman Teorem 3.3 den $\{T^{\mathrm{n}}x_0\}$ dizisi bir $x^* \in X$ noktasına yakınsar. Genelliği bozmaksızın $n \geq N$ için $T^{n+1}x_0 \neq Tx^*$ olacak şekildeki $N \in \mathbb{N}$ sayısının var olduğunu kabul edelim. Aksi taktirde x^*, T nin bir sabit noktası olacaktır. Böylece (3.12) göz önüne alınırsa her $n \geq N$ için

$$\alpha(T^{\mathrm{n}}x_0, x^*) = 1 - \mu \frac{d(x^*, Tx^*)(1 + d(T^n x_0, T^{n+1}x_0))}{(1 + d(T^n x_0, x^*))d(T^{n+1}x_0, Tx^*)}$$

elde edilir.

Buradan $n \to \infty$ limit alınırsa $\alpha(T^{\mathrm{n}}x_0, x^*) \to 1 - \mu$ elde edilir. $\ell = 1 - \mu$ olmak üzere Teorem 3.3 den x^*, T nin bir sabit noktası olur. Şimdi sabit noktanın tek olduğunu görelim. $x \neq y$ olacak şekildeki $(x, y) \in Fix(T) \times Fix(T)$ için $\alpha(x, y) = 1$ olur ki Teorem 3.4 den T bir tek sabit noktaya sahiptir.

3.3.2 Jaggi Büzülme

Tanım 3.6 (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $x \neq y$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \mu \frac{d(x,Tx)d(y,Ty)}{d(x,y)} + \lambda d(x, y) \tag{3.13}$$

eşitsizliğini sağlayan $\mu + \lambda < 1$ olacak şekilde $\mu, \lambda \geq 0$ sabit sayıları varsa T ye Jaggi büzülme dönüşümü denir.

Teorem 3.7 Her Jaggi dönüşümü bir α-ψ-büzülme dönüşümüdür.

İspat: $T: X \to X$ bir Jaggi dönüşümü olsun. O halde $x \neq y$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için (3.13) eşitsizliğinden

$$d(Tx, Ty) - \mu \frac{d(x, Tx)d(y, Ty)}{d(x, y)} \leq \lambda d(x, y),$$

elde edilir. O zaman $Tx \neq Ty$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için

$$\left(1 - \mu \frac{d(x,Tx)d(y,Ty)}{d(x,y)d(Tx,Ty)}\right) d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y) \tag{3.14}$$

olur.

$\psi: [0, \infty) \to [0, \infty)$ ve $\alpha: X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonları sırasıyla her $t \geq 0$

$$\psi(t) = \lambda t \tag{3.15}$$

ve

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 1 - \mu \frac{d(x,Tx)d(y,Ty)}{d(x,y)d(Tx,Ty)}, & Tx \neq Ty \\ 0 & diğer\ durumlar \end{cases} \tag{3.16}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda α ve ψ fonksiyonları göz önüne alınarak (3.14) den

$$\alpha(x, y)d(Tx, Ty) \leq \psi\big(d(x, y)\big)$$

elde edilir. O halde T, bir α-ψ-büzülme dönüşümüdür.

Sonuç 3.3 Tam metrik uzayda sürekli olan her Jaggi dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: Keyfi $x_0 \in X$ noktası göz önüne alalım. Genelliği bozmaksızın her $r \in \mathbb{N}$ için $T^r x_0 \neq T^{r+1} x_0$ olsun. O zaman her $n \in \mathbb{N}$için (3.16) göz önüne alınırsa.

$$\alpha(T^n x_0, T^{n+1} x_0) = 1 - \mu \frac{d(T^n x_0, T^{n+1} x_0) d(T^{n+1} x_0, T^{n+2} x_0)}{d(T^n x_0, T^{n+1} x_0) d(T^{n+1} x_0, T^{n+2} x_0)}$$

$$= 1 - \mu > 0$$

elde edilir. Öte yandan (3.15) göz önüne alınırsa her $t \geq 0$ için

$$(1 - \mu)^{-1} \psi(t) = \frac{\lambda}{1 - \mu} t$$

eşitliği elde edilir. $\mu + \lambda < 1$ olduğundan $(1-\mu)^{-1}\psi \in \Psi$ olur. Buradan ise $(1-\mu)^{-1} \in \Sigma_\psi$ elde edilir. Böylece $p = 1$ ve $\sigma = (1-\mu)^{-1}$ olarak alınırsa (3.2) eşitsizliği sağlanır. Teorem 3.2 gereğince $\{T^n x_0\}$ dizisibir $x^* \in X$ noktasına yakınsar. T sürekli olduğundan yine Teorem 3.2 den x^*, T nin bir sabit noktası olur. Yukarıda olduğu gibi sabit noktanın tekliğini görülebilir.

