T.C.

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KOMPLEKS TİPTEN SAYILARIN GEOMETRİSİ

HACER YILMAZ

KIRIKKALE-2016

Matematik Anabilim Dalı Hacer Yılmaz tarafından hazırlanan KOMPLEKS TİPTEN SAYILARIN GEOMETRİSİ adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onayladım.

Prof. Dr. Kerim KOCA

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Yrd.Doç.Dr. Osman KEÇİLİOĞLU

Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan	:Prof.Dr. Halit GÜNDOĞAN	________________
Üye	: Doç.Dr. Mustafa ÖZKAN	________________
Üye (Danışman)	:Yrd.Doç.Dr. Osman KEÇİLİOĞLU	_______________

Bu tez Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof.Dr.Mustafa YİĞİTOĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

KOMPLEKS TİPTEN SAYILARIN GEOMETRİSİ

YILMAZ, Hacer

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Yrd. Doç Dr. Osman KEÇİLİOĞLU

Ekim 2016, 69 sayfa

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır.

İkinci bölümde tezde geçen kavramlarla ilgili tanım, teorem ve özelliklere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde kompleks tipten sayılar tanımlanarak bazı geometrik özellikleri incelenmiştir.

Dördüncü bölüm tartışma ve sonuç için ayrılmıştır.

Anahtar kelimeler: Kompleks tipten sayılar, iç çarpım, ortagonal, trigonometrik fonksiyonlar, topolojik yapılar

ABSTRACT

GEOMETRİES OF COMPLEX TYPE NUMBERS

YILMAZ, Hacer

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Deperment of Mathematic, M. Sc. Thesis

Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Osman KEÇİLİOĞLU

October 2016, 69 pages

This thesis consist of four sections. The firs section is reserved for introduction. In the second section, we give basic concepts that we use in the following sections. In the third section, the notion of complex type numbers are defined and their some geometrical properties are given. The fourth section is reserved for discussion and conclusion.

Keywords: Complex type numbers, inner product, orthogonal, trigonometric functions, topological structures

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması esnasında hiçbir yardımını esirgemeyen ve sabırla her konuda yardım eden danışman hocam, Sayın Yard. Doç. Dr. Osman KEÇİLİOĞLU’ na, sevgili eşim Oktay YILMAZ’ a ve biricik kızım Asya’ya teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

1.GİRİŞ

Karmaşık sayıları ilk kullanan 16. yüzyılda ikinci ve üçüncü mertebeden denklemleri çözerken Cardano olmuştur. 18. yüzyılda karmaşık sayıları içeren fonksiyonları bulan ise Euler olmuştur. Karmaşık sayıları içeren teknikler arttıkça, gerçel değerli fonksiyonlar kuramındaki çoğu problemin karmaşık sayılar kullanılarak daha kolay bir şekilde çözüldüğü gözlemlenmiştir. Leonardo Euler (1707-1783) ilk kez kompleks sayılar için *I*=*v*-1 kavramlaştırmasını kullandı. Ayrıca Euler 1748 yılında

$$e^{i\theta} = cos\boldsymbol{\theta} + isin\boldsymbol{\theta}$$

olduğunu ispatladı. Gauss bu sayılar için kompleks sayılar ifadesini kullandı. Kompleks sayıların ne tamamen reel ne de tamamen sanal olduğunu gördü. Gauss kompleks sayıları bir düzlem üzerindeki noktalar şeklinde matematiğin ´kompleks analiz ´ denilen dalının temellerini attı. 1837 yılında William R. Hamilton, Gauss´un çalışmalarını geliştirerek kompleks sayıları (*x*,*y*) koordinatları ile belirledi ve bu sayılarla toplama ve çıkarma işlemlerinin yolunu açtı.

Bu çalışmada sayı kavramının genişletilmiş hali olan kompleks sayılar tanıtılıp kompleks sayıların geometrisi üzerinde durulmuştur.

1.1.Kaynak Özetleri

Metrik uzay, topolojik uzay, baz, ayrılabilir uzay kompakt uzay sayılabilir uzay gibi temel kavramlarda Prof. Dr. Cemil Yıldız′ın Genel topoloji kitabi ile Doç. Dr. Gülhan Aslım′ın genel topoloji kitapları kullanılmıştır. Grup, halka, grup homomorfizmi, halkalarda homomorfizm ve izomorfizm, cisim gibi temel kavramlarında Prof. Dr. Dursun Taşçı′nın Soyut Cebir kitabı kullanılmıştır. Vektör uzayı, lineer bileşim kavramı, lineer bağımsızlık, lineer dönüşümler, lineer dönüşümün matrisi, determinant, iç çarpım gibi temel kavramlarda Prof. Dr. Arif Sabuncuoğlu′nun Lineer Cebir kitabı kullanılmıştır. Koniklerin genel formu H. Hilmi Hacısalihoğlu′nun 2 ve 3 Boyutlu Uzaylarda Analitik Geometri kitabından alınmıştır. Tezde bulunan teoremlerin ispatı için G. L. Naber′in The Geometry of Minkowski Spacetime kitabından faydalanılmıştır.

1.2 Tezin Amacı

Bu tez çalışmasında kompleks tipteki sayıların $\mathbb{R}^2$ de bir sıralı ikiliye karşılık getirip bunun üzerindeki topolojik yapı tanımlanmıştır. Buna bağlı olarak bir iç çarpım tanımlanıp bu iç çarpıma göre vektörlerin durumları incelenmiştir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde ileride kullanılacak bazı tanım ve kavramlara değinilecektir.

2.1.Bazı Temel Tanımlar ve Kavramlar

Tanım 2.1.1. G boş olmayan bir küme ve bu küme üzerinde bir ikili işlem * olsun. Buna göre eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa, $(G,*)$ cebirsel yapısına (ya da G kümesine * işlemine göre) bir **grup** denir.

G_1) Her $a,b\in G$ için $a*b \in G$ (Kapalılık şartı)

G_2) Her $a,b,c \in G$ için $a*(b*c)=(a*b)*c$ (Birleşme özelliği)

G_3) Her $a\in G$ için $a*e=e*a=a$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır. (Birim eleman varlığı)

G_4) G kümesindeki her bir a için e, G nin birim elemanı olmak üzere

$a*a' = a'*a = e$ olacak şekilde $a' \in G$ vardır.(Ters elemenın varlığı)

Tanım 2.1.2. Boştan farklı bir H kümesi üzerinde toplama (+) ve çarpma (·) denilen iki ikili işlem tanımlanmış olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa o zaman $(H,+,\cdot)$ cebirsel yapısına bir **halka** denir.

H_1) $(H, +)$ değişmeli bir gruptur.

H_2) H kümesi çarpma işlemine göre kapalıdır.Yani her $a,b \in H$ için $a\cdot b \in H$ dir.

H_3) H kümesi çarpma işlemine göre birleşme özelliğine sahiptir. Yani her $a,b,c \in H$ için $a\cdot(b\cdot c) =(a\cdot b)\cdot c$ dir.

H_4) Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır. Yani her $a,b,c \in H$ için

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

ve

$$(b+c) \cdot a = b \cdot a + c.a$$

dir.

Tanım 2.1.3. $(H,+,\cdot)$ bir halka olsun. Çarpma işleminin değişme özelliği varsa halkaya **değişmeli halka** denir.

Tanım 2.1.4. $(H,+,\cdot)$ bir halka olsun.H ın çarpma işlemine göre etkisiz elemanı varsa halkaya **birimli halka** denir.

Tanım 2.1.5. Birimli ve değişmeli bir halkanın sıfırdan farklı her elemanın çarpma işlemine göre bir tersi varsa o zaman bu halkaya bir **cisim** denir ve genel olarak F ile gösterilir.

Tanım 2.1.6.V bir vektör uzayı ve f:VxV→$\mathbb{R}$ biçiminde, (u,v) deki değeri $\langle u, v\rangle$ ie gösteren ve aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir f fonksiyonuna V üstünde bir **iç çarpım** denir. V vektör uzayı üstünde bir iç çarpım varsa bu vektör uzayına **iç çarpım uzayı** denir.

1) Her $u \in V$ için $\langle v, u\rangle = 0$ ise $v = 0$

2) Her $u, v \in V$, $\langle v, u\rangle = \langle u, v\rangle$

3) Her $u, v, w \in V$, $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$

4) Her $a \in \mathbb{R}$, her $u, v \in V$, $\langle av, u\rangle = a\langle v, u\rangle$

g ,V vektör uzayı üzerinde bir iç çarpım ve W, V nin bir alt uzayı olsun. Bu durumda V g nin W üzerine kısıtlanmış olan $g|_W$ fonksiyonu da , W üzerinde bir iç çarpımdır. Her $v \in W \setminus \{0\}$ için

$g(v,v) < 0$

olacak şekilde V nin en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna g nin **indeksi** denir ve ind$V$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.7. Boş olmayan bir X kümesi ve d: Xx$X \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanan bir d fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa, d ye X üzerinde bir metrik, (X, d) ikilisine de **metrik uzay** denir.

Her $x,y,z \in X$ için

M$_1$) $d(x,y) \geq 0$

M$_2$) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

M$_3$) $d(x,y)=d(y,x)$

M$_4$) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Tanım 2.1.8. Her $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$ için $d(x,y)=\sqrt[2]{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$ şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna $\mathbb{R}^2$ nin alışılmış metriği veya **Öklid metriği** denir.

Tanım 2.1.9. X boştan farklı bir küme ve τ, X in kuvvet kümesi olan P (X) in bir alt ailesi olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan τ ailesine X üzerinde bir **topoloji** (veya topolojik yapı) denir.

T$_1$) $\emptyset, X \in \tau$,

T$_2$) τ ya ait sonlu sayıdaki elemanların arakesiti yine τ ya aittir; yani $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \tau$ için

$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$ dur.

T3) τ ya ait keyfi sayıdaki elemanların birleşimi yine τ ya aittir; yani her $\{A_i\}_{i\in I} \subset \boldsymbol{\tau}$ için $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$ dur.

Tanım 2.1.10. τ nun her elemanına, X üzerinde τ tarafından tanımlanan topolojiye göre bir **açık küme** denir.

Tanım 2.1.11. X uzayına göre tümleyeni açık olan kümeye τ tarafından tanımlanan topolojiye göre **kapalı küme** denir.

Tanım 2.1.12. (X, τ) bir topolojik uzay ve $\beta \subset \tau$ olsun. τ topolojisinin her elemanı β nın elemanlarının herhangi birleşimi olarak yazılabiliyorsa, β ya τ topolojisinin bir **tabanı (bazı)** denir, yani β nın τ için bir taban olması için gerek ve yeter şart

her $A \in \tau$ için $\exists \theta \subset \beta$ alt ailesi var öyleki

$$A=\bigcup_{B\in\theta} B$$

dır.

Teorem 2.1.2. (X, τ) bir topolojik uzay ve β, τ nun bir tabanı olsun. Bu durumda β ailesi (taban olma şartlarıyla bilinen) aşağıdaki şartları sağlar:

B1) X uzayı, β nın elemanlarının birleşimine eşittir, yani

$$X=\bigcup_{B\in\beta} B$$

dir.

B2) β nın herhangi iki elemanının kesişimi, β nın elemanlarının bir birleşimine eşittir. Yani herhangi B_1, $B_2 \in \beta$ ve her $p\in B_1\cap B_2$ için $\exists B_p \in \beta$ var öyleki $p\in B_p \subset B_1\cap B_2$ dır veya $B_1\cap B_2 = \bigcup_{p\in B_1\cap B_2} B_p$, $B_p \in \beta$ dır.

Tanım 2.1.13. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesini kapsayan bir U açık kümesinin her N üst kümesine, A kümesinin **komşuluğu** denir. Yani ;

(N, $A \subset X$ nın bir komşuluğu) $\Leftrightarrow$ ($\exists U \subset X$ açığı var öyleki $A \subset U \subset N$)

dir.

Herhangi bir $x \in X$ noktasının bütün komşuluklar ailesini $N(x)$ ile gösterelim, yani

$N(x) = \{N \in P(x) :$ n, x in komşuluğu $\}$

Teorem2.1.1. X topolojik uzayının bir A alt kümesinin açık olması için gerek ve yeter şart, kendi içindeki her noktanın komşuluğu olmasıdır.

Tanım2.1.14. (X, τ) ve (Y, τ') herhangi iki topolojik uzay, $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer $f(x_0)$'ı içeren Y deki her N' komşuluğu için X de x_0'ı içeren bir N komşuluğu var öyleki $f(N) \subset N'$ ise , f fonksiyonunu **x_0 noktasında sürekli (**noktasal sürekli) denir, yani

f, $x_0 \in X$ noktasında sürekli $\Leftrightarrow$ Her $N' \in N(f(x_0))$ için $\exists N \in N(x_0)$ var öyleki $f(N) \subset N'$ dır.

Tanım 2.1.15. (X,d) bir metrik uzay her $x \in X$ ve $r>0$ bir reel sayı olsun. Bu durumda

$$B_d(x_0,r) = \{x \in X : d(x,x_0) < r\}$$

kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı **açık yuvar** (veya x_0 in ***r*-açık komşuluğu**),

$$\overline{B_d}(x_0,r) = \{x \in X : d(x,x_0) \leq r\}$$

kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı **kapalı yuvar**

$$S_d(x_0,r) = \{x \in X : d(x,x_0) = r\}$$

kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı **yuvar yüzeyi** denir.

Tanım 2.1.16. $A\subset\mathbb{R}^2$ olsun. A nın bir x elemanı için x i içeren ve A nın altkümesi olan bir B_d açık yuvarı varsa,bu x elemanına A nın **iç noktası** denir.

Tanım 2.1.17. X topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. A nın tüm kapalı üst kümelerin arakesitine **A nın kapanışı** denir ve $\bar{A}$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.18. X bir topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. $\bar{A}=X$ ise, A kümesine X uzayında **her yerde yoğun** denir.

Tanım 2.1.19. x topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. A nın tüm açık altkümelerinin birleşimine A kümesinin **içi** denir ve A^0 ile gösterilir

Teorem 2.1.3. X uzayının A gibi bir altkümesinin açık olması için gerek ve yeter şart $A^0=A$ olmasıdır.

Teorem 2.1.4. (X, τ) uzayı $x\in X$ noktasının komşuluklar sınıfı $N(x)$ olsun. Bu taktirde her $x\in A\subset X$ noktasının,A uzayına göre $N_A(x)$ komşuluklar sınıfı

$N_A(x)=\{ N_A=N\cap A \mid N\in N(x)\}$

dır.

Tanım 2.1.20. X uzayının her x noktası sayılabilir bir komşuluk tabanına sahipse X topolojik uzayına **birinci sayılabilir uzay** denir.

Tanım 2.1.21. X uzayının sayılabilir bir B bazı varsa X topolojik uzayına **ikinci sayılabilir uzay** denir.

Tanım 2.1.22. X bir reel (veya kompleks)vektör uzayı olsun. Her $\vec{x} \epsilon X$ vektörünü $\|\vec{x}\|$ reel sayısına dönüştüren ve aşağıdaki şartları sağlayan reel değerli

$$\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonuna *X* üzerinde bir **norm** denir.

n₁) Her $\vec{x} \in X$ ($\vec{x} \neq 0$) için $\|\vec{x}\| > 0$ ve $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$,

n₂) Her $\vec{x} \in$ X ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\|$

n₃) Her $\vec{x}, \vec{y} \in X$ için $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

Üzerinde norm tanımlanmış bir X vektör uzayına **normlu vektör uzayı** veya kısaca **normlu uzay** denir ve (X, $\|\cdot\|$) ile gösterilir. $\|\vec{x}\|$ reel sayısına $\vec{x}$ vektörünün normu denir.

