T.C.

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

# KÜME DEĞERLİ ZAYIF PİCARD OPERATÖRLER VE BAZI SABİT NOKTA SONUÇLARI

SEMA KANYILMAZ

AĞUSTOS 2017

**Matematik Anabilim Dalında** SEMA KANYILMAZ tarafından hazırlanan KÜME DEĞERLİ ZAYIF PİCARD OPERATÖRLER VE BAZI SABİT NOKTA SONUÇLARI adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. İshak ALTUN
Danışman

Jüri Üyeleri:

| | | |
|---|---|---|
| Başkan | : Doç. Dr. Murat OLGUN | ______________________ |
| Üye (Danışman) | : Prof. Dr. İshak ALTUN | ______________________ |
| Üye | : Doç. Dr. Osman KEÇİLİOĞLU | ______________________ |

…../…../…..

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Mustafa YİĞİTOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

# ÖZET

KÜME DEĞERLİ ZAYIF PİCARD OPERATÖRLER VE BAZI SABİT NOKTA SONUÇLARI

KANYILMAZ, Sema

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. İshak ALTUN

AĞUSTOS 2017, 92 sayfa

Bu tez çalışmasında, temel olarak küme değerli zayıf Picard operatörler ve bazı sabit nokta sonuçları incelenmiştir. İlk olarak, tez boyunca kullanılacak metrik uzay ile ilgili temel tanımlar, bazı teoremler ve $\theta$-büzülme dönüşümü verilmiştir. Sonra, tam metrik uzaylarda küme değerli dönüşümler için önemli sabit nokta teoremlerinden Nadler ve Mizoguchi-Takahashi sabit nokta teoremleri detaylı bir şekilde incelenmiştir. Daha sonra, tezin asıl kısmında Nadler tip küme değerli $\theta$-büzülme dönüşümleri, $\mathcal{MT}$ tip küme değerli $\theta$-büzülme dönüşümleri, küme değerli $\alpha$-geçişli ve $\alpha_*$-geçişli dönüşümler ve son olarak Nadler tip küme değerli $(\alpha, \theta)$-büzülme dönüşümleri verilmiştir. Burada literatürde ilk defa tanımlanan $\mathcal{MT}$ Tip Küme Değerli $(\alpha, \theta)$-Büzülme Dönüşümleri kavramı kullanılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Sabit Nokta, Küme Değerli Dönüşüm, $\theta$-Büzülme Dönüşümü, Zayıf Picard Operatör, $\alpha$-Geçişli Dönüşüm.

# ABSTRACT

MULTIVALUED WEAKLY PICARD OPERATORS AND SOME FIXED POINT RESULTS
KANYILMAZ, Sema
Kırıkkale University
Graduate School Of Natural And Applied Sciences
Department of Mathematics, M. Sc. Thesis
Supervisor: Prof. Dr. İshak ALTUN
AUGUST 2017, 92 pages

In this thesis, setvalued weakly Picard operators and some fixed point results are mainly examined. Firstly, fundamental concepts of metric spaces, some well-known theorems and $\theta$-contraction mapping are given which will be used throughout thesis. Also, Nadler and Mizoguchi-Takahashi fixed point theorems which are some of important theorems for setvalued mappings in complete metric spaces are deeply examined. In main section of thesis Nadler type setvalued $\theta$-contraction mappings, $\mathcal{MT}$ type setvalued $\theta$-contraction mappings, setvalued $\alpha$-admissible and $\alpha_*$-admissible mappings and Nadler type setvalued $(\alpha, \theta)$-contraction mappings are given. The concept of $\mathcal{MT}$ Type Setvalued $(\alpha, \theta)$-Contraction Mappings defining as first time in literature is used.

**Key Words:** Fixed Point, Multivalued Map, $\theta$-Contraction Map, Weakly Picard Operator, $\alpha$-Admissible Map.

# TEŞEKKÜR

Tez çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve destek olan değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. İshak ALTUN'a sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım. Ayrıca tez dönemi boyunca benden desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen Arş. Gör. Gülhan Mınak'a, çalışmalarım boyunca maddi manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan babama, anneme ve kardeşime sonsuz teşekkür ederim.

# İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

# 1. GİRİŞ

$X$ boş olmayan bir küme ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. $Tx = x$ özelliğini sağlayan $x \in X$ noktasına $T$ nin bir sabit noktası denir. Yani, $T$ dönüşümü altında değişmeyen bir nokta $T$ nin sabit noktasıdır. Örneğin, $X = [0, \infty)$ olmak üzere $T : X \to X$ dönüşümü $Tx = \frac{x}{2}$ şeklinde tanımlansın. O zaman $x = 0$ noktası $T$ nin bir sabit noktası olmasına rağmen $Tx = x + 1$ şeklinde tanımlanan dönüşümün $X$ de hiçbir sabit noktası yoktur.

Sabit noktanın tanımında $X$ kümesi veya $T$ dönüşümü üzerinde hiçbir yapıya gerek olmadığı için, sabit nokta teori çalışmaları bir dönüşümün sabit noktasının hangi koşullar altında var olduğunu araştırmaktadır. Dolayısıyla sabit nokta teori bir varlık teorisidir. Bu teoriler genellikle sabit noktanın ne olacağını belirtmemektedir. Ancak bazı sabit nokta teoremleri sabit noktanın varlığının yanı sıra tek olup olmadığını, tek ise nasıl bulunabileceğini de göstermektedir. Ayrıca sabit nokta teori matematiğin birçok dalı ile ilişkilidir. Örneğin; lineer olmayan fonksiyonel analiz, matematiksel analiz, operatör teori ve genel topoloji bunlardan başlıcalarıdır.

Tarihsel olarak sabit nokta teori çalışmaları iki ana yönde gelişmektedir. Bunlardan birincisi, tam metrik uzay üzerinde büzülme ve büzülme tip dönüşümler için sabit nokta teoridir. İkincisi ise normlu uzayların kompakt ve konveks alt kümeleri üzerinde tanımlı sürekli operatörler için sabit nokta teoridir.

Normlu uzaylarda sabit nokta teori 1912 yılında Brouwer ile başlamıştır. Brouwer kendi adı ile anılan şu teoremi ifade ve ispat etmiştir: $\mathbb{R}^n$ nin kapalı birim yuvarından kendisine tanımlı her sürekli dönüşümün bir sabit noktası vardır. 1909 yılında Brouwer bu teoremin ispatında 19. yüzyılın sonlarında eski bir problemin çözümü için ilk defa Poincare tarafından kullanılan yeni bir ispat yöntemini kullanmıştır ve $n = 3$ için teoremin ispatını yapmıştır. Daha sonra 1910 yılında Hadamart keyfi bir $n$ için ilk ispatını vermiştir. Ardından 1912 yılında Brouwer farklı bir ispat vermiştir. Brouwer Sabit Nokta teoreminin reel eksende özel bir durumu şu şekildedir: $T : [0,1] \to [0,1]$ sürekli bir dönüşüm ise $T$ nin bir sabit noktası vardır. Ayrıca Brouwer Sabit Nokta teoremi dönüşümün sabit noktasının tekliğini garanti etmemektedir. Brouwer'ın bu teoreminin sonsuz boyutlu uzaylara genişletilmesi düşünülmüş fakat Kakutani bu teoremin sonsuz boyutlu uzaylarda geçerli olmadığını gösteren örnek vermiştir. Ancak yine de Brouwer Sabit Nokta teoremi bazı ek şartlarla birlikte 1930 yılında Schauder tarafından sonsuz boyutlu uzaylara şu şekilde genişletilmiştir: $X$ bir Banach uzayı, $C$, $X$ uzayının kompakt, konveks bir alt kümesi ve $T : C \to C$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda, $T$ dönüşümü $C$ de en az bir noktaya sahiptir.

Diğer taraftan, tam metrik uzaylarda sabit nokta teori çalışmaları 19. yüzyılın sonlarına doğru denklemlerin özellikle diferansiyel denklemlerin çözümünün varlığı ve tekliği için kullanılan ardışık yaklaşımlar metodu ile başlamıştır. 1922 yılında Banach, soyut kavramlarla bu yaklaşımı geliştirmesine rağmen bu yaklaşım metodu Picard'ın çalışması ile ilişkilendirilir. Banach, literatürde büzülme dönüşümü prensibi olarak da adlandırılan şu teoremi ifade ve ispat etmiştir: $(X, d)$ bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir büzülme dönüşümü olsun. Yani her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

olacak şekilde bir $k \in [0,1)$ var olsun. O zaman $T$ dönüşümünün $X$ de bir tek sabit noktası vardır. Üstelik $X$ deki herhangi bir başlangıç noktasından elde edilen Picard iterasyon dizisi $T$ nin sabit noktasına yakınsar.

Metrik sabit nokta çalışmalarının ispatında ilk aşama, büzülme şartı dikkate alınarak Picard iterasyon dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunun gösterilmesidir.

Ardından metrik uzayın tam olduğunun kabulü ile bu iterasyon dizisinin yakınsak olduğunun garanti edilmesi ve yakınsadığı noktanın bir sabit nokta olduğunun gösterilmesi ispatın ikinci aşaması olarak dikkate alınabilir. Bu düşüncelerle metrik sabit nokta teori çalışmalarında Picard operatör kavramı ortaya çıkmıştır: $(X,d)$ metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $T$ bir tek sabit noktaya sahip ve her bir başlangıç noktası için ardışık yaklaşımlar dizisi bu sabit noktaya yakınsıyorsa $T$ ye Picard operatör denir.

$(X,d)$ bir metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olmak üzere, her $x,y \in X$ için,

$$d(Tx,Ty) \leq kd(x,y)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $k \geq 0$ varsa $T$ dönüşümüne Lipschitz dönüşümü denir. Bu eşitsizliği sağlayan $k$ sayılarının en küçüğüne $T$ nin Lipschitz sabiti denir ve genellikle $L$ ile gösterilir. Eğer,

- $L < 1$ ise $T$ ye büzülme dönüşümü, $L \leq 1$ ise genişlemeyen dönüşüm

denir.

- $x \neq y$ olacak şekilde her $x,y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) < d(x,y)$$

eşitsizliği sağlanırsa $T$ ye büzülebilir dönüşüm denir.

Bilindiği gibi Banach Sabit Nokta teoremi, bir tam metrik uzay üzerinden kendisine tanımlı her büzülme dönüşümünün bir tek sabit noktasının var olduğunu ve hatta her iterasyon dizisinin bu sabit noktaya yakınsadığını belirtmektedir. Dolayısıyla tam metrik uzaydan kendisine tanımlı her büzülme dönüşümü Picard operatördür.

Yine, Edelstein sabit nokta teoremi dikkate alındığında, kompakt metrik uzay üzerinde tanımlı her büzülebilir dönüşümün bir Picard operatör olduğu görülebilir.

Aynı şekilde Kannan, Chatterjea, Zamfirescu, Reich, Hardy-Rogers ve Ciric sabit nokta teoremleri düşünülerek Picard operatörleri için pek çok örnek bulunabilir.

**Örnek 1.1** $X = \{0, 1, 2, \dots\}$ kümesi üzerinde $d : X \times X \to [0, \infty)$ metriği

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & , \quad x = y \\ x + y & , \quad x \neq y \end{cases}$$

ve $T : X \to X$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} 0 & , \quad x \in \{0, 1\} \\ x - 1 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $T$ nin sabit noktası 0 olduğu açıktır. Diğer taraftan, keyfi bir $x_0 \in X$ noktasını göz önüne alalım. O zaman Picard iterasyon dizisi $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, 0, \dots)$ şeklinde olmaktadır. Dolayısıyla $x_n \to 0$ olur. O halde $T$ nin Picard operatör olduğu görülmektedir.

Şimdi $T,\ S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dönüşümleri $Tx = 2x$ ve

$$Sx = \begin{cases} 1 & , \quad x \geq 0 \\ -1 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $T$ dönüşümü bir tek sabit noktaya sahip olmasına rağmen bir Picard operatör değildir. Çünkü başlangıç noktası 0 olmayan Picard iterasyon dizileri $T$ nin sabit noktasına yakınsamaz. Diğer taraftan $S$ dönüşümü için, başlangıç noktası ne olursa olsun her Picard iterasyon dizisi $S$ nin bir sabit noktasına yakınsamasına rağmen $S$ dönüşümü de bir Picard operatör değildir. Çünkü $S$ nin sabit noktası tek değildir.

Öte yandan Rus, Picard operatör kavramını genişleterek zayıf Picard operatör kavramını tanımlamıştır: $(X, d)$ metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $T$

nin sabit noktaları kümesi boş kümeden farklı ve her bir başlangıç noktası için ardışık yaklaşımlar dizisi $T$ nin bir sabit noktasına yakınsıyorsa $T$ ye zayıf Picard operatör denir.

O zaman yukarıda verilen $S$ dönüşümü bir zayıf Picard operatördür. Çünkü $S$ nin sabit noktası tek değildir ancak her Picard iterasyonu $S$ nin bir sabit noktasına yakınsar.

Tanımlar dikkate alınırsa her Picard operatörün aynı zamanda zayıf Picard operatör olduğu görülür.

Yine her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) + Ld(y, Tx)$$

eşitsizliğini sağlayan $k \in [0, 1)$ ve $L \geq 0$ sabitleri varsa $T$ dönüşümüne hemen hemen büzülme dönüşümü denir. Berinde, tam metrik uzay üzerinde tanımlı hemen hemen büzülme dönüşümlerinin zayıf Picard operatör olduğunu göstermiştir.

**Örnek 1.2** $X = [0, 2]$ kümesi alışılmış metrik ile göz önüne alınarak $T : X \to X$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} \dfrac{x}{2} \quad , & x \in [0, 1) \\ \\ 2 \quad , & x \in [1,2] \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman $T$, $k = 1/2$ ve $L = 3$ sabitleri ile hemen hemen büzülme dönüşümüdür. Ayrıca $T$ nin sabit noktaları 0 ve 2 olduğu açıktır.

Şimdi $x \in [0, 1)$ olmak üzere,

$$Tx = \frac{x}{2}$$

$$T^2x = \frac{x}{2^2}$$

$$\vdots$$

$$T^n x = \frac{x}{2^n}$$

olur. Buradan $\frac{x}{2^n} \to 0$ olduğu görülür.

Yine $x \in [1, 2]$ olmak üzere,

$$Tx = 2$$

$$T^2 x = 2$$

$$\vdots$$

$$T^n x = 2$$

olur. Burada Picard iterasyon dizinin 2 ye yakınsadığı açıktır. O halde $T$ dönüşümü zayıf Picard operatördür.

## 1.1 Kaynak Özetleri

Metrik uzay ve topolojik uzaylar ile ilgili temel kavramlar için Koçak'ın "Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Araştırmalar", Mucuk'un "Topoloji ve Kategori", Soykan'ın "Metrik Uzaylar ve Topolojisi" adlı kitapları ve Mınak'ın "Metrik Uzayda Küme Değerli Dönüşümler İçin Sabit Nokta Teoremleri" adlı makalesi kullanılmıştır[1, 2, 3, 4]. $\theta$-büzülme dönüşümü için Altun, Hançer ve Mınak'ın "On a general class of weakly Picard operators" adlı makalesi, küme değerli dönüşümler için bazı tanımlar ve kavramlar için Agarwal, O'Regan ve Sahu'nun "Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications" adlı kitabı ve küme değerli zayıf Picard (MWP) operatörün tanımı için Rus'un "Basic problems of the metric fixed point theory revisited (II)", M. Berinde ve V, Berinde'nin "On a general class of multivalued weakly Picard mappings" adlı makalelerinden ve Mınak ve Altun'un "Overall approach to Mizoguchi-Takahashi type fixed point results" adlı makalesinden yararlanılmıştır[5, 6, 7, 8, 9]. Daha sonra tezin asıl amacını oluşturan Nadler sabit nokta teoremi için Nadler'in "Multivalued contraction mappings" adlı makalesinden yararlanılmıştır[10]. Ayrıca Nadler tip küme değerli $\theta$-büzülme dönüşümü için Hançer, Mınak ve Altun'un "On a broad category of multivalued weakly Picard operators" adlı makalesinden yararlanılmıştır[11]. Mizoguchi-Takahashi sabit nokta teoremi için Mizoguchi-Takahashi'nin "Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces" adlı makalesi, $\alpha$-geçişli dönüşümlerle ilgili sabit nokta teoremleri için Samet, Vetro ve Vetro'nun "Fixed point theorems for $\alpha$-$\psi$-contractive type mappings" adlı makalesi, küme değerli $\alpha$-geçişli ve $\alpha_*$-geçişli dönüşümlerle ilgili sabit nokta teoremleri için Asl, Rezapour ve Shahzad'ın "On fixed points of $\alpha$-$\psi$-contractive multifunctions" adlı makalesi incelenmiştir[12, 13, 14]. Ayrıca, Nadler sabit nokta teoreminin genelleştirmeleri için Reich'in "Some remarks concerning contractions mappings" ile "Some problems and result in fixed point theory" adlı makaleleri, Mizoguchi-Takahashi fonksiyonunun özellikleri için Du'nun "On coincidence point and fixed point theorems for nonlinear multivalued maps", "Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions satisfied Mizoguchi-Takahashi's condition in quasiordered metric spaces" ve "Some new result and generalizations in metric fixed point theory" adlı makaleleri, Mizoguchi-Takahashi sabit nokta teoreminin çok basit bir ispatı için Suzuki'nin "Mizoguchi-Takahashi's fixed point theorem is a real generalizations of Nadler's" adlı makalesi, $(c)$-kıyaslama fonksiyonunun özellikleri için Berinde'nin "Iterative Approximation of Fixed Points" adlı kitabı incelenmiştir[15, 16, 17, 18, 19, 20, 21]. $\alpha$-geçişli ve $\alpha_*$-geçişli dönüşümlerle ilgili sabit nokta teoremlerinin genelleştirmeleri için Mohammedi, Rezapour ve Shahzad'ın "Some results on fixed points of $\alpha$-$\psi$-Ćirić generalized multifunctions" adlı makalesi incelenmiştir[22]. Nadler tip küme değerli $(\alpha, \theta)$-büzülme dönüşümleri için Mınak ve

Altun'un "On the effect of $\alpha$-admissibility and $\theta$-contractivity to the existence of fixed points of multivalued mappings" adlı makalesinden yararlanılmıştır[23].

## 1.2 Çalışmanın Amacı

2014 yılında Jleli ve Samet, $(0,\infty)$ dan $(1,\infty)$ a tanımlı bazı özelliklere sahip fonksiyonlar sınıfını dikkate alarak, literatürde mevcut olan pek çok büzülme eşitsizliklerini içerecek biçimde genel bir büzülme eşitsizliği kullanmışlardır. Kesim 2.2 de belirtilen $\theta_1$, $\theta_2$ ve $\theta_3$ özelliklerine sahip fonksiyonlar sınıfını $\Theta$ ile gösterelim. $(X,d)$ bir metrik uzay, $T : X \to X$ bir dönüşüm ve $\theta \in \Theta$ olsun. Eğer $d(Tx,Ty) > 0$ olacak şekildeki her $x \in X$ için,

$$\theta\big(d(Tx,Ty)\big) \leq \big[\theta\big(d(x,y)\big)\big]^k$$

eşitsizliğini sağlayan bir $k \in (0,1)$ sabiti varsa $T$ dönüşümüne $\theta$-büzülme dönüşümü adı verilir. Jleli ve Samet $\theta$-büzülme dönüşümlerinin tam metrik uzay üzerinde Picard operatör olduğunu ispatlamıştır.

Bu tez çalışmasının amacını aşağıdaki biçimde özetleyebiliriz:

Küme değerli dönüşümler için Nadler ve Mizoguchi-Takahashi sabit nokta teoremlerini dikkate alıp bunların $\theta$-fonksiyonlar ile birleştirilmiş versiyonlarını incelemek ve burada bahsi geçen dönüşümlerin zayıf Picard operatör olup olmadığını araştırmak bu tez çalışmasının ilk amacıdır.

Diğer bir amaç ise küme değerli dönüşümler için $\alpha$-geçişlilik ve $\alpha_*$-geçişlilik kavramlarını da katarak Nadler ve Mizoguchi-Takahashi sabit nokta teoremlerini hem $\alpha$-geçişlilik hem de $\theta$-fonksiyonu ile ele alarak genişletmektir.

# 2. MATERYAL VE YÖNTEM

## 2.1. Bazı Temel Metrik ve Topolojik Kavramlar

Bu kısımda tez boyunca kullanacağımız metrik uzay, topolojik uzay ve metrik uzayın topolojisi, temel topolojik kavramlar, metrik uzayda yakınsaklık, süreklilik, Cauchy dizisi, metrik uzayda tamlık ve kompakt metrik uzay kavramlarını hatırlatacağız.

**Tanım 2.1** $X$ boş olmayan bir küme olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonuna bir metrik, $(X, d)$ ikilisine de bir metrik uzay denir:

**(a)** $d(x, y) = 0$ ancak ve ancak $x = y$,

**(b)** her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$,

**(c)** her $x, y, z \in X$ için $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

**Tanım 2.2** $(X, d)$ herhangi bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ bir reel sayı olsun.

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\}$$

kümesine $x_0$ merkezli $r$ yarıçaplı açık yuvar,

$$D(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) \leq r\}$$

kümesine $x_0$ merkezli $r$ yarıçaplı kapalı yuvar,

$$S(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) = r\}$$

kümesine $x_0$ merkezli $r$ yarıçaplı yuvar yüzeyi denir.

**Tanım 2.3** $(X, d)$ bir metrik uzay ve $U$, $X$ in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer her $x \in U$ için $B(x, r) \subseteq U$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa $U$ kümesine açık küme denir. Eğer $U^c = X \backslash U$ kümesi açık ise o zaman $U$ kümesine kapalı küme denir.

**Önerme 2.1** $(X, d)$ bir metrik uzay olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler doğrudur.

**(a)** $(X, d)$ uzayındaki her açık yuvar açık bir kümedir.

**(b)** $(X, d)$ uzayındaki her kapalı yuvar kapalı bir kümedir.

**Tanım 2.4** $X$ boş olmayan bir küme ve $\tau$, $X$ in alt kümelerinin bir sınıfı olsun. Eğer $\tau$ sınıfı, aşağıdaki şartları sağlıyorsa o zaman $\tau$ sınıfına $X$ üzerinde bir topoloji ve $(X, \tau)$ ikilisine de topolojik uzay denir:

**(a)** $\emptyset, X \in \tau$,

**(b)** $\tau$ ya ait sonlu sayıdaki elemanların arakesiti $\tau$ ya ait,

**(c)** $\tau$ ya ait keyfi sayıdaki elemanların birleşimi $\tau$ ya aittir.

**Tanım 2.5** $(X, \tau)$ bir topolojik uzay ve $\beta \subseteq \tau$ olsun. Eğer $\tau$ nun her elemanı $\beta$ nın bazı elemanlarının birleşimi olarak yazılabiliyorsa $\beta$ ya $\tau$ topoloji için bir taban (baz) denir.

**Tanım 2.6** Bir $(X, \tau)$ topolojik uzayında $\tau$ nun elemanlarına açık kümeler denir. $A \subseteq X$ için $A^c = X \setminus A$ kümesi açık ise $A$ kümesine kapalı küme denir. $A$ kümesini kapsayan tüm kapalı kümelerin arakesitine $A$ nın kapanışı denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir. $A$ kümesinin kapsadığı tüm açık kümelerin birleşimine ise $A$ kümesinin içi denir ve $A^o$ ile gösterilir. Bir $x \in X$ noktasını içeren her $G$ açık kümesi için $(G \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ ise $x \in X$ noktasına $A$ nın bir yığılma noktası denir. $A$ nın tüm yığılma noktalarının kümesi $A'$ ile gösterilir.