3.4. Berinde Tip Büzülme Dönüşümleri

Tanım 3.7 (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y) + L d(y, Tx) \tag{3.17}$$

eşitsizliğini sağlayan $\lambda \in (0,1)$ ve $L \geq 0$ sabit sayıları varsa T ye Berinde tip büzülme denir.

Teorem 3.8 Her Berinde tip büzülme dönüşümü bir α-ψ-büzülmedir dönüşümüdür.

İspat: $T: X \to X$ Berinde tip büzülme olsun. O halde her $x, y \in X$ için (3.17) den

$$d(Tx, Ty) - L d(y, Tx) \leq \lambda d(x, y)$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan $Tx \neq Ty$olacak şekildeki her $x, y \in X$ için

$$\left(1 - L\frac{d(y,Tx)}{d(Tx,Ty)}\right) d(\,Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y) \tag{3.18}$$

eşitsizliği elde edilir. $\psi: [0, \infty) \to [0, \infty)$ ve $\alpha: X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonları sırasıyla her $t \geq 0$

$$\psi(t) = \lambda t$$

ve

$$\alpha(x,y)=\begin{cases}1-L\frac{d(y,Tx)}{d(Tx,Ty)}, & Tx\neq Ty\\ 0 & diğer\ durumlar\end{cases} \tag{3.19}$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca α ve ψ fonksiyonları göz önüne alınarak (3.18) den

$$\alpha(x,y)d(Tx,Ty)\leq\psi\big(d(x,y)\big)$$

elde edilir. O halde T bir α-ψ-büzülmedir.

Sonuç 3.4 Tam metrik uzayda her Berinde tip büzülme dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir.

İspat: Keyfi $x_0\in X$ noktası göz önüne alalım. Genelliği bozmaksızın her $r\in\mathbb{N}$ için $T^r x_0\neq T^{r+1}x_0$ olsun. Her $n\in\mathbb{N}$ için (3.19) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\alpha(T^{\mathrm{n}}x_0,T^{n+1}x_0) &= 1-L\frac{d(T^{n+1}x_0,T^{n+1}x_0)}{d(T^{n+1}x_0,T^{n+2}x_0)}\\ &= 1\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $p=1$ ve $\sigma=1$ olarak alınırsa (3.2) eşitsizliği sağlanır. Teorem 3.3 gereğince $\{T^{\mathrm{n}}x_0\}$ dizisi bir $x^*\in X$ noktasına yakınsar. Yine genelliği bozmamaksızın $n\geq N$ için $T^{n+1}x_0\neq Tx^*$ olacak şekildeki $N\in\mathbb{N}$ var olsun. O zaman (3.19) den her $n\geq N$ için $n\to\infty$ limit alınırsa

$$\alpha(T^{\mathrm{n}}x_0,T^{n+1}x_0)=\ 1-L\frac{d(x^*,T^{n+1}x_0)}{d(T^{n+1}x_0,Tx^*)}\to 1$$

elde edilir. $\ell=1$ ile Teorem 3.3. göz önüne alınırsa x^*, T nin bir sabit noktası olur.

Not: Berinde tip büzülme dönüşümleri bir tek sabit noktaya sahip olmak zorunda değildir. Örneğin, $X=\mathbb{R}$ üzerindeki $Tx=x$ dönüşümü bir Berinde tip büzülme dönüşüm olup sabit noktası tek değildir.

3.5. Ciric Tip Büzülme

Tanım 3.8 (X,d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y \in X$ için

$$\min\{ d(Tx,Ty), d(x,Tx), d(y,Ty)\} - \min\{d(x,Ty), d(y,Tx)\} \leq \lambda d(x,y) \quad (3.20)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\lambda \in (0,1)$ sabit sayısı varsa T ye Ciric tip büzülme denir.

Teorem 3.9 Her Ciric tip büzülme bir α-ψ-büzülmedir.

İspat: $T: X \to X$ Ciric tip büzülme olsun. Bu durumda $\psi: [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonunu

$$\psi(t) = \lambda t \quad (3.21)$$

ve $\alpha: X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonunu da

$$\alpha(x,y)\begin{cases} \min\left\{1, \frac{d(x,Tx)}{d(Tx,Ty)}, \frac{d(y,Ty)}{d(Tx,Ty)}\right\} - \min\left\{\frac{d(x,Ty)}{d(Tx,Ty)}, \frac{d(y,Tx)}{d(Tx,Ty)}\right\}, & Tx \neq Ty \\ 0 & , \text{ diğer durum} \end{cases} \quad (3.22)$$

şeklinde tanımlayalım. O zaman (3.20) eşitsizliğinden her $x,y \in X$ için

$$\alpha(x,y)d(Tx,Ty) \leq \psi\big(d(x,y)\big) \quad (3.23)$$

elde edilir. O halde T, bir α-ψ büzülmedir.

Sonuç 3.5 Tam metrik uzaylarda sürekli her Ciric tip Büzülme bir sabit noktaya sahiptir.

