KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MİNKOWSKİ UZAY-ZAMANDA GENELLEŞTİRİLMİŞ BERTRAND EĞRİLERİ

Ali UÇUM

EYLÜL 2015

Matematik Anabilim Dalında Ali UÇUM tarafından hazırlanan MİNKOWSKİ UZAY-ZAMANDA GENELLEŞTİRİLMİŞ BERTRAND EĞRİLERİ adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Kazım İLARSLAN

Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan	: Prof. Dr. Yusuf YAYLI	____________________
Üye (Danışman)	: Prof. Dr. Kazım İLARSLAN	____________________
Üye	: Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN	____________________

07/09/2015

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Mustafa YİĞİTOĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

MİNKOWSKİ UZAY-ZAMANDA GENELLEŞTİRİLMİŞ BERTRAND EĞRİLERİ

UÇUM, Ali
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. Kazım İLARSLAN

Eylül 2015, 68 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde tezde gerekli olan kavramlar ve tanımlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, Minkowski uzay-zamanda Bertrand eğrilerinin olmadığına dair teoremler verilmiştir. Dördüncü bölümde, Minkowski uzay-zamanda (1,3)-Bertrand eğrileri, (1,3)-normal düzlemin causal karakterine göre sınıflandırılarak iki alt bölümde verilmiştir. Bu bölümlerde (1,3)-normal düzlemin spacelike veya timelike olma durumlarına göre elde edilen eğrilerin (1,3)-Bertrand eğrileri olmalarını ve (1,3)-Bertrand eşlenik eğrilerinin casual karakterini de ifade eden teoremler elde edilmiştir. Ayrıca ilgili örnekler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Minkowski uzay-zaman, Bertrand eğrileri, (1,3)-Bertrand eğrileri, null eğriler, pseudo null eğriler, null olmayan eğriler.

ABSTRACT

GENERALIZED BERTRAND CURVES IN MINKOWSKI SPACE-TIME

UÇUM, Ali
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Depertment of Mathematics, Master Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Kazım İLARSLAN
September 2015, 68 pages

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction. The second chapter contains concepts and definitions which are needed throughout the thesis. The third chapter includes the theorems which show that there exist no Bertrand curves in Minkowski space-time. The fourth chapter is given with two subsections by classifying (1,3)-Bertrand curves according to the causal character of (1,3)-normal plane in Minkowski space-time. In these subsections, by considering that (1,3)-normal plane is spacelike or timelike, theorems are given for the obtained curves to be (1,3)-Bertrand curves. Besides the theorems express the casual characters of the (1,3)-Bertrand mate curves. Also, the related examples are given.

Key Words: Minkowski space-time, Bertrand curves, (1, 3)-Bertrand curves, null curves, pseudo null curves, non-null curves.

TEŞEKKÜR

İlk olarak yüksek lisans tez konumun belirlenmesinden, tezin yazım aşamasına kadar her türlü desteğini esirgemeyen, bilgi ve tecrübesi ile zaman ayırıp, yüksek lisans çalışmamı tamamlamamda rehberliği ile ışık tutan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Kazım İLARSLAN'a teşekkürlerimi sunarım. Bunun yanı sıra yüksek lisans eğitimim boyunca 2210-A Genel Yurtiçi Yüksek Lisans Burs Programı kapsamında maddi destek veren TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım. Son olarak yüksek lisans çalışmam boyunca her türlü desteği veren sevgili anneme, babama, kardeşlerime ve değerli arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar cismi
$\mathbb{E}^3$	3-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{E}^4$	4-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{E}^n$	n-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{E}_1^3$	3-boyutlu Minkowski uzayı
$\mathbb{E}_1^4$	Minkowski uzay-zaman
$\Vert\, , \Vert$	Norm fonksiyonu
g	Non-dejenere metrik
T	$\mathbb{E}_1^4$ de bir eğrinin teğet vektör alanı
N	$\mathbb{E}_1^4$ de bir eğrinin normal vektör alanı
B_1	$\mathbb{E}_1^4$ de bir eğrinin birinci binormal vektör alanı
B_2	$\mathbb{E}_1^4$ de bir eğrinin ikinci binormal vektör alanı
κ_i	Bir eğrinin i-ynci eğrilik fonksiyonu

1. GİRİŞ

Diferensiyel geometrinin en önemli çalışma alanlarından birisi olan eğriler teorisinin tarihi Leibniz (1646-1716) ve Newton (1643-1727) un düzlemsel eğriler üzerine yaptıkları araştırmalara kadar dayanmaktadır. Monge (1746-1818) tarafından 1771 yılında uzay eğrilerinin teorisi inşa edilmeye başlanmıştır. B. de Saint Venant (1791-1886) tarafından bir eğrinin binormal vektör alanının tanımlanmasıyla da yoğun bir şekilde incelenmeye başlayan eğriler teoresinde öne çıkan problemlerden birisi de eğrilerin sınıflandırılması problemidir. Bu problemin çözümünde eğrinin eğrilikleri (κ_1 ve κ_2) ve eğrinin Frenet vektör alanları (T, N, B) büyük bir öneme sahiptir. Eğrilikler yardımıyla eğriler için birçok karakterizasyon verilmiştir. Bunlardan en çok bilineni Lancret tarafından genel helis eğrileri için verilen karakterizasyondur. Bu karakterizasyona göre "$\mathbb{E}^3$ de, bir eğrinin genel helis olması için gerek ve yeter şart, eğrinin birinci ve ikinci eğrilikleri sırasıyla, κ_1 ve κ_2 olmak üzere κ_1/κ_2 oranının sabit olmasıdır" ([1-3]).

Eğrilerin Frenet vektörleri yardımıyla karakterizasyonlarında eğri çiftlerinin Frenet vektörleri arasındaki ilişkiler öne çıkmaktadır. 1845 yılında B. de Saint Venant tarafından ortaya konulan bir eğrinin asli normal vektör alanının bir başka eğrinin asli normal vektör alanı olup olamayacağı problemi 1850 yılında J. Bertrand tarafından yayınlanan bir makalede cevaplandırılmıştır. Böyle bir ikinci eğrinin var olması için gerek ve yeter şartın verilen eğrinin eğriliklerinin $\lambda\kappa_1 + \mu\kappa_2 = 1$ şartını sağlamasıdır. Bu tarihten itibaren bu şartı sağlayan eğriye Bertrand eğrisi ve ikinci eğriye de bu eğrinin Bertrand eşlenik eğrisi adı verilmiştir. Bu eğri çiftleri de Bertrand eğri çiftleri olarak adlandırılmıştır ([4,5]).

Bertrand eğrileri Öklid uzayında yoğun bir şekilde çalışılmış ve bir çok özelliği ortaya konmuştur ([6,7]). 1935 yılında, L. R. Pears, Bertrand eğrilerini n-boyutlu Öklid uzayında çalışmış ve κ_2 ya da κ_3 eğriliklerinin sıfır olduğu sonucuna ulaşmıştır. Bir diğer ifadeyle $\mathbb{E}^n$ $(n > 3)$ uzayındaki Bertrand eğrileri dejenere eğrilerdir. Bu durumda, özel olarak tüm eğrilikleri sıfırdan farklı bir eğri ele aldığımızda bu eğrinin Bertrand eğrisi olmayacağı aşikardır. 2003 yılında Matsuda ve Yorozu 4-boyutlu Öklid uzayında Bertrand eğrilerinin yeni bir sınıfını tanımlamışlar ve çalışmışlardır. Buna göre $\mathbb{E}^4$de tüm eğrilikleri sıfırdan farklı verilen bir eğrinin Frenet vektörleri T, N, B_1, B_2 olmak üzere $sp\{N, B_2\}$ tarafından gerilen düzlem $(1,3)$-normal düzlem olarak tanımlanmış, bir eğrinin $(1,3)$-normal düzlemi başka bir eğrinin $(1,3)$-normal düzlemi oluyorsa bu eğriye $(1,3)$-Bertrand eğrisi, diğer eğriye de bu eğrinin $(1,3)$-Bertrand eşlenik eğrisi adı verilmiştir ([8,9]).