**Tanım 2.7** $(X, \tau)$ topolojik uzay, $\{x_n\} \subseteq X$ bir dizi ve $x \in X$ olsun. Eğer $x \in G$ olacak şekildeki her $G$ açık kümesi için, $n \geq n_0$ olduğunda $x_n \in G$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ noktasına yakınsar denir ve bu durum $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ ya da kısaca $x_n \to x$ şeklinde gösterilir.

**Tanım 2.8** $(X, \tau)$ ve $(Y, \sigma)$ topolojik uzaylar, $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $x \in X$ olsun. Eğer $f(x) \in V$ olacak şekildeki her $V \in \sigma$ için $x \in U$ ve $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde bir $U \in \tau$ varsa $f$ fonksiyonuna $x \in X$ noktasında süreklidir denir. Eğer $f$ fonksiyonu $X$ in her noktasında sürekli ise $f$ ye sürekli fonksiyon denir.

**Tanım 2.9** $(X, \tau_1)$ ve $(Y, \tau_2)$ iki topolojik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. $(X, \tau_1)$ uzayında $x$ noktasına yakınsayan her $\{x_n\}$ dizisi için $(Y, \tau_2)$ uzayında $\{f(x_n)\}$ dizisi $f(x)$ noktasına yakınsıyorsa $f$ fonksiyonuna $x$ noktasında dizisel süreklidir denir. $f$ fonksiyonu $X$ uzayının her noktasında dizisel sürekli ise $f$ ye $X$ de dizisel süreklidir veya kısaca dizisel sürekli denir.

**Uyarı 2.1** Her sürekli fonksiyon dizisel süreklidir, fakat genelde tersi doğru değildir. Ancak, metrik uzaylarda süreklilik ve dizisel süreklilik kavramları birbirine denktir.

**Tanım 2.10** $(X, d)$ bir metrik uzay, $x \in X$ ve $A, B \subseteq X$ olsun. Bu durumda

$$D(A, B) = \inf \{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

değerine $A$ ve $B$ kümeleri arasındaki uzaklık,

$$D(x, A) = \inf \{d(x, a) : a \in A\}$$

değerine $x$ noktasının $A$ kümesine uzaklığı,

$$d(A) = \sup \{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

değerine $A$ kümesinin çapı denir. Eğer $d(A) < \infty$ ise $A$ kümesine sınırlı küme, $d(A) = \infty$ ise $A$ kümesine sınırsız küme denir.

**Tanım 2.11** $(X, d)$ bir metrik uzay olsun. Bu durumda

$$\tau_d = \{U \subseteq X : U\ kümesi\ (X, d)\ uzayında\ açık\}$$

sınıfı $X$ üzerinde bir topolojidir. Bu $X$ üzerindeki $\tau_d$ topolojisine metrik topolojisi veya $d$ metriğinin ürettiği topoloji denir. $(X, \tau_d)$ ikilisine de metrik topolojik uzay denir.

**Tanım 2.12** $(X, d)$ bir metrik uzay, $\{x_n\}$ terimleri $X$ de olan bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı, $n \geq n_0$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in B(x, \varepsilon)$

olacak şekilde varsa $\{x_n\}$ dizisine $x \in X$ noktasına yakınsıyor denir. Bu durum $x_n \to x$ veya $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ ile gösterilir. $x$ noktasına $\{x_n\}$ dizisinin limiti adı verilir.

**Teorem 2.1** Metrik uzayda yakınsak her dizinin limiti tektir.

**Tanım 2.13** $(X, d)$ bir metrik uzay, $\{x_n\}$, $X$ de bir dizi olsun. $n_k < n_{k+1}$ olmak üzere $\{x_{n_k}\}$ dizisine $\{x_n\}$ dizisinin bir alt dizisi denir.

**Teorem 2.2** $(X, d)$ bir metrik uzay olsun. $\{x_n\}$ dizisi yakınsak ise o zaman her $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi de yakınsaktır ve aynı noktaya yakınsar.

**Tanım 2.14** $(X, d)$ bir metrik uzay, $\{x_n\}$, $X$ de bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $m > n \geq n_0$ özelliğindeki her $m, n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde varsa $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir. Eğer $(X, d)$ metrik uzayındaki her Cauchy dizisi bu uzayda bir noktaya yakınsıyorsa o zaman bu uzaya tam metrik uzay denir.

**Teorem 2.3** Bir $(X, d)$ metrik uzayında yakınsak her $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. Ayrıca her Cauchy dizisi sınırlıdır.

**Önerme 2.2** $(X, d)$ bir metrik uzay, $\{x_n\}$, $X$ de bir dizi ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < \infty$$

olsun. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir.

**Tanım 2.15** $(X, d)$ ve $(Y, e)$ metrik uzaylar, $f : (X, d) \to (Y, e)$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $f\big(B(x_0, \delta)\big) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ varsa, diğer bir deyişle her $\varepsilon > 0$ için $d(x_0, x) < \delta$ olduğunda $e\big(f(x_0), f(x)\big) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ varsa $f$ fonksiyonu $x_0$ noktasında süreklidir. Eğer $f$ fonksiyonu $X$ in her noktasında sürekli ise $f$ ye bir sürekli fonksiyon denir.

**Tanım 2.16** $(X, d)$ bir metrik uzay, $x \in X$ ve $A$, $X$ in bir alt kümesi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$(B(x, \varepsilon) \backslash \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

oluyorsa $x \in X$ noktasına $A$ nın bir yığılma noktasıdır denir. $A$ nın tüm yığılma noktalarının kümesi $A'$ ile gösterilir. $A \cup A'$ kümesine $A$ nın kapanışı denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

**Önerme 2.3** $(X, d)$ metrik uzay ve $A$, $X$ in bir alt kümesi ve $x$, $A$ nın bir yığılma noktası olsun. O zaman her bir $B(x, \varepsilon)$ açık yuvarı $A$ nın sonsuz sayıda elemanını içerir.

**Teorem 2.4** $(X, d)$ metrik uzay ve $A$, $X$ in bir alt kümesi olsun. O zaman bir $x$ noktası $A$ nın bir yığılma noktasıdır ancak ve ancak $x_n \to x$ olacak şekilde $A$ kümesinden $x$ den farklı $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ elemanlarını seçmek mümkündür.

**Teorem 2.5** $(X, d)$ metrik uzay ve $A$, $X$ in bir alt kümesi olsun. $x \in \overline{A}$ dır ancak ve ancak $x_n \to x$ olacak şekilde $A$ içinde bir $\{x_n\}$ dizisi vardır.

**Uyarı 2.2** $(X, \tau)$ topolojik uzayında $x \in \overline{A}$ iken $x_n \to x$ olacak şekilde $A$ içinde bir $\{x_n\}$ dizisi bulunmayabilir. Örneğin,

$$\tau = \{U \subseteq \mathbb{R} : \mathbb{R} \backslash U \ sayılabilir\} \cup \{\emptyset\}$$

olmak üzere $(\mathbb{R}, \tau)$sayılabilir tümleyenler uzayını göz önüne alalım. $2 \in \overline{(0,1)}$ olmasına rağmen $(0, 1)$ de 2 noktasına yakınsayan hiçbir dizi yoktur.

**Sonuç 2.1** $(X, d)$ bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. O zaman $A$ kapalıdır ancak ve ancak $A$ daki yakınsak her dizinin limiti $A$ dadır.

**Teorem 2.6** $(X, d)$ metrik uzay ve $A$, $X$ in bir alt kümesi olsun. $x \in \overline{A}$ dır ancak ve ancak her $\varepsilon > 0$ için $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ dır.

**Teorem 2.7** $(X, d)$ metrik uzay ve $A$, $X$ in bir alt kümesi olsun. O zaman $x \in \overline{A}$ dır ancak ve ancak $D(x, A) = 0$ dır.

**Sonuç 2.2** $(X, d)$ metrik uzay ve $A$, $X$ in kapalı bir alt kümesi olsun. $D(x, A) = 0$ dır ancak ve ancak $x \in A$ dır.

**Tanım 2.17** Bir $(X, d)$ metrik uzayında (açık) kümelerin bir ailesi $\{G_i : i \in I\}$ olsun. Eğer $A \subseteq X$ için

$$A \subset \bigcup_{i \in I} G_i$$

oluyorsa $\{G_i : i \in I\}$ ailesine $A$ kümesinin bir (açık) örtüsü denir.

Bir örtünün

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k}$$

olacak şekilde bir $\{G_{i_k} : k = 1,2, \ldots, n\}$ alt ailesi varsa bu aileye $A$ kümesinin sonlu alt örtüsü denir.

**Tanım 2.18** $(X, d)$ bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer $A$ kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa $A$ kümesine kompakt küme denir. $(X, d)$ uzayına da kompakt metrik uzay denir.

**Teorem 2.8** Bir $(X, d)$ kompakt metrik uzayının kapalı her alt kümesi de kompakttır.

**Tanım 2.19** $(X, \tau)$ bir topolojik uzay olsun. $X$ in farklı her nokta çiftini içeren ayrık açık kümeler varsa $(X, \tau)$ topolojik uzayına Hausdorff uzay denir.

**Teorem 2.9** Bir $(X, \tau)$ Hausdorff uzayının kompakt her alt kümesi kapalıdır.

**Teorem 2.10** $(X, \tau)$ bir topolojik uzay, $A$, $X$ in boş olmayan bir kompakt alt kümesi olsun. Eğer $f : A \to \mathbb{R}$ sürekli ise $f(a) = \sup f(A)$ ve $f(b) = \inf f(A)$ olacak şekilde $a, b \in A$ vardır.

**Teorem 2.11** Bir $(X, d)$ metrik uzayı kompakttır ancak ve ancak bu uzayda her dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır.

**Teorem 2.12** $(X, d)$ metrik uzay ve $A$ ile $B$, $X$ in boş olmayan alt kümeleri olsun. Eğer $A$ kompakt ise $D(A, B) = D(p, B)$ olacak şekilde bir $p \in A$ noktası vardır.

**Lemma 2.1** $(X, d)$ bir metrik uzay, $x \in X$ ve $A$, $X$ in kompakt bir alt kümesi olsun. O zaman $d(x, a) = d(x, A)$ olacak şekilde bir $a \in A$ noktası vardır.

## 2.2. $\boldsymbol{\theta}$-Büzülme Dönüşümü

Bu kısımda Jleli ve Samet tarafından tanımlanan ve bilinen büzülme dönüşümü kavramını da kapsayan $\theta$-büzülme dönüşümü tanımı incelenecektir.

$\Theta$ aşağıdaki şartları sağlayan bütün $\theta : (0, \infty) \to (1, \infty)$ dönüşümlerinin ailesi olsun:

$(\Theta_1)$ $\theta$ azalmayan,

$(\Theta_2)$ Her $\{t_n\} \subset (0, \infty)$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} \theta(t_n) = 1$ ancak ve ancak $\lim_{n\to\infty} t_n = 0^+$,

$(\Theta_3)$ $\lim_{t\to 0^+} \frac{\theta(t)-1}{t^r} = \ell$ olacak şekilde $r \in (0, 1)$ ve $\ell \in (0, \infty]$ vardır.

**Tanım 2.20** $(X, d)$ bir metrik uzay, $T : X \to X$ bir dönüşüm ve $\theta \in \Theta$ olsun. Eğer $d(Tx, Ty) > 0$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için,

$$\theta\big(d(Tx, Ty)\big) \le \big[\theta\big(d(x, y)\big)\big]^k$$

eşitsizliğini sağlayan bir $k \in (0, 1)$ sabiti varsa $T$ ye $\theta$-büzülme dönüşümü denir.

$\theta$ yerine özel fonksiyonlar alarak literatürdeki bazı büzülmeleri $\theta$-büzülmenin bir özel hali olarak elde edebiliriz.

**Örnek 2.1** $\theta(t) = e^{\sqrt{t}}$ olmak üzere $\theta : (0, \infty) \to (1, \infty)$ verilsin. Buradan $\theta \in \Theta$ olduğu açıktır. Yukarıdaki eşitsizlikten, $Tx \neq Ty$ olmak üzere her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq k^2 d(x, y)$$

elde edilir.

Ayrıca, $Tx = Ty$ olmak üzere her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq k^2 d(x, y)$$

dir. O halde $T$, bilinen büzülme dönüşümüdür.

**Örnek 2.2** $\theta(t) = e^{\sqrt{te^t}}$ olmak üzere $\theta : (0, \infty) \to (1, \infty)$ verilsin. Buradan $\theta \in \Theta$ olduğu açıktır. Tanımdan yola çıkarak, $Tx \neq Ty$ olmak üzere her $x, y \in X$ için,

$$\frac{d(Tx, Ty)}{d(x, y)} e^{d(Tx,Ty) - d(x,y)} \leq k^2$$

elde edilir.

Ayrıca, $\theta$ nın özellikleri dikkate alınacak olursa $Tx \neq Ty$ olmak üzere her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

dir. Yani, $T$ bir büzülebilir dönüşümdür. Dolayısıyla her $\theta$-büzülme dönüşümü bir sürekli dönüşümdür.

$\theta$-büzülme dönüşümü göz önüne alınarak, Banach büzülme dönüşümü prensibinin genelleştirilmiş hali aşağıdaki teoremde verilmiştir.

**Teorem 2.13** $(X, d)$ bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ dönüşümü bir $\theta$-büzülme dönüşümü olsun. O zaman $T$, $X$ de bir tek sabit noktaya sahiptir.

Bu teoremin ispatı incelendiğinde, tam metrik uzayda her $\theta$-büzülme dönüşümünün Picard operatör olduğu görülür.

Şimdi, metrik uzay üzerinde hemen hemen $\theta$-büzülme dönüşümü kavramı verelim.

**Tanım 2.21** $(X, d)$ bir metrik uzay, $T : X \to X$ bir dönüşüm ve $\theta \in \Theta$ olsun. Eğer $d(Tx, Ty) > 0$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için,

$$\theta\big(d(Tx,Ty)\big) \leq \big[\theta\big(d(x,y)+\lambda d(y,Tx)\big)\big]^k$$

eşitsizliğini sağlayan $k \in (0,1)$ ve $\lambda \geq 0$ varsa $T$ ye hemen hemen $\theta$-büzülme dönüşümü denir.

Simetri özelliğine göre, $d(Tx,Ty) > 0$ olmak üzere her $x,y \in X$ için,

$$\theta\big(d(Tx,Ty)\big) \leq \big[\theta\big(d(x,y)+\lambda d(x,Ty)\big)\big]^k$$

eşitsizliği de sağlanır.

Eğer $\theta(t) = e^{\sqrt{t}}$ şeklinde alınırsa, her hemen hemen büzülme dönüşümünün aynı zamanda hemen hemen $\theta$-büzülme dönüşümü olduğu görülür.

**Teorem 2.14** Tam metrik uzay üzerinde tanımlı hemen hemen $\theta$-büzülme dönüşümleri zayıf Picard operatördürler.

**İspat.** $(X,d)$ tam metrik uzay ve $T : X \to X$ hemen hemen $\theta$-büzülme dönüşümü olsun. $x_0 \in X$ keyfi nokta olmak üzere $x_n = T^n x_0$ Picard dizisini göz önüne alalım. Eğer $x_{n_0} = x_{n_0+1}$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $x_{n_0}$, $T$ nin sabit noktasıdır.

Şimdi, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq x_{n+1}$ olduğunu kabul edelim. Tanım 2.21 den, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned}\theta\big(d(x_n,x_{n+1})\big) &= \theta\big(d(Tx_{n-1},Tx_n)\big)\\ &\leq \big[\theta\big(d(x_{n-1},x_n)+\lambda d(x_n,Tx_{n-1})\big)\big]^k\\ &= \big[\theta\big(d(x_{n-1},x_n)\big)\big]^k\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$1 < \theta\big(d(x_n,x_{n+1})\big) \leq \big[\theta\big(d(x_0,x_1)\big)\big]^{k^n}$$

olur. Bu eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} \theta\big(d(x_n,x_{n+1})\big) = 1$$

bulunur. O halde $(\Theta_2)$ göz önüne alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0^+$$

elde edilir. Böylece $(\Theta_3)$ ten, $r \in (0,1)$ ve $\ell \in (0,\infty]$ olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta\big(d(x_n, x_{n+1})\big) - 1}{[d(x_n, x_{n+1})]^r} = \ell$$

bulunur. Teorem 2.13 ün ispatındaki gibi,

$$\lim_{n\to\infty} n[d(x_n, x_{n+1})]^r = 0$$

olur. Buradan her $n \geq n_1$ için,

$$n[d(x_n, x_{n+1})]^r \leq 1$$

olmak üzere $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Ayrıca, her $n \geq n_1$ için,

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{n^{1/r}}$$

bulunur. Böylece $m > n > n_1$ olmak üzere $m, n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &= \sum_{i=n}^{m-1} d(x_i, x_{i+1}) \\ &\leq \sum_{i=n}^{m-1} \frac{1}{i^{1/r}} \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{1/r}} \end{aligned}$$

elde edilir. O zaman, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{1/r}}$ serisi yakınsak olduğundan $d(x_n, x_m) \to 0$ olur. O halde $\{x_n\}$ dizisi $(X, d)$ metrik uzayında Cauchy dizisidir. $(X, d)$ tam metrik uzay olduğuna göre, $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde $z \in X$ vardır.

Diğer taraftan, $(\Theta_1)$ ve Tanım 2.21 göz önüne alınırsa, $Tx \neq Ty$ olmak üzere her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) < d(x, y) + \lambda d(y, Tx)$$

olur. O halde her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) < d(x, y) + \lambda d(y, Tx)$$

dir. Buradan,

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, Tz) &= d(Tx_n, Tz) \\ &\leq d(x_n, z) + \lambda d(z, x_{n+1}) \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa, $d(z, Tz) = 0$ olur. Dolayısıyla $z = Tz$ dir. O halde ispat yöntemi incelendiğinde $T$ dönüşümünün bir zayıf Picard operatör olduğu görülür.

## 2.3. Küme Değerli Dönüşümler ve Hausdorff Metriği

Bu kısımda küme değerli dönüşüm, küme değerli dönüşümün sabit noktası kısaca ele alınacaktır. Ayrıca Hausdorff metriği ve bazı özellikleri incelenecektir.

**Tanım 2.22** $X$ ve $Y$ boş olmayan iki küme olsun. $T \subseteq X \times Y$ ise $T$ ye $X$ den $Y$ ye bir küme değerli dönüşüm denir. $T : X \to \mathcal{P}(Y)$ ile gösterilir. Burada $\mathcal{P}(Y)$, $Y$ nin boş olmayan tüm alt kümelerinin sınıfıdır. $T : X \to \mathcal{P}(Y)$ küme değerli dönüşümün tersi

$$(x, y) \in T \Leftrightarrow (y, x) \in T^{-1}$$

şeklinde tanımlanır.

$T$, $X$ den $Y$ ye küme değerli dönüşüm ve $x \in X$ olsun. $T$ nin $x$ noktasındaki görüntüsü,

$$Tx = \{y \in Y : (x, y) \in T\}$$

kümesidir. Yine $A \subseteq X$ için,

$$T(A) = \bigcup_{x \in A} Tx$$

kümesi $A$ nın $T$ küme değerli dönüşüm altındaki görüntüsüdür. Ayrıca,

$$\bigcup_{x\in A} Tx = \{y \in Y : T^{-1}(y) \cap A \neq \emptyset\}$$

dır. Gerçekten,

$$u \in T(A) = \bigcup_{x\in A} Tx \Leftrightarrow \exists x \in A \text{ için } u \in Tx$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in A \text{ için} (x,u) \in T$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in A \text{ için x} \in T^{-1}(u)$$

$$\Leftrightarrow T^{-1}(u) \cap A \neq \emptyset$$

$$\Leftrightarrow u \in \{y \in Y : T^{-1}(y) \cap A \neq \emptyset\}$$

bulunur. $B \subseteq Y$ için,

$$T^{-1}(B) = \bigcup_{y\in B} T^{-1}(y)$$

kümesine $B$ nin $T^{-1}$ altındaki görüntüsü (veya $T$ altındaki ters görüntüsü) denir. Benzer şekilde,

$$\bigcup_{y\in B} T^{-1}(y) = \{x \in X : Tx \cap B \neq \emptyset\}$$

olduğu gösterilebilir.

**Tanım 2.23** $T : X \to \mathcal{P}(X)$ dönüşümü için $x_0 \in Tx_0$ olacak şekilde $x_0 \in X$ varsa bu noktaya $T$ nin sabit noktası denir. $T$ dönüşümünün sabit noktalarının kümesi $F(T)$ ile gösterilir.

$$F(T) = \{x \in X : x \in Tx\}$$

dir.

**Örnek 2.3** $X = [0, 1]$ olmak üzere $T : X \to \mathcal{P}(X)$ dönüşümü,

$$Tx = \begin{cases} \{1\} & , \quad 0 \le x < \dfrac{1}{2} \\ [0,1] & , \quad x = \dfrac{1}{2} \\ [0, 1-x] & , \quad \dfrac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O halde,

$$T(0) = \{1\} \ , \ T\left(\frac{3}{4}\right) = \left[0, \frac{1}{4}\right]$$

$$T\left(\frac{1}{2}\right) = [0,1] \ , \ T\left(\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)\right) = [0,1]$$

$$T\left(\left(0, \frac{1}{4}\right)\right) = \{1\} \ , \ T\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)\right) = \left[0, \frac{1}{2}\right)$$

olduğu görülebilir. Burada $\frac{1}{2} \in T\frac{1}{2} = [0,1]$ olduğundan $\frac{1}{2}$, $T$ nin bir sabit noktasıdır.

$(X, d)$ bir metrik uzay ve $\mathcal{K}(X)$, $X$ in boş olmayan tüm kompakt alt kümelerin sınıfı, $\mathcal{C}(X)$, $X$ in boş olmayan tüm sınırlı alt kümelerin sınıfı, $\mathcal{B}(X)$, $X$ in boş olmayan tüm kapalı alt kümelerin sınıfı ve $\mathcal{CB}(X)$, $X$ in tüm kapalı ve sınırlı alt kümelerin sınıfı olsun. O zaman $\mathcal{K}(X) \subseteq \mathcal{CB}(X) \subseteq \mathcal{C}(X)$ ve $\mathcal{K}(X) \subseteq \mathcal{CB}(X) \subseteq \mathcal{B}(X)$ olduğu açıktır. $A, B \in \mathcal{P}(X)$ için,

$$\delta(A, B) = \sup_{x \in A} \{D(x, B)\} = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y)$$

ve

$$H(A, B) = \max \{\delta(A, B), \delta(B, A)\}$$

$$= \max \left\{ \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y), \sup_{x \in B} \inf_{y \in A} d(x, y) \right\}$$

şeklinde tanımlansın.

**Örnek 2.4** $X = \mathbb{R}$ kümesi alışılmış metrik ile göz önüne alınsın. $A = [1, 2]$ ve $B = [4, \infty)$ kümeleri için,

$$\delta(A,B) = 3, \qquad \delta(B,A) = \infty$$

olduğundan,

$$H(A,B) = \max\{\delta(A,B), \delta(B,A)\} = \infty$$

bulunur. $\delta$ nın simetrik olmadığı buradan görülebilir. Yani genelde $\delta(A,B) \neq \delta(B,A)$ dır. Ayrıca, $\delta$ ve $H$ ın $\mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(X)$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar olmadığı da görülmektedir.