Teorem 2.1.5. (X, $\|\cdot\|$) normlu uzay olsun. Bu durumda her $\vec{x}, \vec{y} \in X$ için

$d(x,y) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$

şeklinde tanımlanan *d* fonksiyonu *X* üzerinde bir metriktir.

Tanım 2.1.23. (X, τ) bir topolojik uzay olsun.Eğer X'in sayılabilir yoğun bir alt kümesi varsa,(X, τ) topolojik uzayına **ayrılabilir uzay** denir.

Teorem 2.1.6. (X, τ) ikinci sayılabilir uzay olsun. Bu durumda (X, τ) topolojik uzayı **ayrılabilir** bir uzaydır.

Tanım 2.1.24. (X, τ), (Y, τ') topolojik uzaylar ve f: $X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu sürekli ve tersi f^{-1} var ve f^{-1} de sürekli ise, f ye bir **homeomorfizm** veya **topolojik dönüşüm** denir.

Eğer X ve Y uzayları arasında bir homeomorfizm varsa,X ve Y topolojik uzaylarına **homeomorf (topolojik denk)uzaylar** denir.

Tanım2.1.25. (X,d) ve $(Y,d^{'})$ metrik uzaylar $x_0 \in X$ ve $f:X\rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun.Eğer

Her $\varepsilon>0$ için $\exists\,\delta(\varepsilon)>0$ sayısı vardır öyleki her $x,y \in X$, $d(x,x_0)<\delta \Rightarrow d^{'}(f(x),f(y))<\varepsilon$

ise, f fonksiyonuna **düzgün sürekli** denir.

Tanım 2.1.26. (X,τ) topolojik uzay olsun. X in farklı her x ve y elemanlarının ayrık komşulukları varsa, yani

Her $x,y\in X$, $x\neq y$ için $\exists\, N\in N(x)$ ve $\exists\, M\in N(y)$ var öyleki $N\cap M=\emptyset$ ise, X uzayına **T_2–uzayı (veya Hausdorff)** denir.

Tanım 2.1.27. (X,τ) bir topolojik uzay ve $x\in X$ olsun. x noktasını içermeyen X uzayının kapalı her K kümesi ile x noktasının ayrık komşulukları varsa, yani

$x\in X$ ve her $K\subset X$ kapalı, $x\notin K$ için $\exists\, N\in N(x)$ ve $\exists M\in N(K)$ var öyleki $N\cap M=\emptyset$ ise, X uzayına, ***x* noktasında düzenli (regüler) uzay** denir.

Tanım 2.1.28. (X,τ) topolojik uzay olsun. X uzayının her $\{A_i\}_{i\in I}$ açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa X uzayına **kompakt uzay** denir.Yani

X kompakt $\Leftrightarrow X$ in her $\{A_i\}_{i\in I}$ açık örtüsü için $\exists\, J\subset I$ (Jsonlu) var öyleki $X=\bigcup_{i\in J} A_i$

dır.

Tanım 2.1.29. (X,τ) topolojik uzay olsun.X in sayılabilir her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, X e **sayılabilir kompakt uzay** denir.

Tanım 2.1.30. (X,τ) topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. x noktasının X uzayında kompakt bir komşuluğu varsa, X uzayına ***x* noktasında yerel kompakt** denir.

Eğer, X uzayı her noktasında yerel kompakt ise, X uzayına **yerel kompakt uzay** denir, yani,

X uzayı yerel kompakt $\Leftrightarrow$ her $x \in X$ için $\exists\, N \in N(x)$ komşuluğu var öyleki N kompakttır.

Tanım 2.1.31. (X,τ) topolojik uzay ve $A,B \subset X$ olsun. Eğer

$\overline{A} \cap B = \emptyset$ ve $A \cap \overline{B} = \emptyset$

ise, yani A ve B birbirlerinin değme noktalarını içermiyorsa , Ave B kümelerine **ayrılmış iki küme (bağlantısız ,irtibatsız iki küme)** denir.Eğer

$\bar{A} \cap B \neq \emptyset$ veya $A \cap \bar{B} \neq \emptyset$

ise, A ve B ye **ayrılmamış iki küme (bağlantılı, irtibatlı iki küme)** denir.

Teorem 2.1.7. $i \in \{1,2,3,4\ldots,n\}$ için $x_i\, y_i \in \mathbb{R}$ olsun.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2 . \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

dir.

3.ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. Kompleks Sayıların Geometrisi

Kompleks sayılara giriş kuadratik denklemlerin çözümüyle ilişkilidir. Eğer

′sayı′ dan anlaşılan reel sayılar ise

$$x^2 -(2B)x -A \tag{1}$$

kuadratik denkleminin $\Delta =4B^2+4A$ (ya da $B^2+A>0$) ise iki kökü,$B^2+A =0$ ise tek kökü ve $B^2+A< 0$ ise bu denklemin kökü yoktur.

$$x^2 +1=0,\ x^2 -2x +2 =0,\ x^2 +x +1 =0 \tag{2}$$

gibi bir çok denklemin reel kökü yoktur. Bu durum bu denklemlerin teorisinde oldukça büyük bir karmaşadır. Bu karmaşayı gidermek için sayı fikrinin genişletilmesine ihtiyaç duyulmuştur.

Mesela;

$$x^2 +1=0$$

denkleminin bir özel tipten çözümü olsun. Bu çözüm imajiner olarak adlandırılsın ve ‘i’ ile ifade edilsin. Böylece $a,b\in\mathbb{R}$ için $a+ib$ biçimindeki kompleks sayılar elde edilmiş olur. Kompleks sayılarda toplama, çıkarma ve çarpma işlemi sırasıyla

$$(a +ib) +(c +id)= (a +c) +(b +d)i$$

$$(a +ib) - (c +id)= (a - c) +(b- d)i$$

$$(a +ib)(c +id)= (ac - bd) +(ad +bc)i$$

biçiminde tanımlanır.

Bir kompleks sayının bir reel sayıya bölümü;

$$\frac{c+id}{a} = (c + id)\,\frac{1}{a} = \frac{c}{a} + \frac{d}{a}\mathrm{i}$$

biçiminde tanımlanır.

z_1 ve z iki kompleks sayı olmak üzere z_1 i z ye bölmek için $z.\bar{z}$ bir reel sayı olacak şekilde bir $\bar{z}$ sayısı seçmek yeterli olacaktır. Böylece

$\frac{z_1}{z} = \frac{z_1.\bar{z}}{z.\bar{z}}$ elde edilir.z=$a + ib$ olmak üzere $\bar{z}=a - ib$ olarak tanımlanırsa

$$z.\bar{z} = a^2 + b^2$$

olup bir reel sayıdır. $\bar{z}=a - ib$ sayısına z= $a + ib$ kompleks sayısının eşleniği denir. Ayrıca z=$a + ib$ komleks sayısının modülü

$$|z| = \sqrt{z\,.\,\bar{z}}$$

olarak tanımlanır. Buna göre A ve B reel sayıları için $B^2 + A<0$ ise (2) ifadesindeki denklemin kökleri sırasıyla

$$x_{1,2} = \pm i$$

$$x_{1,2} = 1 \pm i$$

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

olarak elde edilir.

Reel sayılarda çözülemeyen kuadratik denklemleri çözebilmek için, $x^2 + 1 = 0$

denkleminin kökünün $'i'$ olduğunu kabul ederek, elde edilen yeni sayı sistemi (kompleks sayılar) yardımıyla çözülebilir hale getirildi.

Şimdi

$$x^2 - (2B)x - A = 0,\ \Delta = 4(B^2 + A) < 0$$

denklemini ele alalım. Bu denklemin reel kökü olmadığı aşikardır. Bu denklemin bir kökünün $'I'$ olduğunu kabul edelim. Böylece genelleştirilmiş kompleks sayıları $a,b\in\mathbb{R}$ olmak üzere;

$$a + bI$$

biçiminde oluşturulabilir. Burada toplama,çıkarma ve çarpma işlemleri

$$(a +bI) +(c + dI)= (a +c) +(b +d)I$$

$$(a+bI) - (c +dI)= (a-c)+(b-d)I$$

$$(a+bI)(c+dI)= ac+ adI+bcI+bdI^2$$

$$=(ac+bdA)+(ad+bc+2bdB)I$$

olarak elde edilir.

$z=a + bI$ sayısı için $\bar{z}= (a +2Bb) - bI$ seçilirse $z.\bar{z}$ bir reel sayıdır ve

$$z.\bar{z}= (a + Bb)^2 +\frac{-4A-4B^2}{4}b^2$$

$$=(a + Bb)^2 - (B^2 + A)\, b^2$$

olup bir reel sayıdır. $z.\bar{z}= 0$ olması için gerek ve yeter şart $a=0$ ve $b=0$ olmasıdır. Sonuç olarak her reel veya genelleştirilmiş kompleks sayı katsayılı kuadratik denklem çakışık veya farklı genelleştirilmiş kompleks değerli köke sahiptir.

Örneğin; I, $x^2 -2x +2 =0$ denklemin kökünü göstersin. Bu durumda $x^2 + 1 =0$,

$x^2 -2x +2=0$ ve $x^2 +x +1 =0$ denklemlerin kökleri sırasıyla

$$x_1 = -1 + \mathrm{I},\ x_2 =1- \mathrm{I}$$

$$x_1 = \mathrm{I},\ x_2 = 2 - \mathrm{I}$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{I} \ \ ,x_2 =- \frac{\sqrt{3}}{2} +\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{I}$$

olarak bulunur. Eğer $'I_1'$ $x^2 + x + 1 = 0$ denkleminin bir kökü ise $x^2 + 1 = 0$, $x^2 - 2x + 2 = 0$ ve $x^2 + x + 1 = 0$ denklemlerinin kökleri sırasıyla;

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} I_1 \ , \ x_2 = - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} I_1$$

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} I_1 \ , \ x_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} I_1$$

$$x_1 = I_1 \ , \ x_2 = -1 - I_1$$

dir. $x^2 - (2B)x - A = 0$, $B^2 + A < 0$ ise, bu denklemin kökleri;

$$I = B + \sqrt{(B^2 + A)}\, i \ \text{ ve } I = B - \sqrt{(B^2 + A)}\, i$$

dir. Ayrıca

$$i = \frac{-B}{\sqrt{B^2+A}} + \frac{1}{\sqrt{B^2+A}} \mathrm{I} \ \text{ ve } i = \frac{-B}{\sqrt{B^2+A}} - \frac{1}{\sqrt{B^2+A}} \mathrm{I}$$

olduğu açıktır. Böylece genelleştirilmiş kompleks sayılar ile birebir geçiş elde edilebilir. Yukarıdaki eşitlikler göz önüne alındığında

$$a + bI = a + b(B + \sqrt{B^2 + A}\ i)$$

$$= a + bB + \sqrt{B^2 + A}\ \mathrm{b}i$$

biçiminde ifade edileceği açıktır.

Şimdi (1) denkleminin diskiriminantı pozitif olsun. Bu denklemin bir kökü özel tip bir sayı E olsun.Bu durumda (1) denklemin en az 3 kökü vardır. Bunlardan ikisi reel sayı diğeri ise E dir. a, $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $a + bE$ biçimindeki sayılara en genel kompleks sayılar denir. Bu sayılar üzerinde toplama,çıkarma ve çarpma işlemleri

$$(a+bE)+(c+dE) = (a+c)+(b+d)E$$

$$(a+bE)-(c+dE) = (a-c)+(b-d)E$$

$$(a + bE)\ (c + dE) = ac + adE + bcE + bdE^2$$

$$= (ac + Abd) + (ad + bc + 2Bbd)E$$

biçiminde tanımlanır. Birden çok en genel kompleks sayılar sistemi vardır. Herhangi A,B reel sayı çifti için (1) kuadratik denklemlerinin bir sonucu olarak en genel kompleks sayı sistemi elde edilebilir. Aslında herhangi A,B çifti için

$$x^2 -(2B)x -A =0$$

kuadratik denkleminin diskiriminantı $4B^2 +4A$(ya da B^2+A) nın pozitif, negatif veya sıfır olması durumunda elde edilen genel kompleks sayılar arasında her zaman birebir bir özdeşleme vardır.

Sonuç olarak,sabit A,B reel sayı çifti için $q^2=A + q(2B)$ eşitliğini sağlayan $q\notin\mathbb{R}$ için $z=x+qy$, biçimindeki sayılara kompleks tipte sayı denir. Burada x ve y birer reel sayıdır.Tüm kompleks tipteki sayıları küme olarak göstericek olursak;

$$C_q= \{z=x + qy \mid x,y \in R\}$$

dir.

$C_q$üzerinde toplama ve çarpma işlemleri sırasıyla, $z_1=x_1 +qy_1$ ve $z_2 =x_2 +qy_2\in C_q$ için

$$z_1 +z_2= x_1 +x_2 +q(y_1 +y_2)$$

$$z_1z_2 = (x_1 +qy_1)(x_2 +qy_2)$$

$$= x_1x_2 +Ay_1y_2 +q(x_1y_1 +y_1x_2 +2By_1y_2)$$

biçiminde tanımlanır.

Teorem 3.1.1 $C_q=\{z=x+qy \mid x,y \in R\}$ $(C_q,+,\cdot)$ bir cebirsel halkadır

H_1)$(C_q,+)$ bir değişmeli gruptur.

a) $z_1= x_1 +qy_1$, $z_2= x_2+qy_2$, $z_3 =x_3+qy_3\in C_q$ için

$$z_1+(z_2 +z_3)= x_1+qy_1+(x_2+x_3+q(y_2+y_3))$$

$$= x_1+qy_1+(x_2+x_3+qy_2+qy_3)$$

$$= x_1+qy_1+(x_2+qy_2+x_3+qy_3)$$

$$= x_1+qy_1+ x_2+qy_2+x_3+qy_3$$

$$= [x_1+x_2+q(y_1+y_2)] +x_3+qy_3$$

$$= (z_1+z_2) +z_3$$

buradan

$$z_1+(z_2+z_3)= (z_1+z_2)+z_3$$

dır.

b) Her $z_1=x_1 +qy_1$, $z_2=x_2+qy_2\epsilon C_{\text{q}}$ için

$$z_1+z_2 = x_1+qy_1+x_2+qy_2$$

$$= x_1+x_2+q(y_1+y_2)$$

$$= x_2+x_1+q(y_2+y_1)$$

$$= x_2+x_1+qy_2+qy_1$$

$$= x_2+qy_2+x_1+qy_1$$

$$= z_2+z_1$$

dir.

c) Her $z=x +qy\epsilon C_q$ için 0 =0 +q0 olmak üzere

$$z +0= 0+z= z$$

olduğundan

$$0= 0 +q0$$

toplama işlemine göre birim elemandır.

d)Her $z=x+qy\epsilon C_{\text{q}}$ kompleks tipteki sayının tersi

$$z' = -x+q(-y)\epsilon C_{\text{q}}$$

dir.