Bunun yanı sıra Bertrand eğrileri Minkowski 3-uzayında ve Minkowski uzay-zaman $\mathbb{E}_1^4$ de de çalışılmıştır. 2001 yılında Ekmekçi ve İlarslan null olmayan Bertrand eğrilerini Minkowski 3-uzayında çalışmışlardır. Balgetir ve diğerleri 2004 yılında null Bertrand eğrilerini aynı uzayda çalışmıştır. Ayrıca, Minkowski uzay-zamanda $(1,3)$-Bertrand eğrileri İlarslan ve diğerleri tarafından 2014 yılında çalışılmıştır. Bu çalışmalarda Matsudo ve Yorozu tarafından verilen yöntem takip edilmiştir. Bu çalışmaların dışında da Bertrand eğrileri ve $(1,3)$-Bertrand eğrileri üzerine yapılmış ve farklı özellikleri ortaya koyan çalışmalar da vardır ([10-20]).

Yapılan bu tüm çalışmalarda $(1,3)$-Bertrand eğrisi ve eşlenik eğrisi aynı casual karakterli eğriler olarak ele alınmıştır. Bu da farklı casual karaktere sahip eğrilerin $(1,3)$-Bertrand eğri çifti oluşturup oluşturamayacağı sorusunu akla getirmiştir. Biz bu tez çalışmasında bu soruya cevap vermek adına Bertrand eğrilerini $(1,3)$-normal düzlemlerinin casual karakterine göre sınıflandırarak inceledik. $(1,3)$-normal düzlemini sırasıyla spacelike ve timelike düzlem olarak ele aldık. $(1,3)$-normal düzlemi null bir düzlem olarak düşünüldüğünde bu eğrinin partially null eğri olduğu ortaya çıkmıştır ve bu eğrinin üçüncü eğriliği sıfırdır. Yani bu eğri $\mathbb{E}_1^4$ nin bir alt uzayında yatmaktadır. Bundan dolayı $(1,3)$-normal düzlemi null olarak ele alınmamıştır. Diğer durumlar için bir Bertrand eğrisinin kendi casual karakterinden farklı Bertrand eşlenik eğrilerisine de sahip olabileceği gösterilmiştir. Elde edilen sonuçlar [21] ve [22] makalelerinde yayınlanmıştır.

1.1. Kaynak Özetleri

Birinci bölüm için B. O'Neill (1983), W. Kuhnel (1999), S. Montiel ve A. Ros (1998) un kitaplarının yanı sıra R. Lopez (2014), L. R. Pears (1935), H. Matsuda ve S. Yorozu (2003), N. Ekmekçi ve K. İlarslan (2001), H. Balgetir ve diğerleri (2004) makalelerinden yararlanılmıştır. Diğer bölümlerde yukarıda ifade edilen çalışmaların yanı sıra İ. Gök ve diğerleri (2014), F. Kahraman ve diğerleri (2014) makalelerinden ve referans listesinde adı geçen makaleler ve kitaplardan yararlanılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezde gerekli olan kavramlar ve tanımlar verilecektir.

Tanım 2.1 (Simetrik Bilineer Form)

Bir reel vektör uzayı V için

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall u, v, w \in V$ için

i. $g(u, v) = g(v, u)$

ii. $g(au + bv, w) = ag(u, w) + bg(v, w)$

$g(u, av + bw) = ag(u, v) + bg(u, w)$

şartları sağlanıyorsa g dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde simetrik bilineer form denir [23].

Tanım 2.2 V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun. $0 \neq w \in V$ olmak üzere $\forall u \in V$ için

$$g(u, w) = 0$$

ise g ye V üzerinde dejeneredir denir. Aksi durumda g ye non-dejeneredir denir. Bu tanıma göre g nin non-dejenere olması için gerek ve yeter şart $\forall w \in V$ için

$$g(u, w) = 0 \text{ iken } u = 0$$

olmasıdır [23].

Tanım 2.3 Minkowski uzay-zaman $\mathbb{E}_1^4$, (x_1, x_2, x_3, x_4) $\mathbb{E}_1^4$ in bir dik koordinat sistemi olmak üzere

$$g = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2,$$

olarak tanımlanan non-dejenere metrik ile donatılmış 4 boyutlu Öklid uzayıdır.

Tanım 2.4 $v \in \mathbb{E}_1^4 \backslash \{0\}$ olmak üzere, eğer

i. $g(v, v) > 0$ ise, v spacelike (uzaysı) vektör

ii. $g(v, v) < 0$ ise, v timelike (zamansı) vektör

iii. $g(v, v) = 0$ ise, v null veya lightlike (ışıksı) vektör

olarak adlandırılır ([3]).

Tanım 2.5 $v \in \mathbb{E}_1^4 \backslash \{0\}$ olmak üzere, $\mathbb{E}_1^4$ uzayında v vektörünün normu

$$||v|| = \sqrt{|g(v,v)|}$$

olarak tanımlanır. $||v|| = 1$ ise v vektörüne birim vektör denir.

Tanım 2.6 v, $w \in \mathbb{E}_1^4$ olmak üzere, v ve w vektörlerinin dik olması için gerek ve yeter şart $g(v,w) = 0$ olmasıdır ([3]).

Tanım 2.7 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$ bir eğri olsun. Eğer α eğrisinin $\forall s \in I$ için hız vektörü $\alpha'(s)$ sırasıyla spacelike, timelike veya null vektör ise α eğrisi sırasıyla spacelike, timelike veya null eğri olarak adlandırılır ([3]).

Tanım 2.8 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$ bir eğri olsun.

i. α null bir eğri olmak üzere, eğer $\forall s \in I$ için $g(\alpha''(s), \alpha''(s)) = 1$ şartı sağlanıyorsa α eğrisine pseudo yay parametresi ile parametrelendirilmiştir denir.

ii. α null olmayan bir eğri olmak üzere, eğer $\forall s \in I$ için $g(\alpha'(s), \alpha'(s)) = \pm 1$ şartı sağlanıyorsa α eğrisine yay uzunluğu parametresi ile parametrelendirilmiştir denir ([24]).

Miinkowski uzay-zaman $\mathbb{E}_1^4$ de $\{T, N, B_1, B_2\}$ α eğrisi üzerinde hareketli Frenet çatısı ve $\{\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3\}$ α eğrisinin eğrilik fonksiyonları olsun. Burada T, N, B_1, B_2 sırasıyla α eğrisinin teğet vektör alanı, asli normal vektör alanı, birinci binormal vektör alanı ve ikinci binormal vektör alanıdır.