**Uyarı 2.3** Eğer $A$ ve $B$ kümeleri $(X,d)$ metrik uzayının sınırlı alt kümeleri ise $\delta(A,B)$, $\delta(B,A)$ ve $H(A,B)$ birer reel sayıdır. O halde $\delta$ ve $H$, $\mathcal{B}(X)\times\mathcal{B}(X)$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlardır.

**Önerme 2.4** $(X,d)$ bir metrik uzay olsun. Bu durumda $H$, $\mathcal{CB}(X)$ üzerinde bir metriktir.

**İspat.** $H$ ın $\mathcal{CB}(X)\times\mathcal{CB}(X)$ üzerinde tanımlı bir reel değerli fonksiyon olduğu açıktır. Ayrıca tanımdan $H(A,B) = H(B,A)$ dır.

Şimdi $A, B \in \mathcal{CB}(X)$ olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} H(A,B) = 0 &\Leftrightarrow \max\{\delta(A,B), \delta(B,A)\} = 0 \\ &\Leftrightarrow \delta(A,B) = 0 \text{ ve } \delta(B,A) = 0 \\ &\Leftrightarrow A \subseteq B \text{ ve } B \subseteq A \\ &\Leftrightarrow A = B \end{aligned}$$

bulunur.

Son olarak $a, b, c, d \in [0,\infty)$ için,

$$\max\{a+b, c+d\} \leq \max\{a,c\} + \max\{b,d\}$$

özelliğini kullanarak $A, B, C \in \mathcal{CB}(X)$ için,

$$\begin{aligned} H(A,B) &= \max\{\delta(A,B), \delta(B,A)\} \\ &\leq \max\{\delta(A,C) + \delta(C,B), \delta(B,C) + \delta(C,A)\} \end{aligned}$$

$$\leq \max\{\delta(A,C)+\delta(C,A)\}+\max\{\delta(B,C)+\delta(C,B)\}$$

$$= H(A,C)+H(C,B)$$

elde edilir. Yani, $H : \mathcal{CB}(X)\times\mathcal{CB}(X) \to \mathbb{R}$ bir metriktir. Bu metriğe Hausdorff metriği denir.

Hausdorff metriğinin $d$ ye bağlı olduğu aşağıdaki örnekle gösterilebilir. Ayrıca, eğer $(X,d)$ tam metrik uzay ise $(\mathcal{CB}(X),H)$ ve $(\mathcal{K}(X),H)$ metrik uzayları da tamdırlar.

**Örnek 2.5** $X=\mathbb{R}$ üzerinde $d_1(x,y)=|x-y|$ ve

$$d_2(x,y)=\begin{cases} 1\ , & x\neq y \\ \\ 0\ , & x=y \end{cases}$$

metriklerini göz önüne alalım. Bu durumda $A=[0,1]$ ve $B=[3,5]$ kümeleri için $H_1(A,B)=4$ ve $H_2(A,B)=1$ olur. Burada dikkat edelim ki her iki kümede $d_1$ ve $d_2$ metriğine göre kapalı ve sınırlıdır.

**Lemma 2.2** $A,B\in\mathcal{CB}(X)$ ve $a\in A$ olsun. O zaman her $\varepsilon>0$ için,

$$d(a,b)\leq H(A,B)+\varepsilon$$

olacak şekilde bir $b\in B$ vardır.

**İspat.** $a\in A$ için,

$$D(a,B)=\inf\{d(a,y) : y\in B\}$$

olur. İnfimumun tanımından her $\varepsilon>0$ için,

$$d(a,b)\leq D(a,B)+\varepsilon$$

olacak şekilde bir $b\in B$ vardır.

Diğer taraftan,

$$D(a,B)\leq\delta(A,B)\leq H(A,B)$$

olduğundan her $\varepsilon>0$ için,

$$d(a,b) \leq H(A,B) + \varepsilon$$

olacak şekilde bir $b \in B$ vardır.

Lemma 2.2 yi aşağıdaki şekilde de ifade edebiliriz.

**Lemma 2.3** $A, B \in \mathcal{CB}(X)$ ve $a \in A$ olsun. O zaman her $q > 1$ için,

$$d(a,b) \leq qH(A,B)$$

olacak şekilde bir $b \in B$ vardır.

**İspat.** Eğer $H(A,B) = 0$ ise $A = B$ dir. Bu durumda $b,\ a$ olarak alınırsa her $q > 1$ için,

$$d(a,b) \leq qH(A,B)$$

olacak şekilde bir $b \in B$ vardır.

Şimdi $H(A,B) > 0$ olsun. Bu durumda,

$$\varepsilon = (q-1)H(A,B) > 0$$

olarak seçilirse Lemma 2.2 gereğince her $q > 1$ için,

$$\begin{aligned} d(a,b) &\leq H(A,B) + \varepsilon \\ &= H(A,B) + (q-1)H(A,B) \\ &= qH(A,B) \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $b \in B$ vardır.

## 2.4. Küme Değerli Dönüşümler İçin Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda küme değerli Lipschitz dönüşümü, küme değerli büzülme dönüşümü kavramları hatırlatılacak ve bu tip dönüşümler için Nadler ve Mizoguchi-Takahashi tarafından verilen sabit nokta teoremleri incelenecektir.

**Tanım 2.24** $(X,d)$ bir metrik uzay ve $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ küme değerli dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için,

$$H(Tx,Ty) \leq Ld(x,y)$$

olacak şekilde bir $L > 0$ sabiti varsa $T$ ye küme değerli Lipschitz dönüşümü adı verilir. $L$ sayılarının en küçüğüne $T$ nin Lipschitz sabiti denir ve $k$ ile gösterilir. Eğer $k < 1$ ise $T$ ye küme değerli büzülme dönüşümü, $k = 1$ ise genişlemeyen dönüşüm adı verilir.

**Teorem 2.15 (Nadler)** $(X, d)$ bir tam metrik uzay ve $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ bir küme değerli büzülme dönüşümü olsun. O zaman $T,\ X$ de bir sabit noktaya sahiptir.

**İspat.** $T$ nin Lipschitz sabiti $0 < k < 1$ olsun. $x_0 \in X$ keyfi olmak üzere $x_1 \in Tx_0$ seçelim. O zaman Lemma 2.2 gereğince,

$$d(x_1, x_2) \leq H(Tx_0, Tx_1) + k$$

olacak şekilde bir $x_2 \in Tx_1$ vardır. Yine,

$$d(x_2, x_3) \leq H(Tx_1, Tx_2) + k^2$$

olacak şekilde bir $x_3 \in Tx_2$ vardır.

Bu şekilde devam edilerek her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in Tx_n$ ve

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq H(Tx_{n-1}, Tx_n) + k^n$$

olacak şekilde $X$ de bir $\{x_n\}$ dizisi elde edilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq H(Tx_{n-1}, Tx_n) + k^n \\ &\leq kd(x_{n-1}, x_n) + k^n \\ &\leq k[H(Tx_{n-2}, Tx_{n-1}) + k^{n-1}] + k^n \\ &= kH(Tx_{n-2}, Tx_{n-1}) + 2k^n \\ &\leq k^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) + 2k^n \\ &\vdots \\ &\leq k^n d(x_0, x_1) + nk^n \end{aligned}$$

bulunur.

Diğer taraftan $\sum_{n=0}^{\infty} k^n < \infty$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} nk^n < \infty$ olduğundan,

$$\sum_{n=0}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) \leq \sum_{n=0}^{\infty} [k^n d(x_0, x_1) + nk^n]$$

$$= d(x_0, x_1) \sum_{n=0}^{\infty} k^n + \sum_{n=0}^{\infty} nk^n$$

$$< \infty$$

olur. Bu bize $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. $X$ tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. Bu durumda,

$$D(x_{n+1}, Tz) \leq H(Tx_n, Tz) \leq kd(x_n, z)$$

olduğundan $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$D(z, Tz) = 0$$

olur. Yani $z \in \overline{Tz} = Tz$ dir. O halde $z,\ T$ nin bir sabit noktasıdır.

Küme değerli sabit nokta teoremlerinin en önemlilerinden biri de Mizoguchi ve Takahashi tarafından elde edilmiştir. Şimdi, önce Mizoguchi-Takahashi fonksiyonu ve özelliklerini verelim ve daha sonra da Mizoguchi-Takahashi teoreminin ispatını inceleyelim.

**Tanım 2.25** $\varphi : [0, \infty) \to [0, 1)$ bir fonksiyon olsun. Eğer $t \in [0, \infty)$ için,

$$\lim_{s\to t^+} \sup \varphi(s) < 1$$

oluyorsa bu $\varphi$ fonksiyonuna Mizoguchi-Takahashi fonksiyonu adı verilir ve kısaca $\mathcal{MT}$-fonksiyonu şeklinde gösterilir.

**Uyarı 2.4** $\varphi :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $t \in \mathbb{R}$ için,

$$\lim_{s\to t^+} \sup \varphi(s) = \inf_{\varepsilon>0} \sup_{0<s-t<\varepsilon} \varphi(s)$$

dir.

**Örnek 2.6** $\varphi : [0, \infty) \to [0, 1)$ artmayan veya azalmayan bir fonksiyon ise o zaman $\varphi$ bir $\mathcal{MT}$-fonksiyondur.

**Örnek 2.7** $\varphi : [0, \infty) \to [0, 1)$, $\varphi(t) = c \in [0, 1)$ sabit fonksiyonu bir $\mathcal{MT}$-fonksiyondur.

**Örnek 2.8** $\varphi : [0, \infty) \to [0, 1)$ fonksiyonu,

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{sint}{t} & , \quad t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ \\ 0 & , \quad t \notin \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman $\varphi$ bir $\mathcal{MT}$-fonksiyon değildir.

**Örnek 2.9** $\varphi : [0, \infty) \to [0, 1)$ fonksiyonu,

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2t & , \quad t \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right) \\ \\ 0 & , \quad t \in \left[\dfrac{1}{2}, \infty\right) \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman $\varphi$ bir $\mathcal{MT}$-fonksiyondur.

**Lemma 2.4** $\varphi : [0, \infty) \to [0, 1)$ fonksiyonunun bir $\mathcal{MT}$-fonksiyonu olması için gerek ve yeter şart her $t \in [0, \infty)$ için öyle $r_t \in [0, 1)$ ve $\varepsilon_t > 0$ sayıları vardır ki her $s \in [t, t + \varepsilon_t)$ için, $\varphi(s) \leq r_t$ dir.

**Teorem 2.16** $\varphi : [0, \infty) \to [0, 1)$ bir fonksiyon olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler denktir.

**i)** $\varphi$ bir$\mathcal{MT}$-fonksiyonudur.

**ii)** Her $t \in [0, \infty)$ ve her $s \in \left(t, t + \varepsilon_t^{(1)}\right)$ için $\varphi(s) \leq r_t^{(1)}$ olacak şekilde $r_t^{(1)} \in [0, 1)$ ve $\varepsilon_t^{(1)} > 0$ vardır.

**iii)** Her $t \in [0, \infty)$ ve her $s \in \left(t, t + \varepsilon_t^{(2)}\right)$ için $\varphi(s) \leq r_t^{(2)}$ olacak şekilde $r_t^{(2)} \in [0, 1)$ ve $\varepsilon_t^{(2)} > 0$ vardır.

**iv)** Her $t \in [0, \infty)$ ve her $s \in \left(t, t + \varepsilon_t^{(3)}\right)$ için $\varphi(s) \leq r_t^{(3)}$ olacak şekilde $r_t^{(3)} \in [0, 1)$ ve $\varepsilon_t^{(3)} > 0$ vardır.

**v)** Her $t \in [0, \infty)$ ve her $s \in \left(t, t + \varepsilon_t^{(4)}\right)$ için $\varphi(s) \leq r_t^{(4)}$ olacak şekilde $r_t^{(4)} \in [0, 1)$ ve $\varepsilon_t^{(4)} > 0$ vardır.

**vi)** Herhangi bir $\{x_n\} \subseteq [0, \infty)$ artmayan dizisi için,

$$0 \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \varphi(x_n) < 1$$

dir.

**vii)** Herhangi bir $\{x_n\} \subseteq [0, \infty)$ kesin azalan dizisi için,

$$0 \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \varphi(x_n) < 1$$

dir.

1972 yılında Reich bir çalışmasında aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

**Teorem 2.17** $(X, d)$ bir tam metrik uzay ve $T : X \to \mathcal{K}(X)$ bir dönüşüm olsun. $k : (0, \infty) \to [0, 1)$, her $t \in (0, \infty)$ için,

$$\lim_{r \to t^+} \sup k(r) < 1$$

özelliğini sağlayan bir fonksiyon olmak üzere $x \neq y$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için,

$$H(Tx, Ty) \leq k\big(d(x, y)\big) d(x, y)$$

eşitsizliği sağlansın. O zaman $T$ bir sabit noktaya sahiptir.

Reich bu teoremi ispatladıktan sonra 1974 yılında şu problemi ortaya atmıştır:

**Problem 2.1** Teorem 2.8 de $\mathcal{K}(X)$ yerine $\mathcal{CB}(X)$ alındığında $T$ bir sabit noktaya sahip midir?

Reich'in bu problemi üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Bu problemin çözümü tam olarak yapılmasa da bazı cevaplar elde edilmiştir. Bunlardan en önemlisi Mizoguchi ve Takahashi tarafından 1989 yılında elde edilmiştir. Mizoguchi ve Takahashi, Reich'in sorusunda $k$ üzerindeki,

$$\lim_{r\to t^+} \sup k(r) < 1$$

şartının her $t \in [0,\infty)$ için sağlanması halinde $\mathcal{K}(X)$ yerine $\mathcal{CB}(X)$ alınabileceğini göstermiştir.

**Teorem 2.18 (Mizoguchi-Takahashi)** $(X,d)$ bir tam metrik uzay ve $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ bir dönüşüm olsun. $k : (0,\infty) \to [0,1)$, her $t \in [0,\infty)$ için,

$$\lim_{r\to t^+} \sup k(r) < 1$$

özelliğini sağlayan bir fonksiyon olmak üzere $x \neq y$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için,

$$H(Tx,Ty) \leq k\big(d(x,y)\big)d(x,y)$$

eşitsizliği sağlansın. O zaman $T$ bir sabit noktaya sahiptir.

**İspat.** Kabul edelim ki $T$ bir sabit noktaya sahip olmasın. Yani her $x \in X$ için,

$$D(x,Tx) > 0$$

olsun. $k$ fonksiyonu üzerindeki şart dikkate alınırsa her $t > 0$ için öyle $M(t)$ ve $e(t)$ pozitif sayıları vardır ki her $r \in \big(t, t+e(t)\big)$ için,

$$k(r) \leq M(t) < 1$$

dir.

Şimdi $x_1 \in X$ noktasını göz önüne alalım. $t_1 = D(x_1,Tx_1)$ diyelim. O zaman her $y \in Tx_1$ için,

$$D(x_1,Tx_1) < d(x_1,y)$$

olması durumunda,

$$d(t_1) < \min\left\{e(t_1), \left(\frac{1}{M(t_1)} - 1\right)t_1\right\}$$

eşitsizliğini sağlayan $d(t_1)$ pozitif sayısını seçelim.

$$\varepsilon(x_1) = \min\left\{\frac{d(t_1)}{t_1}, 1\right\}$$

diyelim. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &< D(x_1, Tx_1) + \varepsilon(x_1)D(x_1, Tx_1) \\ &= \big(1 + \varepsilon(x_1)\big)D(x_1, Tx_1) \end{aligned}$$

olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. $T$ nin sabit noktaya sahip olmaması kabulünden $x_1 \neq x_2$ dir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} D(x_2, Tx_2) &\leq H(Tx_1, Tx_2) \\ &\leq k\big(d(x_1, x_2)\big)d(x_1, x_2) \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} D(x_1, Tx_1) - D(x_2, Tx_2) &\geq D(x_1, Tx_1) - k\big(d(x_1, x_2)\big)d(x_1, x_2) \\ &\geq \frac{1}{1 + \varepsilon(x_1)}d(x_1, x_2) - k\big(d(x_1, x_2)\big)d(x_1, x_2) \\ &= \left[\frac{1}{1 + \varepsilon(x_1)} - k\big(d(x_1, x_2)\big)\right]d(x_1, x_2) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} t_1 = D(x_1, Tx_1) &< d(x_1, x_2) \\ &< D(x_1, Tx_1) + \varepsilon(x_1)D(x_1, Tx_1) \\ &< t_1 + d(t_1) \\ &< t_1 + e(t_1) \end{aligned}$$

olduğundan,

$$k\big(d(x_1, x_2)\big) \leq M(t_1) < 1$$

yazılabilir.

$$\varepsilon(x_1) \leq \frac{d(t_1)}{t_1} < \frac{1}{M(t_1)} - 1$$

olduğundan,

$$\frac{1}{1+\varepsilon(x_1)} > M(t_1)$$

elde edilir. Böylece,

$$\left[\frac{1}{1+\varepsilon(x_1)} - k\big(d(x_1,x_2)\big)\right] > 0$$

dır.

Şimdi, en az bir $x_2 \in Tx_1$ için $D(x_1,Tx_1) = d(x_1,x_2)$ olması durumunda,

$$\begin{aligned} D(x_1,Tx_1) - D(x_2,Tx_2) &\geq D(x_1,Tx_1) - H(Tx_1,Tx_2) \\ &\geq D(x_1,Tx_1) - k\big(d(x_1,x_2)\big)d(x_1,x_2) \\ &= \left[1 - k\big(d(x_1,x_2)\big)\right]D(x_1,Tx_1) \end{aligned}$$

olur.

Yine, $t_2 = D(x_2,Tx_2)$ diyelim. O zaman her $y \in Tx_2$ için,

$$D(x_2,Tx_2) < d(x_2,y)$$

olması durumunda $e(t_2)$ ve $M(t_2)$ için,

$$0 < d(t_2) < \min\left\{e(t_2), \left(\frac{1}{M(t_2)} - 1\right)t_2\right\}$$

eşitsizliğini sağlayan $d(t_2)$ pozitif sayısını seçelim ve

$$\varepsilon(x_2) = \min\left\{\frac{d(t_2)}{t_2}, \frac{1}{2}, \frac{t_1}{t_2} - 1\right\}$$

diyelim. Benzer şekilde,

$$d(x_2,x_3) < \big(1+\varepsilon(x_2)\big)D(x_2,Tx_2)$$

ve

$$D(x_2,Tx_2) - D(x_3,Tx_3) \geq \left[\frac{1}{1+\varepsilon(t_2)} - k\big(d(x_2,x_3)\big)\right]d(x_2,x_3) > 0$$

eşitsizliklerini sağlayan $x_3 \in Tx_2$ seçebiliriz.

$$\varepsilon(x_2) \leq \frac{t_1}{t_2} - 1$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} d(x_2, x_3) &< \big(1 + \varepsilon(x_2)\big) D(x_2, Tx_2) \\ &\leq t_1 \\ &= D(x_1, Tx_1) \\ &\leq d(x_1, x_2) \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi, en az bir $x_3 \in Tx_2$ için,

$$D(x_2, Tx_2) = d(x_2, x_3)$$

olması durumunda,

$$D(x_2, Tx_2) - D(x_3, Tx_3) \geq \big[1 - k\big(d(x_2, x_3)\big)\big] D(x_2, Tx_3) > 0$$

ve

$$d(x_2, x_3) = D(x_2, Tx_2) < D(x_1, Tx_1) \leq d(x_1, x_2)$$

elde edilir.

Bu şekilde devam edilerek $X$ içinde aşağıdaki özelliklere uygun bir $\{x_n\}$ dizisi elde edilir:

(i) $x_{n+1} \in Tx_n$,

(ii) $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ ve $\{D(x_n, Tx_n)\}$ dizileri azalan,

(iii) $D(x_n, Tx_n) - D(x_{n+1}, Tx_{n+1}) \geq \left\{\frac{1}{1+\delta(x_n)} - k\big(d(x_n, x_{n+1})\big)\right\} d(x_n, x_{n+1})$.

Buradaki $\delta(x_n)$,

$$0 \leq \delta(x_n) \leq \frac{1}{n}$$

eşitsizliğini sağlayan bir reel sayıdır. $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ dizisi azalan olduğundan negatif olmayan bir reel sayıya yakınsar.

O zaman $k$ üzerindeki şart düşünülürse,

$$\lim_{n\to\infty}\sup k\big(d(x_n,x_{n+1})\big)<1$$

dir.

$$a_n=\frac{1}{1+\delta(x_n)}-k\big(d(x_n,x_{n+1})\big)$$

denilirse,

$$\lim_{n\to\infty}\inf a_n\geq \lim_{n\to\infty}\inf\frac{1}{1+\delta(x_n)}-\lim_{n\to\infty}\sup k\big(d(x_n,x_{n+1})\big)>0$$

olacağından yeteri kadar büyük $n$ ler için,

$$D(x_n,Tx_n)-D(x_{n+1},Tx_{n+1})\geq bd(x_n,x_{n+1})$$

eşitsizliğini sağlayan $b>0$ sayısı vardır.

Diğer taraftan, $\{D(x_n,Tx_n)\}$ dizisi azalan olduğundan yakınsaktır. Böylece $m>n$ olmak üzere her $m,n\in\mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} d(x_n,x_m) &\leq \sum_{j=n}^{m-1} d\big(x_j,x_{j+1}\big) \\ &\leq \frac{1}{b}\sum_{j=n}^{m-1}\big[D\big(x_j,Tx_j\big)-D\big(x_{j+1},Tx_{j+1}\big)\big] \\ &= \frac{1}{b}[D(x_n,Tx_n)-D(x_m,Tx_m)]\to 0,(m,n\to\infty) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. $X$ tam olduğundan, $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$ olacak şekilde $x_0\in X$ vardır.

Eğer $x_0\neq x_n$ ise,

$$H(Tx_0,Tx_n)\leq k\big(d(x_0,x_n)\big)d(x_0,x_n)\leq d(x_0,x_n)$$

olur.

Eğer $x_0=x_n$ ise,

$$H(Tx_0, Tx_n) \leq d(x_0, x_n)$$

olur. Ayrıca,

$$D(x_{n+1}, Tx_0) \leq H(Tx_0, Tx_n) \leq d(x_0, x_n)$$

olduğundan $n \to \infty$ için,

$$D(x_0, Tx_0) = 0$$

bulunur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $T$ bir sabit noktaya sahiptir.

**Sonuç 2.3** $(X, d)$ bir tam metrik uzay, $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ bir dönüşüm ve $\alpha$, her $t \in (0, \infty)$ için $0 < \alpha(t) < 1$ özelliğine sahip monoton artan bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in X$ için,

$$H(Tx, Ty) \leq \alpha\big(d(x, y)\big)d(x, y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $T$ bir sabit noktaya sahiptir.

**İspat.** Her $t \in (0, \infty)$ için $0 < \alpha(t) < 1$ ve $\alpha$ monoton artan olduğundan,

$$\lim_{s \to t^+} \sup k(s) < 1$$

sağlanır. O zaman Mizoguchi-Takahashi teoreminden $T$ nin bir sabit noktası vardır.

Mizoguchi-Takahashi sabit nokta teoreminin ispatı hem uzun hem de karmaşık görülmektedir. Bu teorem birkaç yazar tarafından farklı yollarla ispatlanmıştır. Burada daha basit ve anlaşılır olması nedeni ile Suzuki tarafından yapılan ispata değineceğiz. Bunun için önce $\mathcal{MT}$-fonksiyonu ile ilgili aşağıdaki lemmayı ifade ve ispat edelim.