H$_2$) Her $z_1=x_1+qy_1$ ve $z_2=x_2+qy_2 \epsilon C_q$ için

$$z_1z_2=(x_1+qy_1)(x_2+qy_2)$$

$$= x_1x_2+qy_1y_2+y_1x_2+q^2y_1y_2$$

$$= x_2x_1+qy_2x_1+qx_2y_1+q^2y_2y_1$$

$$= x_1(x_2+qy_2)+qy_1(x_2+qy_2)$$

$$=(x_2+qy_2)(x_1+qy_1)$$

$$=z_2z_1$$

dir.

H$_3$) Her $z_1= x_1+qy_1$, $z_2= x_1+qy_2$, $z_3= x_3+qy_3 \epsilon C_q$ için $z_1(z_2z_3) =(z_1z_2)z_3$ olduğunu görelim.

$$z_1(z_2z_3)= (x_1+qy_1)[(x_2+qy_2)(x_3+qy_3)]$$

$$= (x_1+qy_1)[x_2x_3+qx_2y_3 +qy_2x_3 +q^2y_2y_3]$$

$$=x_1x_2x_3+x_1qx_2y_3+x_1qy_2x_3+ x_1q^2y_2y+qy_1x_2x_3+q^2y_1x_2y_3+q^2y_1y_2x_3+q^3y_1y_2y_3 \qquad (3)$$

$$(z_1.z_2).z_3= [(x_1 +qy_1).(x_2+qy_2)](x_3 +qy_3)$$

$$=[x_1x_2+qx_1y_2 +qy_1x_2 +q^2y_1y_2](x_3 +qy_3)$$

$$=x_1x_2x_3+x_1qx_2y_3 + x_1qy_2x_3 + x_1q^2y_2y_3+qy_1x_2x_3+q^2y_1x_2y_3+q^2y_1y_2x_3+q^3y_1y_2y_3 \qquad (4)$$

dir.(3) ve (4) eşitliklerin sağ tarafları gözönüne alındığında

$$z_1 (z_2z_3) =(z_1z_2)z_3$$

olduğu görülür.

H_4) Her $z_1, z_2, z_3 \epsilon C_q$ için $z_1(z_2+z_3) = z_1z_2+z_1z_3$ olduğunu gösterelim.

$(x_1 + qy_1)[x_2+x_3+q(y_2+y_3 = x_1(x_2 + x_3)+qx_1(y_2+y_3) + qy_1(x_2+x_3)+q^2y_1(y_2+y_3)$

$= x_1x_2+x_1x_3+q[x_1y_2+x_1y_3+y_1x_2 + y_1x_3] + (A+2Bq)(y_1y_2+y_1y_3)$

$= x_1x_2+x_1x_3+q[x_1y_2+x_1y_3+y_1x_2+y_1x_3]+A[y_1y_2 + y_1y_3] + q(2By_1y_2 + 2By_1y_3)$

$= x_1x_2 + x_1x_3 + Ay_1y_2 + Ay_1y_3 + q[x_1y_2+x_1y_3+y_1x_2+y_1x_3+2By_1y_2+2By_1y_3]$

$= x_1x_2+Ay_1y_2 + 2By_1y_2q+x_1x_3+Ay_1y_3+2By_1+q(x_1y_2+y_1x_2) + q(x_1y_3+y_1x_3)$

$= x_1x_2+q(x_1y_2 + y_1x_2)+Ay_1y_2+2Bqy_1y_2 + x_1x_3+q(x_1y_3+y_1x_3)+Ay_1y_3+2Bqy_1y_3$

$= x_1x_2+q(x_1y_2+y_1x_2)+q^2y_1y_2 + x_1x_3+q(x_1y_3+y_1x_3)+q^2y_1y_3$

$=x_1(x_2+qy_2)+y_1q(x_2+qy_2) + x_1(x_3+qy_3)+qy_1(x_3+qy_3)$

$=(x_1+qy_1)(x_2+qy_2)+(x_1+qy_1)(x_3+qy_3)$

$=z_1.z_2+z_1.z_3$

bulunur.

H_5) Her $z \epsilon C_q$ için $z\, z_1 = z$ olacak şekilde $z_1 \epsilon C_q$ olduğunu gösterelim.

$z=x+qy$ ve $z_1 = x_1+qy_1$ olmak üzere

$$z\, z_1 = z$$

$$(x+qy)(x_1+qy_1)=x+qy$$

$$xx_1+qxy_1+qyx_1+q^2yy_1=x+qy$$

$$xx_1 + Ayy_1 + q(xy_1 + yx_1 + 2B\, yy_1)=x+qy$$

olup

$$xx_1+Ayy_1=x$$

$$xy_1+yx_1+2Byy_1=y$$

bu iki eşitlikten x_1=1 ve y_1=0 elde ederiz. Yani;

$$z_1=x_1+qy_1=1+q0=1$$

dir.

Teorem 3.1.2. Genel formu $C_q=\{z=x+qy \mid x,y\in\mathbb{R}, q^2=A+q(2B), q\notin\mathbb{R}\}$ kompleks tipteki sayılar aşağıdaki üç tipten birine izomorftur.

i) $B^2+A<0$ ise $q^2=-1$ doğal kompleks uzay

ii) $B^2+A=0$ ise $q^2=0$ dual kompleks uzay

iii) $B^2+A>0$ ise $q^2=1$ hiperbolik kompleks uzay

Tanım 3.1.1. $\mathbb{R}^2$ üzerinde

$$g_0:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$

$$(v,w)\to g_0(v,w)=v_1w_1-v_2w_2$$

biçiminde tanımlanan fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur. Tanımlanan bu iç çarpım yardımıyla elde edilen

$$D(u;\boldsymbol{\varepsilon})=\{v\in R^2 \mid d_E(u,v)<\boldsymbol{\varepsilon} \text{ ve } g_0(u,v)<0\}\cup\{u\}$$

sınıfı $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir topoloji için bir bazdır. Burada d_E öklid metriği olmak üzere

$$B=\{D(u,\boldsymbol{\varepsilon}) \mid u\in\mathbb{R}^2, \boldsymbol{\varepsilon}>0\}$$

dir.

Tanım 3.1.2. Bir $z=x+qy\in C_q$ elemanının eşleniği $(x+2By)-qy$ şeklinde tanımlanır ve $\bar{z}$ ile gösterilir.

Herhangi bir $z=x+qy\in C_q$ kompleks tipte sayısı ile $\mathbb{R}^2$de bir tek (x,y) ikilisi karşılık getirilebilir.Böylece C_q ile $\mathbb{R}^2$arasında birebir bir eşleme elde edilir.Yani C_q ile

$\mathbb{R}^2$ özdeşleştirilebilir. Şimdi bu özdeşleştirmeyi kullanarak $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir iç çarpım fonksiyonu veren aşağıdaki teoremi ifade edelim.

Teorem 3.1.3. $v=(v_1,v_2)$ ve $w=(w_1,w_2)\in\mathbb{R}^2$ vektörleri ile $q^2=A+q(2B)$ ve $q\notin\mathbb{R}$ olmak üzere v_1+qv_2ve w_1+w_2q özdeşlemesi gözönüne alınarak $\mathbb{R}^2$ üzerinde

$$g: \mathbb{R}^2 \text{ x } \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(v,w)\rightarrow g(v,w)=\frac{1}{2}[v\bar{w}+\bar{v}w]$$

biçiminde tanımlı fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur. Bu dönüşüm

$$g(v,w)=v_1w_1+B(v_1w_2+v_2w_1)-Av_2w_2 \qquad (5)$$

biçiminde de ifade edilebilir.

Bu son ifadede B=0 ve A=1 alınırsa Naber'in iç çarpımı elde edilir.

İspat:

Simetri özelliği: Her $v,w \in R^2$ için $g(v,w)=g(w,v)$ olduğunu gösterelim.

$v=v_1+qv_2$ ve $w=w_1+qw_2q$ sayılarının eşlenikleri sırasıyla $\bar{v}=(v_1+2Bv_2)-qv_2$ve $\bar{w}=(w_1+2Bw_2)-qw_2$ olduğundan

$$g(v,w)=\frac{1}{2}[v.\bar{w}+\bar{v}w]$$

$$=\frac{1}{2}[(v_1+qv_2)(w_1+2Bw_2-qw_2)+(v_1+2Bv_2-qv_2)(w_1+qw_2)]$$

$$=\frac{1}{2}[v_1w_1+2Bv_1w_2-qv_1w_2+qv_2w_1+2Bqw_2v_2-q^2v_2w_2+v_1w_1+qv_1w_2+2Bv_2w_1$$

$$+2Bqv_2w_2-qv_2w_1-q^2v_2w_2]$$

$$=\frac{1}{2}[w_1v_1+2Bw_2v_1-qw_2v_1+qw_1v_2+2Bqw_2v_2$$

$$-q^2w_2v_2+w_1v_1+qw_2v_1+2Bw_1v_2+2Bqw_2v_2-qw_1v_2-q^2w_2v_2]$$

$=\frac{1}{2}[w_1(v_1+qv_2)+2Bw_2(v_1+qv_2)–qw_2(v_1+qv_2)+v_1(w_1+qw_2)$

$+2Bv_2(w_1+qw_2)–qv_2(w_1+qw_2)$

$=\frac{1}{2}[(w_1+2Bw_2–qw_2)(v_1+qv_2)+(v_1+2Bv_2–qv_2)(w_1+qw_2)$

$=\frac{1}{2}[\bar{w}.v+\bar{v}.w]$

$=g(w,v)$

dır.

Bilineerlik özelliği: Her $v=(v_1,v_2),w=(w_1,w_2)\epsilon\ \mathbb{R}^2$ ve her $c\epsilon\mathbb{R}$ için

$g(v+w,z)=(v_1+w_1)z_1+B((v_1+w_1)z_2+(v_2+w_2)z_1)–A(w_2+v_2)z_2$

$=v_1z_1+w_1z_1+Bv_1z_2+Bw_1z_2+Bv_2z_1+Bw_2z_1-Aw_2z_2–Av_2z_2$

$=v_1z_1+B(v_1z_2+v_2z_1)–Av_2z_2+w_1z_1+B(w_1z_2+w_2z_1)–Aw_2z_2$

$=g(v,z)+g(w,z)$

ve

$g(c.v,w) = cv_1w_1 +B(cv_1w_2 +cv_2w_1) –Acv_2w_2$

$=c[v_1w_1 +B(v_1w_2 +v_2w_1)-Av_2w_2]$

$=cg(v,w)$

olduğundan g bilineerdir.

Nondejenerelik: Her $w\ \epsilon\ \mathbb{R}^2$ için $g(v,w)=0$ ise $v=0$ olduğunu gösterelim. w yerine sırasıyla $e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1)$ alınırsa

$v_1+Bv_2=0$

$Bv_1-Av_2=0$

homojen lineer denklem sistemi elde edilir. Bu lineer denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı $B^2 + A$ olup $B^2 + A \neq 0$ olduğundan denklem sisteminin sadece $v_1 = v_2 = 0$ çözümü vardır. Bu ise göstermek istediğimizdir. Sonuç olarak g bir iç çarpım fonksiyonudur.

$B^2 + A = 0$ olması durumunda ise g bir simetrik bilineer formdur.

3.2. $\mathbb{R}^2$ de g den İndirgenen Geometri

Lemma 3.2.1. Yukarıda tanımlanan g iç çarpım fonksiyonunun $B^2 + A > 0$ ise indeksi 1, $B^2 + A < 0$ ise indeksi 0 dır.

İspat:

(i) $B^2 + A > 0$ olsun. $e_1 = (1,0)$, $e_2 = \left(\frac{B}{\sqrt{B^2+A}}, \frac{-1}{\sqrt{B^2+A}}\right) \epsilon \mathrm{R}^2$ şeklinde alalım. $\{e_1, e_2\}$ kümesinin lineer bağımsız olduğu açıktır.

$$g(e_1, e_2) = 0\ ,\ g(e_1, e_1) = 1,\ g(e_2, e_2) = -1$$

olduğundan g nin indeksi 1 dir.

(ii) $B^2 + A < 0$ olsun. $e_1 = (1,0)$, $e_2 = \left(\frac{B}{\sqrt{B^2+A}}, \frac{-1}{\sqrt{B^2+A}}\right)$ alalım.

$$g(e_1, e_2) = 0,\ g(e_1, e_1) = 1, g(e_2, e_2) = 1$$

olduğundan g nin indeksi 0 dır.

Çalışmamın bundan sonraki kısmında $B^2 + A > 0$ olmak üzere g iç çarpımı g^* ile göstereceğiz.

Tanım3.2.1. Bir $x \in \mathbb{R}^2$ vektörü için $g^*(x,x)=0$ ise x vektörüne null vektördür denir. Ayrıca bir $x_0 \in \mathbb{R}^2$ noktasındaki null koni $C_N(x_0)$ ile gösterilir ve $Q^*(x)=g^*(x,x)$ olmak üzere

$$C_N(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid Q^*(x-x_0) = 0\}$$

biçiminde tanımlanır.

Bir $x \in C_N(x_0)$ ve $x \neq x_0$ için $R_{x_0,x}$ kümesini tanımlayalım.

$$Rx_{0,}x = \{y=x_0+t(x-x_0), t \in R\}$$

kümesi x_0 noktasından geçen ve doğrultmanı $(x-x_0)$ olan bir doğrudur. Eğer;

$Q^*(x) > 0$ ise x spacelike ,

$Q^*(x) < 0$ ise x timelike vektördür.

Örneğin; $x=(1,1) \neq (0,0)$ olarak alınırsa $g^*(x,x)=Q^*(x) = 1^2-1^2 = 0$ ise x null vektördür.

$x=(2,1)$ olarak alınırsa $Q^*(x)=g^*(x,x) = 2^2-1^2 = 3 > 0$ olup x spacelike vektördür.

$x=(1,2)$ alırsak $Q^*(x)=g^*(x,x)=1^2-2^2=-3<0$ olup x timelike vektördür.

Teorem 3.2.1. $\mathbb{R}^2$de x ve y sıfırdan farklı iki null vektör olsun. Bu durumda x ve y vektörlerinin g^* ortogonal olması için gerek ve yeter şart paralel olmasıdır.

İspat: $x=(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ sıfırdan farklı null vektör için $x_1 \neq 0$ ve $x_2 \neq 0$ dır. Gerçekten

$g(x,x)=0$ ise

$$\Rightarrow \quad x_1^2 + 2Bx_1x_2 - Ax_2^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1^2+2Bx_1x_2+B^2x^2-B^2x^2-Ax_2^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x_1+Bx_2)^2 = (B^2 + A)x_2^2$$

dır.

x_2 =0 ise x_1 +Bx_2 =0 dır. Buradan x_1 =0 olur. Dolayısıyla x =(0,0) olur ki çelişkidir.

x ve y bir null vektör olduğundan

$$(x_1 + Bx_2)^2 = (B^2 + A)x_2^2 \tag{6}$$

$$(y_1 + By_2)^2 = (B^2 + A)y_2^2 \tag{7}$$

yazılabilir. Ayrıca

$$g(x,y)=0$$

olduğundan

$$x_1y_1 + B(x_1y_2 + x_2y_1) - Ax_2y_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1y_1 + B(x_1y_2 + x_2y_1) + B^2x_2y_2 - B^2x_2y_2 - Ax_2y_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x_1 + Bx_2)(y_1 + By_2) - (B^2 + A)x_2y_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x_1 + Bx_2)(y_1 + By_2) = (B^2 + A)x_2y_2 \tag{8}$$

(8) in her iki yanını $(B^2 + A)x_2^2$ ifadesine bölelim.

$$\frac{(x_1+Bx_2)(y_1+By_2)}{(B^2+A)x_2^2} = \frac{(B^2+A)x_2y_2}{(B^2+A)x_2^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(x_1+Bx_2)(y_1+By_2)}{(B^2+A)x_2^2} = \frac{y_2}{x_2}$$

(6) dan dolayı

$$\Rightarrow \quad \frac{(x_1+Bx_2)(y_1+By_2)}{(x_1+Bx_2)^2} = \frac{y_2}{x_2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(y_1+By_2)}{x_1+Bx_2} = \frac{y_2}{x_2}$$

$$\Rightarrow \quad y_1x_2 + By_2x_2 = x_1y_2 + Bx_2y_2$$

$$\Rightarrow \quad y_1x_2 = x_1y_2$$

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \lambda$$

buradan $y_1 = \lambda x_1$ ve $y_2 = \lambda x_2$ dir.Öyleyse

$y=(y_1,y_2) = \lambda(x_1, x_2)$ olup x ve y paraleldir.