Eğer α eğrisi spacelike veya timelike eğri ise, Frenet denklemleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_2\kappa_1 & 0 & 0 \\ -\epsilon_1\kappa_1 & 0 & \epsilon_3\kappa_2 & 0 \\ 0 & -\epsilon_2\kappa_2 & 0 & -\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\kappa_3 \\ 0 & 0 & -\epsilon_3\kappa_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

olarak verilir ([25]). Burada $g(T,T) = \epsilon_1$, $g(N,N) = \epsilon_2$, $g(B_1,B_1) = \epsilon_3$, $g(B_2,B_2) = \epsilon_4$, $\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4 = -1$, $\epsilon_i \in \{-1,1\}$, $i \in \{1,2,3,4\}$ dir. Ayrıca aşağıdaki durumlar sağlanır:

$$g(T,N) = g(T,B_1) = g(T,B_2) = g(N,B_1) = g(N,B_2) = g(B_1,B_2) = 0.$$

Eğer α eğrisi Cartan null bir eğri ise, Cartan Frenet denklemleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 \\ \kappa_2 & 0 & -\kappa_1 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \kappa_3 \\ -\kappa_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

olarak verilir ([24]). Burada eğer $\alpha(s)$ bir null doğru ise $\kappa_1(s) = 0$, diğer bütün durumlarda $\kappa_1(s) = 1$ dir. Ayrıca aşağıdaki durumlar sağlanır:

$$g(T, T) = g(B_1, B_1) = 0, \quad g(N, N) = g(B_2, B_2) = 1,$$

$$g(T, N) = g(T, B_2) = g(N, B_1) = g(N, B_2) = g(B_1, B_2) = 0, \quad g(T, B_1) = 1.$$

α eğrisi spacelike bir eğri olmak üzere eğer α eğrisinin asli normal vektör alanı bir null vektör ise özel olarak α eğrisi pseudo null eğri olarak adlandırılır. Eğer α eğrisi pseudo null bir eğri ise

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & -k_2 \\ -k_1 & 0 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \tag{2.3}$$

olarak verilir ([26]). Burada eğer $\alpha(s)$ bir null doğru ise $\kappa_1(s) = 0$, diğer bütün durumlarda $\kappa_1(s) = 1$ dir. Ayrıca aşağıdaki durumlar sağlanır:

$$g(T, T) = g(B_1, B_1) = 1, \quad g(N, N) = g(B_2, B_2) = 0,$$

$$g(T, N) = g(T, B_1) = g(T, B_2) = g(N, B_1) = g(B_1, B_2) = 0, \quad g(N, B_2) = 1.$$

Tanım 2.9 ([27]) P, $\mathbb{E}_1^4$ uzayının bir alt uzayı olsun. Eğer

i. P üzerinde her sıfırdan farklı vektör spacelike vektör ise P ye spacelike altuzay,

ii. P üzerinde en az bir timelike vektör var ise P ye timelike altuzay,

iii. diğer durumlarda P ye lightlike altuzay denir.

Notasyon $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$ ve $\beta^* : I^* \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzay-zamanda eğriler olsun. Bu tez çalışması boyunca $\{T, N, B_1, B_2\}$ ve $\{\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3\}$ β eğrisinin sırasıyla Frenet çatısı ve eğrilik fonksiyonları, s de β eğrisinin yay uzunluğu paramteresi veya pseudo yay uzunluğu parametresi olarak alınacaktır. Benzer şekilde $\{T^*, N^*, B_1^*, B_2^*\}$ ve $\{\kappa_1^*, \kappa_2^*, \kappa_3^*\}$ β^* eğrisinin sırasıyla Frenet çatısı ve eğrilik fonksiyonları, s^* da β^* eğrisinin yay uzunluğu paramteresi veya pseudo yay uzunluğu parametresi olarak alınacaktır.

3. MİNKOWSKİ UZAY-ZAMANDA BERTRAND EĞRİLERİ

Bu bölümde Minkowski uzay-zamanda spacelike, timelike, Cartan null ve pseudo null eğrilerin kendisinden başka Bertrand eşlenik eğrilerine sahip olmadığına dair teoremler verilecektir.

Tanım 3.1 $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$, Minkowski uzay-zamanda bir eğri olsun. Eğer her $s \in I$ için, β eğrisinin her $\beta(s)$ noktasındaki asli normali başka bir $\beta^* : I^* \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$ eğrisinin $\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s))$ noktasındaki asli normali ile lineer bağımlı ise β eğrisine Bertrand eğrisi, β^* eğrisine de β eğrisinin Bertrand eşlenik eğrisi denir. Burada $f : I \to I^*$ bir regüler C^∞ dönüşümdür öyle ki her $s \in I$ için β nın her $\beta(s)$ noktasına β^* ın bir $\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s))$ noktası karşılık getirir.

Teorem 3.1 $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$ sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları κ_1, κ_2, κ_3 ve asli normal vektörü N spacelike vektör olan birim hızlı spacelike eğri olsun. Bu durumda β eğrisinin kendisinden başka Bertrand eşlenik eğrisi yoktur.

İspat. $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$ sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları κ_1, κ_2, κ_3 ve asli normal vektörü N spacelike vektör olan birim hızlı spacelike eğri olsun. Kabul edelim ki β^* eğrisi, β eğrisinin kendisinden başka Bertrand eşlenik eğrisi olsun. β eğrisinin asli normal vektörü N spacelike vektör olduğundan β^* eğrisi (i) spacelike asli normal vektöre N^* sahip spacelike eğri veya timelike eğridir, veya (ii) Cartan null eğridir. Bu durumlar ayrı ayrı ele alınacaktır.

(i) β^* eğrisi, spacelike asli normal vektöre N^* sahip spacelike eğri veya timelike eğri olsun. Bu durumda, her $s^* \in I^*$ ve her $s \in I$ için β^* aşağıdaki formda yazılabilir

$$\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s)) = \beta(s) + \lambda(s)N(s). \tag{3.1}$$

(3.1) denkleminde s ye göre türev alınır ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$T^* f' = (1 - \lambda\kappa_1)\, T + \lambda' N + \epsilon_3 \lambda \kappa_2 B_1 \tag{3.2}$$

elde edilir. Bu denklem N ile çarpılırsa, $\lambda' = 0$ bulunur. Buradan (3.2) denklemi

$$T^* f' = (1 - \lambda\kappa_1)\, T + \epsilon_3 \lambda \kappa_2 B_1 \tag{3.3}$$

olarak bulunur. Eğer

$$a = \frac{1-\lambda\kappa_1}{f'} \quad \text{ve} \quad b = \frac{\epsilon_3\lambda\kappa_2}{f'}$$

alınırsa (3.3) denkleminden

$$T^* = aT + bB_1 \tag{3.4}$$

elde edilir. (3.4) denkleminde s ye göre türev alınır ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$f'\kappa_1^* N^* = a'T + (a\kappa_1 - b\kappa_2)\, N + b'B_1 - \epsilon_3 b\kappa_3 B_2$$

bulunur. Bu denklem B_2 ile çarpılırsa, $b\kappa_3 = 0$ elde edilir. Bu bir çelişkidir.

(ii) β^* eğrisi, Cartan null eğri olsun. Bu durumda, her $s^* \in I^*$ ve her $s \in I$ için β^* aşağıdaki formda yazılabilir

$$\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s)) = \beta(s) + \lambda(s)N(s). \tag{3.5}$$

(3.5) denkleminde s ye göre türev alınır, (2.1) ve (2.2) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$T^* f' = (1-\lambda\kappa_1)\, T + \lambda' N + \epsilon_3\lambda\kappa_2 B_1 \tag{3.6}$$

elde edilir. Bu denklem N ile çarpılırsa, $\lambda' = 0$ bulunur. Buradan (3.6) denklemi

$$T^* f' = (1-\lambda\kappa_1)\, T + \epsilon_3\lambda\kappa_2 B_1 \tag{3.7}$$

olarak bulunur. Eğer

$$a = \frac{1-\lambda\kappa_1}{f'} \quad \text{ve} \quad b = \frac{\epsilon_3\lambda\kappa_2}{f'}$$

alınırsa (3.7) denkleminden

$$T^* = aT + bB_1 \tag{3.8}$$

elde edilir. (3.8) denkleminde s ye göre türev alınır, (2.1) ve (2.2) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$f'N^* = a'T + (a\kappa_1 - b\kappa_2)\, N + b'B_1 - \epsilon_3 b\kappa_3 B_2$$

bulunur. Bu denklem B_2 ile çarpılırsa, $b\kappa_3 = 0$ elde edilir. Bu bir çelişkidir.