**Lemma 2.5** $\varphi : [0, \infty) \to [0,1)$ fonksiyonu bir $\mathcal{MT}$-fonksiyonu olsun. $\beta : [0, \infty) \to [0, 1)$,

$$\beta(t) = \frac{\varphi(t) + 1}{2}$$

şeklinde tanımlı $\beta$ fonksiyonu da bir $\mathcal{MT}$-fonksiyondur.

**İspat.** Her $t \in [0, \infty)$ için $\varphi(t) < 1$ olduğundan,

$$\frac{\varphi(t)+1}{2} < 1$$

olur ki bu ise $0 < \beta(t) < 1$ demektir. Ayrıca $\varphi(t) < 1$ olduğundan,

$$\varphi(t) < \frac{\varphi(t)+1}{2} < 1$$

elde edilir, yani her $t \in [0,\infty)$ için $\varphi(t) < \beta(t)$ dir.

Şimdi $t \in [0,\infty)$ sabit bir eleman olsun. $\varphi : [0,\infty) \to [0,1)$ fonksiyonu bir $\mathcal{MT}$-fonksiyon olduğundan her $s \in [t,\ t+\varepsilon)$ için, $\varphi(s) \leq r_t$ olacak şekilde $r_t \in [0,1)$ ve $\varepsilon_t > 0$ vardır. $\lambda_t = \frac{r_t+1}{2}$ olsun. O zaman her $s \in [t,\ t+\varepsilon)$ için,

$$\varphi(s) \leq r_t \ \Rightarrow\ \varphi(s)+1 \ \leq\ r_t+1 \ \Rightarrow\ \beta(s) = \frac{\varphi(s)+1}{2} \ \leq\ \frac{r_t+1}{2} = \lambda_t$$

den,

$$\beta(s) < \lambda_t$$

elde edilir. Dolayısıyla $\beta$ bir $\mathcal{MT}$-fonksiyondur.

**Teorem 2.19** $(X,d)$ bir tam metrik uzay, $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ bir dönüşüm ve $\alpha$ da bir $\mathcal{MT}$-fonksiyon olsun. O zaman her $x,y \in X$ için,

$$H(Tx,Ty) \leq \alpha\big(d(x,y)\big)d(x,y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $T$ bir sabit noktaya sahiptir.

**İspat.** $\beta : [0,\infty) \to [0,1)$ fonksiyonu $\beta(t) = \frac{\alpha(t)+1}{2}$ olarak tanımlansın. Lemma 2.5 gereğince $\beta$ bir $\mathcal{MT}$-fonksiyondur. $x,y \in X,\ x \neq y$ keyfi iki nokta olsun. $u \in Tx$ ve $\varepsilon = \frac{1-\alpha(d(x,y))}{2} d(x,y) > 0$ diyelim. Lemma 2.2 gereğince,

$$d(u,v) \leq H(Tx,Ty) + \varepsilon$$

olacak şekilde $v \in Ty$ vardır. Böylece,

$$d(u,v) \leq H(Tx,Ty) + \frac{1-\alpha\big(d(x,y)\big)}{2} d(x,y)$$

$$\leq \alpha\big(d(x,y)\big)d(x,y) + \frac{1-\alpha\big(d(x,y)\big)}{2}d(x,y)$$

$$= \frac{1+\alpha\big(d(x,y)\big)}{2}d(x,y)$$

$$= \beta\big(d(x,y)\big)d(x,y)$$

olur. Yani her $x, y \in X$ ve $u \in Tx$ için,

$$d(u,v) \leq \beta\big(d(x,y)\big)d(x,y)$$

olacak şekilde bir $v \in Ty$ vardır.

Şimdi, $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ olsun. Eğer $x_0 = x_1$ ise $x_0$ ın $T$ nin sabit noktası olduğu açıktır. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi $x_0 \neq x_1$ olsun. O zaman yukarıdaki eşitsizlikten,

$$d(x_1,x_2) \leq \beta\big(d(x_0,x_1)\big)d(x_0,x_1)$$

olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. Yine,

$$d(x_2,x_3) \leq \beta\big(d(x_1,x_2)\big)d(x_1,x_2)$$

olacak şekilde $x_3 \in Tx_2$ vardır.

Bu şekilde devam edilirse her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in Tx_n$ ve

$$d(x_{n+1},x_{n+2}) \leq \beta\big(d(x_n,x_{n+1})\big)d(x_n,x_{n+1})$$

özelliklerine uygun $X$ de bir $\{x_n\}$ dizisi bulunabilir (Bu dizinin ardışık terimlerinin birbirinden farklı olduğu kabul edilebilir, aksi halde ispat biter). Her $t \in [0,\infty)$ için $\beta(t) < 1$ olduğundan $\{d(x_n,x_{n+1})\}$ dizisi $\mathbb{R}$ de artmayan bir dizidir ve alttan sınırlı olduğundan bu dizi $\lambda \geq 0$ sayısına yakınsar. $\beta$ bir $\mathcal{MT}$-fonksiyon olduğu için,

$$\lim_{r\to\lambda^+} \sup \beta(s) < 1$$

ve

$$\beta(\lambda) < 1$$

dir. Dolayısıyla her $s \in [\lambda,\ \lambda+\varepsilon)$ için,

$$\beta(s) \leq r$$

olacak şekilde $r \in [0, 1)$ ve $\varepsilon > 0$ vardır. Her $n \geq k_0$ için,

$$\lambda \leq d(x_n, x_{n+1}) < \lambda + \varepsilon$$

olacak şekilde bir $k_0 \in \mathbb{N}$ seçebiliriz. O halde $n \geq k_0$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_{n+2}) &\leq \beta\big(d(x_n, x_{n+1})\big)d(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq rd(x_n, x_{n+1}) \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) &\leq \sum_{n=1}^{k_0} d(x_n, x_{n+1}) + \sum_{n=k_0+1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) \\ &= \sum_{n=1}^{k_0} d(x_n, x_{n+1}) + \sum_{n=k_0}^{\infty} d(x_{n+1}, x_{n+2}) \\ &\leq \sum_{n=1}^{k_0} d(x_n, x_{n+1}) + \sum_{n=k_0}^{\infty} rd(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq \sum_{n=1}^{k_0} d(x_n, x_{n+1}) + \sum_{n=k_0}^{\infty} r^n d\big(x_{k_0}, x_{k_0+1}\big) \\ &< \infty \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. $X$ tam olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde $z \in X$ vardır. Böylece,

$$\begin{aligned} D(x_{n+1}, Tz) &\leq H(Tx_n, Tz) \\ &\leq \beta\big(d(x_n, z)\big)d(x_n, z) \\ &\leq d(x_n, z) \end{aligned}$$

olup $n \to \infty$ için limit alınırsa $D(z, Tz) = 0$ olur ki bu ise $z \in Tz$ demektir. Dolayısıyla $T$ bir sabit noktaya sahiptir.

## 2.5. Küme Değerli Dönüşümler İçin Zayıf Picard Operatör

1991 yılında Rus küme değerli dönüşümler için zayıf Picard operatör kavramını tanımlamıştır.

**Tanım 2.26** $(X,d)$ bir metrik uzay ve $T: X \to \mathcal{P}(X)$ bir küme değerli dönüşüm olsun. Eğer her $x \in X$ ve herhangi bir $y \in Tx$ için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa o zaman $T$ ye küme değerli zayıf Picard operatör (MWP) denir;

**(i)** $x_0 = x,\ x_1 = y,$

**(ii)** $x_{n+1} \in Tx_n,$

**(iii)** $\{x_n\}$ dizisi $X$ de yakınsak ve dizinin limiti $T$ nin bir sabit noktasıdır.

1969 yılında Nadler, tam metrik uzay üzerinde tanımlı küme değerli büzülme dönüşümlerinin sabit noktaya sahip olduğunu göstermiştir. Böylelikle Nadler teoreminin ispatı incelendiğinde, bu tür dönüşümlerin küme değerli zayıf Picard operatör olduğu görülebilir. Yine Reich, Rus, Petruşel, Mizoguchi-Takahashi, Berinde ve Berinde tipi küme değerli büzülme dönüşümlerinin de tam metrik uzayda küme değerli zayıf Picard operatör olduğu görülmektedir.

# 3. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde ilk olarak küme değerli $\theta$-büzülme dönüşümü tanımlanacak ve bazı koşullar ile birlikte bu tür dönüşümlerin küme değerli zayıf Picard operatör olduğunu gösteren teoremler incelenecektir. Daha sonra $\alpha$-geçişlilik kavramı ile elde edilen bu teoremler daha da genelleştirilecektir.

## 3.1. Nadler Tip Küme Değerli $\theta$-Büzülme Dönüşümleri

Bu kısımda küme değerli $\theta$-büzülme dönüşümü tanımı verilecek ve Nadler sabit nokta teoreminin bir genelleştirmesi elde edilecektir. Böylece küme değerli $\theta$-büzülme dönüşümlerinin tam metrik uzayda zayıf Picard operatör olduğu gösterilecektir.

**Tanım 3.1** $(X, d)$ bir tam metrik uzay ve $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ bir dönüşüm olsun. $\theta \in \Theta$ verilsin. $H(Tx, Ty) > 0$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için,

$$\theta\big(H(Tx, Ty)\big) \leq \big[\theta\big(d(x, y)\big)\big]^k$$

eşitsizliği bir $k \in (0, 1)$ için sağlanıyorsa $T$ ye küme değerli $\theta$-büzülme (kısaca KθB) dönüşümü denir.

Örneğin; küme değerli her büzülme dönüşümü $\theta(t) = e^{\sqrt{t}}$ ile birlikte bir KθB dönüşümüdür.

**Teorem 3.1** $(X, d)$ bir tam metrik uzay ve $T : X \to \mathcal{K}(X)$ bir KθB dönüşümü olsun. O halde $T$ küme değerli zayıf Picard operatördür.

**İspat.** $x_0 \in X$ keyfi bir nokta ve $x_1 \in Tx_0$ olsun. Eğer $x_1 \in Tx_1$ ise $x_1$ in $T$ nin sabit noktası olduğunu biliyoruz. $x_1 \notin Tx_1$ olsun. O halde $Tx_1$ kapalı olduğundan, $d(x_1, Tx_1) > 0$ olur.

Diğer taraftan, $d(x_1, Tx_1) \leq H(Tx_0, Tx_1)$ olduğundan $(\Theta_1)$ göz önüne alınırsa,

$$\theta\big(d(x_1, Tx_1)\big) \leq \theta\big(H(Tx_0, Tx_1)\big)$$

olur. Böylece $T$ bir KθB dönüşümü olduğundan,

$$\theta\big(d(x_1, Tx_1)\big) \leq \theta\big(H(Tx_0, Tx_1)\big) \leq \big[\theta\big(d(x_1, x_0)\big)\big]^k$$

elde edilir.

Diğer taraftan, $Tx_1$ kompakt olduğundan,

$$d(x_1, x_2) = d(x_1, Tx_1)$$

olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. Bu durumda yukarıdaki eşitsizlikten,

$$\theta\big(d(x_1, x_2)\big) \leq \theta\big(H(Tx_0, Tx_1)\big) \leq \big[\theta\big(d(x_1, x_0)\big)\big]^k$$

olur.

Bu şekilde devam edilirse, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in Tx_n$ ve $x_n \notin Tx_n$ olmak üzere,

$$\theta\big(d(x_n, x_{n+1})\big) \leq \big[\theta\big(d(x_n, x_{n-1})\big)\big]^k$$

eşitsizliğini sağlayan $X$ de bir $\{x_n\}$ dizisi bulunabilir.

Şimdi, her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n = d(x_n, x_{n+1})$ olsun. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n > 0$ olup yukarıdaki eşitsizlik kullanılırsa,

$$\theta(a_n) \leq [\theta(a_{n-1})]^k \leq [\theta(a_{n-2})]^{k^2} \leq \cdots \leq [\theta(a_0)]^{k^n}$$

elde edilir. Buradan, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$1 < \theta(a_n) \leq [\theta(a_0)]^{k^n}$$

bulunur. O halde $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} \theta(a_n) = 1$$

olur. Böylece $(\Theta_2)$ den,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0^+$$

elde edilir. Ayrıca $(\Theta_3)$ ten,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta(a_n) - 1}{(a_n)^r} = \ell$$

olacak şekilde $r \in (0,1)$ ve $\ell \in (0,\infty]$ vardır.

Kabul edelim ki $\ell < \infty$ olsun ve $B = \frac{\ell}{2}$ diyelim. O halde limit tanımından, her $n \geq n_0$ için,

$$\left| \frac{\theta(a_n) - 1}{(a_n)^r} - \ell \right| \leq B$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan her $n \geq n_0$ için,

$$\frac{\theta(a_n) - 1}{(a_n)^r} \geq \ell - B$$

elde edilir. Yani her $n \geq n_0$ için $A = 1/B$ olmak üzere,

$$n(a_n)^r \leq An[\theta(a_n) - 1]$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi $\ell = \infty$ olsun. O zaman $B > 0$ keyfi bir reel sayı olmak üzere limit tanımından her $n \geq n_0$ için,

$$\frac{\theta(a_n) - 1}{(a_n)^r} \geq B$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $A = 1/B$ olmak üzere ve her $n \geq n_0$ için,

$$n(a_n)^r \leq An[\theta(a_n) - 1]$$

elde edilir.

O halde her iki durumda da $n \geq n_0$ için,

$$n(a_n)^r \leq An[\theta(a_n) - 1]$$

olacak şekilde $A > 0$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için, $\theta(a_n) \leq [\theta(a_0)]^{k^n}$ olduğundan her $n \geq n_0$ için,

$$n(a_n)^r \leq An\left[[\theta(a_0)]^{k^n} - 1\right]$$

olur. Bu eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} n(a_n)^r = 0$$

bulunur. Böylece, her $n \geq n_1$ için,

$$n(a_n)^r \leq 1$$

olacak şekilde $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla her $n \geq n_1$ için,

$$a_n \leq \frac{1}{n^{1/r}}$$

elde edilir.

Şimdi, $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Bunun için $m > n \geq n_1$ olmak üzere $m, n$ doğal sayılarını göz önüne alalım. O zaman,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &= a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{m-1} \\ &= \sum_{i=n}^{m-1} a_i \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} a_i \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{1/r}} \end{aligned}$$

elde edilir. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{1/r}}$ serisi yakınsak olduğuna göre $n \to \infty$ için limit alındığında $d(x_n, x_m) \to 0$ olur. O halde $\{x_n\}$ dizisi $(X, d)$ metrik uzayında bir Cauchy dizisidir. $(X, d)$ tam metrik uzay olduğundan $\{x_n\}$ dizisi bir $z \in X$ noktasına yakınsar.

Diğer taraftan, $(\Theta_1)$ den, $Tx \neq Ty$ olmak üzere her $x, y \in X$ için,

$$H(Tx, Ty) < d(x, y)$$

eşitsizliği sağlanır. O zaman her $x, y \in X$ için,

$$H(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

sağlanır. O halde $n \in \mathbb{N}$ için,

$$d(x_{n+1}, Tz) \leq H(Tx_n, Tz) \leq d(x_n, z)$$

olup $n \to \infty$ için limit alınırsa, $d(z, Tz) = 0$ bulunur. Dolayısıyla $z \in \overline{Tz} = Tz$ olur. O halde ispat yöntemi incelendiğinde $T$ dönüşümünün bir küme değerli zayıf Picard operatör olduğu görülür.

Yukarıdaki teoremde, $\mathcal{K}(X)$ yerine daha geniş bir sınıf olan $\mathcal{CB}(X)$ in alınıp alınamayacağı sorusu akla gelebilir. Ancak, aşağıdaki örnek bunun aynı koşullarla mümkün olmadığını göstermektedir.

**Örnek 3.1** $X = [0, 2]$ ve

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & , \quad x = y \\ 1 + |x - y| & , \quad x \neq y \end{cases}$$

olsun. O zaman $(X, d)$ bir tam metrik uzaydır ve aynı zamanda sınırlıdır. Diğer taraftan $\tau_d$ ayrık topoloji olduğundan $X$ in bütün alt kümeleri kapalıdır. Dolayısıyla $X$ in bütün alt kümeleri kapalı ve sınırlıdır. $X$ içindeki bütün rasyonel sayıların kümesini $\mathbb{Q}$ ile göstererek, $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ dönüşümünü

$$Tx = \begin{cases} \mathbb{Q} & , \quad x \in X \backslash \mathbb{Q} \\ X \backslash \mathbb{Q} & , \quad x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $T$ nin sabit noktaya sahip olmadığı açıktır.

Şimdi, $\theta: (0, \infty) \to (1, \infty)$ fonksiyonu

$$\theta(t) = \begin{cases} e^{\sqrt{t}} & , \quad t \leq 1 \\ 9 & , \quad t > 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman $\theta \in \Theta$ olduğu görülmektedir.

Şimdi, $H(Tx, Ty) > 0$ olmak üzere her $x, y \in X$ için,

$$\theta\big(H(Tx, Ty)\big) \leq \big[\theta\big(d(x, y)\big)\big]^{\frac{1}{2}}$$

olduğunu gösterelim. O zaman, $H(Tx,Ty) > 0 \Leftrightarrow \{x,y\} \cap \mathbb{Q}$ kümesi tek nokta kümesidir. Böylece,

$$H(Tx,Ty) > 0 \Rightarrow H(Tx,Ty) = 1 \; ve \; d(x,y) = 1 + |x-y| > 1$$

$$\Rightarrow \theta\big(H(Tx,Ty)\big) = e \; ve \; \big[\theta\big(d(x,y)\big)\big]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

$$\Rightarrow \theta\big(H(Tx,Ty)\big) \leq \big[\theta\big(d(x,y)\big)\big]^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $T$ dönüşümü KθB dönüşümüdür fakat sabit noktaya sahip olmadığından küme değerli zayıf Picard operatörü değildir.

Ancak, eğer $\theta$ nın koşullarına,

$(\Theta_4)$ $\inf A > 0$ olacak şekildeki her $A \subset (0,\infty)$ için $\theta(\inf A) = \inf \theta(A)$ dır.

koşulu eklenirse, yukarıdaki teoremde $\mathcal{K}(X)$ yerine $\mathcal{CB}(X)$ alınabilir. Dikkat edelim ki $(\Theta_1)$ özelliğine sahip bir $\theta$ fonksiyonunun $(\Theta_4)$ özelliğini sağlaması için gerek ve yeter şart sağdan sürekli olmasıdır. Kısalık olması açısından,

$$\Xi = \{\theta \mid \theta : (0,\infty) \to (1,\infty) \; fonksiyonu \; (\Theta_1) - (\Theta_4) \; özelliklerini \; sağlar\}$$

sınıfını göz önüne alalım.

**Teorem 3.2** $(X,d)$ bir tam metrik uzay ve $\theta \in \Xi$ olmak üzere $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ bir KθB dönüşümü olsun. O halde $T$ bir küme değerli zayıf Picard operatördür.

**İspat.** $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun. O halde her $x \in X$ için $Tx \neq \emptyset$ olduğuna göre $x_1 \in Tx_0$ noktası vardır. $x_1 \in Tx_1$ ise $x_1$ noktasının $T$ nin sabit noktasıdır. O zaman $x_1 \notin Tx_1$ olsun. Buradan, $Tx_1$ kapalı olduğuna göre $d(x_1,Tx_1) > 0$ dır.

Diğer taraftan, $(\Theta_1)$ den ve $d(x_1,Tx_1) \leq H(Tx_0,Tx_1)$ olduğundan,

$$\theta\big(d(x_1,Tx_1)\big) \leq \theta\big(H(Tx_0,Tx_1)\big)$$

olur. O halde $\theta\big(H(Tx,Ty)\big) \leq \big[\theta\big(d(x,y)\big)\big]^k$ olduğundan,

$$\theta\big(d(x_1,Tx_1)\big) \leq \theta\big(H(Tx_0,Tx_1)\big) \leq \big[\theta\big(d(x_0,x_1)\big)\big]^k$$

yazılabilir. Böylece $(\Theta_4)$ den,

$$\theta\big(d(x_1, Tx_1)\big) = \inf_{y \in Tx_1} \theta\big(d(x_1, y)\big)$$

olup yukarıdaki eşitsizlikten,

$$\inf_{y \in Tx_1} \theta\big(d(x_1, y)\big) \leq \big[\theta\big(d(x_0, x_1)\big)\big]^k < \big[\theta\big(d(x_0, x_1)\big)\big]^{\frac{k+1}{2}}$$

elde edilir. O zaman,

$$\theta\big(d(x_1, x_2)\big) \leq \big[\theta\big(d(x_0, x_1)\big)\big]^{\frac{k+1}{2}}$$

olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. Dolayısıyla $x_2 \in Tx_2$ ise ispat biter. Aksi halde, yukarıdakine benzer düşünce ile,

$$\theta\big(d(x_2, x_3)\big) \leq \big[\theta\big(d(x_1, x_2)\big)\big]^{\frac{k+1}{2}}$$

olacak şekilde $x_3 \in Tx_2$ bulunabilir.

Bu şekilde devam edilirse, $x_{n+1} \in Tx_n$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\theta\big(d(x_n, x_{n+1})\big) \leq \big[\theta\big(d(x_n, x_{n-1})\big)\big]^{\frac{k+1}{2}}$$

eşitsizliğini sağlayan $X$ de bir $\{x_n\}$ dizisi bulunabilir.

İspatın geri kalan kısmı Teorem 3.1 in ispatına benzer biçimde tamamlanabilir.

Bir metrik uzayda KθB dönüşümlerinin ailesi küme değerli büzülme dönüşümlerinin ailesini kapsar. Aşağıdaki örnekte verilen $T$ dönüşümü bir küme değerli büzülme dönüşümü değil fakat bir KθB dönüşümüdür.

**Örnek 3.2** $X = \{0, 1, 2, \cdots\}$ ve $d : X \times X \to [0, +\infty)$ fonksiyonu,

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & , \quad x = y \\ \\ x + y & , \quad x \neq y \end{cases}$$

ile tanımlansın. O zaman $(X, d)$ bir tam metrik uzaydır.

$T : X \to \mathcal{CB}(X)$ dönüşümü,

$$Tx = \begin{cases} \{0,1\} & , \quad x \in \{0,1,2\} \\ \\ \{0, x-1\} & , \quad x \geq 3 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $x \geq 3$ ve $y = 0$ için,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{H(Tx,Ty)}{d(x,y)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x} = 1$$

olduğundan $T$ küme değerli büzülme dönüşümü değildir. Bu nedenle, Nadler sabit nokta teoremi dikkate alınarak $T$ nin küme değerli zayıf Picard operatör olduğu garanti edilemez.

Şimdi, $\theta(t) = e^{\sqrt{te^t}}$ ve $k = e^{-\frac{1}{2}}$ olmak üzere $T$ dönüşümünün KθB dönüşümü olduğunu iddia ediyoruz. Öncelikle $\theta\big(H(Tx,Ty)\big) \leq \big[\theta\big(d(x,y)\big)\big]^k$ eşitsizliği verilen $\theta$ fonksiyonu ve $k$ sabiti ile birlikte,

$$\frac{H(Tx,Ty)}{d(x,y)} e^{H(Tx,Ty)-d(x,y)} \leq e^{-1}$$

biçiminde ifade edilebilir.