Tersi için; x ve y sıfırdan farklı null vektörler olsun. Bu durumda $x = ky$ olacak şekilde $k \in \mathbb{R}$ vardır. Yani,

$$x_1 = ky_1,\ x_2 = ky_2$$

dir.

$$\begin{aligned} g(x,y) &= x_1 y_1 + B(x_1 y_2 + x_2 y_1) - A x_2 y_2 \\ &= k y_1 y_1 + B(k y_1 y_2 + k y_2 y_1) - A k y_2 y_2 \\ &= k(y_1^2 + 2B y_1 y_2 - A y_2^2) \\ &= k0 \end{aligned}$$

y null vektör olduğundan

$$=0$$

buradan x ve y ortogonaldir.

Teorem 3.2.2. Her $x, x_0 \in \mathbb{R}^2$ vektörü için $x \neq x_0$ve $Q^*(x-x_0)= 0$ ise

$$R_{x_0,x} = C_N(x_0) \cap C_N(x)$$

dir.

İspat: İspatı yapmak için $z \in R_{x_0,x}$ alalım. Buradan z sayıları $R_{x_0,x}$ tanımı gereği x_0 noktasından geçen ve doğrultmanı ($x-x_0$) olan doğru üzerinde bir noktadır. Buradan

$$z= x_0 + t(x-x_0)$$

olacak şekilde bir $t \in \mathbb{R}$ reel sayısı vardır. Eşitliğin her iki tarafını x_0 ın toplamaya göre tersiyle toplarsak

$$z\text{-}x_0 = t(x\text{-}x_0)$$

elde ederiz.

$Q^*(x)=g^*(x,x)$ olduğundan

$$Q^*(z\text{-}x_0)= g^*(z\text{-}x_0,z\text{-}x_0)$$

$$= g^*(t(x\text{-}x_0),t(x\text{-}x_0))$$

$$= t^2g^*((x\text{-}x_0),(x\text{-}x_0)) \qquad \text{(bilineerlikten)}$$

$$= t^2Q^*(x\text{-}x_0)$$

$Q^*(x\text{-}x_0)= 0$ olduğundan

$$Q^*(z\text{-}x_0)= 0$$

dır. Böylece $z\epsilon C_N(x_0)$ dır.

Ayrıca $Q(x\text{-}x_0) =0$ ise $R_{x,x_0}= R_{x_0,x}$ olduğundan $z\epsilon\ C_N(x\ )$ dir.

Öyleyse $z\epsilon\ C_N(x_0)\cap C_N(x)$ dir. Buradan

$$R_{x_0,x} \subseteq C_N(x_0)\cap C_N(x) \qquad (9)$$

dır. Şimdi de

$$C_N(x_0)\cap C_N(x)\subseteq R_{x_0,x}$$

olduğunu gösterelim. $z\epsilon\ C_N(x_0)\cap C_N(x)$ olsun. Bu durumda $z\text{-}x$, $z\text{-}x_0$, $x_0 - x$ vektörleri null vektörlerdir.

$$z\text{-}x_0= (z\text{-}x)-(x_0 - x)$$

şeklinde ifade edersek

$$Q^*(z\text{-}x_0)=Q^*(z\text{-}x)\text{-}2g(z\text{-}x,x_0-x)+Q^*(x_0-x)$$

$$=0$$

dır.Buradan $Q^*(z-x)=0$ ve $Q^*(x_0-x)=0$ olduğundan

$$-2\,g^*(z-x,x_0-x)=0$$

$$\Rightarrow \qquad g^*(z-x,x_0-x)=0$$

dır.

$z\neq x$,$x\neq x_0$ için $z-x$ve x_0-x sıfırdan farklı null vektörlerdir. Teorem 3.1.4 gereğince bu vektörler paraleldir. Yani

$$z-x=t(x_0-x)$$

olacak şekilde $t\in\mathbb{R}$ vardır. Bu son ifade düzenlenirse ,

$$z=t(x_0-x)+x$$

biçiminde yazılır ki bu ise $z\in R_{x_0,x}$ olduğunu gösterir. Böylece

$$C_N(x_0)\cap C_N(x)\subseteq R_{x_0,x} \qquad (10)$$

olduğu gösterildi. (9) ve(10) ifadelerinden

$$R_{x_0,x}=C_N(x_0)\cap C_N(x)$$

dir.

Teorem 3.2.3. $v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$ bir timelike vektör ve $w=(w_1,w_2)\in\mathbb{R}^2$ bir timelike veya null vektör olsun. Bu durumda

i)$v_2w_2>0$ ise $g^*(v,w)<0$

veya

ii)$v_2w_2<0$ ise $g^*(v,w)>0$

dır.

İspat: v timelike vektör olsun. Bu durumda

$$g^*(v,v)<0$$

$$\Rightarrow \quad v_1^2 + 2Bv_1v_2 - Av_2^2<0$$

$$\Rightarrow \quad v_1^2 + 2Bv_1v_2<Av_2^2 \tag{11}$$

dir.

w timelike veya null vektör olsun. Bu durumda

$$g^*(w,w)\leq 0$$

$$\Rightarrow \quad w_1^2 + 2Bw_1w_2-Aw_2^2\leq 0$$

$$\Rightarrow \quad w_1^2 + 2Bw_1w_2\leq Aw_2^2 \tag{12}$$

dir.

(11) ve (12) eşitsizlikleri sırasıyla $B^2v_2^2$ve $B^2w_2^2$ ifadesi eklenirse

$$v_1^2+2Bv_1v_2+B^2v_2^2<Av_2^2+B^2v_2^2$$

ve

$$w_1^2+2Bw_1w_2+B^2w_2^2\leq Aw_2^2+B^2w_2^2$$

elde edilir. Buradan;

$$(v_1+Bv_2)^2<(B^2+A)v_2^2 \tag{13}$$

ve

$$(w_1+Bw_2)^2 \leq(B^2 +A)w_2^2 \tag{14}$$

bulunur. (13) ve (14) ifadeleri taraf tarafa çarpılırsa;

$$(v_1+Bv_2)^2(w_1+Bw_2)^2<(B^2+A)^2v_2^2w_2^2$$

olur. Her iki tarafın karekökü alındığında;

$$|(v_1+Bv_2)(w_1+Bw_2)|<(B^2+A)|v_2.w_2|$$

dir.

Eğer $v_2w_2>0$ ise

$$(v_1+Bv_2)(w_1+Bw_2)<|(v_1+Bv_2)(w_1+Bw_2)|$$

dir. Yani

$$(v_1+Bv_2)(w_1+Bw_2)<(B^2+A)v_2w_2$$

$$\Rightarrow \quad v_1 w_1+B(v_1 w_2+v_2 w_1)-A v_2 w_2<0$$

$$\Rightarrow \quad g^*(v,w)<0$$

dir.

Eğer $v_2w_2<0$ ise

$$-(v_1+Bv_2)(w_1+Bw_2)<|(v_1+Bv_2)(w_1+Bw_2)|$$

dir. Yani

$$-(v_1+Bv_2)(w_1+Bw_2)<-(B^2+A)v_2w_2$$

$$\Rightarrow \quad v_1 w_1+B(v_1 w_2+v_2 w_1)-A v_2 w_2>0$$

$$\Rightarrow \quad g^*(v,w)>0$$

dir.

Sonuç 3.2.1. $\mathbb{R}^2$ de sıfırdan farklı bir vektör bir timelike vektöre dik ise bu vektör spacelike vektördür.

İspat: v bir timelike vektör olsun. Bu durumda $g^*(v,v)<0$ dır. Buradan

$$v_1^2+2Bv_1v_2-Av_2^2<0$$

dir. Her iki tarafa $B^2v_2^2$ eklenirse

$$v_1^2+2Bv_1v_2+B^2v_2^2<Av_2^2+B^2v_2^2$$

$$\Rightarrow \qquad (v_1+Bv_2)^2<(B^2+A)v_2^2 \tag{15}$$

olur.Şimdi $g^*(v,w)=0$ ise w nın spacelike olduğunu gösterelim.

$$0=(v_1+Bv_2)(w_1+Bw_2)-(B^2+A)v_2w_2$$

olup bu son ifade düzenlenirse

$$(B^2+A)v_2w_2=(v_1+Bv_2)(w_1+Bw_2) \tag{16}$$

dir. (15) ifadesinin her iki tarafı $(w_1+Bw_2)^2$ ile çarpılırsa

$$(w_1+Bw_2)^2(v_1+Bv_2)^2<(B^2+A)v_2^2(w_1+Bw_2)^2$$

bulunur. Son eşitsizliğin her iki tarafın karekökünü alınırsa

$$(w_1+Bw_2)(v_1+Bv_2)<\sqrt{(B^2+A)}v_2(w_1+Bw_2)$$

dir. Buradan (16) den

$$\sqrt{(B^2+A)}v_2(w_1+Bw_2)>(B^2+A)v_2w_2$$

dır.Her iki tarafın karesini alırsak

$$(B^2+A)v_2^2(w_1+Bw_2)^2>(B^2+A)^2v_2^2w_2^2$$

olur.Her iki tarafı$(B^2+A)v_2^2$ ye bölersek;

$$(w_1+Bw_2)^2>(B^2+A).w_2^2$$

elde ederiz. Buradan w spacelike vektördür.

Tanım 3.2.2. $\mathbb{R}^2$ deki bütün timelike vektörlerin kümesini ρ ile gösterelim. ρ üzerinde $\sim$ bağıntısı

$$\text{her } v,w \epsilon \tau \text{ için } v \sim w \Leftrightarrow g^*(v,w) < 0$$

biçiminde tanımlansın.

Teorem 3.2.4. ρ üzerinde tanımlanan ~ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. "~" bağıntısı ρ yu iki denklik sınıfına ayırır.

ρ^+ve ρ^-ile gösterecek olursak $\rho^+ \cap \rho^- = 0$ ve $\rho^+ \cup \rho^- = \rho$ dir.

Şimdi ρ nun bir denklik bağıntısı olduğunu gösterelim.

İspat:

Yansıma: Her $v \epsilon \rho$ için v bir timelike vektör olduğundan $g^*(v,v) < 0$ dir.Bu ise v~v olduğunu gösterir.

Geçişme:Her $v,w,z \epsilon \rho$ için $v \sim w$ ve $w \sim z$ olsun. Bu durumda $g^*(v,w) < 0$ ve $g^*(w,z) < 0$ dır. Böylece Teorem 3.2.3 den

$$v_2 w_2 > 0$$

ve

$$w_2 z_2 > 0$$

dır.Yukarıdaki eşitsizlikler taraf tarafa çarpıldığında

$$w_2^2 v_2 z_2 > 0$$

bulunur.Bu ise Teorem 3.2.3 gereğince

$$g^*(v,z) < 0$$

olduğunu gösterir. Sonuç olarak v~z dır.

Simetri: Her $v,w \epsilon \tau$ için $v \sim w$ ise $g^*(v,w) < 0$ dir. g^* simetrik olduğundan $g^*(w,v) < 0$ dır. Bu ise $w \sim v$ olduğunu ifade eder.

Tanım 3.2.3. Her x_0 timelike vektörü için x_0 noktasındaki time koni,future time koni ve past time koni sırasıyla

$$C_T(x_0)=\{\, x\epsilon\ \mathbb{R}^2\ |Q^*(x-x_0)<0\ \},$$

$$C_T^+(x_0)=C_T(x_0)\cap \rho^+\ ,$$

$$C_T^-(x_0)=C_T(x_0)\cap \rho^-$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca bir $x\in\rho$ timelike vektörünün uzunluğu

$$\rho_*(x)=\sqrt{-Q^*(x)} \tag{17}$$

biçiminde tanımlanır. $\mathbb{R}^2$ nin, $Q^*(x-x_0)<0$ olmak üzere

$$\{x_0+t(x-x_0)\ |\ t\epsilon\mathbb{R}\}$$

alt kümesi bir timelike doğru olarak adlandırılır.

Teorem 3.2.5. (Ters Schwarz Eşitsizliği) Her v ve w timelike vektörleri için

$$g^*(v,w)^2\geq [g^*(v,v).g^*(w,w)\ ]^2$$

dir.

İspat: v ve w timelike vektörleri için $g^*(v,v)<0$ ve $g^*(w,w)<0$ dir. Ayrıca Teorem 3.2.3 den

$$v_2.w_2>0 \text{ ise } g^*(v,w)<0$$

veya

$$v_2.w_2<0 \text{ ise } g^*(v,w)>0$$

dir. $u=av-bw$, $a=g^*(v,w)$ ve $b=g^*(v,v)$ olarak alınırsa

$$g^*(u,v)=g^*(av-bw,v)$$

$=ag^*(v,v) - bg^*(w,v)$

$=g^*(v,v)\, g^*(v,w) - g^*(v,v)\, g^*(w,v)$

$=0$

elde edilir. v timelike vektör olduğundan u ya spacelike vektördür ya da sıfırdır. Buna göre

$$g^*(u,u) \geq 0$$

olduğu açıktır. Ayrıca

$$g^*(u,u) = g^*(av-bw, av-bw)$$

$$= a^2\, g^*(v,v) - 2ba.g^*(v,w) + b^2 g^*(w,w)$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$0 \leq -2abg^*(u,w) + a^2.g^*(v,v) + b^2 g^*(w,w)$$

$$\Rightarrow \quad 2abg^*(v,w) \leq a^2 g^*(v,v) + b^2 g^*(w,w)$$

$$\Rightarrow \quad 2g^*(v,w)^2.g^*(v,v) \leq g^*(v,w)^2\, g^*(v,v) + g^*(v,v)^2\, g^*(w,w)$$

$$\Rightarrow \quad g^*(v,v)[2g^*(v,w)^2] \leq g^*(v,v)[g^*(v,w)^2 + g^*(v,v)\, g^*(w,w)]$$

ifadesi elde edilir. v timelike vektör olduğundan

$$2g^*(v,w)^2 \geq g^*(v,w)^2 + g^*(v,v).g^*(w,w)$$

$$\Rightarrow \quad g^*(v,w)^2 \geq g^*(v,v).\, g^*(w,w)$$

$$\Rightarrow \quad |g^*(v,w)^2| \geq (\sqrt{g*(v,v)})^2.(\sqrt{g*(w,w)})^2$$

yazılabilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.2.6. (Ters Çevrilmiş Üçgen Eşitsizliği) v,w timelike vektörler ve $g^*(v,w)<0$ olsun. Bu durumda

$$\rho_*(v,w) \geq \rho_*(v) + \rho_*(w)$$

dır. Burada eşitlik, *v* ve *w* lineer bağımlıysa geçerlidir.