Teorem 3.2 $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$ sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları κ_1, κ_2, κ_3 ve asli normal vektörü N timelike vektör olan birim hızlı spacelike eğri olsun. Bu durumda β eğrisinin kendisinden başka Bertrand eşlenik eğrisi yoktur.

İspat. $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$ sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları κ_1, κ_2, κ_3 ve asli normal vektörü N timelike vektör olan birim hızlı spacelike eğri olsun. Kabul edelim ki β^* eğrisi, β eğrisinin kendisinden başka Bertrand eşlenik eğrisi olsun. β eğrisinin asli normal vektörü N timelike vektör olduğundan β^* eğrisi de asli normal vektörü N^* timelike vektör olan bir spacelike eğridir. Bu durumda, her $s^* \in I^*$ ve her $s \in I$ için β^* aşağıdaki formda yazılabilir

$$\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s)) = \beta(s) + \lambda(s)N(s). \tag{3.9}$$

(3.9) denkleminde s ye göre türev alınır ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$T^* f' = (1 - \lambda\kappa_1)\, T + \lambda' N + \lambda\kappa_2 B_1 \tag{3.10}$$

elde edilir. Bu denklem N ile çarpılırsa, $\lambda' = 0$ bulunur. Buradan (3.10) denklemi

$$T^* f' = (1 - \lambda\kappa_1)\, T + \lambda\kappa_2 B_1 \tag{3.11}$$

olarak bulunur. Eğer

$$a = \frac{1 - \lambda\kappa_1}{f'} \quad \text{ve} \quad b = \frac{\lambda\kappa_2}{f'}$$

alınırsa (3.11) denkleminden

$$T^* = aT + bB_1 \tag{3.12}$$

elde edilir. (3.12) denkleminde s ye göre türev alınır ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$-f'\kappa_1^* N^* = a'T + (b\kappa_2 - a\kappa_1)\, N + b' B_1 + b\kappa_3 B_2$$

bulunur. Bu denklem B_2 ile çarpılırsa, $b\kappa_3 = 0$ elde edilir. Bu bir çelişkidir.

Teorem 3.3 $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$ sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları κ_1, κ_2, κ_3 olan birim hızlı timelike eğri olsun. Bu durumda β eğrisinin kendisinden başka Bertrand eşlenik eğrisi yoktur.

İspat. $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$ sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları κ_1, κ_2, κ_3 olan birim hızlı timelike eğri olsun. Kabul edelim ki β^* eğrisi, β eğrisinin kendisinden başka Bertrand eşlenik eğrisi olsun. β eğrisinin asli normal vektörü N spacelike vektör olduğundan β^* eğrisi (i) spacelike asli normal vektöre N^* sahip spacelike eğri veya timelike eğridir, veya (ii) Cartan null eğridir. Bu durumlar ayrı ayrı ele alınacaktır.

(i) β^* eğrisi, spacelike asli normal vektöre N^* sahip spacelike eğri veya timelike eğri olsun. Bu durumda, her $s^* \in I^*$ ve her $s \in I$ için β^* aşağıdaki formda yazılabilir

$$\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s)) = \beta(s) + \lambda(s)N(s). \tag{3.13}$$

(3.13) denkleminde s ye göre türev alınır ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$T^*f' = (1 + \lambda\kappa_1)\,T + \lambda' N + \lambda\kappa_2 B_1 \tag{3.14}$$

elde edilir. Bu denklem N ile çarpılırsa, $\lambda' = 0$ bulunur. Buradan (3.14) denklemi

$$T^*f' = (1 + \lambda\kappa_1)\,T + \lambda\kappa_2 B_1 \tag{3.15}$$

olarak bulunur. Eğer

$$a = \frac{1 + \lambda\kappa_1}{f'} \quad \text{ve} \quad b = \frac{\lambda\kappa_2}{f'}$$

alınırsa (3.15) denkleminden

$$T^* = aT + bB_1 \tag{3.16}$$

elde edilir. (3.16) denkleminde s ye göre türev alınır ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$f'\kappa_1^* N^* = a'T + (a\kappa_1 - b\kappa_2)\,N + b'B_1 + b\kappa_3 B_2$$

bulunur. Bu denklem B_2 ile çarpılırsa, $b\kappa_3 = 0$ elde edilir. Bu bir çelişkidir.

(ii) β^* eğrisi, Cartan null eğri olsun. Bu durumda, her $s^* \in I^*$ ve her $s \in I$ için β^* aşağıdaki formda yazılabilir

$$\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s)) = \beta(s) + \lambda(s)N(s). \tag{3.17}$$

(3.17) denkleminde s ye göre türev alınır, (2.1) ve (2.2) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$T^*f' = (1 + \lambda\kappa_1)\,T + \lambda' N + \lambda\kappa_2 B_1 \tag{3.18}$$

elde edilir. Bu denklem N ile çarpılırsa, $\lambda' = 0$ bulunur. Buradan (3.18) denklemi

$$T^* f' = (1 + \lambda\kappa_1)\, T + \lambda\kappa_2 B_1 \tag{3.19}$$

olarak bulunur. Eğer

$$a = \frac{1 - \lambda\kappa_1}{f'} \quad \text{ve} \quad b = \frac{\epsilon_3 \lambda\kappa_2}{f'}$$

alınırsa (3.19) denkleminden

$$T^* = aT + bB_1 \tag{3.20}$$

elde edilir. (3.20) denkleminde s ye göre türev alınır, (2.1) ve (2.2) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$f' N^* = a'T + (a\kappa_1 - b\kappa_2)\, N + b' B_1 + b\kappa_3 B_2$$

bulunur. Bu denklem B_2 ile çarpılırsa, $b\kappa_3 = 0$ elde edilir. Bu bir çelişkidir.

Teorem 3.4 $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$ eğrisi eğrilikleri $\kappa_1 = 1$, κ_2, $\kappa_3 \neq 0$ olan bir Cartan null eğri olsun. Bu durumda β eğrisinin kendisinden başka Bertrand eşlenik eğrisi yoktur.