Diğer taraftan,

$H(Tx,Ty) > 0 \Leftrightarrow (x \neq y$ ve $\{x,y\} \cap \{0,1,2\}$ kümesi ya boş ya da tek noktadır)

Şimdi, genelliği bozmaksızın $x > y$ olduğunu kabul ederek aşağıdaki durumları inceleyelim.

**Durum 1** Eğer $\{x,y\} \cap \{0,1,2\}$ tek nokta ise, $H(Tx,Ty) = x - 1$ ve $d(x,y) \in \{x, x+1, x+2\}$ olur. O zaman,

$$\frac{H(Tx,Ty)}{d(x,y)} e^{H(Tx,Ty)-d(x,y)} \leq \frac{x-1}{x} e^{-1} \leq e^{-1}$$

elde edilir.

**Durum 2** Eğer $\{x,y\} \cap \{0,1,2\}$ boş küme ise, $H(Tx,Ty) = x - 1$ ve $d(x,y) = x + y$ olur. O zaman,

$$\frac{H(Tx,Ty)}{d(x,y)}e^{H(Tx,Ty)-d(x,y)} = \frac{x-1}{x+y}e^{-1-y} \leq e^{-1}$$

elde edilir.

Sonuç olarak, Teorem 3.1 in hatta Teorem 3.2 nin bütün şartları sağlandığından $T$ dönüşümünün küme değerli zayıf Picard operatör olduğu görülmektedir.

## 3.2. $\mathcal{MT}$ Tip Küme Değerli $\boldsymbol{\theta}$-Büzülme Dönüşümleri

Yukarıda metrik uzayda KθB dönüşümü kavramı tanımlanmış ve bazı koşullarla birlikte bu tür dönüşümlerin zayıf Picard operatör olduğunu gösteren teoremler verilmiştir. Dikkat edileceği gibi KθB dönüşümü kavramında belirtilen $k$, $(0,1)$ aralığına ait bir sabittir. Şimdi bu sabiti $x, y \in X$ için $x$ ile $y$ arasındaki uzaklığa bağlı $(0,\infty)$ dan $[0,1)$ e bir fonksiyon olarak alıp lineer olmayan küme değerli $\theta$-büzülme dönüşümü kavramını vereceğiz. Daha sonra bu tür dönüşümler için bazı sabit nokta teoremleri elde edeceğiz.

**Tanım 3.2** $(X,d)$ bir metrik uzay, $T: X \to \mathcal{CB}(X)$ bir dönüşüm ve $\theta \in \Theta$ olsun. $H(Tx,Ty) > 0$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için,

$$\theta\big(H(Tx,Ty)\big) \leq \big[\theta\big(d(x,y)\big)\big]^{k(d(x,y))}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $k: (0,\infty) \to [0,1)$ fonksiyonu varsa $T$ ye lineer olmayan küme değerli $\theta$-büzülme (kısaca LKθB) dönüşümü denir.

**Teorem 3.3** $(X,d)$ bir tam metrik uzay ve $T: X \to \mathcal{K}(X)$ bir LKθB dönüşümü olsun. Bu durumda her $s \in [0,\infty)$ için,

$$\lim_{t\to s^+}\sup k(t) < 1$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $T$ dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir.

**İspat.** Kabul edelim ki $T$ dönüşümü bir sabit noktaya sahip olmasın. O zaman, her $x \in X$ için $d(x,Tx) > 0$ olur.

Şimdi $x_0 \in X$ keyfi bir nokta ve $x_1 \in Tx_0$ olsun. Böylece,

$$0 < d(x_1, Tx_1) \leq H(Tx_0, Tx_1)$$

olduğundan $(\Theta_1)$ ve

$$\theta\big(H(Tx, Ty)\big) \leq \big[\theta\big(d(x, y)\big)\big]^{k\left(d(x,y)\right)}$$

eşitsizliği kullanılırsa,

$$\theta\big(d(x_1, Tx_1)\big) \leq \theta\big(H(Tx_0, Tx_1)\big) \leq \big[\theta\big(d(x_0, x_1)\big)\big]^{k\left(d(x_0,x_1)\right)}$$

elde edilir.

Diğer taraftan $Tx_1$ kompakt olduğundan, Lemma 2.1 den,

$$d(x_1, x_2) = d(x_1, Tx_1)$$

olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. O zaman yukarıdaki eşitsizlikten,

$$\theta\big(d(x_1, x_2)\big) \leq \theta\big(H(Tx_0, Tx_1)\big) \leq \big[\theta\big(d(x_0, x_1)\big)\big]^{k\left(d(x_0,x_1)\right)}$$

elde edilir.

Bu şekilde devam edilirse, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in Tx_n$ olmak üzere,

$$\theta\big(d(x_n, x_{n+1})\big) \leq \big[\theta\big(d(x_{n-1}, x_n)\big)\big]^{k\left(d(x_{n-1},x_n)\right)} \leq \theta\big(d(x_{n-1}, x_n)\big)$$

eşitsizliğini sağlayan $X$ de bir $\{x_n\}$ dizisi bulunabilir. Ayrıca $(\Theta_1)$ den, $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ dizisinin azalan olduğu ve dolayısıyla yakınsak olduğu görülür. O zaman her $s \in [0, \infty)$ için,

$$\lim_{t \to s^+} \sup k(t) < 1$$

olduğundan her $n \geq n_0$ için,

$$k\big(d(x_n, x_{n+1})\big) < b$$

olacak şekilde $b \in (0, 1)$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan her $n \geq n_0$ için,

$1 < \theta\big(d(x_n, x_{n+1})\big)$

$\quad \leq \big[\theta\big(d(x_{n-1}, x_n)\big)\big]^{k\left(d(x_{n-1},x_n)\right)}$

$$\leq \left[\theta\big(d(x_{n-2},x_{n-1})\big)\right]^{k(d(x_{n-2},x_{n-1}))k(d(x_{n-1},x_n))}$$

$$\vdots$$

$$\leq \left[\theta\big(d(x_0,x_1)\big)\right]^{k(d(x_0,x_1))\cdots k(d(x_{n-2},x_{n-1}))k(d(x_{n-1},x_n))}$$

$$= \left[\theta\big(d(x_0,x_1)\big)\right]^{k(d(x_0,x_1))\cdots k\left(d(x_{n_0-1},x_{n_0})\right)k\left(d(x_{n_0},x_{n_0+1})\right)\cdots k(d(x_{n-2},x_{n-1}))k(d(x_{n-1},x_n))}$$

$$\leq \left[\theta\big(d(x_0,x_1)\big)\right]^{k\left(d(x_{n_0},x_{n_0+1})\right)\cdots k(d(x_{n-2},x_{n-1}))k(d(x_{n-1},x_n))}$$

$$\leq \left[\theta\big(d(x_0,x_1)\big)\right]^{b^{(n-n_0)}}$$

elde edilir. O halde her $n \geq n_0$ için,

$$1 < \theta\big(d(x_n,x_{n+1})\big) \leq \left[\theta\big(d(x_0,x_1)\big)\right]^{b^{(n-n_0)}}$$

olup $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} \theta\big(d(x_n,x_{n+1})\big) = 1$$

bulunur. Böylece $(\Theta_2)$ den,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x_{n+1}) = 0^+$$

elde edilir. Ayrıca $(\Theta_3)$ ten,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta\big(d(x_n,x_{n+1})\big)-1}{[d(x_n,x_{n+1})]^r} = \ell$$

olacak şekilde $r \in (0,1)$ ve $\ell \in (0,\infty]$ vardır.

Kabul edelim ki $\ell < \infty$ olsun ve $B = \frac{\ell}{2} > 0$ diyelim. O halde limit tanımından, her $n \geq n_0$ için,

$$\left|\frac{\theta\big(d(x_n,x_{n+1})\big)-1}{[d(x_n,x_{n+1})]^r} - \ell\right| \leq B$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan her $n \geq n_0$ için,

$$\frac{\theta\big(d(x_n,x_{n+1})\big)-1}{[d(x_n,x_{n+1})]^r} \geq \ell - B = B$$

elde edilir. Yani her $n \geq n_0$ için $A = 1/B$ olmak üzere,

$$n[d(x_n, x_{n+1})]^r \leq An\left[\theta\left(d(x_n, x_{n+1})\right) - 1\right]$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi $\ell = \infty$ olsun. O zaman $B > 0$ keyfi bir reel sayı olmak üzere limit tanımından, her $n \geq n_0$ için,

$$\frac{\theta\left(d(x_n, x_{n+1})\right) - 1}{[d(x_n, x_{n+1})]^r} \geq B$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $A = 1/B$ olmak üzere her $n \geq n_0$ için,

$$n[d(x_n, x_{n+1})]^r \leq An\left[\theta\left(d(x_n, x_{n+1})\right) - 1\right]$$

elde edilir.

O halde her iki durumda da her $n \geq n_0$ için,

$$n[d(x_n, x_{n+1})]^r \leq An\left[\theta\left(d(x_n, x_{n+1})\right) - 1\right]$$

olacak şekilde $A > 0$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$1 < \theta\left(d(x_n, x_{n+1})\right) \leq \left[\theta\left(d(x_0, x_1)\right)\right]^{b^{(n-n_0)}}$$

olduğundan, her $n \geq n_0$ için,

$$n[d(x_n, x_{n+1})]^r \leq An\left[\left[\theta\left(d(x_0, x_1)\right)\right]^{b^{(n-n_0)}} - 1\right]$$

olur. Bu eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} n[d(x_n, x_{n+1})]^r = 0$$

bulunur. Böylece, her $n \geq n_1$ için,

$$n[d(x_n, x_{n+1})]^r \leq 1$$

olacak şekilde $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla her $n \geq n_1$ için,

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{n^{1/r}}$$

elde edilir.

Şimdi, $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Bunun için $m > n \geq n_1$ olmak üzere $m, n$ doğal sayılarını göz önüne alalım. O zaman,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &= \sum_{i=n}^{m-1} d(x_i, x_{i+1}) \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} d(x_i, x_{i+1}) \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{1/r}} \end{aligned}$$

elde edilir. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{1/r}}$ serisi yakınsak olduğuna göre $n \to \infty$ için limit alındığında $d(x_n, x_m) \to 0$ olur. O halde $\{x_n\}$ dizisi $(X, d)$ metrik uzayında bir Cauchy dizisidir. $(X, d)$ tam metrik uzay olduğundan $\{x_n\}$ dizisi $z \in X$ noktasına yakınsar.

Diğer taraftan,

$$\theta\big(H(Tx, Ty)\big) \leq \big[\theta\big(d(x, y)\big)\big]^{k(d(x,y))}$$

olduğundan $H(Tx, Ty) > 0$ olmak üzere her $x, y \in X$ için,

$$H(Tx, Ty) < d(x, y)$$

eşitsizliği sağlanır. O zaman her $x, y \in X$ için,

$$H(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

sağlanır. O halde $n \in \mathbb{N}$ için,

$$d(x_{n+1}, Tz) \leq H(Tx_n, Tz) \leq d(x_n, z)$$

olup $n \to \infty$ için limit alınırsa, $d(z, Tz) = 0$ bulunur. Bu durum $T$ dönüşümünün sabit noktaya sahip olmaması ile çelişir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Yukarıdaki teoremde, $\mathcal{K}(X)$ yerine daha geniş bir sınıf olan $\mathcal{CB}(X)$ in alınıp alınamayacağı sorusu akla gelebilir. Örnek 3.1 de $\mathcal{K}(X)$ yerine $\mathcal{CB}(X)$

alınamayacağını göstermiştik. Aynı şekilde, $\theta$ nın koşullarına eğer $(\Theta_4)$ koşulu eklenirse, yukarıdaki teoremde $\mathcal{K}(X)$ yerine $\mathcal{CB}(X)$ sınıfı alınabilir.

**Teorem 3.4** $(X, d)$ bir tam metrik uzay ve $\theta \in \Xi$ olmak üzere $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ dönüşümü bir LKθB dönüşümü olsun. O halde her $s \in [0, \infty)$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \sup k(t) < 1$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $T$ bir sabit noktaya sahiptir.

**İspat.** Kabul edelim ki $T$ dönüşümü bir sabit noktaya sahip olmasın. O zaman, her $x \in X$ için $d(x, Tx) > 0$ olur.

Şimdi, $x_0 \in X$ keyfi bir nokta ve $x_1 \in Tx_0$ olsun. Buradan,

$$0 < d(x_1, Tx_1) \le H(Tx_0, Tx_1)$$

olur.

Diğer taraftan, $(\Theta_1)$ den ve

$$\theta\big(H(Tx, Ty)\big) \le \big[\theta\big(d(x, y)\big)\big]^{k(d(x,y))}$$

olduğundan,

$$\theta\big(d(x_1, Tx_1)\big) \le \theta\big(H(Tx_0, Tx_1)\big) \le \big[\theta\big(d(x_0, x_1)\big)\big]^{k(d(x_0,x_1))}$$

elde edilir. Böylece $(\Theta_4)$ den,

$$\theta\big(d(x_1, Tx_1)\big) = \inf_{y\in Tx_1} \theta\big(d(x_1, y)\big)$$

olup yukarıdaki eşitsizlikten,

$$\inf_{y\in Tx_1} \theta\big(d(x_1, )\big) \le \big[\theta\big(d(x_0, x_1)\big)\big]^{k(d(x_0,x_1))} < \big[\theta\big(d(x_0, x_1)\big)\big]^{\sqrt{k(d(x_0,x_1))}}$$

elde edilir. O zaman,

$$\theta\big(d(x_1, x_2)\big) \le \big[\theta\big(d(x_0, x_1)\big)\big]^{\sqrt{k(d(x_0,x_1))}}$$

olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır.

Bu şekilde devam edilirse, $x_{n+1} \in Tx_n$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\theta\big(d(x_n, x_{n+1})\big) \leq \big[\theta\big(d(x_n, x_{n-1})\big)\big]^{\sqrt{k(d(x_n, x_{n-1}))}}$$

olacak şekilde $X$ de bir $\{x_n\}$ dizisi bulunabilir.

İspatın geri kalan kısmı Teorem 3.3 ün ispatına benzer biçimde tamamlanabilir.

Eğer yukarıdaki teoremde, $\theta(t) = e^{\sqrt{t}}$ ve $k(t) = \sqrt{\alpha(t)}$ şeklinde alınırsa, lineer olmayan küme değerli büzülme dönüşümlerinin sabit noktalarının varlığı ile ilgili olan Mizoguchi-Takahashi sabit nokta teoremini bir sonuç olarak elde edebiliriz.

**Sonuç 3.1 (Mizoguchi-Takahashi)** $(X, d)$ bir tam metrik uzay ve $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ bir dönüşüm olsun. $k : (0, \infty) \to [0, 1)$, her $s \in [0, \infty)$ için,

$$\limsup_{t \to s^+} k(t) < 1$$

özelliğini sağlayan bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in X$ için,

$$H(Tx, Ty) \leq k\big(d(x, y)\big)d(x, y)$$

eşitsizliği sağlansın. O zaman $T$ bir sabit noktaya sahiptir.

Aşağıdaki örnek, Teorem 3.4 ün Mizoguchi-Takahashi teoreminin bir öz genelleştirmesi olduğunu göstermektedir. Yani, örnekte verilen $T$ dönüşümü Teorem 3.4 ün tüm koşullarını sağlamaktadır. Dolayısıyla, sabit noktasının varlığı bu teorem sayesinde garanti edilebilir. Ancak, Mizoguchi-Takahashi teoremindeki büzülme koşulunu sağlayan uygun bir $k$ fonksiyonu bulunamaz. Böylece bu teorem dikkate alınarak $T$ dönüşümünün sabit noktasının varlığı garanti edilemez.

**Örnek 3.3** $(X, d)$ tam metrik uzay, $X = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ ve

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & , \quad x = y \\ \max\{x, y\} & , \quad x \neq y \end{cases}$$

olsun. $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ dönüşümü,

$$Tx = \begin{cases} \{0\} & , \quad x = 0 \\ \\ \left\{0, \dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n+2}, \cdots\right\} & , \quad x = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

Şimdi, $\theta(t) = e^{\sqrt{te^t}}$ ve $k : (0, \infty) \to [0, 1)$ fonksiyonu,

$$k(t) = \begin{cases} \sqrt{e^{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}}} & , \quad t = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \\ \\ 0 & , \quad diğer\ durumlar \end{cases}$$

olmak üzere $T$ nin LKθB dönüşümü olduğunu iddia ediyoruz. O zaman her $s \in [0, \infty)$ için $\lim\limits_{t \to s^+} \sup k(t) = 0 < 1$ olduğu açıktır.

Şimdi Tanım 3.2 de $\theta(t) = e^{\sqrt{te^t}}$ olacak şekilde alınırsa bahsi geçen büzülme eşitsizliği,

$$\frac{H(Tx, Ty)}{d(x, y)} e^{H(Tx,Ty) - d(x,y)} \leq \left[k\big(d(x, y)\big)\right]^2$$

şeklinde yazılabilir. O halde, eğer $m > n$ olmak üzere $x = \frac{1}{n}$ ve $y = \frac{1}{m}$ ise,

$$\begin{aligned} \frac{H(Tx, Ty)}{d(x, y)} e^{H(Tx,Ty) - d(x,y)} &\leq \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} e^{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} \\ &\leq e^{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} \\ &= k^2\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\leq k^2\big(d(x, y)\big) \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca, eğer $x = \frac{1}{n}$ ve $y = 0$ ise,

$$\frac{H(Tx,Ty)}{d(x,y)}e^{H(Tx,Ty)-d(x,y)} \leq \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}e^{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}}$$

$$\leq e^{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}}$$

$$= k^2\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= k^2\big(d(x,y)\big)$$

bulunur. O zaman $T$ bir LKθB dönüşümüdür. Dolayısıyla Teorem 3.4 ün bütün koşulları sağlanır ve böylece $T$ dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir.

Şimdi, Mizoguchi-Takahashi teoremindeki büzülme koşulunun sağlanmadığını gösterelim; Kabul edelim ki $\limsup_{t\to s^+} k(t) = 0 < 1$ ve her $x, y \in X$ için $H(Tx,Ty) \leq k\big(d(x,y)\big)d(x,y)$ olacak şekilde bir $k : (0,\infty) \to [0,1)$ fonksiyonu var olsun. O zaman, $x = 0$ ve $y = \frac{1}{n}$ için,

$$H(Tx,Ty) = \frac{1}{n+1} \ ve\ d(x,y) = \frac{1}{n}$$

olup buradan,

$$H(Tx,Ty) \leq k\big(d(x,y)\big)d(x,y)$$

veya

$$\frac{n}{n+1} \leq k\left(\frac{1}{n}\right)$$

bulunur. O halde bu eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit supremum alınırsa,

$$1 \leq \limsup_{n\to\infty} k\left(\frac{1}{n}\right) \leq \limsup_{n\to\infty} k(t) < 1$$

olur. Dolayısıyla bu bir çelişkidir.

### 3.3. Kıyaslama Fonksiyonları ve $\alpha$-Geçişli Dönüşümler

Bu kısımda ilk önce ön bilgi olması açısından kıyaslama fonksiyonları ve bazı özellikleri incelenecek, ardından (c)-kıyaslama fonksiyonları kullanılarak $\alpha$-geçişli tek değerli dönüşümler için bazı sabit nokta teoremleri verilecektir. Daha sonra ki kısımlar için bu bilgiler alt yapı oluşturacaktır.

İlk olarak, $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ bir fonksiyon olsun. $\psi$ için aşağıdaki şartları göz önüne alalım:

$\psi_1$) $\psi$ azalmayan bir dönüşüm,

$\psi_2$) $\lim_{n\to\infty} \psi^n(t) = 0,\ \forall t \geq 0,$

$\psi_3$) $\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(t) < \infty, \qquad \forall t > 0.$

Kısalık olması bakımından $\Phi = \{\psi : \psi_1 \text{ ve } \psi_2 \text{ sağlanır}\}$ ve $\Psi = \{\psi : \psi_1 \text{ ve } \psi_3 \text{ sağlanır}\}$ diyelim. Literatürde $\Phi$ ailesine ait fonksiyonlara kıyaslama fonksiyonları, $\Psi$ ailesine ait fonksiyonlara da (c)-kıyaslama fonksiyonları adı verilir. Tanımlardan $\Psi \subseteq \Phi$ olduğu açıktır. Yani her (c)-kıyaslama fonksiyonu bir kıyaslama fonksiyonudur.

**Lemma 3.1** Eğer $\psi \in \Phi$ ise o zaman her $t > 0$ için $\psi(t) < t$ dir.

**İspat.** $\psi_2$ den her $t > 0$ için $\lim_{n\to\infty} \psi^n(t) = 0$ dır. En az bir $t_0 > 0$ için $\psi(t_0) \geq t_0$ olduğunu kabul edelim. $\psi$ azalmayan bir dönüşüm olduğundan,

$$t_0 \leq \psi(t_0) \leq \psi(\psi(t_0)) \leq \cdots \leq \psi^n(t_0) \leq \cdots$$

olup $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$t_0 \leq \lim_{n\to\infty} \psi^n(t_0) = 0$$

olur ki bu çelişkidir. O halde her $t > 0$ için, $\psi(t) < t$ dir.

**Lemma 3.2** Eğer $\psi \in \Phi$ ise o zaman $\psi(0) = 0$ dır.

**İspat.** $\psi(0) \neq 0$ olsun. Bu durumda $\psi(0) = t_1 > 0$ dır. $\psi$ azalmayan bir dönüşüm olduğundan $\psi(0) \leq \psi(t_1)$ ve buradan da Lemma 3.1 gereğince,

$$0 < t_1 = \psi(0) \leq \psi(t_1) < t_1$$

olur ki çelişkidir. O halde $\psi(0) = 0$ dır.

**Lemma 3.3** Eğer $\psi \in \Phi$ ise o zaman $\psi$, sıfır noktasında süreklidir.

**İspat.** $\psi \in \Phi$ olsun. O zaman Lemma 3.2 gereğince $\psi(0) = 0$ dır. $t_n \to 0$ olsun. $\psi(t_n) \to \psi(0) = 0$ olduğunu göstereceğiz. $t_n \to 0$ olduğundan $t_n \to 0^+$ olur ki bu ise her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq t_n$ demektir. $\psi$ azalmayan bir dönüşüm olduğundan,

$$0 = \psi(0) \leq \psi(t_n) \leq t_n$$

elde edilir. Burada $n \to \infty$ için limit alınırsa $\psi(t_n) \to \psi(0) = 0$ olur. O halde $\psi$, sıfır noktasında süreklidir.

**Örnek 3.4** $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu,

$$\psi(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{3} \quad , & 0 \leq t \leq \dfrac{2}{3} \\ \\ \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{18} \quad , & \dfrac{2}{3} < t \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman $\psi \in \Psi$ olur.

**Örnek 3.5** $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu $\psi(t) = \frac{t}{1+t}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\psi \in \Phi \backslash \Psi$ dir.

**Tanım 3.3** $X$ boş olmayan bir küme, $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ bir fonksiyon ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\alpha(x, y) \geq 1$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için,

$$\alpha(Tx, Ty) \geq 1$$

oluyorsa o zaman $T$ ye $\alpha$-geçişli dönüşüm denir.

**Örnek 3.6** $X = [0, \infty)$ olmak üzere $T : X \to X$ dönüşümü her $x \in X$ için $Tx = \sqrt{x}$ ve $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu,

$$\alpha(x,y)=\begin{cases} e^{x-y} & , \quad x\geq y \\ 0 & , \quad x<y \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman $T$ dönüşümü $\alpha$-geçişlidir.