İspat: Keyfi $x_0 \in X$ noktası göz önüne alalım. Genelliği bozmaksızın, her $r \in \mathbb{N}$ için $T^r x_0 \neq T^{r+1} x_0$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için (3.22) yi göz önüne alınırsak.

$$\alpha(T^{\mathrm{n}}x_0, T^{n+1}x_0) = \min\left\{1, \frac{d(T^{\mathrm{n}}x_0, T^{n+1}x_0)}{d(T^{n+1}x_0, T^{n+2}x_0)}, \frac{d(T^{n+1}x_0, T^{n+2}x_0)}{d(T^{n+1}x_0, T^{n+2}x_0)}\right\}$$

$$- \min\left\{\frac{d(T^{\mathrm{n}}x_0, T^{n+2}x_0)}{d(T^{n+1}x_0, T^{n+2}x_0)}, \frac{d(T^{n+1}x_0, T^{n+1}x_0)}{d(T^{n+1}x_0, T^{n+2}x_0)}\right\}$$

$$= \min\left\{1, \frac{d(T^{\mathrm{n}}x_0, T^{n+1}x_0)}{d(T^{n+1}x_0, T^{n+2}x_0)}\right\}$$

elde edilir.

Şimdi en az bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha(T^{\mathrm{n}}x_0, T^{n+1}x_0) = \frac{d(T^{\mathrm{n}}x_0, T^{n+1}x_0)}{d(T^{n+1}x_0, T^{n+2}x_0)}$$

olsun. Bu durumda (3.21) ve (3.23) den

$$d(T^{\mathrm{n}}x_0, T^{n+1}x_0) \leq \lambda d(T^{\mathrm{n}}x_0, T^{n+1}x_0)$$

elde edilir.

Buradan da her $r \in \mathbb{N}$ için $T^r x_0 \neq T^{r+1} x_0$ olduğu göz önüne alırsak $\lambda \geq 1$ olur. Ancak bu bir çelişkidir. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha(T^{\mathrm{n}}x_0, T^{n+1}x_0) = 1$$

olur. Böylece $p = 1$ ve $\sigma = 1$ için (3.2) eşitsizliği sağlanır. Teorem 3.3 den $\{T^{\mathrm{n}}\mathrm{x}_0\}$ dizisi T' nin bir sabit noktasına yakınsar.

Not: Ciric tip büzülme bir tek sabit noktaya sahip olmayabilir. Örneğin bir metrik uzayda birim dönüşüm Ciric tip büzülme dönüşümüdür fakat sabit noktası tek değildir.

3.6. Suzuki Tip Büzülme

Tanım 3.9 (X, d) bir metrik uzay $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$(1+r)^{-1}\, d(x, Tx) \leq d(x, y) \Rightarrow \; d(Tx, Ty) \leq rd(x, y) \tag{3.24}$$

önermesini doğrulayan bir $r \in (0,1)$ sabit sayısı varsa T' ye Suzuki tip büzülme denir.

Teorem 3.10 Her Suzuki tip büzülme bir α-ψ büzülmedir.

İspat: $T: X \to X$ Suzuki tip büzülme olsun. Bu durumda $\psi: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonunu

$\psi(t) = rt$

ve

$\alpha: X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonunu da

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 1\,, & (1+r)^{-1}\, d(x, Tx) \leq d(x, y) \\ 0 & , \; diğer\ durumlar \end{cases} \tag{3.25}$$

şeklinde tanımlayalım. O zaman (3.24) eşitsizliğinden her $x, y \in X$ için

$$\alpha(x, y) d(Tx, Ty) \leq \psi\big(d(x, y)\big)$$

elde edilir. O halde T, bir α-ψ büzülmedir.

Sonuç 3.6 Tam metrik uzaylarda her Suzuki büzülme dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: Keyfi $x_0 \in X$ noktası göz önüne alalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$(1+r)^{-1}\, d\big(T^{\mathrm{n}}x_0, T(T^{\mathrm{n}}x_0)\big) \le d(T^{\mathrm{n}}x_0, T^{n+1}x_0) \tag{3.26}$$

eşitsizliği sağlanır. O zaman (3.25)'deki α fonksiyonunu göz önüne alırsak, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha(T^{\mathrm{n}}x_0, T^{n+1}x_0) = 1$$

olur. Böylece $p = 1$ ve $\sigma = 1$ için (3.2) eşitsizliği sağlanır. Teorem 3.3 den $\{T^{\mathrm{n}}x_0\}$ dizisi bir $x^* \in X$ noktasına yakınsar. (3.24) ve (3.26)'dan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(T(T^{\mathrm{n}}x_0), T^2(T^{\mathrm{n}}x_0)) \le rd(T^{\mathrm{n}}x_0, T(T^{\mathrm{n}}x_0))$$