İspat. $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$ eğrisi eğrilikleri $\kappa_1 = 1$, κ_2, $\kappa_3 \neq 0$ olan bir Cartan null eğri olsun. Kabul edelim ki β^* eğrisi, β eğrisinin kendisinden başka Bertrand eşlenik eğrisi olsun. β eğrisinin asli normal vektörü N spacelike vektör olduğundan β^* eğrisi (i) spacelike asli normal vektöre N^* sahip spacelike eğri veya timelike eğridir, veya (ii) Cartan null eğridir. Bu durumlar ayrı ayrı ele alınacaktır. Bu durumlar ayrı ayrı ele alınacaktır.
(i) β^* eğrisi, spacelike asli normal vektöre N^* sahip spacelike eğri veya timelike eğri olsun. Bu durumda, her $s^* \in I^*$ ve her $s \in I$ için β^* aşağıdaki formda yazılabilir

$$\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s)) = \beta(s) + \lambda(s) N(s). \tag{3.21}$$

(3.21) denkleminde s ye göre türev alınır,(2.1) ve (2.2) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$T^* f' = (1 + \lambda\kappa_2)\, T + \lambda' N - \lambda B_1 \tag{3.22}$$

elde edilir. Bu denklem N ile çarpılırsa, $\lambda' = 0$ bulunur. Buradan (3.22) denklemi

$$T^* f' = (1 + \lambda\kappa_2)\, T - \lambda B_1 \tag{3.23}$$

olarak bulunur. Eğer

$$a = \frac{1+\lambda\kappa_2}{f'} \quad \text{ve} \quad b = \frac{-\lambda}{f'}$$

alınırsa (3.23) denkleminden

$$T^* = aT + bB_1 \tag{3.24}$$

elde edilir. (3.24) denkleminde s ye göre türev alınır, (2.1) ve (2.2) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$f'\kappa_1^* N^* = a'T + (a - b\kappa_2)\, N + b'B_1 + b\kappa_3 B_2$$

bulunur. Bu denklem B_2 ile çarpılırsa, $b\kappa_3 = 0$ elde edilir. Bu bir çelişkidir.

(ii) ([28]) β^* eğrisi, Cartan null eğri olsun. Bu durumda, her $s^* \in I^*$ ve her $s \in I$ için β^* aşağıdaki formda yazılabilir

$$\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s)) = \beta(s) + \lambda(s)N(s). \tag{3.25}$$

(3.25) denkleminde s ye göre türev alınır ve (2.2) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$T^* f' = (1+\lambda\kappa_2)\, T + \lambda' N - \lambda B_1 \tag{3.26}$$

elde edilir. Bu denklem N ile çarpılırsa, $\lambda' = 0$ bulunur. Buradan (3.26) denklemi

$$T^* f' = (1+\lambda\kappa_2)\, T - \lambda B_1 \tag{3.27}$$

olarak bulunur. Eğer

$$a = \frac{1+\lambda\kappa_2}{f'} \quad \text{ve} \quad b = \frac{-\lambda}{f'}$$

alınırsa (3.27) denkleminden

$$T^* = aT + bB_1 \tag{3.28}$$

elde edilir. (3.28) denkleminde s ye göre türev alınır ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$f' N^* = a'T + (a - b\kappa_2)\, N + b'B_1 + b\kappa_3 B_2$$

bulunur. Bu denklem B_2 ile çarpılırsa, $b\kappa_3 = 0$ elde edilir. Bu bir çelişkidir.

Teorem 3.5 $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$ eğrisi eğrilikleri $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 \neq 0$, κ_3 olan bir pseudo null eğri olsun. Bu durumda β eğrisinin kendinden başka Bertrand eşlenik eğrisi yoktur.

İspat. Bu teoremin ispatı [14] makalesinde görülebilir.

4. MİNKOWSKİ UZAY-ZAMANDA GENELLEŞTİRİLMİŞ BERTRAND EĞRİLERİ

Bu bölümde Minkowski-uzay zamanda genelleştirilmiş Bertrand eğrileri veya diğer bir adıyla $(1,3)$-Bertrand eğrileri incelenecektir.

Tanım 4.1 $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$ ve $\beta^* : I^* \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzay-zaman $\mathbb{E}_1^4$ de C^∞ tipinden özel Frenet eğrileri (tamamen Minkowski uzay-zamanda yatan eğriler), ve $f : I \to I^*$ bir regüler C^∞ dönüşüm olsun öyle ki her $s \in I$ için β nın her $\beta(s)$ noktasına β^* ın bir $\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s))$ noktası karşılık getirsin. Eğer her $s \in I$ için, β eğrisinin her $\beta(s)$ noktasındaki $(1,3)$-normal düzlemi ile β^* ın bu noktaya karşılık gelen $\beta^*(s^*)$ noktasındaki $(1,3)$-normal düzlemi çakışıksa β eğrisine bir $(1,3)$-Bertrand eğrisi ve β^* eğrisine de β eğrisinin $(1,3)$-Bertrand eşlenik eğrisi denir. Burada s ve s^* sırasıyla β ve β^* eğrilerinin yay uzunluğu veya pseudo yay uzunluğu parametreleridir.

$(1,3)$-Bertrand eğrileri, $(1,3)$-normal düzlemin spacelike veya timelike olmasına göre ayrı ayrı incelenecektir.

4.1. Minkowski Uzay-Zamanda Spacelike $(1,3)$-Normal Düzlemli Bertrand Eğrileri

Bu bölümde, Minkowski uzay-zamanda ortak $(1,3)$-normal düzlemleri spacelike olan Bertrand eğri çiftleri eğrilerin farklı casual karakterlerine göre incelenecektir.

$\beta : I \to \mathbb{E}_1^4$ eğrilikleri $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ ve Frenet çatısı $\{T, N, B_1, B_2\}$ olan bir $(1,3)$-Bertrand eğrisi ve $\beta^* : I \to \mathbb{E}_1^4$ da eğrilikleri $\kappa_1^*, \kappa_2^*, \kappa_3^*$ ve Frenet çatısı $\{T^*, N^*, B_1^*, B_2^*\}$ olmak üzere β nın $(1,3)$-Bertrand eşlenik eğrisi olsun. Kabul edelim ki $\{N, B_2\}$ tarafından gerilen $(1,3)$-normal düzlemi spacelike düzlem olsun. Bu durumda aşağıdaki dört durum söz konusudur.

Durum 4.1 β sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları κ_1, κ_2, κ_3, asli normal vektörü N ve ikinci binormal vektörü B_2 spacelike vektörler olan bir spacelike veya timelike eğri ve β^* da sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları κ_1^*, κ_2^*, κ_3^* asli normal vektörü N^*

ve ikinci binormal vektörü B_2^* spacelike vektörler olan bir spacelike veya timelike eğridir.

Durum 4.2 β sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları κ_1, κ_2, κ_3, asli normal vektörü N ve ikinci binormal vektörü B_2 spacelike vektörler olan bir spacelike veya timelike eğri ve β^* eğrilikleri $\kappa_1^* = 1$, κ_2^*, $\kappa_3^* \neq 0$ olan bir Cartan null eğridir.

Durum 4.3 β eğrilikleri $\kappa_1 = 1$, κ_2, $\kappa_3 \neq 0$ olan bir Cartan null eğri ve β^* sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları κ_1^*, κ_2^*, κ_3^*, asli normal vektörü N^* ve ikinci binormal vektörü B_2^* spacelike vektörler olan bir spacelike veya timelike eğridir.

Durum 4.4 β eğrilikleri $\kappa_1 = 1$, κ_2, $\kappa_3 \neq 0$ olan bir Cartan null eğri ve β^* da eğrilikleri $\kappa_1^* = 1$, κ_2^*, $\kappa_3^* \neq 0$ olan bir Cartan null eğridir.

Sırasıyla bu dört durum ayrı ayrı ele alınacaktır.