**Örnek 3.7** $X=(0,\infty)$ olmak üzere $T:X\to X$ dönüşümü her $x\in X$ için $Tx=\ln x$ ve $\alpha:X\times X\to[0,\infty)$ fonksiyonu,

$$\alpha(x,y)=\begin{cases} 2 & , \quad x\geq y \\ 0 & , \quad x<y \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman $T$ dönüşümü $\alpha$-geçişlidir.

Samet, Vetro ve Vetro, (c)-kıyaslama fonksiyonlarını ve $\alpha$-geçişli dönüşümleri kullanarak $\alpha$-$\psi$-büzülme kavramını ortaya atmışlardır. Ardından bu yeni tip büzülmeler için bazı sabit nokta teoremleri elde etmişlerdir.

**Tanım 3.4** $(X,d)$ bir metrik uzay, $T:X\to X$ bir dönüşüm, $\psi\in\Psi$ ve $\alpha:X\times X\to[0,\infty)$ bir fonksiyon olsun. O zaman her $x,y\in X$ için,

$$\alpha(x,y)d(Tx,Ty)\leq\psi\big(d(x,y)\big)$$

oluyorsa $T$ ye bir $\alpha$-$\psi$-büzülme denir.

**Uyarı 3.1** Tanım 3.4 de eğer $\alpha(x,y)=1$ ve $\delta\in[0,1)$ olmak üzere $\psi(t)=\delta t$ şeklinde alınırsa her büzülme dönüşümünün bir $\alpha$-$\psi$-büzülme olduğu görülür.

**Tanım 3.5** $(X,\tau)$ bir topolojik uzay $\{x_n\}$, $X$ de bir dizi ve $x\in X$ olsun. Eğer $\alpha:X\times X\to[0,\infty)$ fonksiyonu aşağıdaki şartı sağlıyorsa $\alpha$ ya (B) özelliğine sahiptir denir:

**(B)** $Her\ n\in\mathbb{N}\ için\ \alpha(x_n,x_{n+1})\geq 1\ ve\ x_n\to x\ iken\ \alpha(x_n,x)\geq 1$ dir.

**Tanım 3.6** $X$ boş olmayan bir küme olmak üzere eğer $\alpha:X\times X\to[0,\infty)$ fonksiyonu aşağıdaki şartı sağlıyorsa $\alpha$ ya (H) özelliğine sahiptir denir:

**(H)** $Her\ x, y \in X\ için\ \alpha(x, z) \geq 1\ ve\ \alpha(y, z) \geq 1\ olacak\ şekilde\ z \in X$ vardır.

**Teorem 3.5** $(X, d)$ bir tam metrik uzay, $T : X \to X$ bir $\alpha$-geçişli, $\alpha$-$\psi$-büzülme dönüşümü olsun. Eğer $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ var ve $T$ sürekli ise o zaman $T$ bir sabit noktaya sahiptir.

**İspat.** $x_0 \in X$ hipotezde bahsedilen nokta olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = T^n x_0 = Tx_{n-1}$ olacak şekilde $X$ de bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlayalım. Eğer $x_{n_0} = x_{n_o+1}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa o zaman $x_{n_0}$, $T$ nin bir sabit noktası olur. Böylece ispat tamamlanır. Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq x_{n+1}$ olsun. $T$, $\alpha$-geçişli olduğundan,

$$\alpha(x_0, x_1) = \alpha(x_0, Tx_0) \geq 1 \Rightarrow \alpha(Tx_0, Tx_1) = \alpha(x_1, x_2) \geq 1$$

dir.

Bu şekilde devam edilirse her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$$

elde edilir. Tanım 3.4 deki eşitsizlikte $x = x_{n-1}$ ve $y = x_n$ alarak ve yukarıdaki eşitsizliği göz önünde bulundurarak,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\leq \alpha(x_{n-1}, x_n) d(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\leq \psi\big(d(x_{n-1}, x_n)\big) \end{aligned}$$

elde edilir. Tümevarım yöntemiyle her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \psi^n\big(d(x_0, x_1)\big)$$

olur.

Şimdi, her $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ için,

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1})$$

$$\leq \sum_{k=n}^{m-1} \psi^k\big(d(x_0, x_1)\big)$$

$$\leq \sum_{k=n}^{\infty} \psi^k\big(d(x_0, x_1)\big)$$

olup $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^k\big(d(x_0, x_1)\big)$ serisinin yakınsaklığından $\{x_n\}$ dizisi $X$ de bir Cauchy dizisi olur. $X$ tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. $T$ sürekli olduğundan,

$$z = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} Tx_n = T\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = Tz$$

elde edilir ki bu $T$ nin sabit noktasının var olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

**Uyarı 3.2** Teorem 3.5 de $T$ nin sürekliliği yerine $\alpha$ nın (B) özelliğine sahip olması kullanılabilir.

**Teorem 3.6** $(X, d)$ bir tam metrik uzay, $T : X \to X$ bir $\alpha$-geçişli, $\alpha$-$\psi$-büzülme dönüşümü olsun. $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ noktasının var olduğunu kabul edelim. Eğer $\alpha$, (B) özelliğine sahip ise o zaman $T$ bir sabit noktaya sahiptir.

**İspat.** Teorem 3.5 in ispatında olduğu gibi $\{x_n\}$ dizisinin $(X, d)$ metrik uzayında bir Cauchy dizisi olduğu gösterilebilir. $X$ tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır.

Diğer taraftan $\alpha$ nın (B) özelliğine sahip olması ve $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ eşitsizliğinden her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\alpha(x_n, z) \geq 1$$

dir. Tanım 3.4 den ve bu eşitsizlikten,

$$d(z, Tz) \leq d(z, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tz)$$

$$= d(z, x_{n+1}) + d(Tx_n, Tz)$$

$$\leq d(z, x_{n+1}) + \alpha(x_n, z) d(Tx_n, Tz)$$

$$\leq d(z, x_{n+1}) + \psi\big(d(x_n, z)\big)$$

elde edilir. $\psi,\ t = 0$ noktasında sürekli olduğundan, son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa $d(z, Tz) = 0$ olur. Yani $z = Tz$ elde edilir.

**Örnek 3.8** $X = \mathbb{R}$ kümesini alışılmış metrik ile göz önüne alalım. $T : X \to X$ dönüşümü,

$$Tx = \begin{cases} 2x - \dfrac{3}{2} & , \quad x > 1 \\ \dfrac{x}{2} & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman,

$$d(T1, T2) = 2 > 1 = d(1, 2)$$

olduğundan $T$ bir büzülme dönüşümü değildir. Şimdi, $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu,

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 1 & , \quad x, y \in [0, 1] \\ 0 & , \quad x \notin [0, 1]\ veya\ y \notin [0, 1] \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman $T$ dönüşümü her $t \geq 0$ için $\psi(t) = \frac{t}{2}$ ile birlikte bir $\alpha$-$\psi$-büzülmedir, çünkü her $x, y \in X$ için,

$$\alpha(x, y) d(Tx, Ty) \leq \frac{1}{2} d(x, y)$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $x_0 = 1$ için $\alpha(1, T1) = \alpha\left(1, \frac{1}{2}\right) = 1$ dir.

Şimdi, $T$ nin $\alpha$-geçişli dönüşüm olduğunu gösterelim. $\alpha(x,y) \geq 1$ olsun. O zaman, $\alpha$ nın tanımından $x, y \in [0,1]$ dir. O halde $Tx = \frac{x}{2} \in [0,1]$ ve $Ty = \frac{y}{2} \in [0,1]$ olduğundan $\alpha(Tx, Ty) \geq 1$ dir.

Son olarak, $T$ sürekli olduğundan Teorem 3.5 in tüm şartları sağlanır. O halde $T$ nin bir sabit noktası vardır.

Bu örnekten de anlaşılacağı üzere Teorem 3.5 sabit noktanın tekliğini garanti etmez. Çünkü örnekte 0 ve $3/2$, $T$ nin iki sabit noktasıdır.

**Örnek 3.9** $X = \mathbb{R}$ kümesini alışılmış metrik ile göz önüne alalım. $T : X \to X$ dönüşümü,

$$Tx = \begin{cases} 2x - \dfrac{3}{2} & , \quad x > 1 \\ \dfrac{x}{4} & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

$$d(T1, T2) = \frac{9}{4} > 1 = d(1,2)$$

olduğu için $T$ bir büzülme dönüşümü değildir. Ayrıca $T$ sürekli olmadığından Teorem 3.5 bu örneğe uygulanamaz.

Şimdi, $\alpha : X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu,

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} 1 & , \quad x, y \in [0,1] \\ 0 & , \quad x \notin [0,1] \; veya \; y \notin [0,1] \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman $T$ dönüşümü her $t \geq 0$ için $\psi(t) = \frac{t}{4}$ ile birlikte bir $\alpha$-$\psi$-büzülmedir, çünkü her $x, y \in X$ için,

$$\alpha(x,y)d(Tx,Ty) \leq \frac{1}{4}d(x,y)$$

eşitsizliği sağlanır.

Ayrıca, $x_0 = 1$ için $\alpha(1,T1) = \alpha\left(1,\frac{1}{4}\right) = 1$ dir.

Şimdi, $T$ nin $\alpha$-geçişli dönüşüm olduğunu gösterelim. $\alpha(x,y) \geq 1$ olsun. O zaman, $\alpha$ nın tanımından $x,y \in [0,1]$ dir. O halde, $Tx = \frac{x}{4} \in [0,1]$ ve $Ty = \frac{y}{4} \in [0,1]$ olduğundan $\alpha(Tx,Ty) \geq 1$ dir.

Son olarak, $\alpha$ nın (B) özelliğine sahip olduğunu gösterelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n,x_{n+1}) \geq 1$ ve $x_n \to x$ olacak şekilde $X$ de bir $\{x_n\}$ dizisi var olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n,x_{n+1}) \geq 1$ olduğundan $\alpha$ nın tanımından her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in [0,1]$ dir. Dolayısıyla $x_n \to x$ olduğundan $x \in [0,1]$ olmalıdır. O halde, her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n,x) \geq 1$ dir. Bu yüzden $\alpha$, (B) özelliğine sahip olup Teorem 3.6 nın tüm şartları sağlanır. O halde $T$ nin bir sabit noktası vardır.

Yine aynı şekilde Teorem 3.6 da sabit noktanın tekliğini garanti etmez. Çünkü yukarıdaki örnekte 0 ve $3/2$, $T$ nin iki sabit noktasıdır.

**Teorem 3.7** Teorem 3.5 veya Teorem 3.6 nın şartlarına ek olarak $\alpha$, (H) özelliğine de sahip olsun. O zaman $T$ bir tek sabit noktaya sahiptir.

**İspat.** $z$ ve $w$, $T$ nin iki sabit noktası olsun. O zaman $\alpha$ nın (H) özelliğinden dolayı $\alpha(z,u) \geq 1$ ve $\alpha(w,u) \geq 1$ olacak şekilde bir $u \in X$ vardır. $T$, $\alpha$-geçişli olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\alpha(z,T^n u) \geq 1$$

ve

$$\alpha(w,T^n u) \geq 1$$

olur. Bu yüzden,

$$\alpha(x,y)d(Tx,Ty) \le \psi\big(d(x,y)\big)$$

ve

$$\alpha(z,T^n u) \ge 1$$

eşitsizliklerinden her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} d(z,T^n u) &= d\big(Tz,T(T^{n-1}u)\big) \\ &\le \alpha(z,T^{n-1})d\big(Tz,T(T^{n-1}u)\big) \\ &\le \psi\big(d(z,T^{n-1})\big) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $\psi$ azalmayan bir fonksiyon olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$d(z,T^n u) \le \psi^n\big(d(z,u)\big)$$

bulunup $n \to \infty$ için limit alınırsa $T^n u \to z$ elde edilir.

Benzer olarak,

$$\alpha(x,y)d(Tx,Ty) \le \psi\big(d(x,y)\big)$$

ve

$$\alpha(w,T^n u) \ge 1$$

eşitsizlikleri kullanılarak $n \to \infty$ için $T^n u \to w$ elde edilir. Metrik uzaylarda limit noktasının tekliğinden $z = w$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

## 3.4. Küme Değerli $\boldsymbol{\alpha}$-Geçişli ve $\boldsymbol{\alpha_*}$-Geçişli Dönüşümler

Bu kısımda $\alpha$-geçişli dönüşümlerin küme değerli versiyonları göz önüne alınarak küme değerli dönüşümler için bazı sabit nokta teoremleri elde edilecektir.

**Tanım 3.7** $(X,d)$ bir metrik uzay, $T : X \to \mathcal{P}(X)$ bir küme değerli dönüşüm, $\psi \in \Psi$ ve $\alpha : X \times X \to [0,\infty)$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için,

$$\alpha(x,y)H(Tx,Ty) \le \psi\big(d(x,y)\big)$$

oluyorsa $T$ ye küme değerli $\alpha$-$\psi$-büzülme;

$$\alpha_*(Tx, Ty)H(Tx, Ty) \leq \psi\big(d(x, y)\big)$$

oluyorsa $T$ ye küme değerli $\alpha_*$-$\psi$-büzülme dönüşümü denir. Burada

$$\alpha_*(Tx, Ty) = \inf\{\alpha(a, b) : a \in Tx, b \in Ty\}$$

dir.

**Tanım 3.8** $X$ boş olmayan bir küme, $T : X \to \mathcal{P}(X)$ bir küme değerli dönüşüm ve $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ bir dönüşüm olsun:

**(a)** eğer $\alpha(x, y) \geq 1$ olacak şekildeki her $x \in X$ ve $y \in Tx$ noktalarına karşılık $\alpha(y, z) \geq 1$ eşitsizliği her $z \in Ty$ için sağlanıyorsa $T$ ye $\alpha$-geçişli denir.

**(b)** eğer $\alpha(x, y) \geq 1$ olacak şekildeki her $x \in X$ ve $y \in Tx$ için; $\alpha_*(Tx, Ty) \geq 1$ eşitsizliği sağlanıyorsa $T$ ye $\alpha_*$-geçişli denir.

**Uyarı 3.3** Her $\alpha_*$-geçişli dönüşüm aynı zamanda bir $\alpha$-geçişli dönüşümdür. Ama tersi genelde doğru değildir.

**Örnek 3.10** $X = [-1, 1]$ kümesini göz önüne alalım. $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu,

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 0 \quad , & x = y \\ 1 \quad , & x \neq y \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca $T : X \to \mathcal{P}(X)$ dönüşümü,

$$Tx = \begin{cases} \{-x\} \quad , & x \notin \{-1, 0\} \\ \{0, 1\} \quad , & x = -1 \\ \{1\} \quad , & x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman $x = -1$ ve $y = 0 \in Tx = \{0, 1\}$ için $\alpha(x, y) \geq 1$ olmasına rağmen $\alpha_*(Tx, Ty) = \alpha_*(\{0, 1\}, \{1\}) = 0$ dır. Dolayısıyla $T$ bir $\alpha_*$-geçişli dönüşüm değildir. Şimdi $T$ nin $\alpha$-geçişli olduğunu gösterelim. Bunun için aşağıdaki durumlar sonucunda $T$ dönüşümünün $\alpha$-geçişli olduğu görülmektedir.

**Durum 1** Eğer $x = 0$ ise o zaman $y = 1$ ve $\alpha(x, y) \geq 1$ dir. Ayrıca, $z = -1 \in Ty = \{-1\}$ için $\alpha(y, z) \geq 1$ dir.

**Durum 2** Eğer $x = -1$ ise o zaman $y \in \{0, 1\}$ ve $\alpha(x, y) \geq 1$ dir. Ayrıca, her $z \in Ty$ için $\alpha(y, z) \geq 1$ dir.

**Durum 3** Eğer $x \notin \{-1, 0\}$ ise o zaman $y = -x$ ve $\alpha(x, y) \geq 1$ dir. Ayrıca, $z = x \in Ty = \{x\}$ olduğu için $\alpha(y, z) \geq 1$ dir.

Şimdi Mohammadi, Rezapour ve Shahzad tarafından küme değerli $\alpha$-$\psi$-büzülme dönüşümleri için verilen sabit nokta teoreminin ifade ve ispatını inceleyelim.

**Teorem 3.8** $(X, d)$ bir tam metrik uzay, $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ bir fonksiyon, $\psi \in \Psi$ kuvvetli artan bir fonksiyon, $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ $\alpha$-geçişli ve küme değerli $\alpha$-$\psi$-büzülme dönüşümü olsun. Ayrıca, $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ var olduğunu kabul edelim. Eğer $T$ sürekli veya $\alpha$, (B) özelliğine sahip ise o zaman $T$ bir sabit noktaya sahiptir.

**İspat.** $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ hipotezdeki noktalar olsun. Eğer $x_1 = x_0$ ise o zaman ispat biter. $x_1 \neq x_0$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} D(x_1, Tx_1) &\leq \alpha(x_0, x_1) H(Tx_0, Tx_1) \\ &\leq \psi\big(d(x_0, x_1)\big) \end{aligned}$$

olur.

Eğer $x_1 \in Tx_1$ ise o zaman $x_1$, $T$ nin sabit noktası olur. $x_1 \notin Tx_1$ ve $q > 1$ olsun. O zaman,

$$0 < D(x_1, Tx_1) < q\psi\big(d(x_0, x_1)\big)$$

dir. $t_0 = d(x_0, x_1)$ diyelim. O zaman $t_0 > 0$ ve $D(x_1, Tx_1) < q\psi(t_0)$ dır. Dolayısıyla,

$$d(x_1, x_2) < q\psi(t_0)$$

olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. $\psi$ kuvvetli artan bir fonksiyon olduğundan,

$$\psi\big(d(x_1, x_2)\big) < \psi\big(q\psi(t_0)\big)$$

olur. $x_2 \neq x_1$ olduğu kabul edilebilir. Aksi halde ispat biter.

Şimdi $q_1 = \frac{\psi(q\psi(t_0))}{\psi(d(x_1,x_2))}$ olsun. $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$ ve $T$, $\alpha$-geçişli olduğundan her $u \in Tx_1$ için $\alpha(x_1, u) \geq 1$ dir. $u = x_2 \in Tx_1$ alırsak $\alpha(x_1, x_2) \geq 1$ olur. O zaman $q_1 > 1$ ve

$$\begin{aligned} d(x_2, Tx_2) &\leq \alpha(x_1, x_2)H(Tx_1, Tx_2) \\ &\leq \psi\big(d(x_1, x_2)\big) \end{aligned}$$

elde edilir.

Eğer $x_2 \in Tx_2$ ise o zaman $x_2$, $T$ nin sabit noktası olur. $x_2 \notin Tx_2$ olsun. O zaman,

$$0 < D(x_2, Tx_2) < q_1\psi\big(d(x_1, x_2)\big)$$

dir. Bu yüzden,

$$d(x_2, x_3) < q_1\psi\big(d(x_1, x_2)\big) = \psi\big(q\psi(t_0)\big)$$

olacak şekilde $x_3 \in Tx_2$ vardır. Dolayısıyla $x_3 \neq x_2$ ve $\psi\big(d(x_2, x_3)\big) < \psi^2\big(q\psi(t_0)\big)$ dır. $\alpha(x_1, x_2) \geq 1$ ve $T$, $\alpha$-geçişli olduğundan her $v \in Tx_2$ için $\alpha(x_2, v) \geq 1$ dir. $v = x_3 \in Tx_2$ alırsak $\alpha(x_2, x_3) \geq 1$ olur. $q_2 = \frac{\psi^2(q\psi(t_0))}{\psi(d(x_2,x_3))}$ olsun. O zaman $q_2 > 1$ dir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} d(x_3, Tx_3) &\leq \alpha(x_2, x_3)H(Tx_2, Tx_3) \\ &\leq \psi\big(d(x_2, x_3)\big) \end{aligned}$$

olur. Bu şekilde devam edildiğinde her $n \in \mathbb{N}$ için,$x_n \in Tx_{n-1}$, $x_n \neq x_{n-1}$, $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ ve $d(x_n, x_{n+1}) \leq \psi^{n-1}\big(q\psi(t_0)\big)$ olacak şekilde $X$ de bir $\{x_n\}$ dizisi elde edilir.

Şimdi $m > n$ olmak üzere her $m, n \in \mathbb{N}$ için,

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1})$$

$$\leq \sum_{k=n}^{m-1} \psi^{k-1}\big(q\psi(t_0)\big)$$

$$\leq \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{k-1}\big(q\psi(t_0)\big)$$

olur. $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^k\big(q\psi(t_0)\big)$ serisinin yakınsaklığından $\{x_n\}$ dizisi $X$ de bir Cauchy dizisi olur. $X$ tam olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır.

Eğer $T$ sürekli ise, o zaman

$$D(z, Tz) = \lim_{n\to\infty} D(x_{n+1}, Tz) \leq \lim_{n\to\infty} H(Tx_n, Tz) = 0$$

olur ve böylece $z \in \overline{Tz} = Tz$ dir. Yani $z,\ T$ nin bir sabit noktasıdır.

Şimdi $\alpha,$ (B) özelliğine sahip olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, z) \geq 1$ dir. Dolayısıyla,

$$D(x_{n+1}, Tz) \leq H(Tx_n, Tz)$$

$$\leq \alpha(x_n, z) H(Tx_n, Tz)$$

$$\leq \psi\big(d(x_n, z)\big)$$

elde edilir.

Ayrıca $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, z) = 0$ ve $\psi,$ 0 noktasında sürekli olduğundan yukarıdaki eşitsizlikte $n \to \infty$ için $D(z, Tz) = 0$ bulunur ve böylece $z \in \overline{Tz} = Tz$ dir. Yani $z,\ T$ nin bir sabit noktasıdır. Böylece ispat biter.

Şimdi de Asl, Rezapour ve Shahzad tarafından küme değerli $\alpha_*$-$\psi$-büzülme dönüşümleri için verilen sabit nokta teoreminin ifade ve ispatını inceleyelim.

**Teorem 3.9** $(X, d)$ bir tam metrik uzay, $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ bir fonksiyon, $\psi \in \Psi$ kuvvetli artan bir fonksiyon, $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ $\alpha_*$-geçişli ve küme değerli $\alpha_*$-$\psi$-

büzülme dönüşümü olsun. Ayrıca, $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ var olduğunu kabul edelim. Eğer $T$ sürekli veya $\alpha$, (B) özelliğine sahip ise o zaman $T$ bir sabit noktaya sahiptir.

**İspat.** $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ hipotezdeki noktalar olsun. Eğer $x_1 = x_0$ ise o zaman ispat biter. $x_1 \neq x_0$ olsun. Eğer $x_1 \in Tx_1$ ise o zaman $x_1$, $T$ nin sabit noktası olur. $x_1 \notin Tx_1$ ve $q > 1$ olsun. $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$ ve $T$, $\alpha_*$-geçişli olduğundan $\alpha_*(Tx_0, Tx_1) \geq 1$ dir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} 0 &< D(x_1, Tx_1) \\ &\leq \alpha_*(Tx_0, Tx_1)H(Tx_0, Tx_1) \\ &< q\alpha_*(Tx_0, Tx_1)H(Tx_0, Tx_1) \end{aligned}$$

olur. O halde,

$$0 < d(x_1, x_2) < q\alpha_*(Tx_0, Tx_1)H(Tx_0, Tx_1) \leq q\psi\big(d(x_0, x_1)\big)$$

olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. Ayrıca $x_2 \neq x_1$ ve $\alpha(x_1, x_2) \geq 1$ dir. Bu yüzden $T$, $\alpha_*$-geçişli olduğundan $\alpha_*(Tx_1, Tx_2) \geq 1$ dir. $t_0 = d(x_0, x_1)$ diyelim. Buradan, $t_0 > 0$ ve $d(x_1, x_2) < q\psi(t_0)$ dır. $\psi$ kuvvetli artan bir fonksiyon olduğundan,

$$\psi\big(d(x_1, x_2)\big) < \psi\big(q\psi(t_0)\big)$$

dir. $q_1 = \frac{\psi(q\psi(t_0))}{\psi(d(x_1, x_2))}$ olsun. O zaman $q_1 > 1$ dir.