elde edilir. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için

$$(1+r)^{-1}\, d\big(T^{\gamma(n)}x_0, T^{\gamma(n)+1}x_0\big) \le d\big(T^{\gamma(n)}x_0,\, x^*\big)$$

eşitsizliği sağlayan $\{n\}$ dizisinin bir $\{\gamma(n)\}$ alt dizisi vardır. O zaman α'nın tanımından her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha\big(T^{\gamma(n)}x_0,\, x^*\big) = 1$$

elde edilir. Teorem 3.3 den x^*, T'nin bir sabit noktası olur. Öte yandan (3.25)'den $x \ne y$ olacak şekildeki $(x, y) \in Fix(T) \times\ Fix(T)$ için $\alpha(x, y) = 1$ dır. O halde Teorem 3.4' den x^* T'nin bir tek sabit noktasıdır.

3.6. Döngüsel Dönüşüm

(X, d) bir metrik uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun ve m bir pozitif tamsayı olsun. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa, $\bigcup_{i=1}^{m} X_i$ ifadesine X in T dönüşümüne göre döngüsel gösterimi denir:

$i)$ $X = \bigcup_{i=1}^{m} X_i$
$ii)$ $X_i \neq \emptyset$, $i = 0, \dots, m$
$iii)$ $T(X_1) \subseteq X_2, \dots, T(X_{m-1}) \subseteq X_m, T(X_m) \subset X_1$.

Tanım 3.10 (X, d) bir metrik uzay, $A_1, \dots, A_m$ kümeleri X in kapalı alt kümeleri olmak üzere $Y = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$, $\psi \in \Psi$ ve $T: Y \to Y$ bir dönüşüm olsun. Eğer

$i)$ $\bigcup_{i=1}^{m} A_i$ ifadesi Y in T dönüşümüne göre döngüsel gösterimi ve
$ii)$ Her $i = 1, \dots, m$, $x \in A_i$, $y \in A_{i+1}$ ve $A_{m+1} = A_1$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \psi\big(d(x, y)\big)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümüne döngüsel ψ-büzülme adı verilir.

Teorem 3.11 (X, d) bir metrik uzay, $A_1, \dots, A_m$ kümeleri X in kapalı alt kümeleri olmak üzere $Y = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$ ve $T: Y \to Y$ bir döngüsel ψ-büzülme dönüşüm olsun. O zaman her $x, y \in Y$ için

$$\alpha(x, y) d(Tx, Ty) \leq \psi\big(d(x, y)\big) \tag{3.27}$$

olacak biçimde bir $\alpha: Y \times Y \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu vardır.

İspat: $\alpha: Y \times Y \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu

$$\alpha(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in A_i\times A_{i+1}\\ \\ 0, & diğer\ durumlar\end{cases} \tag{3.28}$$

biçiminde tanımlansın. O zaman Tanım 3.10 ii den (3.27) elde edilir.

Sonuç 3.7 (X,d) tam metrik uzay, $A_1,\ldots,A_m$ kümeleri X in kapalı alt kümeleri olmak üzere $Y=\bigcup_{i=1}^{m}A_i$ ve $T:Y\to Y$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\bigcup_{i=1}^{m}A_i$ ifadesi Y nin T ye göre döngüsel gösterimi ve T bir döngüsel ψ-büzülme dönüşümü ise T bir tek $x^*\in\bigcap_{i=1}^{m}A_i$ sabit noktasına sahiptir.

İspat: Keyfi $x_0\in A_1$ noktasını göz önüne alalım. O zaman (3.28) den her $n\in N$ için

$$\alpha(T^{\mathrm{n}}x_0,T^{n+1}x_0)=1$$

Y nin T ye göre döngüsel gösterimi dolayısıyla $\{T^{\mathrm{n}}x_0\}$ dizisi her bir A_i içerisinde sonsuz çoklukta terime sahiptir. Böylece $\{T^{\mathrm{n}}x_0\}$ dizisinin her bir A_i içerisinde $\{T^{\gamma_i(n)}x_0\}$ gibi bir alt dizisi bulunabilir. A_i her biri kapalı olduğundan $x^*\in\bigcap_{i=1}^{m}A_i$dir. Ayrıca (3.28) her $n\in N$ için $j=1,\ldots,m$ için $\{T^{\gamma_j(n)}x_0,\ x^*\}=1$ yazılabilir. Böylece Teorem 3.3' den x^* T' nin bir sabit noktasıdır. Diğer taraftan

$$Fix(T)\times Fix(T)\subseteq\cap_{\,i=1}^{\,m}A_i\times\cap_{\,i=1}^{\,m}A_i$$

olduğundan her $x,y\in\ Fix(T)\times Fix(T)$ den

$\alpha(x,y)=1$ böylece Teorem 3.4' den x^* T' nin bir tek sabit noktasıdır.