İspat: *v*,*w* timelike vektörler olsun . Teorem3.2.2 den

$$g^*(v,w)^2 \geq g^*(v,v)\, g^*(w,w)$$

$$= [-g^*(v,v)][-g^*(w,w)]$$

yazılabilir. Buradan

$$|g^*(v,w)| \geq \sqrt{-g^*(v,v)}\sqrt{-g^*(w,w)}$$

dır. $g^*(v,w) < 0$ olduğu gözönüne alındığında

$$g^*(v,w) \leq -\sqrt{-g^*(v,v)}\sqrt{-g^*(w,w)}$$

olup

$$-2g^*(v,w) \geq 2\sqrt{-g^*(v,v)}\sqrt{-g^*(w,w)} \qquad (18)$$

dir. Ayrıca

$$g^*(v+w,v+w) = g^*(v,v) + g^*(w,w) + 2g^*(v,w) < 0 \qquad (19)$$

olduğundan $v+w$ timelike vektördür. (19) ifadesi -1 ile çarpılırsa

$$-g^*(v+w,v+w) = -g^*(v,v) - 2g^*(v,w) - g^*(w,w) > 0$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte (18) ifadesi kullanılırsa

$$-g^*(v+w,v+w) \geq -g^*(v,v) + 2\sqrt{-g^*(v,v)}\sqrt{-g^*(w,w)} - g^*(w,w)$$

$$\Rightarrow \quad -g^*(v+w,v+w) \geq \left(\sqrt{-g^*(v,v)}^{\,2} + \sqrt{-g^*(w,w)}^{\,2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{-g^*(v+w,v+w)} \geq \sqrt{\left(\sqrt{-g^*(v,v)^2} + \sqrt{-g^*(w,w)^2}\right.}^{\,2}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{-Q^*(v+w)} \geq \sqrt{-Q^*(v,v)} + \sqrt{-Q^*(w,w)}$$

$$\Rightarrow \quad \rho^*(v+w) \geq \rho^*(v) + \rho^*(w)$$

olur ki bu da ispatı tamamlar.

Tanım3.2.4. T, I da bir açık aralık olsun. $T \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\alpha : T \to \mathbb{R}^2$$

eğrisi verilsin. Her $s \epsilon T$ için

i) $g^*(\alpha'(s), \alpha'(s)) > 0$ ise α spacelike

ii) $g^*(\alpha'(s), \alpha'(s)) < 0$ ise α timelike

iii) $g^*(\alpha'(s), \alpha'(s)) = 0$ ise α null

eğridir. $I=[a,b]$ olmak üzere eğrinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki uzunluğu

$$L^*(\alpha) = \int_a^b \left[\left|g^*(\alpha'(s), \alpha'(s))\right|\right]^{\frac{1}{2}} ds$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.2.7. p ve q $\mathbb{R}^2$ de iki nokta olsun. $p-q$ vektörünün timelike ve future-directed olması için gerek ve yeter şart $\alpha(a)=p$ ve $\alpha(b)=q$ olacak şekilde bir $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ timelike ve future-directed düzgün eğrisi vardır.

Tanım 3.2.5. $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ bir eğri olmak üzere $I=[a,b]$ aralığında tanımlı doğru zaman fonksiyonu

$$\tau^*(x) = \int_a^t \left[\left|g^*(\alpha'(u), \alpha'(u))\right|\right]^{1/2} du, \quad t \epsilon I$$

şeklinde tanımlanır.

$Q^*(x\text{-}x_0)>0$ olacak şekilde $x, x_0 \in \mathbb{R}^2$ için düzgün zaman fonksiyonu

$$S_*(x\text{-}x_0)=\sqrt{Q^*(x-x_0)}$$

biçiminde tanımlanır.

Teorem 3.2.8. x, x_0, x_1 noktaları $\mathbb{R}^2$ de $x_1 - x_0$ ve $x_1 - x$ spacelike vektörler ve $x\text{-}x_0$, $x_1 - x$ vektörleri de g^* ortagonal olacak şekilde seçilsin. Bu durumda

$$S_*^2(x_1\text{-}x_0)= S_*^2(x_1 - x) - \rho_*^2(x\text{-}x_0)$$

dır.

İspat: x, x_0, x_1 noktaları $\mathbb{R}^2$ de $x_1 - x_0$ ve $x_1 - x$ spacelike vektörler ve $x\text{-}x_0$, $x_1 - x$ vektörleri de g^* ortagonal olacak şekilde seçilsin. S_* ın tanımından

$$S_*^2(x_1\text{-}x_0)=Q^*(x_1 - x_0)=g^*(x_1\text{-}x_0, x_1\text{-}x_0) \tag{20}$$

dir. Benzer şekilde

$$S_*^2(x_1 - x)=g^*(x_1 - x, x_1 - x) \tag{21}$$

yazılabilir. Ayrıca (15) den

$$\begin{aligned}\rho_*^2(x\text{-}x_0)&=-Q^*(x\text{-}x_0)\\ &= g^*(x\text{-}x_0, x\text{-}x_0)\end{aligned} \tag{22}$$

dir. (21) ifadesinde g^*ın birinci bileşenine x eklenip çıkarılır ve bilineerlik kullanıldığında

$$\begin{aligned}S_*^2(x_1\text{-}x_0) &= g^*(x_1\text{-}x_0 - x + x, x_1\text{-}x_0)\\ &= g^*(x_1 - x, x_1\text{-}x_0)+g^*(x\text{-}x_0, x_1\text{-}x_0)\\ &= g^*(x_1 - x, x_1\text{-}x_0+x\text{-}x)+g^*(x\text{-}x_0, x_1\text{-}x_0+x\text{-}x)\\ &= g^*(x_1 - x, x_1\text{-}x)+g^*(x_1 - x, x\text{-}x_0)+g^*(x\text{-}x_0, x\text{-}x_0)+g^*(x\text{-}x_0, x_1\text{-}x)\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.(21),(22) ifadeleri ve kabulümüz göz önüne alındığında

$$S_*^2(x_1\text{-}x_0)= g^*(x_1 – x, x_1\text{-}x)+g^*(x\text{-}x_0, x\text{-}x_0)$$

$$= S_*^2(x_1 – x)\text{-} \rho_*^2(x\text{-}x_0)$$

dir.

3.3.*g* nin $\mathbb{R}^2$ de Tanımladığı Topolojisi

Bu bölümde, g iç çarpım fonksiyonu kullanılarak $\mathbb{R}^2$ üzerindeki topolojik yapı incelenecektir. Bunun için

$$D_-(x;\varepsilon) =\{ y\in \mathbb{R}^2; d_E(x,y) <\varepsilon \text{ ve } g^*(y\text{-}x,y\text{-}x) <0 \}\cup\{x\} ,$$

$$D_+(x;\varepsilon) =\{ y\in \mathbb{R}^2 ; d_E(x,y) <\varepsilon \text{ ve } g^*(y\text{-}x,y\text{-}x) >0 \}\cup\{x\}$$

olmak üzere

$$B_-=\{D_-(x;\varepsilon); x\in\mathbb{R}^2, \varepsilon>0 \}\cup\{\emptyset\},$$

$$B_+=\{D_+(x;\varepsilon); x\in \mathbb{R}^2, \varepsilon>0 \}\cup\{\emptyset\}$$

ailelerini göz önüne alalım. B_-ve B_+aileleri $\mathbb{R}^2$ üzerinde topoloji için birer bazdır. B_-ve B_+den elde edilen topolojiler sırasıyla τ_+ ile τ_- gösterilir. g nin tanımı dikkate alındığında B^2+A nın

1) $B^2+A>0$

2) $B^2+A<0$

3) $B^2+A=0$

durumları söz konusudur. Şimdi birinci durumu ele alalım.

Lemma 3.3.1. B_-ve B_+ daha önce tanımlanan topoloji için birer bazdır.

İspat: Öncelikle B_{-}nin bir baz olduğunu gösterelim. B_{+}nında benzer şekilde bir baz olduğu gösterilebilir.

Bunun için;

1) $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{B \in B_{-}} B$;

2) Her B_1, $B_2 \in B_{-}$ için $B_1 \cap B_2 \in B_{-}$

olduğunu göstermek yeterlidir.

1) B_{-} nin tanımından aşikardır.

2) B_1, $B_2 \in B_{-}$ise $B_1 = D_{-}(x_1;\varepsilon_1)$ ve $B_2 = D_{-}(x_2;\varepsilon_2)$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$ ve $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+$ reel sayıları vardır. $x_1 = x_2$ ise ya $B_1 \cap B_2 = B_1$ ya da $B_1 \cap B_2 = B_2$ olacağından $B_1 \cap B_2 \in B_{-}$dir. Şimdi $x_1 \neq x_2$ durumunu ele alalım. Bu durumda $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ veya $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ dir. $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ ise $B_1 \cap B_2 \in B_{-}$ olduğu açıktır. $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ olsun. i=1,2 için

$$P_{x_i} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d_E(x, x_i) < \varepsilon_i\} \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid g^*(x - x_i, x - x_i) < 0\}$$

$\mathbb{R}^2$ de Öklid topolojisine göre açık kümelerdir ve

$$B_1 = P_{x_1} \cup \{x_1\} \text{ ve } B_2 = P_{x_2} \cup \{x_2\}$$

biçiminde yazılabilir. Buradan

$$B_1 \cap B_2 = (P_{x_1} \cap P_{x_2}) \cup (\{x_1\} \cap P_{x_2}) \cup (\{x_2\} \cap P_{x_1})$$

dir. Şimdi bir $x \in P_{x_1} \cap P_{x_2}$ noktasını alalım. $P_{x_1} \cap P_{x_2}$ boştan farklı bir açık küme olduğundan,

$$C = \{y \in \mathrm{R}^2 \mid d_E(x, y) < r_x\} \subseteq P_{x_1} \cap P_{x_2}$$

olacak şekilde bir $r_x > 0$ reel sayısı vardır. Ayrıca

$$A = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid g^*(x - y, x - y) < 0\}$$

şeklinde tanımlanırsa

$$D_{-}(x\,;r_x)=(A\cap C)\cup\{x\}\subseteq P_{x_1}\cap P_{x_2}$$

olup ve böylece

$$P_{x_1}\cap P_{x_2}=\bigcup_{x\in P_{x_1}\cap P_{x_2}} D_{-}(x;r_x)$$

ifadesi elde edilir.

Şimdi $x_1\notin P_{x_2}$ ve $x_2\notin P_{x_1}$ olsun. Bu durumda

$$B_1\cap B_2=P_{x_1}\cap P_{x_2}=\bigcup_{x\in P_{x_1}\cap P_{x_2}} D_{-}(x;r_x)$$

dir.

Şimdi de $x_1\in P_{x_2}$ ve $x_2\notin P_{x_1}$ alalım . P_{x_1} açık olduğundan $r_1<\varepsilon_1$ olacak şekilde en az bir ve r_1 pozitif sayısı için

$$C_1=\{x\in\mathbb{R}^2\,|\,d_E(x_1,x)<r_1\}\subseteq P_{x_2}$$

biçiminde bir C_1 kümesi tanımlanabilir. Buradan

$$D_{-}(x_1\,;r_1)=C_1\cap\{x\in\mathbb{R}^2\,|\,g^*(x-x_1,x-x_1)<0\}\subseteq P_{x_2}$$

ve

$$D_{-}(x_1\,;r_1)/\{x_1\}\subseteq P_{x_1}$$

elde edilir. Bu ise

$$D_{-}(x_1\,;r_1)/\{x_1\}\subseteq P_{x_1}\cap P_{x_2}$$

olduğunu gösterir. Sonuç olarak

$$B_1\cap B_2=P_{x_1}\cap P_{x_2}\cup\{x_1\}$$

$$=\bigcup_{x\in P_{x_1}\cap P_{x_2}} D_{-}(x_1;r_1)\cap D(x;r_x)$$

olarak bulunur. Şimdi $x_1\notin P_{x_2}$ ve $x_2\in P_{x_1}$ alalım.

$$r_2<\varepsilon_2 \text{ ve } C_2=\{x\in\mathbb{R}^2\,|\,d_E(x_2,x)<r_2\}\subseteq P_{x_1}$$

dir. Buradan anlaşılan

$$D_{-}(x_2;r_2)=C_2\cap\{x\epsilon\mathbb{R}^2;g^*(x-x_2,x-x_2)<0\}\subseteq P_{x_1}$$

dir.

$$D_{-}(x_2;r_2)/\{x_2\}\subseteq P_{x_2}$$

dir. Öyleyse

$$D_{-}(x_2;r_2)\cap D(x;r_x)$$

$$\Rightarrow\quad D_{-}(x_2;r_2)/\{x_2\}\subseteq P_{x_1}\cap P_{x_2}$$

dır. Sonuç olarak

$$B_1\cap B_2=P_{x_1}\cap P_{x_2}\cup\{x_2\}$$

$$=\bigcup_{x\epsilon\ P_{x_1}\cap P_{x_2}} D_{-}(x_2\,;r_2)\cap D(x,r_x)$$

olarak bulunur.

Teorem 3.3.1.

a) Eğer $B^2+A>0$ ise B_- ve B_+ bazlarından üretilmiş topolojiler sırasıyla τ_- ve τ_+ dır. Bu topolojiler Öklid topolojisinden daha incedir ve ayrılabilir, Hausdorffdur, bağlantılıdır fakat regüler uzay, yerel kompakt ve sayılabilir kompakt değildir.

b) τ_- topolojisine göre $\mathbb{R}^2$ nin homeomorfizm grubu g^* iç çarpımıyla üretilen Lorenz grup ile çakışır.

ii) $B^2+A<0$ ise $u=(x,y)$ olmak üzere

$$g(u,u)=x^2+2Bxy-Ay^2=(x+By)^2-y^2(B^2+A)\geq 0$$

dir. $g(u,u)=0$ olması için gerek ve yeter şart $(x+By)^2=0$ ve $y=0$ olmasıdır.Bu ise $x=y=0$ olmasını gerektirir.

Bu durumda τ_+ Öklid topolojisi ile çakışır.

iii)) $B^2+A=0$ ise $u=(x,y)$ olmak üzere

$g(u,u) = (x+By)^2 \geq 0$

dır. Bu durumda τ_+ topolojisindeki açık yuvarlar

$D_+(u;\varepsilon) = (\{v=(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid d_E(u,v) < \varepsilon\} \setminus \{w=(w_1,w_2) \mid (w_1-x) + B(w_2-y) = 0\}) \cup \{u\}$

biçimindedir. $D_+(u;\varepsilon)$ diskini ele alırsak u merkezli ε yarıçaplıdır. u nun dışında bir $-\frac{1}{B}$ eğimli bir çap bırakacağız.

Bu durumda timelike vektör yoktur fakat her $s \in I$ için

$\alpha : I \to \mathbb{R}^2$

$(\alpha_1'(s) + \beta B_1'(s)) > 0$ veya $\alpha_1'(s) + B\beta_1'(s) = 0$ olacak şekilde spacelike veya null eğri bulunabilir. Burada $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \beta_1(s))$, $\alpha'(s) = (\alpha_1'(s), \beta_1'(s))$ ve $\alpha_1\, \beta_1 : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonlardır. Böylece $I=[a,b]$ için bu eğrinin uzunluğu

$$L(\alpha) = \int_a^b [| \alpha_1'(s) + B\beta_1'(s)|]^{1/2} d_s$$

dir. Ayrıca τ_+ birinci sayılabilir,ayrılabilir ve Hausdorff uzayıdır.