Eğer $x_2 \in Tx_2$ ise o zaman $x_2$, $T$ nin sabit noktası olur. $x_2 \notin Tx_2$ olsun. O zaman,

$$0 < D(x_2, Tx_2) \leq \alpha_*(Tx_1, Tx_2)H(Tx_1, Tx_2) < q_1\alpha_*(Tx_1, Tx_2)H(Tx_1, Tx_2)$$

dir. Bu yüzden,

$$0 < d(x_2, x_3) < q_1\alpha_*(Tx_1, Tx_2)H(Tx_1, Tx_2) \leq q_1\psi\big(d(x_1, x_2)\big) = \psi\big(q\psi(t_0)\big)$$

olacak şekilde $x_3 \in Tx_2$ vardır. Dolayısıyla $x_3 \neq x_2$, $\alpha(x_2, x_3) \geq 1$ ve $\psi\big(d(x_2, x_3)\big) < \psi^2\big(q\psi(t_0)\big)$ dır. $q_2 = \frac{\psi^2(q\psi(t_0))}{\psi(d(x_2, x_3))}$ olsun. O zaman $q > 1$ dir.

Eğer $x_3 \in Tx_3$ ise o zaman $x_3,\ T$ nin sabit noktası olur. $x_3 \notin Tx_3$ olsun. O zaman,

$$0 < D(x_3, Tx_3) \leq \alpha_*(Tx_2, Tx_3)H(Tx_2, Tx_3) < q_2\alpha_*(Tx_2, Tx_3)H(Tx_2, Tx_3)$$

dir. Bu yüzden,

$$0 < d(x_3, x_4) < q_2\alpha_*(Tx_2, Tx_3)H(Tx_2, Tx_3) \leq q_2\psi\big(d(x_2, x_3)\big) = \psi^2\big(q\psi(t_0)\big)$$

olacak şekilde $x_4 \in Tx_3$ vardır. Bu şekilde devam edildiğinde her $n \in \mathbb{N}$ için, $x_n \in Tx_{n-1},\ x_n \neq x_{n-1},\ \alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ ve $d(x_n, x_{n+1}) \leq \psi^{n-1}\big(q\psi(t_0)\big)$ olacak şekilde $X$ de bir $\{x_n\}$ dizisi elde edilir. Şimdi $m > n$ olmak üzere her $m, n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}) \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \psi^{k-1}\big(q\psi(t_0)\big) \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{k-1}\big(q\psi(t_0)\big) \end{aligned}$$

olur. $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^k\big(q\psi(t_0)\big)$ serisinin yakınsaklığından $\{x_n\}$ dizisi $X$ de bir Cauchy dizisi olur. $X$ tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır.

Eğer $T$ sürekli ise, o zaman

$$D(z, Tz) = \lim_{n\to\infty} D(x_{n+1}, Tz) \leq \lim_{n\to\infty} H(Tx_n, Tz) = 0$$

olur ve böylece $z \in \overline{Tz} = Tz$ dir. Yani $z,\ T$ nin bir sabit noktasıdır.

Şimdi $\alpha$, (B) özelliğine sahip olsun. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, z) \geq 1$ elde edilir. $T,\ \alpha_*$-geçişli olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_*(Tx_n, Tz) \geq 1$ dir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} D(z, Tz) &\leq H(Tz, Tx_n) + D(Tx_n, z) \\ &\leq H(Tz, Tx_n) + d(x_{n+1}, z) \\ &\leq \alpha_*(Tx_n, Tz)H(Tx_n, Tz) + d(x_{n+1}, z) \\ &\leq \psi\big(d(x_n, z)\big) + d(x_{n+1}, z) \end{aligned}$$

elde edilir.

Ayrıca $\lim_{n\to\infty} d(x_n, z) = 0$ ve $\psi$, 0 noktasında sürekli olduğundan yukarıdaki eşitsizlikte $n \to \infty$ için $D(z, Tz) = 0$ olur ve böylece $z \in \overline{Tz} = Tz$ dir. Yani $z$, $T$ nin bir sabit noktasıdır. Böylece ispat biter.

## 3.5. Nadler Tip Küme Değerli $(\alpha, \theta)$-Büzülme Dönüşümleri

İlk olarak, bu kısımda kullanacağımız küme değerli dönüşümler için üstten ve alttan yarı süreklilik kavramlarını hatırlayalım.

**Tanım 3.9** $X$ ve $Y$ iki topolojik uzay ve $T : X \to \mathcal{P}(Y)$ bir küme değerli dönüşüm olsun. Eğer $Y$ deki her kapalı kümenin ters görüntüsü $X$ de kapalı oluyorsa $T$ ye üstten yarı sürekli, $Y$ deki her açık kümenin ters görüntüsü $X$ de açık ise $T$ ye alttan yarı sürekli dönüşüm denir. Eğer bir küme değerli dönüşüm hem üstten hem alttan yarı sürekli ise bu dönüşüme süreklidir denir.

**Lemma 3.4** $(X, d)$ bir metrik uzay ve her $x \in X$ için $Tx$ kapalı olmak üzere $T : X \to \mathcal{P}(X)$ dönüşümü üstten yarı sürekli olsun. Eğer $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ ve $y_n \in Tx_n$ ise $y_0 \in Tx_0$ dır.

**Örnek 3.11** $T : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ dönüşümü,

$$Tx = \begin{cases} \{0\} & , \quad x \neq 0 \\ \\ [-1, 1] & , \quad x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman $T$ dönüşümü üstten yarı süreklidir ancak alttan yarı sürekli değildir. $K$ kapalı kümesi için,

$$T^{-1}(K) = \begin{cases} \mathbb{R} \quad , & 0 \in K \\ \\ \{0\} \quad , & 0 \notin K \; ve \; K \cap [-1,1] \neq \emptyset \\ \\ \emptyset \quad , & K \cap [-1,1] = \emptyset \end{cases}$$

olduğundan $T$ dönüşümü üstten yarı süreklidir. Ancak $U = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ açığı için $T^{-1}(U) = \{0\}$ olup açık değildir. O halde $T$ dönüşümü alttan yarı sürekli değildir.

**Örnek 3.12** $T : [0,1] \to \mathcal{P}([0,1])$ dönüşümü,

$$Tx = \begin{cases} \left\{\frac{3}{4}\right\} \quad , & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \\ \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \quad , & x = \frac{1}{2} \\ \\ \left\{\frac{1}{4}\right\} \quad , & \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman $T$ dönüşümü üstten yarı süreklidir ancak alttan yarı sürekli değildir. Çünkü $V = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ açık kümesi için $T^{-1}(V) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ olup açık değildir. Burada dikkat edelim ki her kapalı kümenin ters görüntüsü de kapalıdır.

**Örnek 3.13** $T : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ dönüşümü,

$$Tx = \begin{cases} [-1,1] \quad , & x \neq 0 \\ \\ \{0\} \quad , & x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman $T$ dönüşümü alttan yarı süreklidir ancak üstten yarı sürekli değildir. Bu dönüşümde bir açık kümenin ters görüntüsü ya $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ya $\mathbb{R}$ ya da $\emptyset$ dur. Dolayısıyla $T$ dönüşümü alttan yarı süreklidir. Ancak, $K = \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ kapalı kümesi için $T^{-1}(K) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ olup kapalı değildir. O halde $T$ dönüşümü üstten yarı sürekli değildir.

Şimdi, $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonunu göz önüne alarak küme değerli $\theta$-büzülme dönüşümü ile birlikte tanımlanan küme değerli $(\alpha, \theta)$-büzülme dönüşümü kavramını verelim. Daha sonra da bu tip dönüşümler için bazı sabit nokta teoremlerini inceleyelim.

**Tanım 3.10** $(X, d)$ bir metrik uzay, $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ bir dönüşüm ve $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. $S_{T,\alpha} \subseteq X \times X$ kümesi,

$$S_{T,\alpha} = \{(x, y) : \alpha(x, y) \geq 1 \ ve \ H(Tx, Ty) > 0\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu kümeye kısaca $S$ diyelim. O zaman $(x, x) \notin S$ dir. Buna göre, $\theta \in \Theta$ olmak üzere her $(x, y) \in S$ için,

$$\theta\big(H(Tx, Ty)\big) \leq \big[\theta\big(d(x, y)\big)\big]^k$$

eşitsizliğini sağlayan $k \in (0, 1)$ sabiti varsa $T$ ye küme değerli $(\alpha, \theta)$-büzülme dönüşümü denir.

**Teorem 3.10** $(X, d)$ bir tam metrik uzay, $T : X \to \mathcal{K}(X)$ bir küme değerli dönüşüm ve $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Eğer,

**(i)** $\theta \in \Theta$ olmak üzere $T$ bir $\alpha$-geçişli ve küme değerli $(\alpha, \theta)$-büzülme dönüşümü,

**(ii)** $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ var,

**(iii)** $T$ üstten yarı sürekli ya da $\alpha$, (B) özelliğine sahip,

şartları sağlanıyorsa $T$, $X$ de bir sabit noktaya sahiptir.

**İspat.** Kabul edelim ki $T$ sabit noktaya sahip olmasın. O zaman, her $x \in X$ için $d(x, Tx) > 0$ olur. Hipotezde belirtilen $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ noktalarını dikkate alalım. O zaman $H(Tx_0, Tx_1) > 0$ elde edilir. Bu nedenle $(x_0, x_1) \in S$ olur.

Diğer taraftan, tanımdan ve $(\Theta_1)$ den $k \in (0, 1)$ olmak üzere,

$$\theta\big(d(x_1,Tx_1)\big) \leq \theta\big(H(Tx_0,Tx_1)\big) \leq \big[\theta\big(d(x_0,x_1)\big)\big]^k$$

elde edilir. Ayrıca $Tx_1$ kompakt olduğundan,

$$d(x_1,x_2) = d(x_1,Tx_1)$$

olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. O halde yukarıdaki eşitsizlikten,

$$\theta\big(d(x_1,x_2)\big) \leq \theta\big(H(Tx_0,Tx_1)\big) \leq \big[\theta\big(d(x_0,x_1)\big)\big]^k$$

elde edilir.

Üstelik $T$, $\alpha$-geçişli olduğundan $x_2 \in Tx_1$ için $\alpha(x_1,x_2) \geq 1$ olur. Yine, $x_2 \in Tx_1$ olduğuna göre $(x_1,x_2) \in S$ dir.

Diğer taraftan tanımdan,

$$\theta\big(d(x_2,Tx_2)\big) \leq \theta\big(H(Tx_1,Tx_2)\big) \leq \big[\theta\big(d(x_1,x_2)\big)\big]^k$$

bulunur.

Yine, $Tx_2$ kompakt olduğundan,

$$d(x_2,x_3) = d(x_2,Tx_2)$$

olacak şekilde $x_3 \in Tx_2$ vardır. Yukarıdaki eşitsizlikten,

$$\theta\big(d(x_2,x_3)\big) \leq \theta\big(H(Tx_1,Tx_2)\big) \leq \big[\theta\big(d(x_1,x_2)\big)\big]^k$$

elde edilir. Böylece $x_{n+1} \in Tx_n$, $(x_n,x_{n+1}) \in S$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\theta\big(d(x_n,x_{n+1})\big) \leq \big[\theta\big(d(x_n,x_{n-1})\big)\big]^k$$

eşitsizliğini sağlayan $X$ metrik uzayında bir $\{x_n\}$ dizisi bulunur. Her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $d_n = d(x_n,x_{n+1})$ diyelim. O halde her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $d_n > 0$ ve yukarıdaki eşitsizlik kullanılırsa,

$$\theta(d_n) \leq [\theta(d_{n-1})]^k \leq [\theta(d_{n-2})]^{k^2} \leq \cdots \leq [\theta(d_0)]^{k^n}$$

elde edilir. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$1 < \theta(d_n) \leq [\theta(d_0)]^{k^n}$$

olup $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} \theta(d_n) = 1$$

bulunur.

Diğer taraftan $(\Theta_2)$ den,

$$\lim_{n\to\infty} d_n = 0^+$$

olur. Ayrıca $(\Theta_3)$ ten,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta(d_n) - 1}{(d_n)^r} = \ell$$

olacak şekilde $r \in (0,1)$ ve $\ell \in (0,\infty]$ vardır.

Şimdi kabul edelim ki $\ell < \infty$ olsun. Bu durumda $B = \frac{\ell}{2} > 0$ olsun. O halde limit tanımından her $n \geq n_0$ için,

$$\left| \frac{\theta(d_n) - 1}{(d_n)^r} - \ell \right| \leq B$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan her $n \geq n_0$ için,

$$\frac{\theta(d_n) - 1}{(d_n)^r} \geq \ell - B = B$$

olur. Böylece $A = 1/B$ olmak üzere her $n \geq n_0$ için,

$$n(d_n)^r \leq An[\theta(d_n) - 1]$$

bulunur.

Şimdi kabul edelim ki $\ell = \infty$ olsun. Bu durumda $B > 0$ keyfi bir nokta olmak üzere limit tanımından her $n \geq n_0$ için,

$$\frac{\theta(d_n) - 1}{(d_n)^r} \geq B$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece $A = 1/B$ olmak üzere her $n \geq n_0$ için,

$$n(d_n)^r \leq An[\theta(d_n) - 1]$$

bulunur.

O halde, her iki durumda da her $n \geq n_0$ için,

$$n(d_n)^r \leq An[\theta(d_n) - 1]$$

olacak şekilde $A > 0$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} n(d_n)^r = 0$$

bulunur. Böylece her $n \geq n_1$ için $n(d_n)^r \leq 1$ olacak şekilde $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Ayrıca her $n \geq n_1$ için,

$$d_n \leq \frac{1}{n^{1/r}}$$

elde edilir.

Şimdi, $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Bunun için $m > n \geq n_1$ olmak üzere $m, n$ doğal sayılarını göz önüne alalım. O zaman,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &= d_n + d_{n+1} + \cdots d_{m-1} \\ &= \sum_{i=n}^{m-1} d_i \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} d_i \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{1/r}} \end{aligned}$$

elde edilir. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{1/r}}$ serisi yakınsak olduğuna göre $n \to \infty$ için limit alındığında $d(x_n, x_m) \to 0$ olur. O halde $\{x_n\}$ dizisi $(X, d)$ metrik uzayında bir Cauchy dizisidir. $(X, d)$ tam metrik uzay olduğundan, $\{x_n\}$ dizisi $z \in X$ noktasına yakınsar. Yani, $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ dir. O zaman Lemma 3.4 e göre $T$ üstten yarı sürekli ise, $z \in Tz$ elde edilir. Dolayısıyla bu bir çelişkidir.

Şimdi, $\alpha$ nın (B) özelliğine sahip olduğunu kabul edelim. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, z) \geq 1$ dir. Buradan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ ve $d(z, Tz) > 0$ olduğundan her $n \geq n_0$ için,

$$d(x_{n+1}, Tz) > 0$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece her $n \geq n_0$ için,

$$H(Tx_n, Tz) > 0$$

olur. O halde her $n \geq n_0$ için $(x_n, z) \in S$ dir.

Şimdi, tanımdan ve $(\Theta_1)$ den,

$$\theta\big(d(x_{n+1}, Tz)\big) \leq \theta\big(H(Tx_n, Tz)\big) \leq \big[\theta\big(d(x_n, z)\big)\big]^k$$

bulunur. Böylece her $n \geq n_0$ için,

$$d(x_{n+1}, Tz) \leq d(x_n, z)$$

olup $n \to \infty$ için limit alınırsa, $d(z, Tz) = 0$ bulunur. Yani, $z \in Tz$ dir. Dolayısıyla bu $T$ nin sabit noktası olması kabulü ile çelişir.

Daha önce teoremde $\mathcal{K}(X)$ yerine daha geniş olan $\mathcal{CB}(X)$ sınıfını alınamayacağını göstermiştik. Yine aynı şekilde, eğer $\theta$ nın koşullarına $(\Theta_4)$ koşulu eklenirse $\mathcal{K}(X)$ yerine $\mathcal{CB}(X)$ alınabilir.

**Teorem 3.11** $(X, d)$ bir tam metrik uzay, $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ bir küme değerli dönüşüm ve $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Eğer,

**(i)** $\theta \in \Theta_*$ olmak üzere $T$, $\alpha$-geçişli ve küme değerli $(\alpha, \theta)$-büzülme dönüşümü,

**(ii)** $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ var,

**(iii)** $T$ üstten yarı sürekli ya da $\alpha$ (B) özelliğine sahip,

koşulları sağlanıyorsa $T$ nin $X$ de bir sabit noktası vardır.

**İspat.** Yukarıdaki teoremin ispatında olduğu gibi,

$$\theta\big(d(x_1, Tx_1)\big) \leq \theta\big(H(Tx_0, Tx_1)\big)$$

eşitsizliğini elde edebiliriz. O zaman $(\Theta_4)$ koşulu dikkate alınırsa,

$$\theta\big(d(x_1, Tx_1)\big) = \inf_{y \in Tx_1} \theta\big(d(x_1, y)\big)$$

yazılabilir ve böylece,

$$\theta\big(d(x_1, Tx_1)\big) \leq \theta\big(H(Tx_0, Tx_1)\big) \leq \big[\theta\big(d(x_0, x_1)\big)\big]^k$$

eşitsizliğinden,

$$\inf_{y \in Tx_1} \theta\big(d(x_1, y)\big) \leq \big[\theta\big(d(x_0, x_1)\big)\big]^k < \big[\theta\big(d(x_0, x_1)\big)\big]^{\frac{k+1}{2}}$$

elde edilir. Buradan,

$$\theta\big(d(x_1, x_2)\big) \leq \big[\theta\big(d(x_0, x_1)\big)\big]^{\frac{k+1}{2}}$$

olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır.

İspatın geri kalan kısmı Teorem 3.10 un ispatına benzer biçimde tamamlanabilir.

Aşağıdaki örnek, $T$ nin küme değerli $(\alpha, \theta)$-büzülme dönüşümü olduğunu fakat KθB dönüşümü olmadığını göstermektedir.

**Örnek 3.14** $X = \{0, 2, 4, \cdots\}$ ve $d : X \times X \to [0, \infty)$ olmak üzere,

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & , \quad x = y \\ x + y & , \quad x \neq y \end{cases}$$

şeklinde verilsin. O zaman $(X, d)$ tam metrik uzaydır.

$T : X \to \mathcal{CB}(X)$ dönüşümü,

$$Tx = \begin{cases} \{x\} & , \quad x \in \{0, 2\} \\ \{0, 2, \cdots, x - 2\} & , \quad x \geq 4 \end{cases}$$

ve $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu,

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 0 & , \quad (x, y) \in \{(0, 2), (2, 0)\} \\ 2 & , \quad diğer\ durumlar \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O halde $T$, $\alpha$-geçişli dönüşümdür.

Şimdi, $k = e^{-1}$ ve $\theta(t) = e^{\sqrt{te^t}}$ olmak üzere $T$ nin küme değerli $(\alpha, \theta)$-büzülme dönüşümü olduğunu iddia ediyoruz. Her $(x, y) \in S$ için,

$$\theta\big(H(Tx, Ty)\big) \leq \big[\theta\big(d(x, y)\big)\big]^k$$

olduğunu göstermek için,

$$\frac{H(Tx, Ty)}{d(x, y)} e^{H(Tx,Ty)-d(x,y)} \leq e^{-2}$$

eşitsizliğini göstermemiz yeterlidir. Burada,

$$S = \{\, (x, y) \in X{\times}X : \alpha(x, y) \geq 1 \; ve \; H(Tx, Ty) > 0 \,\}$$

$$= \{\, (x, y) \in X{\times}X : (x, y) \notin \{(0, 2), (2, 0)\} \; ve \; x \neq y \,\}$$

dır. O halde her $(x, y) \in S$ için $x > y$ olduğunu kabul edersek aşağıdaki durumlar ortaya çıkar:

**Durum 1** $y = 0$ ve $x \geq 4$ olsun. O halde $H(Tx, Ty) = x - 2$ ve $d(x, y) = x$ olup,

$$\frac{H(Tx, Ty)}{d(x, y)} e^{H(Tx,Ty)-d(x,y)} \leq \frac{x-2}{x} e^{-2} \leq e^{-2}$$

elde edilir.

**Durum 2** $y = 2$ ve $x = 4$ olsun. O halde $H(Tx, Ty) = 2$ ve $d(x, y) = 6$ olup,

$$\frac{H(Tx, Ty)}{d(x, y)} e^{H(Tx,Ty)-d(x,y)} \leq \frac{1}{3} e^{-4} \leq e^{-2}$$

elde edilir.

**Durum 3** $y = 2$ ve $x > 4$ olsun. O halde $H(Tx, Ty) = x$ ve $d(x, y) = x + 2$ olup,

$$\frac{H(Tx, Ty)}{d(x, y)} e^{H(Tx,Ty)-d(x,y)} \leq \frac{x}{x+2} e^{-2} \leq e^{-2}$$

elde edilir.

**Durum 4** $x > y \geq 4$ olsun. O halde $H(Tx, Ty) = x - 2$ ve $d(x, y) = x + y$ olup,

$$\frac{H(Tx, Ty)}{d(x, y)} e^{H(Tx,Ty)-d(x,y)} = \frac{x-2}{x+y} e^{-2-y} \leq e^{-2}$$

elde edilir.

Böylece, $T$ nin $(\alpha,\theta)$-büzülme dönüşümü olduğu görülür. Yine, $x_0 = 2$ ve $x_1 \in Tx_0 = \{2\}$ için, $\alpha(x_0, x_1) = \alpha(2,2) = 2 \geq 1$ dir.

Son olarak, $\tau_d$ ayrık topoloji olduğundan $T$ dönüşümü üstten yarı süreklidir. Bu nedenle yukarıdaki teoremlerin koşulları sağlanmaktadır. Dolayısıyla $T$, $X$ de bir sabit noktaya sahiptir.

Dikkat edelim ki $\alpha$, (B) özelliğine sahip değildir. Gerçekten, $X$ metrik uzayında $\{x_n\} = \{2, 4, 6, 0, 0, 0, \cdots\}$ dizisini göz önüne alalım. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ ve $x_n \to 0$ olur, fakat $\alpha(x_1, z) = \alpha(2, 0) = 0 \ngeq 1$ dır.

Ayrıca, $\alpha(2,4) \geq 1$ olup $\alpha_*(T2, T4) = 0$ olduğundan $T$, $\alpha_*$-geçişli de değildir.

Diğer taraftan, $H(T0, T2) = 2 = d(0,2)$ olduğundan her $\theta \in \Theta$ ve $k \in (0,1)$ için,

$$\theta\big(H(Tx,Ty)\big) = \theta(2) > [\theta(2)]^k = \big[\theta\big(d(x,y)\big)\big]^k$$

elde edilir. Yani, $T$ dönüşümü KθB dönüşümü değildir.