3.8. Edelstein Sabit Nokta Teoremi

Şimdi Edelstein sabit nokta teoreminin bir genelleştirilmiş versiyonunu Teorem 3.2 nin bir sonucu olarak elde edelim.

Sonuç 3.8 (X, d) tam metrik uzayı en az bir $\varepsilon > 0$ için ε zincirlenebilir olsun. Yani verilen her $x, y \in X$ için, $i = 0, \dots, N-1$ olmak üzere

$$x = x_0 \,, y = x_N, \qquad d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon \tag{3.29}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\{x_i\}_{i=0}^{N}$ sonlu dizi ve N tamsayısı var olsun. $\psi \in \Psi$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(x,y) < \varepsilon \Rightarrow d(Tx, Ty) \leq \psi(d(x,y)) \tag{3.30}$$

eşitsizliğini sağlayan $T: X \to X$ dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: (3.30) ifadesinden T dönüşümü sürekli olduğu açıktır.

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} 1, & d(x,y) < \varepsilon \\ 0, & diğer\ durumlar \end{cases} \tag{3.31}$$

şeklinde tanımlı α fonksiyonu göz önüne alırsak (3.30) dan her $x, y \in X$ için

$$\alpha(x,y) d(Tx, Ty) \leq \psi(d(x,y))$$

eşitsizliği elde edilir.

$x = x_0$ ve $y = Tx_0$ için (3.29) ve (3.30) dan

$$\xi_0 = x_0, \xi_p = Tx_0, \ \alpha(\xi_i, \xi_{i+1}) \geq 1 \ , \ \mathrm{i} = 0, \dots, \mathrm{p} - 1$$

eşitsizliğini sağlayan $\{\xi_i\}_{i=0}^{p}$ sonlu bir dizi vardır.

Şimdi $\mathrm{i} \in \{0, \dots, \mathrm{p} - 1\}$ sabit olsun. (3.30) ve (3.31) den

$\alpha(\xi_i, \xi_{i+1}) \geq 1 \quad \Rightarrow d(\xi_i, \xi_{i+1}) < \varepsilon$

$\Rightarrow \; d(T\xi_i, T\xi_{i+1}) \leq \psi(d(\xi_i, \xi_{i+1})) \; \leq \; d(T\xi_i, T\xi_{i+1}) < \; \varepsilon$

$\Rightarrow \; d(T\xi_i, T\xi_{i+1}) \geq 1$

elde edilir. Ayrıca

$\alpha(T\xi_i, T\xi_{i+1}) \geq 1 \;\; \Rightarrow \; d(T\xi_i, T\xi_{i+1}) < \; \varepsilon$

$\Rightarrow d(T^2\xi_i, T^2\xi_{i+1}) \leq \; \psi(d(T\xi_i, T\xi_{i+1})) \; \leq \; d(T\xi_i, T\xi_{i+1}) < \; \varepsilon$

$\Rightarrow d(T^2\xi_i, T^2\xi_{i+1}) \geq 1$

olup bu şekilde devam edersek her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha(T^n\xi_i, T^{n+1}\xi_{i+1}) \geq 1$$

elde edilir.

Böylece $\sigma = 1$ için (3.2) eşitsizliği sağlanır. O zaman Teorem 3.2 den $\{T^{\mathrm{n}}x_0\}$ dizisi T nin sabit noktasına yakınsar. Benzer yollar kullanılarak Teorem 3.4 ii sağlandığı görebiliriz. O halde T bir tek sabit noktaya sahiptir.

3.9. Kısmı Sıralı Kümelerde Sabit Nokta Sonuçları

Bu kısımda Teorem 3.2 kullanarak kısmı sıralı kümeler üzerinde sabit nokta sonuçları elde edeceğiz. (X, d) bir metrik uzay, $\preccurlyeq$ de X üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı olsun. Bu durumda

$$\{\, (x, y) \in X \times X \;:\; \mathrm{x} \preccurlyeq y \; veya \; y \preccurlyeq x\}$$

kümesini Δ ile gösterelim.

Sonuç 3.9 (X, d) tam metrik uzay $T\colon X \to X$ bir dönüşüm olmak üzere her $(x, y) \in \Delta$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \psi(d(x, y)) \tag{3.32}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\psi \in \Psi$ var olsun. Ayrıca aşağıdaki şartlar sağlansın

$i)$ T süreklidir
$ii)$ Bazı pozitif p tamsayıları için

$$\xi_0 = x_0, \xi_p = Tx_0 \quad (T^n \xi_i, T^n \xi_{i+1}) \in \Delta \tag{3.33}$$

eşitsizliğini sağlayan $\{\xi_i\}_{i=0}^{p}$ sonlu bir dizi vardır.

o zaman $\{T^{n}x_0\}$ dizisi T nin sabit noktasına yakınsar.