Uyarı 1) $B^2 + A = 0$ olsun. $c \in \mathbb{R}$, $c>0$ ve $z, z_0 \in C_q$ için tanımlanan

$$f(z) = z + z_0$$

$$f(z) = cz$$

fonksiyonu birebir , örten ve süreklidir ve terside τ_+ topolojisinde süreklidir.

2) $B^2 + A$ nın üç durumuna göre de C_q üzerinde tanımlanan $z = t + qx \in C_q$

$$f(z) = \bar{z} = (t + 2Bx) + q(-x)$$

dönüşümü lineerdir, izomorfdur. Ayrıca 1 de tanımlanan iç çarpım düşünüldüğünde ortogonal bir dönüşümdür. Yani her $u, v \in C_q$ için

$$g(f(u), f(v)) = g(u,v))$$

dir. Eğer $A=B=0$ ise $c>0$ olmak üzere

$$f(z)=c\bar{z}$$

dönüşümü τ_+ topolojisine göre süreklidir.

Tanım 3.3.1. Bir $z=t+qx \in C_q$ kompleks tipteki sayısının eşleniği

$$\bar{z}=(t+2Bx)-qx$$

şeklinde tanımlanır.

z ve $\bar{z}$ çarpılırsa

$$z.\bar{z}=t^2+2Btx-Ax^2 \tag{23}$$

ifadesi elde edilir. Bununla birlikte

$$\widehat{D}=B^2+A$$

$$\frac{1}{C_+}=-B+\sqrt{\widehat{D}}$$

$$\frac{1}{C_-}=-B-\sqrt{\widehat{D}}$$

denirse

$$A=-\frac{1}{C_+C_-}$$

$$B=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{C_+}+\frac{1}{C_-}\right)$$

olduğu açıktır. Böylece (23) ifadesi

$$z\bar{z}=t^2+2Btx-Ax^2=\left(t-\frac{x}{C_+}\right)\left(t-\frac{x}{C_-}\right)\in\mathbb{R}$$

biçiminde yazılabilir.

Tanım 3.3.2. Bir $z=t+qx \in C_q$ kompleks tipteki sayının mutlak değeri $|z|_q$ ile gösterilir

$$|z|_q = \operatorname{sgn}(z\bar{z})\sqrt{|z\bar{z}|}$$

şeklinde tanımlanır. Dikkat edilecek olursa $|z|_q$ sayısı negatif de olabilir. Burada, $|\cdot|$, $\mathbb{R}$ deki klasik mutlak değer fonksiyonudur.

Bir $z \in C_q$ için

$$P(z)=||z|_q|=\sqrt{|z\bar{z}|}$$

değerine z nin normu denir.

Uyarı Yukarıdaki tanımlar göz önüne alınırsa,

$|z_1z_2|_q= |z_1|_q|z_2|_q$, $|z|_q =|\bar{z}|_q$

$p(z)\geq 0$, $p(z_1z_2)=p(z_1)p(z_2)$, $p(\bar{z})=p(z)$

$p(p(z))=p(z)$, $p(\frac{1}{z})=\frac{1}{p(z)}$

eşitliklerinin doğruluğu kolaylıkla gösterilebilir. Burada $z\bar{z} \neq 0$ olmak üzere $\frac{1}{z} =\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$ yazılabileceğinden $\frac{1}{z}$ ifadesi yine bir kompleks tipte sayıdır.

Örneğin;

1) $|z|_q = \operatorname{sgn}(z\bar{z})\sqrt{|z\bar{z}|}$ (kompleks tipteki sayıların çarpmaya göre değişme özelliği olduğundan)

$$= \operatorname{sgn}(\bar{z}\,z)\sqrt{|\bar{z}\,z|}=|\bar{z}|$$

2) $|z_1z_2|_q=\operatorname{sgn}(z_1z_2\,\overline{z_1z_2})\sqrt{|z_1z_2\,\overline{z_1z_2}|}$

$$= \operatorname{sgn}(z_1\overline{z_1})\sqrt{z_1\overline{z_1}}\ \operatorname{sgn}(z_2\overline{z_2})\sqrt{z_2\overline{z_2}}$$

$=|z_1|_q|z_2|_q$ dır.

Tanım 3.3.3. Açı kavramını tanımlayabilmek için öncelikle birim **eğri** olarak adlandırılan

$$U=\{\ z\epsilon C_q \mid p(z)=1\ \} =\{z\epsilon C_q \mid |z\bar{z}|=1\}$$

kümesini tanımlayalım. Bu birim eğri $z=\pm 1$ noktalarından geçen ve asimptotları $x=C_+t$ ve $x=C_-t$ olan bir eğridir.

Uyarı U kümesi, C_+ ve C_- nin kompleks değerleri için elips, $C_+= C_-$ için paralel iki doğru ve diğer durumlar için ise hiperbol belirtir. Şimdi bu durumları inceleyelim.

$$|z\bar{z}|=1 \text{ ise } z\bar{z}=x^2 +2Bxy -Ay^2 =1$$

$$\Rightarrow \qquad x^2 +2Bxy -Ay^2-1=0$$

dir. Koniklerin genel formu ;

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y +a_{33}=0$$

şeklindedir. Buna göre $a_{11}=1$, $a_{12}= B$, $a_{22}= a_{13} = a_{23} = 0$, $a_{33} = -1$ dir. Buradan

$$\delta =\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & B \\ B & -A \end{vmatrix}= -A -B^2 = -(A+B^2)$$

ve

$$\Delta=det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}= det\begin{bmatrix} 1 & B & 0 \\ B & -A & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}=1(A)-B(-B) = A+B^2$$

dir. Buradan $A+B^2$ nin durumuna göre elips ,hiperbol ve paralel iki doğru olduğunu gösterelim. Bunun için öncelikle δ ve Δ durumlarını belirtelim.

$\delta>0$ olsun .

$\Delta>0$ ise $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ise imajiner Elipstir.

$\Delta<0$ ise $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ise reel Elipstir.

$\Delta=0$ ise $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ ise iki imajiner doğrudur.

$\delta<0$ olsun.

$\Delta>0$ ise $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ise ekseni 0x ekseni olan reel parabol ,

$\Delta<0$ ise $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ise ekseni 0y ekseni olan reel parabol ,

$\Delta=0$ ise $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ ise orjinde kesişen iki reel doğrudur.

$\delta=0$ olsun.

$\Delta>0$ veya $\Delta<0$ ise $y=ax^2$ veya $x=ay^2$ denklemine sahip iki parabol

$\Delta=0$ ise çakışık doğrudur.

Şimdi $A+B^2$ nin durumlarına bakalım.

$A+B^2<0$ ise $\Delta<0$ ve $\delta>0$ olacağından reel elipstir.

$A+B^2>0$ ise $\Delta>0$ ve $\delta<0$ olacağından ekseni *ox* ekseni olan reel hiperboldur.

$A+B^2=0$ ise $\Delta=0$ ve $\delta=0$ olacağından çakışık iki doğrudur.

Lemma 3.3.2. Kompleks tipteki sayıların çarpma işlemine göre *U* kümesi birim elemanı $z=1$ olan bir gruptur.

Tanım 3.3.4. $(U,\cdot)$ çarpım grubundan bir $(\theta,+)$ grubuna tanımlanan α izomorfizmine açı fonksiyonu denir.

Uyarı $\alpha:(U,\cdot)\rightarrow(\theta,+)$ grup izomorfizmi olduğundan

$\alpha(z_1 z_2)=\alpha(z_1)+\alpha(z_2)$

ve 0, (Θ,+) grubunun birim elemanı olmak üzere, $\alpha(1)=0$ dır. Bir $\mu \epsilon U$ elemanı açılar için birim ölçü olarak adlandırılsın. $\alpha(\mu) \epsilon \Theta$ elemanı da 1 ile gösterelim. Yani $\alpha(\mu)$ =1olsun. Ayrıca α^{-1} ters dönüşümü μ ve $\mu(\varphi) = \mu^{\varphi}$ ile gösterilecek olursa

$$\mu^{\alpha(z)} = z \quad ,$$

$$\mu^{0} = 1 \quad ,$$

$$\mu^{1} = 1$$

elde edilir. Ayrıca $\mu:(\Theta, +) \rightarrow (U,\cdot)$ yine bir grup izomorfizmi olduğundan $\varphi_1, \varphi_2 \epsilon \Theta$ için

$$\mu(\varphi_1+\varphi_2) = \mu^{\varphi_1+\varphi_2} = \mu^{\varphi_1} \mu^{\varphi_2}$$

dır.

Tanım 3.3.5. *q*sin, *q*cos, *q*tan fonksiyonları *sinq*, *cosq*, *tanq* şeklinde gösterilir ve

$z=t+qx$ olmak üzere

$$sinq, cosq, tanq : \varphi \rightarrow \mathbb{R}$$

için

$$\cos q(\alpha(z))=t \quad , \qquad (24)$$

$$\sin q(\alpha(z))=x \quad , \qquad (25)$$

$$\tan q(\alpha(z))=\frac{x}{t} \qquad (26)$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tanım ve yukardaki uyarı göz önüne alındığında aşağıdaki formüller elde edilir.

Teorem 3.3.2.

1) Her $z=t+qx$ ve $\mu^{\alpha(z)}$= z için

$$\mu^{\alpha(z)} = \cos q(\alpha(z)) + q \sin q(\alpha(z)) \tag{27}$$

dır.

2) Her $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$ için,

$$\cos q(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos q(\varphi_1)\cos q(\varphi_2) + A \sin q(\varphi_1)\sin q(\varphi_2)$$

dır.

3) Her $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$ için,

$$\sin q(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin q(\varphi_1)\cos q(\varphi_2) + \cos q(\varphi_1) \sin q(\varphi_2) + 2B \sin q(\varphi_1) \sin q(\varphi_2)$$

dır.

4)Her $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$ için, $\tan q(\varphi_1 + \varphi_2) = \tan(\alpha(z_1) + \alpha(z_2)) = \tan q(\alpha(z_1 z_2))$

dir.

İspat:

1) $\mu^{\alpha(z)}$ nin tanımı gereği

$$\mu^{\alpha(z)} = z = t + qy$$

dir. (24) ve (25) den

$$\mu^{\alpha(z)} = \cos q(\alpha(z)) + q \sin q(\alpha(z))$$

dır.

2. Her $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$ ve α nın tanımı gereği

$$\cos q(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos(\alpha(z_1) + \alpha(z_2)) = \cos(\alpha(z_1 . z_2))$$

şeklinde yazılabilir. $z_1 = t_1 + qx_1$ *ve* $z_2 = t_2 + qx_2$ denirse;

$$z_1 z_2 = t_1 t_2 + q t_1 x_2 + q x_1 t_2 + q^2 x_1 x_2$$

elde ederiz. $q^2 = (A+2Bq)$ olduğundan

$$z_1 z_2 = t_1 t_2 + q t_1 x_2 + q x_1 t_2 + A\, x_1 x_2 + 2Bq\, x_1 x_2$$

dir.

$$\cos(z_1 z_2) = t_1 t_2 + A x_1 x_2$$

$$= \cos q(\varphi_1)\cos q(\varphi_2) + A\sin q(\varphi_1)\sin q(\varphi_2)$$

dır.

3. Her $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$ ve α nın tanımı gereği

$$\sin q(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin q(\alpha(z_1) + \alpha(z_2)) = \sin q(\alpha(z_1 z_2))$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca $z_1 z_2$ çarpımı yukarıda yerine yazılırsa

$$\sin q(\alpha(z_1 z_2)) = t_1 x_2 + x_1 t_2 + 2B x_1 x_2$$

$$= \sin q(\varphi_1)\cos q(\varphi_2) + \cos q(\varphi_1)\sin q(\varphi_2) + 2B\sin q(\varphi_1)\sin q(\varphi_2)$$

dır. Böylece

$$\sin q(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin q(\varphi_1)\cos q(\varphi_2) + \cos q(\varphi_1)\sin q(\varphi_2) + 2B\sin q(\varphi_1)\sin q(\varphi_2)$$

4. Her $z_1, z_2 \in C_q$ için;

$$\tan q(z_1 z_2) = \frac{t_1 x_2 + x_1 t_2 + 2B\, x_1 x_2}{t_1 t_2 + A x_1 x_2}$$

olup, eşitliğin sağ tarafındaki her bir terim $t_1 t_2$ ye bölünürse

$$\tan q(z_1 z_2) = \frac{\frac{t_1 x_2}{t_1 t_2} + \frac{x_1 t_2}{t_1 t_2} + 2B\frac{x_1 x_2}{t_1 t_2}}{\frac{t_1 t_2}{t_1 t_2} + \frac{Ax1x2}{t1t2}}$$

$$= \frac{\frac{x_2}{t_2} + \frac{x_1}{t_1} + 2B\frac{x_1 x_2}{t_1 t_2}}{1 + A\frac{x_1 x_2}{t_1 t_2}}$$

$$=\frac{\tan(\varphi_2) + \tan(\varphi_1) \quad +2B\tan(\varphi_1)\tan(\varphi_2)}{1 \quad + A.\tan(\varphi_1) \quad \tan(\varphi_2)}$$

dır.

Şimdi q^2=-1 için q=i, q^2=0 için $q=l$, q^2=1 için $q=h$ gösterimlerini kullanalım. Ayrıca i,l veya h dan herhangi biri yerine $\hat{q}$ kullanılacaktır.

Ölçek $\hat{q}=i$ veya $\hat{q}=h$ için D=$\sqrt{|\widehat{D}|}$ ile, $\hat{q}=l$ için D= 1 olarak tanımlanır. Ayrıca her ve $\hat{q}$ ve q için

$\hat{q}^2\mathrm{D}^2 = \widehat{D}$ ve $q=B+\hat{q}\mathrm{D}$

eşitlikleri vardır. Şimdi sırasıyla bu eşitliklerin doğruluğunu gösterelim.

Öncelikle B^2+A nın durumlarına göre $\hat{q}$ ifadesini elde edelim.

$B^2+A<0$ ise $q^2=-1$ buradan $\hat{q}=i$,

$B^2+A=0$ ise $q^2=0$ buradan $\hat{q}=l$,

$B^2+A>0$ ise $q^2=1$ buradan $\hat{q}=h$

dir.

1) Her q ve $\hat{q}$ için $\hat{q}^2\mathrm{D}^2 = \widehat{D}$ ifadesini göstermek için B^2+A nın durumlarına göre incelememiz gerekir .Öncelikle $B^2+A<0$ olsun. Böyleyse

$\hat{q}$= i ve $\hat{q}^2$= -1

dir. $\mathrm{D}^2=|B^2+A|$ olduğundan

$\hat{q}^2\mathrm{D}^2 = -1|B^2+A| = B^2+A = \widehat{D}$

dir.

$B^2+A=0$ ise $\hat{q}=l$, $\hat{q}^2=0$, $\mathrm{D}^2=|B^2+A|$

$\Rightarrow \quad \hat{q}^2\mathrm{D}^2= 0|B^2+A|= 0$

dır.