Son olarak, $H(T0, T4) = 2$, $d(0,4) = 4$ ve $\alpha(0,4) = 2$ olduğundan her $\psi \in \Psi$ için,

$$4 = \alpha(0,4)H(T0,T4) \nleq \psi\big(d(0,4)\big) < d(0,4) = 4$$

elde edilir. Böylece, $T$ küme değerli $\alpha$-$\psi$-büzülme dönüşümü de değildir.

**Sonuç 3.2** $(X,d)$ bir tam metrik uzay, $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ (ya da $\mathcal{K}(X)$) bir küme değerli dönüşüm ve $\alpha : X \times X \to [0,\infty)$ bir fonksiyon olsun. Eğer,

**(i)** $T$, $\alpha_*$-geçişli bir dönüşüm,

**(ii)** $S_* = \{(x,y) : \alpha_*(Tx,Ty) \geq 1 \ ve \ H(Tx,Ty) > 0\} \subseteq X \times X$

olmak üzere her $(x,y) \in S_*$ için,

$$\theta\big(H(Tx,Ty)\big) \leq \big[\theta\big(d(x,y)\big)\big]^k$$

eşitsizliğini sağlayan $\theta \in \Theta_*$ (ya da $\theta \in \Theta$) ve $k \in (0,1)$ var,

**(iii)** $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ var,

**(iv)** $T$ üstten yarı sürekli veya $\alpha$, (B) özelliğine sahip,

şartları sağlanıyorsa $T$, $X$ de bir sabit noktaya sahiptir.

**İspat.** $(x,y) \in S$ olsun. O halde $T$, $\alpha_*$-geçişli dönüşüm olduğundan,

$$\alpha_*(Tx,Ty) \geq 1$$

bulunur. Yani $(x,y) \in S_*$ ve $S \subseteq S_*$ dır. Böylece (ii) den, her $(x,y) \in S$ için,

$$\theta\big(H(Tx,Ty)\big) \leq \big[\theta\big(d(x,y)\big)\big]^k$$

elde edilir. Yani $T$, küme değerli $(\alpha,\theta)$-büzülme dönüşümüdür. Ayrıca $T$, $\alpha_*$-geçişli dönüşümü olduğundan aynı zamanda da $\alpha$-geçişlidir. O halde Teorem 3.11 (ve Teorem 3.10) in bütün koşulları sağlanmaktadır. Dolayısıyla $T$, $X$ de bir sabit noktaya sahiptir.

### 3.6. $\mathcal{MT}$ Tip Küme Değerli $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\theta})$-Büzülme Dönüşümleri

Bu kısımda küme değerli $(\alpha,\theta)$-büzülme dönüşümü kavramını göz önüne alarak $\mathcal{MT}$ tip küme değerli $(\alpha,\theta)$-büzülme dönüşümü tanımı yapılacaktır. Daha sonra da bu tip dönüşümler için bazı sabit nokta teoremleri verilecektir.

**Tanım 3.11** $(X,d)$ bir metrik uzay, $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ bir dönüşüm ve $\alpha : X\times X \to [0,\infty)$ bir fonksiyon olsun. $S_{T,\alpha} \subseteq X\times X$ kümesi,

$$S_{T,\alpha} = \{(x,y) : \alpha(x,y) \geq 1 \ ve \ H(Tx,Ty) > 0\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu kümeye kısaca $S$ diyelim. O zaman $(x,x) \notin S$ dir. Buna göre, $\theta \in \Theta$ olmak üzere her $(x,y) \in S$ için,

$$\theta\big(H(Tx,Ty)\big) \leq \big[\theta\big(d(x,y)\big)\big]^{k(d(x,y))}$$

olacak şekilde bir $k : (0,\infty) \to [0,1)$ fonksiyonu,

$$\limsup_{t\to s^+} k(t) < 1 \ , \qquad s \geq 0$$

özelliğini sağlayacak şekilde varsa $T$ ye $\mathcal{MT}$ tip küme değerli $(\alpha,\theta)$-büzülme dönüşümü denir.

**Teorem 3.12** $(X,d)$ bir tam metrik uzay, $T : X \to \mathcal{K}(X)$ bir küme değerli dönüşüm ve $\alpha : X \times X \to [0,\infty)$ bir fonksiyon olsun. Eğer,

**(i)** $\theta \in \Theta$ olmak üzere $T$ bir $\mathcal{MT}$ tip küme değerli $(\alpha,\theta)$-büzülme dönüşümü,

**(ii)** $T,\ \alpha$-geçişli bir dönüşüm,

**(iii)** $\alpha(x_0,x_1) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ var,

**(iv)** $T$ üstten yarı sürekli ya da $\alpha,$ (B) özelliğine sahip,

şartları sağlanıyorsa $T,\ X$ de bir sabit noktaya sahiptir.

**İspat.** Kabul edelim ki $T$ bir sabit noktaya sahip olmasın. O zaman, her $x \in X$ için $d(x,Tx) > 0$ olur. Hipotezde belirtildiği gibi $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ olsun. Buradan $H(Tx_0,Tx_1) > 0$ elde edilir. Bu nedenle $(x_0,x_1) \in S$ olur.

Diğer taraftan, tanımdan ve $(\Theta_1)$ den $k \in (0,1)$ olmak üzere,

$$\theta\big(d(x_1,Tx_1)\big) \leq \theta\big(H(Tx_0,Tx_1)\big) \leq \big[\theta\big(d(x_0,x_1)\big)\big]^{k(d(x_0,x_1))}$$

elde edilir. Ayrıca $Tx_1$ kompakt olduğundan,

$$d(x_1,x_2) = d(x_1,Tx_1)$$

olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. O halde yukarıdaki eşitsizlikten,

$$\theta\big(d(x_1,x_2)\big) \leq \theta\big(H(Tx_0,Tx_1)\big) \leq \big[\theta\big(d(x_0,x_1)\big)\big]^{k(d(x_0,x_1))}$$

elde edilir.

Üstelik $T,\ \alpha$-geçişli olduğundan $x_2 \in Tx_1$ için $\alpha(x_1,x_2) \geq 1$ olur. Yine, $x_2 \in Tx_1$ olduğuna göre $(x_1,x_2) \in S$ dir.

Diğer taraftan tanımdan,

$$\theta\big(d(x_2,Tx_2)\big) \leq \theta\big(H(Tx_1,Tx_2)\big) \leq \big[\theta\big(d(x_1,x_2)\big)\big]^{k(d(x_1,x_2))}$$

bulunur. Yine, $Tx_2$ kompakt olduğundan,

$$d(x_2, x_3) = d(x_2, Tx_2)$$

olacak şekilde $x_3 \in Tx_2$ vardır. Yukarıdaki eşitsizlikten,

$$\theta\big(d(x_2, x_3)\big) \leq \theta\big(H(Tx_1, Tx_2)\big) \leq \big[\theta\big(d(x_1, x_2)\big)\big]^{k\left(d(x_1,x_2)\right)}$$

elde edilir. Böylece $x_{n+1} \in Tx_n$, $(x_n, x_{n+1}) \in S$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\theta\big(d(x_n, x_{n+1})\big) \leq \big[\theta\big(d(x_{n-1}, x_n)\big)\big]^{k\left(d(x_{n-1},x_n)\right)}$$

eşitsizliğini sağlayan $X$ metrik uzayında bir $\{x_n\}$ dizisi bulunur.

Ayrıca $(\Theta_1)$ den, $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ dizisinin azalan olduğu ve dolayısıyla yakınsak olduğu görülür. O zaman her $s \in [0, \infty)$ için,

$$\lim_{t \to s^+} \sup k(t) < 1$$

olup her $n \geq n_0$ için,

$$k\big(d(x_n, x_{n+1})\big) < b$$

olacak şekilde $b \in (0, 1)$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan her $n \geq n_0$ için,

$$\begin{aligned}
1 &< \theta\big(d(x_n, x_{n+1})\big) \\
&\leq \big[\theta\big(d(x_{n-1}, x_n)\big)\big]^{k\left(d(x_{n-1},x_n)\right)} \\
&\leq \big[\theta\big(d(x_{n-2}, x_{n-1})\big)\big]^{k\left(d(x_{n-2},x_{n-1})\right)k\left(d(x_{n-1},x_n)\right)} \\
&\;\vdots \\
&\leq \big[\theta\big(d(x_0, x_1)\big)\big]^{k\left(d(x_0,x_1)\right)\cdots k\left(d(x_{n-2},x_{n-1})\right)k\left(d(x_{n-1},x_n)\right)} \\
&= \big[\theta\big(d(x_0, x_1)\big)\big]^{k\left(d(x_0,x_1)\right)\cdots k\left(d(x_{n_0-1},x_{n_0})\right)k\left(d(x_{n_0},x_{n_0+1})\right)\cdots k\left(d(x_{n-2},x_{n-1})\right)k\left(d(x_{n-1},x_n)\right)} \\
&\leq \big[\theta\big(d(x_0, x_1)\big)\big]^{k\left(d(x_{n_0},x_{n_0+1})\right)\cdots k\left(d(x_{n-2},x_{n-1})\right)k\left(d(x_{n-1},x_n)\right)} \\
&\leq \big[\theta\big(d(x_0, x_1)\big)\big]^{b^{(n-n_0)}}
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde her $n \geq n_0$ için,

$$1 < \theta\big(d(x_n, x_{n+1})\big) \leq \big[\theta\big(d(x_0, x_1)\big)\big]^{b^{(n-n_0)}}$$

olup $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} \theta\big(d(x_n, x_{n+1})\big) = 1$$

bulunur. Böylece $(\Theta_2)$ den,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0^+$$

elde edilir. Ayrıca $(\Theta_3)$ ten,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta\big(d(x_n, x_{n+1})\big) - 1}{[d(x_n, x_{n+1})]^r} = \ell$$

olacak şekilde $r \in (0,1)$ ve $\ell \in (0,\infty]$ vardır.

Kabul edelim ki $\ell < \infty$ olsun ve $B = \frac{\ell}{2} > 0$ diyelim. O halde limit tanımından, her $n \geq n_0$ için,

$$\left| \frac{\theta\big(d(x_n, x_{n+1})\big) - 1}{[d(x_n, x_{n+1})]^r} - \ell \right| \leq B$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan her $n \geq n_0$ için,

$$\frac{\theta\big(d(x_n, x_{n+1})\big) - 1}{[d(x_n, x_{n+1})]^r} \geq \ell - B = B$$

elde edilir. Yani, her $n \geq n_0$ için $A = 1/B$ olmak üzere,

$$n[d(x_n, x_{n+1})]^r \leq An\big[\theta\big(d(x_n, x_{n+1})\big) - 1\big]$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi $\ell = \infty$ olsun. O zaman $B > 0$ keyfi bir reel sayı olmak üzere limit tanımından, her $n \geq n_0$ için,

$$\frac{\theta\big(d(x_n, x_{n+1})\big) - 1}{[d(x_n, x_{n+1})]^r} \geq B$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan, $A = 1/B$ olmak üzere her $n \geq n_0$ için,

$$n[d(x_n, x_{n+1})]^r \leq An\big[\theta\big(d(x_n, x_{n+1})\big) - 1\big]$$

elde edilir.

O halde, her iki durumda da her $n \geq n_0$ için,

$$n[d(x_n, x_{n+1})]^r \leq An\big[\theta\big(d(x_n, x_{n+1})\big) - 1\big]$$

olacak şekilde $A > 0$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$1 < \theta\big(d(x_n, x_{n+1})\big) \leq \big[\theta\big(d(x_0, x_1)\big)\big]^{b^{(n-n_0)}}$$

olduğundan, her $n \geq n_0$ için,

$$n[d(x_n, x_{n+1})]^r \leq An\left[\big[\theta\big(d(x_0, x_1)\big)\big]^{b^{(n-n_0)}} - 1\right]$$

olur. Bu eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} n[d(x_n, x_{n+1})]^r = 0$$

bulunur. Böylece, her $n \geq n_1$ için

$$n[d(x_n, x_{n+1})]^r \leq 1$$

olacak şekilde $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla her $n \geq n_1$ için,

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{n^{1/r}}$$

elde edilir.

Şimdi, $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Bunun için $m > n \geq n_1$ olmak üzere $m, n$ doğal sayılarını göz önüne alalım. O zaman,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &= \sum_{i=n}^{m-1} d(x_i, x_{i+1}) \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} d(x_i, x_{i+1}) \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{1/r}} \end{aligned}$$

elde edilir. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{1/r}}$ serisi yakınsak olduğuna göre $n \to \infty$ için limit alındığında $d(x_n, x_m) \to 0$ olur. O halde $\{x_n\}$ dizisi $(X, d)$ metrik uzayında bir Cauchy dizisidir. $(X, d)$ tam metrik uzay olduğundan, $\{x_n\}$ dizisi $z \in X$ noktasına yakınsar. Yani, $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ dir. O zaman Lemma 3.4 e göre $T$ üstten yarı sürekli ise, $z \in Tz$ elde edilir. Dolayısıyla bu bir çelişkidir.

Şimdi, $\alpha$ nın (B) özelliğine sahip olduğunu kabul edelim. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, z) \geq 1$ dir. Buradan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ ve $d(z, Tz) > 0$ olduğundan her $n \geq n_0$ için,

$$d(x_{n+1}, Tz) > 0$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece her $n \geq n_0$ için

$$H(Tx_n, Tz) > 0$$

olur. O halde her $n \geq n_0$ için $(x_n, z) \in S$ dir.

Şimdi, tanımdan ve $(\Theta_1)$ den,

$$\theta\big(d(x_{n+1}, Tz)\big) \leq \theta\big(H(Tx_n, Tz)\big) \leq \big[\theta\big(d(x_n, z)\big)\big]^{k(d(x_n,z))}$$

bulunur. Böylece her $n \geq n_0$ için,

$$d(x_{n+1}, Tz) \leq d(x_n, z)$$

olup $n \to \infty$ için limit alınırsa, $d(z, Tz) = 0$ bulunur. Dolayısıyla bu bir çelişkidir.

Daha önce teoremde $\mathcal{K}(X)$ yerine daha geniş olan $\mathcal{CB}(X)$ sınıfını alınamayacağını göstermiştik. Yine aynı şekilde, eğer $\theta$ nın koşullarına $(\Theta_4)$ koşulu eklenirse $\mathcal{K}(X)$ yerine $\mathcal{CB}(X)$ alınabilir.

**Teorem 3.13** $(X, d)$ bir tam metrik uzay, $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ bir küme değerli dönüşüm ve $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Eğer,

**(i)** $\theta \in \Theta_*$ olmak üzere $T$ bir $\mathcal{MT}$ tip küme değerli $(\alpha, \theta)$-büzülme dönüşümü,

**(ii)** $T$, $\alpha$-geçişli bir dönüşüm,

**(iii)** $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ var,

**(iv)** $T$ üstten yarı sürekli ya da $\alpha$, (B) özelliğine sahip,

koşulları sağlanıyorsa $T$ nin $X$ de bir sabit noktası vardır.

**İspat.** Kabul edelim ki $T$ dönüşümü bir sabit noktaya sahip olmasın. O zaman her $x \in X$ için $d(x, Tx) > 0$ olur. Hipotezde belirtildiği gibi $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ olsun. Buradan,

$$\theta\big(d(x_1, Tx_1)\big) \leq \theta\big(H(Tx_0, Tx_1)\big)$$

olur. Diğer taraftan, $(\Theta_1)$ den ve

$$\theta\big(H(Tx, Ty)\big) \leq \big[\theta\big(d(x, y)\big)\big]^{k(d(x,y))}$$

olduğundan,

$$\theta\big(d(x_1, Tx_1)\big) \leq \theta\big(H(Tx_0, Tx_1)\big) \leq \big[\theta\big(d(x_0, x_1)\big)\big]^{k(d(x_0,x_1))}$$

elde edilir. Böylece $(\Theta_4)$ koşulu dikkate alınırsa,

$$\theta\big(d(x_1, Tx_1)\big) = \inf_{y \in Tx_1} \theta\big(d(x_1, y)\big)$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitsizlikten,

$$\inf_{y \in Tx_1} \theta\big(d(x_1, y)\big) \leq \big[\theta\big(d(x_0, x_1)\big)\big]^{k(d(x_0,x_1))} < \big[\theta\big(d(x_0, x_1)\big)\big]^{\frac{k(d(x_0,x_1))+1}{2}}$$

elde edilir. O zaman,

$$\theta\big(d(x_1, x_2)\big) \leq \big[\theta\big(d(x_0, x_1)\big)\big]^{\frac{k(d(x_0,x_1))+1}{2}}$$

olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır.

Bu şekilde devam edilirse, $x_{n+1} \in Tx_n$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\theta\big(d(x_n, x_{n+1})\big) \leq \left[\theta\left(d(x_n, x_{n-1})\right)\right]^{\frac{k(d(x_n,x_{n-1}))+1}{2}}$$

olacak şekilde $X$ de bi $\{x_n\}$ dizisi bulunabilir.

İspatın geri kalan kısmı Teorem 3.12 nin ispatına benzer biçimde tamamlanabilir.

**Sonuç 3.3** $(X,d)$ bir tam metrik uzay, $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ (ya da $\mathcal{K}(X)$) bir küme değerli dönüşüm ve $\alpha : X \times X \to [0,\infty)$ bir fonksiyon olsun. Eğer,

**(i)** $T$, $\alpha_*$-geçişli bir dönüşüm,

**(ii)** $S_* = \{(x,y) : \alpha_*(Tx,Ty) \geq 1 \; ve \; H(Tx,Ty) > 0\} \subseteq X \times X$

olmak üzere her $(x,y) \in S_*$ için,

$$\theta\big(H(Tx,Ty)\big) \leq \big[\theta\big(d(x,y)\big)\big]^{k(d(x,y))}$$

eşitsizliğini sağlayan $\theta \in \Theta_*$ (ya da $\theta \in \Theta$) ve $k \in (0,1)$ var,

**(iii)** $\alpha(x_0,x_1) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ var,

**(iv)** $T$ üstten yarı sürekli veya $\alpha$, (B) özelliğine sahip,

şartları sağlanıyorsa $T$, $X$ de bir sabit noktaya sahiptir.

**İspat.** $(x,y) \in S$ olsun. O halde $T$, $\alpha_*$-geçişli dönüşüm olduğundan,

$$\alpha_*(Tx,Ty) \geq 1$$

bulunur. Yani $(x,y) \in S_*$ ve $S \subseteq S_*$ dır. Böylece (ii) den, her $(x,y) \in S$ için,

$$\theta\big(H(Tx,Ty)\big) \leq \big[\theta\big(d(x,y)\big)\big]^{k(d(x,y))}$$

elde edilir. Yani $T$, $\mathcal{MT}$ tip küme değerli $(\alpha,\theta)$-büzülme dönüşümüdür. Ayrıca, $T$, $\alpha_*$-geçişli dönüşümü olduğundan aynı zamanda da $\alpha$-geçişlidir. O halde Teorem 3.13 (ve Teorem 3.12) in bütün koşulları sağlanmaktadır. Dolayısıyla $T$, $X$ de bir sabit noktaya sahiptir.

# 4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında metrik uzayda $\theta$-büzülme kavramı detaylı bir şekilde incelenmiştir. Öncelikle Banach büzülme dönüşümlerinin aynı zamanda bir $\theta$-büzülme dönüşümü olduğu vurgulanarak $\theta$-büzülme dönüşümleri sınıfının daha geniş olduğu gösterilmiştir. Tam metrik uzay üzerinde tanımlı $\theta$-büzülme dönüşümlerinin Picard operatör olduğu ispatlanmıştır. Daha sonra tek değerli dönüşümler için verilmiş olan $\theta$-büzülme kavramı küme değerli dönüşümlere taşınarak, Nadler ve Mizoguchi-Takahashi tip $\theta$-büzülme dönüşümü kavramları tanımlanmış ve bu tip dönüşümlerin tam metrik uzayda zayıf Picard operatör oldukları gösterilmiştir. Son olarak $\alpha$-geçişlilik ve $\alpha_*$-geçişlilik kavramları da hesaba katılarak küme değerli dönüşümler için bazı genel sabit nokta teoremleri elde edilmiştir.

## KAYNAKLAR


[1] Koçak, M., Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar, Furkan Ofset, Eskişehir, 2009.

[2] Mucuk, O., Topoloji ve Kategori, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 2010.

[3] Soykan, Y., Metrik Uzaylar Topolojisi, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 2012.

[4] Mınak, G., Metrik Uzayda Küme Değerli Dönüşümler İçin Sabit Nokta Teoremleri. Yüksek Lisans Tezi. Kırıkkale Üniversitesi, Kırıkkale, 2013.

[5] Altun, I., Hançer, H. A., Mınak, G., On a general class of weakly Picard operators, Miskolc Mathematical Notes, vol. 16 (2015), no. 1, pp. 25-32.

[6] Agarwal, R., P., O'Regan, D., Sahu, D. R., Fixed Point Theory for Lipschitzian type Mappings with Applications, Springer, New York, 2009.

[7] Rus, I. A., Basic problems of the metric fixed point theory revisited (II), Stud. Univ. Babeş-Bolyai, 36 (1991), 81-99.

[8] Berinde, M., Berinde, V., On a general class of multivalued weakly Picard mappings, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 326 (2007), 772-782.

[9] Mınak, G., Altun, I., Overall approach Mizoguchi-Takahashi type fixed point results, Turkish Journal of Mathematics, 40 (2016), 895-904.

[10] Nadler S. B., Multivalued contraction mappings, Pacific Journal Mathematics, 30 (1969), 475-488.

[11] Altun, I., Hançer, H. A., Mınak, G., On a broad category of multivalued weakly Picard operators, Fixed Point Theory, 18 (2017), no. 1, 229-236.

[12] Mizoguchi, N., Takahashi, W., Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces, Journal of Mathematical Analysis and

Applications, 141 (1989), 177-188.

[13] Samet, B., Vetro, C., Vetro, P., Fixed point theorems for $\alpha$-$\psi$-contractive type mappings, Nonlinear Analysis, 75 (2012), 2154-2165.

[14] Asl, J. H., Rezapour, S., Shahzad, N., On fixed points of $\alpha$-$\psi$-contractive multifunctions, Fixed Point Theory And Applications, 212 (2012), 6 pages.

[15] Reich, S., Some remarks concerning contractions mappings, Canad. Math. Bull., 14 (1971) , pp. 121-124.

[16] Reich, S., Some problems and result in fixed point theory, Contemporary Mathematics, 21 (1983), 179-187.

[17] Du, W. S., On coincidence point and fixed point theorems for nonlinear multivalued maps, Topology and its Applications, vol. 159, no. 1, pp. 49-56, 2012.

[18] Du, W. S., Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions satisfied Mizoguchi-Takahashi's condition in quasiordered metric spaces, Fixed Point Theory and Applications, vol. 2010, Article ID 876372, 9 pages, 2010.

[19] Du, W, S., Some new result and generalizations in metric fixed point theory, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 73 (5) (2010), 1439-1446.

[20] Suzuki, T., Mizoguchi-Takahashi's fixed point theorem is a real generalizations of Nadler's, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 340 (2008), 752-755.

[21] Berinde, V., Iterative Approximation of Fixed Points, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.

[22] Mohammadi, B., Rezapour, S., Shahzad, N., Some results on fixed points of $\alpha$-$\psi$-Ćirić generalized multifunctions, Fixed Point Theory and Applications, 24

(2013), 10 pages.

[23] Mınak, G., Altun, I., On the effect of $\alpha$-admissibility and $\theta$-contractivity to the existence of fixed points of multivalued mappings, Nonlinear Analysis: Modelling and Control, vol. 21, no. 5, 673-686.