İspat:

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \Delta \\ 0, & diğer\ durumlar \end{cases} \tag{3.34}$$

şeklinde tanımlı α fonksiyonunu göz önüne alırsak (3.32) den her $x, y \in X$ için

$$\alpha(x, y)d(Tx, Ty) \leq \psi(d(x, y))$$

elde edilir. Dolayısıyla $\sigma = 1$ olmak üzere Teorem 3.2 den ispat açıktır.

Sonuç 3.10 (X, d) tam metrik uzay, $\psi \in \Psi$, $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. (3.32) ve (3.33) eşitsizliği sağlansın. O zaman $\{T^{n}x_0\}$ dizisi bir $x^* \in X$ noktasına yakınsar. Ayrıca

$n \geq N$, için $\left(T^{\gamma(n)}x_0, x^*\right) \in \Delta$ olacak şekilde bir $n \in N$ ve $\{T^n x_0\}$ dizisinin bir $\left\{T^{\gamma(n)}x_0\right\}$ alt dizisi varsa, x^* T nin bir sabit noktasıdır.

İspat: (3.34) şeklinde tanımlı fonksiyonu göz önüne alalım Teorem 3.3 ispatından $\{T^n x_0\}$ dizisi $x^* \in X$ noktasına yakınsar. Hipotez dikkate alınırsa (3.34) den

$$\lim_{n\to\infty} \alpha\left(T^{\gamma(n)} x_0, x^*\right) = 1$$

elde edilir. O halde Teorem 3.3 den x^* T nin bir sabit noktasıdır.

Sonuç 3.11 (X, d) tam metrik uzay $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun

Aşağıdaki şartlar sağlansın:

$i)$ (3.32) eşitsizliğini sağlayan bir $\psi \in \Psi$ var
$ii)$ $Fix(T) \neq \phi$,
$iii)$ $x \neq y$ olacak şekilde her $(x, y) \in Fix(T) \times Fix(T)$ için eğer $(x, y) \notin \Delta$ ise $n \in \mathbb{N}$ ve $i = 0, \ldots, q-1$ için

$$\zeta_0(x, y) = x, \zeta_q(x, y) = y \quad \left(T^{\mathrm{n}}\zeta_i(x, y), T^{\mathrm{n}}\zeta_{i+1}(x, y)\right) \in \Delta,$$

olacak şekilde pozitif q tamsayısı ve $\{\zeta_i(x, y)\}_{i=0}^{q}$ sonlu dizisi var.
o halde T bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: $\mathrm{q} = 1$ olmak üzere Teorem 2.5 den ispat açıktır.

3.10 Lineer Olmayan Kuadratik İntegral Denklemlerin Bir Sınıfı İçin Varlık Sonuçları

Bu bölümde aşağıdaki lineer olmayan kuadratik integral denklemini dikkate alacağız: $T > 0$ ve $t \in [0, T]$ için

$$x(t) = \alpha(t) + \lambda \int_0^t k_1(t, s) f_1\big(s, x(s)\big)\, ds \int_0^t k_2(t, s) f_2\big(s, x(s)\big)\, ds. \qquad (3.35)$$

$[0,T]$ üzerinde tanımlı $\mathbb{R}^N$ değerli sürekli fonksiyonların kümesi $X = C([0,T],\mathbb{R}^N)$ olsun.

X üzerinde, $(x,y) \in X \times X$ için

$$d(x,y) = max\{|x(t) - y(t)| : t \in [0,T]\}$$

metriğini dikkate alalım ki bu X üzerinde

$$\|x\|_\infty = max\{|x(t)| : t \in [0,T]\}$$

normundan elde edilmektedir. O zaman (X,d) nin bir tam metrik olduğunu biliyoruz. Ayrıca $\mathbb{R}^N$ de aşağıdaki biçimde tanımlı kısmi sıralamayı dikkate alalım: $i = 1,2,\ldots N$ için

$$u = (u_1,u_2,\ldots,u_N) \preccurlyeq v = (v_1,v_2,\ldots,v_N) \Leftrightarrow u_i \leq v_i.$$

Şimdi aşağıdaki özellikleri göz önüne alalım:

1. $\alpha: [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ sürekli,
2. $f_i: [0,T] \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ sürekli,
3. hemen hemen her $t \in [0,T]$ için $u \preccurlyeq v$

$$|f_i(t,u) - f_i(t,v)| \leq L|u - v|$$

olacak biçimde $L > 0$ var,

4. $t \in [0,T]$ ve $u \in \mathbb{R}^N$ için

$$|f_i(t,u)| \leq m_i(t) \text{ ve } m_i \in L^1[0,T]$$

olacak biçimde $m_i: [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ fonksiyonlar var,

5. her $t \in [0,T]$ için

$$u \preccurlyeq v \Rightarrow f_i(t,u) \leq f_i(t,v),$$

6. $k_i: [0,T] \times [0,T] \longrightarrow [0,\infty)$ sürekli fonksiyonlar ve

$$K_i = max\{k_i(t,u) : (t,s) \in [0,T] \times [0,T]\},$$

7. $t \in [0,T]$ için

$$\int_0^t k_i\,(t,s)m_i(s)\,ds \le K$$

olacak biçimde $K > 0$ sayısı var,

8. $t \in [0,T]$ için

$$x_0(t) \preccurlyeq \alpha(t) + \lambda \int_0^t k_1\,(t,s)f_1\big(s,x_0(s)\big)\,ds \int_0^t k_2\,(t,s)f_2\big(s,x_0(s)\big)\,ds$$

olacak şekilde $x_0 \in X$ var.