Durum 4.1. β sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları κ_1, κ_2, κ_3, asli normal vektörü N ve ikinci binormal vektörü B_2 spacelike vektörler olan bir spacelike veya timelike eğri ve β^* da sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları κ_1^*, κ_2^*, κ_3^*, asli normal vektörü N^* ve ikinci binormal vektörü B_2^* spacelike vektörler olan bir spacelike veya timelike eğri olsun. Bu durumda aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.1 $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$ sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları κ_1, κ_2, κ_3, asli normal vektörü N ve ikinci binormal vektörü B_2 spacelike vektörler olan bir birim hızlı spacelike veya timelike eğri olsun. Bu durumda β eğrisinin, $(1,3)$-Bertrand eşlenik eğrisi eğrilikleri sıfırdan farklı, spacelike asli normal ve ikinci binormal vektörlere sahip spacelike veya timelike bir eğri olan $(1,3)$-Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şart her $s \in I$ için aşağıdaki şartları sağlayan a, b, $h \neq \mp 1$, μ reel sayıları vardır;

$$a\kappa_2(s) - b\kappa_3(s) \neq 0, \tag{4.1}$$

$$1 = \epsilon_1 a\kappa_1(s) + \epsilon_3 h(a\kappa_2(s) - b\kappa_3(s)), \tag{4.2}$$

$$\mu\kappa_3(s) = h\kappa_1(s) - \kappa_2(s), \tag{4.3}$$

$$-\kappa_1(s)\kappa_2(s)(h^2+1) + h(\kappa_1^2(s) + \kappa_2^2(s) + \kappa_3^2(s)) \neq 0. \tag{4.4}$$

İspat. Kabul edelim ki $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$ sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları κ_1, κ_2, κ_3, asli normal vektörü N ve ikinci binormal vektörü B_2 spacelike vektörler olan bir birim hızlı spacelike veya timelike eğri ve $\beta^* : I^* \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$ eğrisi β eğrisinin sıfırdan farklı eğrilikleri $\kappa_1^*, \kappa_2^*, \kappa_3^*$, asli normal vektörü N^* ve ikinci binormal vektörü B_2^* spacelike vektörler olan bir spacelike veya timelike $(1,3)$-Bertrand eşlenik eğrisi olsun. Bu durumda, her $s^* \in I^*$ ve her $s \in I$ için β^* aşağıdaki formda yazılabilir

$$\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s)) = \beta(s) + a(s)N(s) + b(s)B_2(s). \tag{4.5}$$

Burada $a(s)$ ve $b(s)$, I üzerinde $C^\infty-$fonksiyonlardır. (4.5) denkleminde s ye göre türev alınır ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$T^*f' = (1 - a\epsilon_1\kappa_1)T + a'N + \epsilon_3(a\kappa_2 - b\kappa_3)B_1 + b'B_2 \tag{4.6}$$

elde edilir. Bu son eşitlik sırasıyla N ve B_2 ile çarpılırsa

$$a' = 0 \quad \text{ve} \quad b' = 0 \tag{4.7}$$

bulunur. (4.7) denklemi (4.6) denkleminde yazılırsa

$$T^*f' = (1 - a\epsilon_1\kappa_1)T + \epsilon_3(a\kappa_2 - b\kappa_3)B_1 \tag{4.8}$$

bulunur. (4.8) denklemi kendisi ile çarpılırsa

$$\epsilon_1^*(f')^2 = \epsilon_1(1 - a\epsilon_1\kappa_1)^2 + \epsilon_3(a\kappa_2 - b\kappa_3)^2 \tag{4.9}$$

olduğu görülür. Eğer

$$\delta = \frac{1 - a\epsilon_1\kappa_1}{f'} \quad \text{ve} \quad \gamma = \frac{\epsilon_3(a\kappa_2 - b\kappa_3)}{f'}, \tag{4.10}$$

alınırsa (4.8) denkleminden

$$T^* = \delta T + \gamma B_1 \tag{4.11}$$

elde edilir. (4.11) denkleminde s ye göre türev alınır ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$f'\kappa_1^*N^* = \delta'T + (\delta\kappa_1 - \gamma\kappa_2)N + \gamma'B_1 + \gamma\kappa_3B_2 \tag{4.12}$$

bulunur. Bu denklem sırasıyla T ve B_1 ile çarpılırsa

$$\delta' = 0 \quad \text{ve} \quad \gamma' = 0 \tag{4.13}$$

elde edilir. Kabul edelim ki $\gamma = 0$ olsun. Bu durumda (4.11) denkleminden N ile N^* vektörlerinin lineer bağımlı olduğu görülür. Bölüm 3 den bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $\gamma \neq 0$ dır. Öyleyse (4.10) denkleminden

$$a\kappa_2 - b\kappa_3 \neq 0 \tag{4.14}$$

ve

$$1 = a\epsilon_1\kappa_1 + h\epsilon_3(a\kappa_2 - b\kappa_3) \tag{4.15}$$

elde edilir. Burada (4.9) denkleminden $h = \delta/\gamma \neq \mp 1$ olduğu görülür. (4.13) denklemi (4.12) de kullanılırsa

$$f'\kappa_1^* N^* = (\delta\kappa_1 - \gamma\kappa_2)N + \gamma\kappa_3 B_2 \tag{4.16}$$

olduğu görülür. (4.16) denklemi kendisi ile çarpılırsa

$$(f')^2(\kappa_1^*)^2 = (\delta\kappa_1 - \gamma\kappa_2)^2 + \gamma^2\kappa_3^2 \tag{4.17}$$

bulunur. (4.10) ve (4.17) denklemlerinden

$$(f')^2(\kappa_1^*)^2 = \frac{(a\kappa_2 - b\kappa_3)^2}{(f')^2}[(h\kappa_1 - \kappa_2)^2 + \kappa_3^2] \tag{4.18}$$

elde edilir. (4.15) denklemi (4.9) denkleminde yazılırsa

$$(f')^2 = \epsilon_1^*\epsilon_1(a\kappa_2 - b\kappa_3)^2[h^2 - 1] \tag{4.19}$$

olduğu görülür. Burada $h^2 \neq 1$ dir. (4.19) ve (4.18) denklemlerinden

$$(f')^2(\kappa_1^*)^2 = \frac{\epsilon_1^*\epsilon_1}{h^2 - 1}[(h\kappa_1 - \kappa_2)^2 + \kappa_3^2] \tag{4.20}$$

bulunur. Eğer

$$\lambda_1 = \frac{(\delta\kappa_1 - \gamma\kappa_2)}{f'\kappa_1^*} = \frac{\epsilon_3(a\kappa_2 - b\kappa_3)}{(f')^2\kappa_1^*}[(h\kappa_1 - \kappa_2)], \tag{4.21}$$

$$\lambda_2 = \frac{\gamma\kappa_3}{f'\kappa_1^*} = \frac{\epsilon_3(a\kappa_2 - b\kappa_3)}{(f')^2\kappa_1^*}\kappa_3 \tag{4.22}$$

alınırsa (4.16) denkleminden

$$N^* = \lambda_1 N + \lambda_2 B_2 \tag{4.23}$$

bulunur. (4.23) denkleminde s ye göre türev alınır ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$-\epsilon_1^* f' \kappa_1^* T^* + \epsilon_3^* f' \kappa_2^* B_1^* = -\epsilon_1 \kappa_1 \lambda_1 T + \lambda_1' N + \epsilon_3(\lambda_1\kappa_2 - \lambda_2\kappa_3)B_1 + \lambda_2' B_2 \quad (4.24)$$

elde edilir. Bu denklem sırasıyla N ve B_2 ile çarpılırsa

$$\lambda_1' = 0 \quad \text{ve} \quad \lambda_2' = 0 \tag{4.25}$$

bulunur. $\lambda_2 \neq 0$ olduğundan, (4.21) ve (4.22) denklemlerinden

$$\mu\kappa_3 = h\kappa_1 - \kappa_2 \tag{4.26}$$

elde edilir. Burada $\mu = \lambda_1/\lambda_2$ dir. (4.25) ve (4.24) denklemlerinden