$B^2 + A > 0$ ise ise $\hat{q} = h$, $\hat{q}^2 = 1$, $D^2 = |B^2 + A|$

$\Rightarrow \quad \hat{q}^2 D^2 = 1|B^2 + A| = B^2 + A = \widehat{D}$

dır. Böylece $B^2 + A$ nın her bir durumu için eşitliğin sağlandığı gösterilmiştir.

2) $q = B + \hat{q}D$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\hat{q}^2 D^2 &= \widehat{D} \\
&= A + B^2 \\
&= A + 2Bq - 2Bq + B^2 \\
&= q^2 - 2Bq + B^2
\end{aligned}$$

$$(\hat{q}D)^2 = (q - B)^2$$

$$\Rightarrow \quad \hat{q}D = q - B \qquad (28)$$

$$\Rightarrow \quad q = \hat{q}D + B$$

dir.

Şimdi $\hat{q}$ nin durumlarına göre

$$\mu^{\varphi} = e^{\hat{q}D\varphi} \qquad (29)$$

olmak üzere aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$e^{\hat{q}D\varphi} = \begin{cases} cos(D\varphi) + isin(D\varphi) & , \hat{q} = i \\ \cosh(D\varphi) + hsinh(D\varphi), & \hat{q} = h \\ 1 + l(D\varphi) & , \hat{q} = l \end{cases}$$

Buradaki cos$h$ ve sin$h$ hiberbolik cos ve sin fonksiyonlarını belirtir.

Teorem 3.3.3. Her $\varphi \epsilon \Phi$, ($\hat{q} \epsilon \{ i, l, h\}$ sabit) için $\mu^{\varphi} = e^{\hat{q}D\varphi}$ olsun. Bu durumda

1) $\frac{d}{d\varphi}$ [$\cos_q(\varphi)$]=$A\sin_q(\varphi)$ –$B\cos_q(\varphi)$

2) $\frac{d}{d\varphi}$[$\sin_q(\varphi)$]=$\cos_q(\varphi)$ +B $\sin_q(\varphi)$

3) $\frac{d^2}{d\varphi^2}$ [$\cos_q(\varphi)$]=$\widehat{D}.\cos_q(\varphi)$

4) $\frac{d^2}{d\varphi^2}$[$\sin_q(\varphi)$]=$\widehat{D}.\sin_q(\varphi)$

dır .

İspat (29) ifadesinin her iki tarafını φ ye göre türev alınıp (28) ifadesi göz önüne alınırsa

$$\frac{d}{d\varphi}\mu^{\varphi}=\frac{d}{d\varphi}\, e^{\hat{q}D\varphi}$$

$$=\hat{q}.De^{\hat{q}D\varphi}$$

$$=(q\text{-}B)\, e^{\hat{q}D\varphi}$$

$$=(q\text{-}B)\, \mu^{\varphi} \tag{30}$$

ifadesi elde edilir.

(27) ifadesinde her iki tarafı φ ye gore türev alınırsa

$$\frac{d}{d\varphi}(\mu^{\varphi})=\frac{d}{d\varphi}(\mathrm{Cos}q(\varphi)+q\mathrm{Sin}q(\varphi))$$

elde edilir (30) ve (27) ifadesi göz önüne alındığında

$$(q\text{-}B)\, \mu^{\varphi}=\frac{d}{d\varphi}\cos q(\varphi)+q\frac{d}{d\varphi}\sin q(\varphi) \tag{31}$$

$$(q\text{-}B)(\cos q(\varphi)+q\sin q(\varphi))=\frac{d}{d\varphi}\cos q(\varphi)+q\frac{d}{d\varphi}\sin q(\varphi)$$

elde edilir. Buradan

$$q\cos q(\varphi)+\text{-}B\cos q(\varphi)+q^2\sin q(\varphi)\text{-}B.\sin q(\varphi)=\frac{d}{d\varphi}\mathrm{Cos}q(\varphi)+q\frac{d}{d\varphi}\sin q(\varphi)$$

dir.Şimdi $q^2 = A + 2Bq$ yazarsak;

$$= A\sin q(\varphi) - B\cos q(\varphi) + q(\cos q(\varphi) + 2B\sin q(\varphi) - B\sin q(\varphi))$$

$$= A\sin q(\varphi) - B\cos q(\varphi) + q(\cos q(\varphi) + B\sin q(\varphi))$$

olur. (31) daki eşitlikten

$$\frac{d}{d\varphi}\cos q(\varphi) = A\sin q(\varphi) - B\cos q(\varphi) \tag{32}$$

ve

$$\frac{d}{d\varphi}\sin q(\varphi) = \cos q(\varphi) + B\sin q(\varphi) \tag{33}$$

olur. Bu ise teoremdeki 1 ve 2 eşitliklerin ispatını tamamlar .

Şimdi (30) ifadesinde her iki tarafı φ ye göre türev alınırsa ;

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{d}{d\varphi}(\mu^{\varphi})\right) = \frac{d}{d\varphi}(q-B)\mu^{\varphi}$$

$$= (q-B)^2\mu^{\varphi}$$

$$= (q^2 - 2Bq + B^2)\mu^{\varphi}$$

$$= (A + 2Bq - 2Bq + B^2)\mu^{\varphi}$$

$$= (A + B^2)\mu^{\varphi}$$

bulunur. $(A+B^2)$ yerine $\widehat{D}$ yazılırsa

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{d}{d\varphi}(\mu^{\varphi})\right) = \widehat{D}.\mu^{\varphi}$$

$$= \widehat{D}(\cos q(\varphi) + q\sin q(\varphi))$$

$$= \widehat{D}\cos q(\varphi) + \widehat{D}q\sin q(\varphi) \tag{34}$$

dır.

Şimdi (32) ifadesinin her iki tarafının φ ye göre türevi alınırsa;

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\cos q(\varphi)=\frac{d}{d\varphi}(A\sin q(\varphi)\text{-}B\cos q(\varphi))$$

olur. Buradan (33) ifadesinin her iki trafını *A* ile çarpılırsa;

$$A\frac{d}{d\varphi}\sin_q(\varphi))=A(\cos_q(\varphi)+\mathrm{B}\ \sin_q(\varphi))$$

$$=A\cos_q(\varphi)+AB\sin_q(\varphi) \qquad (35)$$

elde ederiz ve (32) ifadesinin her iki trafını -*B* ile çarpılırsa;

$$\text{-}B\ \frac{d}{d\varphi}\cos q(\varphi) = \text{-}B(A\sin_q(\varphi)\text{-}\ B\cos_q(\varphi))$$

$$= \text{-}BA\sin_q(\varphi)+B^2\cos_q(\varphi) \qquad (36)$$

olur .(35) ve (36) ifadelerini taraf tarafa toplanırsa ;

$$= (A+B^2)\cos_q(\varphi)$$

$$= \widehat{D}\ \cos_q(\varphi)$$

elde edilir. Buradan;

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\cos_q(\varphi) =\widehat{D}\ \cos_q(\varphi)$$

dır.Bu da teoremdeki 3 ifadesinin ispatını gösterir.

Şimdi(33) ifadesinin her iki tarafının φ ye gore türev alınırsa ;

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}(\sin_q(\varphi)= \frac{d}{d\varphi}(\cos_q(\varphi)+B\sin_q(\varphi))$$

olur. Buradan

$$B\frac{d}{d\varphi}[\sin_q(\varphi)]=B(\cos_q(\varphi) +B\ \sin_q(\varphi)\ \ )$$

$$=B\ \cos_q(\varphi) +B^2\ \sin_q(\varphi) \qquad (37)$$

dir.(32) ve (37) ifadelerini taraf tarafa topanırsa ;

$=(A+B^2)\sin_q(\varphi)$

$=\widehat{D}\sin_q(\varphi)$

dir. Buradan ;

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}(\sin_q(\varphi)= \widehat{D}\sin_q(\varphi)$$

dır. Bu da teoremdeki 4 ifadesinin ispatını gösterir.

Bu ifadelerin bir sonucu

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}(\mu^{\varphi})=(q\text{-}B)^2\,\mu^{\varphi}$$

dır. Şimdi bunu gösterelim.

$\hat{q}D = q\text{-}B$ her iki tarafın karesi alınırsa

$$(\hat{q}D)^2= \hat{q}^2D^2$$

$$= (q\text{-}B)^2$$

$$= \hat{q}^2D^2\,\mu^{\varphi}$$

$$= \widehat{D}\,\mu^{\varphi}$$

dır.

Açı fonksiyonu olan α yı daha iyi açıklamak için; U birim eğrisinin $\widehat{D}<0$ iken tek parçadan,$\widehat{D}=0$ iken iki sürekli parçadan ve $\widehat{D}>0$ iken ise dört sürekli parçaya sahip olduğu dikkat etmek gerekir.

Yukarıdaki her bir duruma karşı bir K indis kümesi tanımlanabilir. reel açı kümesi Θ aşağıdaki gibidir.

$\widehat{D}<0$ ise $K= \{1\}$,$\Theta=\{\theta:0\leq\theta\leq\frac{2\pi}{D}\}$,

$\widehat{D}=0$ ise $K= \{1,-1\}$,$\Theta=\mathbb{R}$,

$\widehat{D}>0$ $\boldsymbol{K}=\{1,-1,h,-h\}$,$\Theta=\mathbb{R}$ dır.

Teorem 3.3.4.

i)$k\epsilon K$ için;$k^2=1$, $k^{-1}=k$, $k.\bar{k}=|k|_q$, $p(k)=1$ dir.

ii)$k\epsilon K,\theta\epsilon\Theta$ için;

$p(k.\mu^{\theta})=1$ ve $U=\{k.\mu^{\theta}\,|\,k\epsilon K,\ \theta\epsilon\ \Theta\}$ dır.

İspat: Tanımdan

$$p(k.\mu^{\theta})=p(k)p(\mu^{\theta})$$

$$=1.1=1$$

dir. Burada $k.\mu^{\theta}\ \epsilon\ U$ ve bununla birlikte ;

$$U=\{k.\mu^{\theta}\,|\,k\epsilon\ \boldsymbol{K},\theta\epsilon\Theta\}$$

dir.

Tanım3.3.6. Açıların kümesi

$$\Phi=\Theta\text{x}K=\{(\theta,k)\ ;\theta\ \epsilon\Theta\ ,k\epsilon K\}$$

$$=\{\theta_k;\theta\epsilon\Theta\ ,k\epsilon K\}$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki (θ,k) sıralı ikilisi θ_k ile ifade edilmiştir. Ayrıca açı fonksiyonu, $k\epsilon K$ ve $\mu^{\theta}\ \epsilon\ U$ için

$$\alpha:U\rightarrow\Phi$$

$$k.\mu^{\theta}\rightarrow\alpha(k.\mu^{\theta})=\theta_k \qquad (38)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.3.5. Her $k \epsilon \boldsymbol{K}$, $\mu^{\theta} \epsilon U$ ve $\theta \epsilon \Theta$ için

1) $\theta_k + \theta'_{k'} = (\theta + \theta')_{k\,k'}$

2) $\mu^{\theta_k} = k\mu^{\theta}$

3) $|\mu^{\theta_k}|_q = |k|_q$

4) $|\mu^{\theta_k}|_q = \left|\mu^{\theta_k}.\right|_q^{\tilde{2}} = \mu^{\theta_k}\,(\overline{\mu^{\theta_k}}) = |k|_q$

5) $\cos q(-\theta_k) = \frac{\cos q(\theta_k) + 2B\sin q(\theta_k)}{|k|q}$ ve $\sin q(-\theta_k) = -\frac{\sin q(\theta_k)}{|k|q}$

6) $\mu^{\theta k} = e^{\widehat{q(D\varphi)}k}$

7) $\cos(\varphi - \theta_k) = \frac{\cos q(\varphi)\cos q(\theta_k) + 2B\cos q(\varphi)\sin q(\theta_k) \quad - A\sin q(\varphi).\sin q(\theta_k)}{|k|q}$

$\sin(\varphi - \theta_k) = \frac{\sin q(\varphi)\cos q(\theta_k) - \cos q(\varphi)\sin q(\theta_k)}{|k|q}$

8) $\cos q(\theta)_k = \cos\hat{q}(\theta)_k - ({}^{B}/_{D})\sin\hat{q}(\theta)_k$

$\sin(\theta)_k = ({}^{1}/_{D})\sin\hat{q}(\theta)_k$

dır.

İspat :

1) (38) ifadesi göz önüne alındığında

$\theta_k = \alpha(k.\mu^{\theta})$

$\theta'_{k'} = \alpha(k'\mu^{\theta'})$

yazılır. Buradan taraf tarafa toplanırsa;

$\theta_k + \theta'_{k'} = \alpha(k.\mu^{\theta}) + \alpha(k'\mu^{\theta'})$

$= \alpha\,(kk^{'}.\mu^{\theta+\theta^{'}})$

$= (\theta + \theta^{'})_{k\,k^{'}}$

dır.

2) μ^{θ_k} nın tanımı gereği

$\mu^{\theta_k} = \alpha(\theta.k)$

$= k\alpha(\theta)$

$= k\mu^{\theta}$

dır.

3) μ^{θ_k} nını tanımı gereği

$|\mu^{\theta_k}|_q = |k\mu^{\theta}|_q$

$= |k|_q.|\mu^{\theta}|_q$

$= |k|_q$

dir.

4) Öncelikle $|z| = |\bar{z}|_q$ olduğundan

$|\mu^{\theta_k}\,|_q = |\overline{\mu^{\theta_k}}|_q$

dır. $x^{\tilde{2}} = \mathrm{sgn}(x)x^2$ olduğundan

$\left|\mu^{\theta_k}.\overline{\mu^{\theta_k}}\right|_q^{\tilde{2}} = \mathrm{sgn}(\mu^{\theta_k}.\overline{\mu^{\theta_k}}\,)\left|\mu^{\theta_k}.\overline{\mu^{\theta_k}}\right|^2$

$= \mathrm{sgn}(\mu^{\theta_k})\left|\mu^{\theta_k}\right|^2\ \mathrm{sgn}(\overline{\mu^{\theta_k}}\,)\left|\overline{\mu^{\theta_k}}\right|^2$

$$=(\mu^{\theta_k})_q^{\widetilde{2}}\overline{(\mu^{\theta_k})}_q^{\widetilde{2}}$$

$$=|k|_q^{\widetilde{2}}\left|\bar{k}\right|_q^{\widetilde{2}}$$

$$=\left|k\bar{k}\right|_q^{\widetilde{2}}$$

$$=|k|_q^{\widetilde{2}}$$

dır. Ayrıca

$$|k|_q^{\widetilde{2}}=\mathrm{sgn}(k)|k|_q^2=\mathrm{sgn}(k)\mathrm{sgn}(k.\bar{k})^2\sqrt{\left|k.\bar{k}\right|}^2$$

$$=\sqrt{|k|_q}^2$$

$$=|k|_q$$

$$=|\mu^{\theta_k}|_q$$

dır.