Buna göre (3.35) eşitliği ile verilen kuadratik integral denkleminin bir tek sürekli çözümünün varlığı için aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 3.12: Yukarıda verilen (1)-(8) koşullarını sağlandığını kabul edelim. Eğer

$$0 < \lambda < (LKT(K_1+K_2))^{-1}$$

oluyorsa (3.35) eşitliği verilen kuadratik integral denkleminin bir tek sürekli $x^* \in C([0,T],\mathbb{R}^N)$ çözümü vardır.

İspat : (3.35) eşitliği dikkate alınarak her $t \in [0,T]$ için

$$Tx(t) = \alpha(t) + \lambda \int_0^t k_1\,(t,s)f_1\big(s,x(s)\big)\,ds \int_0^t k_2\,(t,s)f_2\big(s,x(s)\big)\,ds$$

Biçiminde tanımlı T dönüşümünü göz önüne alalım. İspatı bir kaç adımda yapacağız.

1. Adım: T operatörü X den kendisine bir dönüşümdür.

$t \in X$ ve $t_1, t_2 \in [0,T]$ olsun. Genelliği bozmaksızın $t_1 < t_2$ olduğunu kabul edebiliriz. O zaman

$$
\begin{aligned}
&|Tx(t_1) - Tx(t_2)| \\
&\qquad \leq |\alpha(t_1) - \alpha(t_2)| \\
&\qquad + \left(\int_0^{t_2} |k_2(t_2, s) - k_2(t_1, s)|\, m_2\,(s)ds + \int_{t_1}^{t_2} k_2(t_1, s) m_2\,(s)ds \right) \\
&\qquad \times \lambda K \left(\int_0^{t_2} |k_1(t_2, s) - k_1(t_1, s)|\, m_1\,(s)ds + \int_{t_1}^{t_2} k_1(t_1, s) m_1\,(s)ds \right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Baskın Yakınsaklık Teoremi ve (1)-(8) dikkate alındığında

$$
\lim_{|t_1 - t_2|} |Tx(t_1) - Tx(t_2)| = 0
$$

elde edilir ki bu Tx in $[0, T]$ de sürekli olduğunu gösterir. Yani $T: X \to X$ bir dönüşümdür.

2. Adım: T dönüşümü bir α-ψ-büzülme dönüşümüdür.

$\alpha: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in [0, T]$ için

$$
\alpha(x, y) = \begin{cases} 1, & x(t) \preccurlyeq y(t) \\ 0, & diğer\ durumlar \end{cases}
$$

ve $\psi: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu da $\psi(t) = \lambda LKT(K_1 + K_2)t$ biçiminde tanımlansın. O zaman $\psi \in \Psi$ olduğu açıktır. Şimdi T nin α-ψ-büzülme dönüşümü olduğunu, yani her $x, y \in X$ için

$$
\alpha(x, y)\, d(Tx, Ty) \leq d(x, y) \qquad (2)
$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstereceğiz. $x, y \in X$ olsun. Eğer $x(t) \preccurlyeq y(t)$ değilse (2) eşitsizliğinin sağlandığı açıktır. Şimdi $x(t) \preccurlyeq y(t)$ olsun. Bu durumda her $t \in [0, T]$ için

$|Tx(t) - Ty(t)|$

$$\leq \lambda \int_0^t k_1(t,s)\big|f_1\big(s,x(s)\big)\big|\, ds \int_0^t k_2(t,s)\big|f_2\big(s,x(s)\big) - f_2\big(s,y(s)\big)\big|\, ds$$

$$+\lambda \int_0^t k_2(t,s)\big|f_2\big(s,y(s)\big)\big| ds \int_0^t k_1(t,s)\big|f_1\big(s,x(s)\big) - f_1\big(s,y(s)\big)\big|\, ds$$

$$\leq \lambda KL(\int_0^t k_2(t,s)\,|x(s) - y(s)|\, ds + \int_0^t k_1(t,s)\,|x(s) - y(s)|\, ds$$

$$\leq \lambda KLT(K_1 + K_2)d(x,y) = \psi\big(d(x,y)\big).$$

bulunur. Yani T α-ψ-büzülme dönüşümüdür.