$$-\epsilon_1^* f' \kappa_1^* T^* + \epsilon_3^* f' \kappa_2^* B_1^* = -\epsilon_1 \kappa_1 \lambda_1 T + \epsilon_3(\lambda_1\kappa_2 - \lambda_2\kappa_3)B_1 \tag{4.27}$$

olduğu görülür. Ayrıca (4.8) ve (4.27) denklemlerinden

$$\epsilon_3^* f' \kappa_2^* B_1^* = A(s)T + B(s)B_1$$

bulunur. Burada

$$A(s) = \frac{\epsilon_1\epsilon_3(a\kappa_2 - b\kappa_3)}{(f')^2(h^2-1)\kappa_1^*}[-\kappa_1\kappa_2(h^2+1) + h(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2)]$$

ve

$$B(s) = \frac{\epsilon_1\epsilon_3 h(a\kappa_2 - b\kappa_3)}{(f')^2(h^2-1)\kappa_1^*}[-\kappa_1\kappa_2(h^2+1) + h(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2)]$$

dir. $\epsilon_3^* f' \kappa_2^* B_1^* \neq 0$ olduğundan dolayı

$$-\kappa_1\kappa_2(h^2+1) + h(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 \neq 0$$

olduğu görülür.

Tersine, kabul edelim ki $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$ sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları κ_1, κ_2, κ_3, asli normal vektörü N ve ikinci binormal vektörü B_2 spacelike vektörler olan bir birim hızlı spacelike veya timelike eğri olsun ve a, b, $h \neq \mp 1$, μ reel sayıları için, (4.1),(4.2),(4.3) ve (4.4) durumları sağlansın. Bu durumda bir β^* eğrisi aşağıdaki gibi tanımlanabilir

$$\beta^*(s^*) = \beta(s) + aN(s) + bB_2(s). \tag{4.28}$$

(4.28) denkleminde s ye göre türev alınır ve (2.1) verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\frac{d\beta^*}{ds} = (1 - a\epsilon_1\kappa_1)T + \epsilon_3(a\kappa_2 - b\kappa_3)B_1 \tag{4.29}$$

bulunur. (4.29) ve (4.2) denklemlerinden

$$\frac{d\beta^*}{ds} = \epsilon_3(a\kappa_2 - b\kappa_3)[hT + B_1] \tag{4.30}$$

elde edilir ve bu denklem yardımıyla

$$f' = \frac{ds^*}{ds} = \left\| \frac{d\beta^*}{ds} \right\| = m_1(a\kappa_2 - b\kappa_3)\sqrt{\epsilon_1 m_2\left(h^2 - 1\right)} > 0 \tag{4.31}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $m_1 = \pm 1$ öyle ki $m_1(a\kappa_2 - b\kappa_3) > 0$ ve $m_2 = \mp 1$ öyle ki $\epsilon_1 m_2\left(h^2 - 1\right) > 0$ dır. (4.31) denklemi kullanılarak, (4.30) denklemi yeniden yazılırsa

$$T^* = \frac{\epsilon_3 m_1}{\sqrt{\epsilon_1 m_2\left(h^2 - 1\right)}}[hT + B_1] \tag{4.32}$$

elde edilir. Buradan $g(T^*, T^*) = m_2 = \epsilon_1^*$ olduğu görülür. (4.32) denkleminde s ye göre türev alınır ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\frac{dT^*}{ds^*} = \frac{\epsilon_3 m_1}{f'\sqrt{\epsilon_1 m_2\left(h^2 - 1\right)}}[(h\kappa_1 - \kappa_2)N + \kappa_3 B_2] \tag{4.33}$$

bulunur. (4.33) denkleminden

$$\kappa_1^* = \left\| \frac{dT^*}{ds^*} \right\| = \frac{\sqrt{(h\kappa_1 - \kappa_2)^2 + \kappa_3^2}}{f'\sqrt{\epsilon_1 m_2\left(h^2 - 1\right)}} > 0 \tag{4.34}$$

elde edilir. (4.33) ve (4.34) denklemlerinden

$$N^* = \frac{1}{\kappa_1^*}\frac{dT^*}{ds^*} = \frac{\epsilon_3 m_1}{\sqrt{(h\kappa_1 - \kappa_2)^2 + \kappa_3^2}}[(h\kappa_1 - \kappa_2)N + \kappa_3 B_2] \tag{4.35}$$

olduğu bulunur. Buradan $g(N^*, N^*) = 1$ olduğu görülür. Eğer

$$\lambda_3 = \frac{\epsilon_3 m_1(h\kappa_1 - \kappa_2)}{\sqrt{(h\kappa_1 - \kappa_2)^2 + \kappa_3^2}} \quad \text{ve} \quad \lambda_4 = \frac{\epsilon_3 m_1 \kappa_3}{\sqrt{(h\kappa_1 - \kappa_2)^2 + \kappa_3^2}} \tag{4.36}$$

alınırsa, (4.35) denkleminden

$$N^* = \lambda_3 N + \lambda_4 B_2 \tag{4.37}$$

elde edilir. (4.37) denkleminde s ye göre türev alınır ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$f'\frac{dN^*}{ds^*} = -\epsilon_1\lambda_3\kappa_1 T + \lambda_3' N + \epsilon_3(\kappa_2\lambda_3 - \kappa_3\lambda_4)B_1 + \lambda_4' B_2 \tag{4.38}$$

olduğu görülür. (4.3) de s ye göre türev alınırsa

$$(h\kappa_1' - \kappa_2')\kappa_3 - (h\kappa_1 - \kappa_2)\kappa_3' = 0 \tag{4.39}$$

elde edilir. (4.36) de s ye göre türev alınır ve (4.39) kullanılırsa

$$\lambda_3' = 0 \quad \text{ve} \quad \lambda_4' = 0 \tag{4.40}$$

olduğu bulunur. (4.36) ve (4.40) denklemleri (4.38) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{dN^*}{ds^*} = \frac{m_1\kappa_1(h\kappa_1 - \kappa_2)}{f'\sqrt{(h\kappa_1 - \kappa_2)^2 + \kappa_3^2}}T + \frac{m_1[\kappa_2(h\kappa_1 - \kappa_2) - \kappa_3^2]}{f'\sqrt{(h\kappa_1 - \kappa_2)^2 + \kappa_3^2}}B_1 \tag{4.41}$$

elde edilir. (4.32) ve (4.34) denklemlerinden

$$\epsilon_1^*\kappa_1^*T^* = \frac{-m_1\sqrt{(h\kappa_1 - \kappa_2)^2 + \kappa_3^2}}{f'(h^2 - 1)}[hT + B_1] \tag{4.42}$$

olduğu görülür. (4.41) ve (4.42) denklemleri birlikte kullanıldığında

$$\frac{dN^*}{ds^*} + \epsilon_1^*\kappa_1^*T^* = \frac{P(s)}{R(s)}\,[T + hB_1] \tag{4.43}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned} P(s) &= -m_1[-\kappa_1\kappa_2(h^2 + 1) + h(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2)] \neq 0 \\ R(s) &= f'(h^2 - 1)\sqrt{(h\kappa_1 - \kappa_2)^2 + \kappa_3^2} \neq 0 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. (4.43) denkleminden

$$\kappa_2^* = \left|\frac{P(s)}{R(s)}\right|\sqrt{\epsilon_3 m_3\,(h^2 - 1)} \tag{4.44}$$

olduğu görülür. Burada $m_3 = \pm 1$ öyle ki $\epsilon_3 m_3\,(h^2 - 1) > 0$ dır. (4.43) ve (4.44) denklemlerinden

$$B_1^* = \frac{\epsilon_3^*}{\kappa_2^*}[\frac{dN^*}{ds^*} + \epsilon_1^*\kappa_1^*T^*] = \frac{m_4\epsilon_3^*}{\sqrt{\epsilon_3 m_3\,(h^2 - 1)}}[T + hB_1] \tag{4.45}$$

bulunur. Burada $m_4 = \left|\frac{P(s)}{R(s)}\right| / \frac{P(s)}{R(s)} = \pm 1$ dir. (4.45) denkleminden, $g(B_1^*, B_1^*) = m_3 = \epsilon_3^* = -\epsilon_1^*$ olduğu görülür. Birim B_2^* vektörü $B_2^* = -\lambda_4 N + \lambda_3 B_2$ olarak tanımlanabilir, yani

$$B_2^* = \frac{m_1\epsilon_3}{\sqrt{(h\kappa_1 - \kappa_2)^2 + \kappa_3^2}}\,[-\kappa_3 N + (h\kappa_1 - \kappa_2)B_2] \tag{4.46}$$