5) $\mu^{-\theta k}$ ifadesini $\mu^{-\theta k}=\frac{\overline{\mu^{\theta k}}}{\mu^{\theta k}\overline{\mu^{\theta k}}}$ şeklinde yazıp $(\mu^{\theta k})(\overline{\mu^{\theta k}})=|k|_q$ ni göz önüne alınırsa;

$$\overline{\mu^{\theta k}}=(\cos q(\theta_k)+2B\sin q(\theta_k)-q\sin q(\theta_k))$$

olur.Buradan

$$\mu^{-\theta_k}=\frac{\cos q(\theta_k)+2B\sin q(\theta_k)-q\sin q(\theta_k)}{|k|q}$$

dır.

$$\mu^{-\theta_k}=\cos q(-\theta_k)+q\sin q(-\theta_k)$$

$$\Rightarrow\quad \mu^{\theta_k}=\cos q(\theta_k)+q\sin q(\theta_k)$$

$$\Rightarrow \quad \mu^{\theta_k} = \cos\hat{q}(D\theta)_k + \hat{q}\sin\hat{q}(D\theta)_k$$

olur buradan;

$$\cos q(-\theta_k) = \frac{\cos q(\theta_k) + 2B\sin q(\theta_k)}{|k|q} \ ,$$

$$\sin q(-\theta_k) = -\frac{\sin q(\theta_k)}{|k|q}$$

dır.

6) $$\mu^{\theta k} = k.\mu^{\theta}$$

$$= k.\, e^{\hat{q}D\varphi}$$

$$= e^{\hat{q}D\varphi k}$$

$$= e^{\widehat{q(D\varphi)k}}$$

dır.

7) $k \epsilon K$**,** $\mu^{\theta} \,\epsilon\, U$ ve $\theta \epsilon \Theta$ olsun. μ nün tanımı gereği

$$\mu^{\varphi-\theta k} = \mu^{\varphi}.\mu^{-\theta k}$$

şeklinde yazılabilir.

$$\mu^{\varphi} = \cos q(\varphi) + q\sin q(\varphi)$$

$$\mu^{-\theta_k} = \frac{\cos q(\theta_k) + 2B\sin q(\theta_k) - q\sin q(\theta_k)}{|k|q}$$

dır.

$$\cos q(\varphi-\theta_k) = \cos q(\alpha(\mu^{\varphi}) + \alpha(\mu^{-\theta_k}))$$

$$= \cos q(\alpha(\mu^{\varphi}.\, \mu^{-\theta_k}))$$

α nın özelliğinden

$\sin q(\varphi-\theta_k) = \sin q(\alpha(\mu^{\varphi}) + \alpha(\mu^{-\theta_k}))$

$= \sin q(\alpha(\mu^{\varphi}.\ \mu^{-\theta_k}))$

$\mu^{\varphi}.\ \mu^{-\theta_k} = [\cos q(\varphi) + q\sin q(\varphi)][\frac{\cos q(\theta_k) + 2B\sin q(\theta_k) - q\sin q(\theta_k)}{|k|q}]$

$= \cos q(\varphi)\cos q(\theta_k) + 2B\cos q(\varphi)\sin q(\theta_k) - q\cos q(\varphi)\sin q(\theta_k)$

$+ q\sin q(\varphi)\cos q(\theta_k) + 2Bq\sin q(\varphi)\sin q(\theta_k) - q^2\sin q(\varphi)\sin q(\theta_k)$

, $q^2 = A+2Bq$ yazılırsa

$\sin q(\varphi-\theta_k) = \cos q(\varphi)\cos q(\theta_k) + 2B\cos q(\varphi)\sin q(\theta_k) - q\cos q(\varphi)\sin q(\theta_k)$

$+ q\sin q(\varphi)\cos q(\theta_k) + 2Bq\sin q(\varphi)\sin q(\theta_k) - (A+2Bq)\sin q(\varphi).\ \sin q(\theta_k)$

$= \cos q(\varphi)\cos q(\theta_k) + 2B\cos q(\varphi)\sin q(\theta_k) - q\cos q(\varphi)\sin q(\theta_k)$

$+ q\sin q(\varphi)\cos q(\theta_k) + 2Bq\sin q(\varphi)\sin q(\theta_k) - A\sin q(\varphi).\ \mathrm{Sin}q(\theta_k)$

$-2Bq\sin q(\varphi).\sin q(\theta_k)$

$= \cos q(\varphi)\cos q(\theta_k) + 2B\cos q(\varphi)\sin q(\theta_k) - A\sin q(\varphi).\sin q(\theta_k)$

$+q[\sin q(\varphi)\cos q(\theta_k) - \cos q(\varphi)\sin q(\theta_k) + \sin q(\varphi)\cos q(\theta_k)]$

Buradan;

$\cos q(\varphi-\theta_k) = \frac{\cos q(\varphi)\cos q(\theta_k) + 2B\cos q(\varphi)\sin q(\theta_k) - A\sin q(\varphi).\sin q(\theta_k)}{|k|q}$,

$\sin q(\varphi-\theta_k) = \frac{\sin q(\varphi)\cos q(\theta_k) - \cos q(\varphi)\sin q(\theta_k)}{|k|q}$

dır.

8) $k \epsilon K$ **,** $\mu^{\theta} \epsilon U$ ve $\theta \epsilon \Theta$ olsun.

$\mu^{\theta_k} = k\mu^{\theta}$

$=k.e^{\hat{q}D\theta}$

$=e^{\widehat{(q}D\theta)k}$

dır.

$\mu^{\theta_k} = \cos q(\theta)_k + q\sin q(\theta)_k$

$= \cos\hat{q}(\theta)_k + \hat{q}\sin\hat{q}(\theta)_k$

dir.

$\hat{q}=-(B/D) + q(1/D)$ eşitliği göz önüne alındığında

$\cos\hat{q}(\theta)_k + \hat{q}\sin\hat{q}(\theta)_k = \cos\hat{q}(\theta)_k + (-(B/D) + q(1/D))\sin\hat{q}(\theta)_k$

$= \cos\hat{q}(\theta)_k - (B/D) + q(1/D))\sin\hat{q}(\theta)_k$

buradan ;

$\cos q(\theta)_k = \cos\hat{q}(\theta)_k - (B/D)\sin\hat{q}(\theta)_k$,

$\sin q(\theta)_k = (1/D))\sin\hat{q}(\theta)_k$

dir.

Tanım 3.3.7. Her $z\epsilon C_q$ için, z nin kutupsal koordinatları $p(z) \neq 0$ olmak üzere

$z=p(z)\,\mu^{\alpha(z)}$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 3.3.8.

i)Her $z, z'\epsilon C_q$ için bu noktaları birleştiren doğru parçası $\overline{z\,z'}$ ie gösterilir ve bu doğru parçasının uzunluğu $|z-z'|_q$ olarak tanımlanır.

ii) Verilen z, z' ve $z'' \in C_q \equiv \mathbb{R}^2$ noktaları için $\overline{z'z''}$ ve $\overline{zz''}$ doğru parçaları arasındaki saatin tersi yönündeki açı

$$\alpha\left(\frac{z'-z''}{z-z''}\right)$$

biçiminde tanımlanır.

iii)$z=t+qx$, $z'=t'+qx' \in C_q$ için z ve z' nin iç çarpımı

$$\langle z, z'\rangle = (z\,\overline{z'}+\bar{z}\,z')/2$$

şeklinde tanımlanır.

Yukarıdaki iç çarpımı daha açık bir şekilde ifadede edelim.

$z= t+qx,\ \ \bar{z}= t+2Bx-qx,\ z'= t'+qx',\ \overline{z'}= t'+2Bx'-qx'$

olsun. Buradan

$$
\begin{aligned}
z\,\overline{z'} &= (t+qx)(t'+2Bx'-qx') \\
&= tt'+2Bx't-qx't+qxt'+2qBxx'-q^2xx' \\
&= tt'+2Bx't-qx't+qxt'+2qBxx'-(A+2Bq)\,xx' \\
&= tt'+2Bx't-qx't+qxt'+2qBxx'-A\,xx'-2Bq\,xx' \\
&= tt'+2Bx't-qx't+qxt'-A\,xx' \qquad (39)
\end{aligned}
$$

dir.

$$
\begin{aligned}
\bar{z}z' &= (t+2Bx-qx)(t'+qx') \\
&= t.t'+qx't+2Bxt'+2Bqx.x'-qxt'-q^2x.x' \\
&= tt'+qx't+2Bxt'+2Bqxx'-qxt'-(A+2Bq)xx' \\
&= tt'+qx't+2Bxt'+2Bqx.x'-qxt'-Axx'-2Bqxx' \\
&= tt'+qx't+2Bxt'-qxt'-Axx' \qquad (40)
\end{aligned}
$$

(39) ve (40) taraf tarafa toplanırsa ;

$$z.\overline{z'}+\bar{z}z'=tt'+2Bx't-qx't+qxt'-Axx'+tt'+qx't+2Bxt'-qxt'-Axx'$$

$$=2(tt'+B(tx'+xt')-Axx')$$

$$(z\overline{z'}+\bar{z}z')/2=2(tt'+B(tx'+xt')-Axx')/2$$

$$=tt'+B(tx'+xt')-Axx'$$

$$\langle z,z'\rangle=(z\overline{z'}+\bar{z}z')/2=tt'+B(tx'+xt')-Axx'$$

dır.

Açıklama: Bir $z\rightarrow z+z_0$ öteleme dönüşümü açı ve uzaklık kavramını korur. Ayrıca bir dönme dönüşümü $z\rightarrow z\ \mu^{\theta_k}$ açıyı korur fakat $k=\pm1$ için uzaklığı korumasına rağmen , $k=h$ için işaret değiştirir.

$$|z\,\mu^{\theta_k}-z'\,\mu^{\theta_k}|_q=|z-z'|_q|\,\mu^{\theta_k}\,|_q$$

$$=|z-z'|_q|k|_q$$

eşitliği vardır.

Teorem 3.3.6. $z,z'\in C_q$ alalım, $p(z)\neq 0$, $p(z')\neq 0$ ve buradaki saat yönünde tersi olarak oluşan açıyı φ ile gösterelim. Doğru parçası $\overline{z0}$ ve $\overline{z'0}$ dır.

$$\langle z,z'\rangle=|z|_q\,|z'|_q\,[\cos q(\varphi)+B\sin q(\varphi)]$$

dır.

İspat: $p(z)=r$, $p(z')=r'$ ve

$$z=t+qx=r.\ \mu^{\theta_k}$$

$$z'=t'+qx'=r'\mu^{\varphi'}$$

$\cos q\ (\theta_k)=\frac{t}{r'}$ $\sin q(\theta_k)=\frac{x}{r'}$ $\cos q(\varphi')=\frac{t'}{r'}$ $\sin q(\varphi')=\frac{x'}{r'}$ $\varphi=\alpha(z'/z)=\varphi'-\theta_k$

Tanım 3.3.11 den $|z|_q=r\,|k|_q$, $||z'|_q|=r'$

$$\langle z,z'\rangle=|z|_q|z'|_q[\cos q(\varphi)+B\sin q(\varphi)]$$

$$=rr'|k|_q[(\frac{tt'}{rr'}+2B\frac{xt'}{rr'}-A\frac{xx'}{rr'})+B(\frac{tx'}{rr'}-\frac{xt'}{rr'})]$$

$$=rr'|k|_q[\cos q(\varphi'-\theta_k)+B\sin q(\varphi'-\theta_k)]=|z|_q|z'|_q[\cos q(\varphi)+B\sin q(\varphi)]$$

dir.

Sonuç: Şimdi 0, z ve z' noktalarının oluşturduğu üçgeni göz önüne alalım. Bu üçgenin kenar uzunlukları ;

$a=|z-z'|_q$,

$b=|z'|_q$,

$c=|z|_q$

dır . Buradan;

$$\hat{a}^2=\hat{b}^2+\hat{c}^2-2|b|c[\cos q(\varphi)+B\sin q(\varphi)]$$

eşitliğini yazarız ve buradaki orjin noktasından saat yönünde tersi olarak oluşan açıyı φ ile gösterelim. Doğru parçası $\overline{z0}$ ve $\overline{z'0}$ dır ve $u\in\mathbb{R}$ olmak üzere $\hat{u}^2$ yu (signu)u^2 şeklinde gösterilir.

İspat: $\langle z,z\rangle=z\bar{z}$

$=|z|^{\hat{2}}_q$

dır.

$$\langle z-z',z-z'\rangle=\langle z,z\rangle+\langle z',z'\rangle-2\langle z,z'\rangle$$

eşitliğini kullanalım .

$$\langle z - z', z - z' \rangle = \widehat{|z - z'|^2}_q$$

$$= \hat{a}^2$$

dır.

$$\langle z, z \rangle = \widehat{|z|^2}_q$$

$$= \hat{c}^2$$

dır

$$\langle z', z' \rangle = \widehat{|z'|^2}_q$$

$$= \hat{b}^2$$

dır.

$$\langle z, z' \rangle = |z|_q \, |z'|_q \, [\cos q(\varphi) + B\sin q(\varphi)]$$

$$= bc[\cos q(\varphi) + B\sin q(\varphi)]$$

buradan ;

$$\hat{a}^2 = \hat{b}^2 + \hat{c}^2 - 2|b|c[\cos q(\varphi) + B\sin q(\varphi)]$$

eşitliğini elde ederiz.

Pisagor Teoremi: z ve z' ortogonal ise $\langle z, z' \rangle = 0$ dır ve

$$\hat{a}^2 = \hat{b}^2 + \hat{c}^2$$

dır.

İspat :

$$\hat{a}^2 = \hat{b}^2 + \hat{c}^2 - 2|b|c[\cos q(\varphi) + B\sin q(\varphi)]$$

eşitliğinden

$$\langle z, z' \rangle = |z|_q \, |z'|_q \, [\cos q(\varphi) + B \sin q(\varphi)]$$

$$= 0$$

olduğundan

$$\hat{a}^2 = \hat{b}^2 + \hat{c}$$ dır.

4.TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında Paul. Gal. Fjelstad tarafından 2000 li yılların başlarında ortaya konulan çalışması incelendi. Kompleks sayıların çözümü kuadratik denklemlerin çözümüyle ilişkili olduğundan bu denklemlerin özel çözümlerine göre sayı kavramının genişletileceği görüldü. Kompleks tipteki sayıların genel denklemi elde edilip bu sayıların topolojik yapıları incelendi. Ayrıca geometrik yapıları da incelenip trigonometrik fonksiyonlar tanımlandı.

KAYNAKLAR

[1] Hacısalihoğlu,H.H.,Analitik Geometri ,Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları ,Ankara ,1984

[2] Yıldız ,C. ,Genel Topoloji , Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları ,Ankara ,2005

[3]Aslım, G. ,Genel Topoloji ,Ege üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları ,İzmir ,1988

[4] Taşçı , D. ,Soyut Cebir ,Alp Yayınevi ,Ankara ,2007

[5]Sabuncuoğlu ,A. ,Lineer Cebir ,Nobel Yayınevi ,Ankara ,2008

[6]Yaglom I. M., ´Complex Numbers in Geometry´, Academic Press, New York, 1968

[7]Naber G. L. ,´The Geometry of Minkowski Spacetime. An Introduction to the Mathematics of the Special Theory of Relativity´, Springer-Verlag, New York, 1992

[8] Yaglom I. M.,´A Simple non –Euclidean Geometry and Physical Basis´, Springer –Verlag ,New York, 1979

[9]Hawking S. W., A. R. King and P.j. McCarty, A new topology for curved space time which incorporates the causal , differential and conformal structures, J. Math. Phys., 17 174-181, 1976

[10]Fjelstad, Paul; Gal, Sorin G. Two-dimensional geometries,topologies, trigonometries and physics generated by complex-type numbers. Adv Appl. Clifford Algebras 11 (2001), no. 1, 81-107 (2002)