3. Adım: $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(T^n x_0, T^{n+1} x_0) = 1$ dir. (8) den $\alpha(x_0, Tx_0) = 1$ elde edilir. Dolayısıyla $n = 0$ iddiamız doğrudur

Diğer taraftan (5) koşulu ile

$$\alpha(x,y) = 1 \;\Rightarrow \alpha(Tx,Ty) = 1$$

elde edilir. Böylece tüme varım yöntemiyle iddiamızın doğruluğu kolaylıkla görülebilir.

4. Adım: $\{T^n x_0\}$ picard dizisinin yakınsaklığı Teorem 3.3 kullanılarak $\{T^n x_0\}$ dizisinin d metriğine göre yakınsak olduğu bir $x^* \in X$ noktasına var olduğu elde edilebilir. Böylece bir önceki adımdan $n \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha(T^n x_0,\, x^*) = 1$$

olduğu açıktır.

5. Adım: Çözümün varlığı Teorem 3.3 uygulamasıyla x^* noktasının T nin bir sabit noktasının

olduğu yani x^* (3.35) den integral denkleminin bir çözümünün olduğu görülebilir.

6. Adım: Şimdi çözümün tekliğini gösterelim.

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)),\ \ y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_N(t))$$

olmak üzere keyfi $(x, y) \in X \times X$ sıralı ikilisini dikkate alalım. $i = 1,2, \dots N$ için

$$z_i(t) = max\{\, x_i(t), y_i(t)\}$$

olmak üzere $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_N(t))$ o halde $x(t) \preccurlyeq z(t)$ ve $x(t) \preccurlyeq z(t)$ olduğundan

$\alpha(x, z) = 1$ $\alpha(y, z) = 1$ böylece Teorem 3.4 den çözümün tekliği kolaylıkla görülebilir.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında α-ψ-büzülme dönüşümü kavramıyla verilen bir genel sabit nokta teoremi detaylı bir biçimde incelenmiştir. Ardından literatürde bulunana rasyonel büzülme, Das-Gupta, Jaggi, Berinde, Ciric, Suzuki tip büzülme gibi bazı büzülme dönüşümlerinin, birer α-ψ-büzülme dönüşümü olduğu gösterilmiştir. Böylece bahsi geçen büzülme dönüşümleri yardımıyla elde edilen sabit nokta teoremlerinin burada verilen genel teoremin birer sonucu olduğu bilgisine ulaşılmıştır. Son olarak bu genel teorem dikkate alınarak integral denklemlerin çözümünün varlığı için bir varlık teoremi sunulmuştur.

KAYNAKLAR

[1] Koçak, M., Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar, Furkan Ofset, Eskişehir, 2009.

[2] Soykan, Y., Fonksiyonel Analiz, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 2012.

[3] Berinde, V., Iterative Approximation of Fixed Points, Springer, Berlin, 2007.

[4] Samet, B., Vetro, C.,Vetro, P., Fixed point theorems for α-ψ-contractive type mappings, Nonlinear Analysis, 75 (2012), 2154-2165.

[5] Samet, B., Fixed Points α-ψ-contractive mappings with an application to quardratic integral equations, Electironic Journal of Differential Equations, 152 (2014), 1-18.

[6] Amiri, P., Rezapour, Sh., Shahzad, N., Fixed points of generalized α-ψ-contractions, RACSAM, 108 (2014), 519-526.

[7] Dass, B. K., Gupta, S., An extension of Banach contraction principle through rational expressions, Indian J. Pure Appl. Math, 6 (1975), 1455-1458.

[8] Jaggi, D. S., Some unique fixed point theorems, Indian J.Pure Appl. Math, 8 (1977), 223-230.

[9] Berinde, V., Approximating fixed points of weak contractions using the Picard iteration, Nonlinear Analysis Forum, 9 (2004), 43-53.

[10] Ciric, Lj., On some maps with a nonunique fixed point, Pub. Inst. Math., 17 (1974), 52-58.

[11] Suzuki, T., A generalized Banch contraction principle that charecterizes metric completeness, Proc. Amer. Math. Soc., 136 (2008), 1861-1869.

[12] Cyclic representation and fixed points, Ann. T. Popoviciu Scminar Funct. Eq. Approx. Convexity, 3 (2005), 171-178.

[13] Pacurar, M., Rus, I. A., Fixed point Theory for cylic ϕ-contractions, Nonlinear Analysis, 72 (2010), 1181-1187.

[14] Edelstein, M., An extension of Banach's contraction principle, Proc. Amer. Math, 12 (1961), 7-10.

[15] Nieto, J. J., Rodriguoz-Lopez, R., Conractive mapping theorems in

partially ordered sets and applications to ordinary differential equations, Order, 22 (2005), 223-239.

[16] Argyros, I. K., On a class of quadratic integral equations with perturbations, Funct. Approx., 20 (1992), 51-63.