şeklinde tanımlanabilir. Son olarak, (4.45) ve (4.46) denklemlerinden

$$\kappa_3^* = g(\frac{dB_1^*}{ds^*}, B_2^*) = \frac{m_1 m_4 \epsilon_3 \epsilon_3^* \kappa_1 \kappa_3 (h^2-1)}{f' \sqrt{\epsilon_3 m_3 (h^2-1)} \sqrt{(h\kappa_1 - \kappa_2)^2 + \kappa_3^2}} \neq 0$$

olarak bulunur. Sonuç olarak β^* eğrisi eğrilik fonksiyonları sıfırdan farklı, spacelike asli normal vektör ve ikinci binormal vektöre sahip spacelike veya timelike bir eğridir ve span$\{N^*, B_2^*\}$ =span$\{N, B_2\}$ olduğundan β eğrisinin $(1,3)$-Bertrand eşlenik eğrisidir.

Durum 4.2 β sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları κ_1, κ_2, κ_3, asli normal vektörü N ve ikinci binormal vektörü B_2 spacelike vektörler olan bir spacelike veya timelike eğri ve β^* eğrilikleri $\kappa_1^* = 1$, κ_2^*, $\kappa_3^* \neq 0$ olan bir Cartan null eğri olsun. Bu durumda aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.2 (i) $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$ sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları κ_1, κ_2, κ_3, asli normal vektörü N ve ikinci binormal vektörü B_2 spacelike vektörler olan bir birim hızlı spacelike veya timelike eğri olsun. Eğer β eğrisi, $(1,3)$-Bertrand eşlenik eğrisi sıfırdan farklı üçüncü eğrilik fonksiyonuna sahip bir Cartan null eğri olan $(1,3)$-Bertrand eğrisi ise bu durumda her $s \in I$ için aşağıdaki şartları sağlayan a, b, $h = \mp 1$, μ reel sayıları vardır;

$$a\kappa_2(s) - b\kappa_3(s) \neq 0, \tag{4.47}$$

$$1 = \epsilon_1 a\kappa_1(s) + \epsilon_3 h(a\kappa_2(s) - b\kappa_3(s)), \tag{4.48}$$

$$\mu\kappa_3(s) = h\kappa_1(s) - \kappa_2(s), \tag{4.49}$$

ve

$$P_1^2(s) = P_2^2(s). \tag{4.50}$$

Burada her $s \in I$ için

$$\begin{aligned} P_1(s) &= 2\mu^3\kappa_1(s)\kappa_3(s) + h\mu^2\left(\kappa_2^2(s) - \kappa_1^2(s)\right) + 2\mu\kappa_3(s)(\kappa_1(s) - h\kappa_2(s)) \\ &\quad + h\kappa_3^2(s), \end{aligned}$$

$$P_2(s) = 2\mu^3\kappa_2(s)\kappa_3(s) + \mu^2\left(\kappa_2^2(s) - \kappa_1^2(s) - 2\kappa_3^2(s)\right) - \kappa_3^2(s) \neq 0$$

dir.

(ii) $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$ sıfırdan farklı sabit eğrilik fonksiyonları κ_1, κ_2, κ_3, asli normal vektörü N ve ikinci binormal vektörü B_2 spacelike vektörler olan bir birim hızlı spacelike veya timelike eğri olsun. Eğer β eğrisi her $s \in I$ için (4.47), (4.48), (4.49), (4.50) ve

$$\kappa_1(s)\,P_1(s) - (\kappa_2(s) + \mu\kappa_3(s))\,P_2(s) \neq 0, \tag{4.51}$$

durumlarını sağlıyorsa, β, $(1,3)$-Bertrand eşlenik eğrisi sıfırdan farklı üçüncü eğrilik fonksiyonuna sahip bir Cartan null eğri olan $(1,3)$-Bertrand eğrisidir.

İspat. (i) Kabul edelim ki $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$ sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları κ_1, κ_2, κ_3, asli normal vektörü N ve ikinci binormal vektörü B_2 spacelike vektörler olan bir birim hızlı spacelike veya timelike eğri ve $\beta^* : I^* \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$ eğrisi, β eğrisinin eğrilikleri $\kappa_1^* = 1$, κ_2^*, $\kappa_3^* \neq 0$ olan Cartan null $(1,3)$-Bertrand eşlenik eğrisi olsun. Bu durumda, her $s^* \in I^*$ ve her $s \in I$ için β^* aşağıdaki formda yazılabilir

$$\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s)) = \beta(s) + a(s)N(s) + b(s)B_2(s). \tag{4.52}$$

Burada $a(s)$ ve $b(s)$, I üzerinde $C^\infty-$fonksiyonlardır. (4.52) denkleminde s ye göre türev alınır, (2.1) ve (2.2) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$T^*f' = (1 - a\epsilon_1\kappa_1)T + a'N + \epsilon_3(a\kappa_2 - b\kappa_3)B_1 + b'B_2. \tag{4.53}$$

elde edilir. Bu son eşitlik sırasıyla N ve B_2 ile çarpılırsa

$$a' = 0 \quad \text{ve} \quad b' = 0 \tag{4.54}$$

bulunur. (4.54) denklemi (4.53) denkleminde yazılırsa

$$T^*f' = (1 - a\epsilon_1\kappa_1)T + \epsilon_3(a\kappa_2 - b\kappa_3)B_1 \tag{4.55}$$

bulunur. Eğer

$$\delta = \frac{1 - a\epsilon_1\kappa_1}{f'} \quad \text{ve} \quad \gamma = \frac{\epsilon_3(a\kappa_2 - b\kappa_3)}{f'} \tag{4.56}$$

alınırsa (4.55) denkleminden

$$T^* = \delta T + \gamma B_1 \tag{4.57}$$

elde edilir. (4.57) denkleminde s ye göre türev alınır, (2.1) ve (2.2) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$f'N^* = \delta' T + (\delta\kappa_1 - \gamma\kappa_2)N + \gamma' B_1 + \gamma\kappa_3 B_2 \tag{4.58}$$

bulunur. Bu denklem sırasıyla T ve B_1 ile çarpılırsa

$$\delta' = 0 \quad \text{ve} \quad \gamma' = 0 \tag{4.59}$$

elde edilir. Kabul edelim ki $\gamma = 0$ olsun. Bu durumda (4.57) denkleminden N ile N^* vektörlerinin lineer bağımlı olduğu görülür. Bölüm 3 den bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $\gamma \neq 0$ dır. Öyleyse (4.56) denkleminden

$$a\kappa_2 - b\kappa_3 \neq 0 \tag{4.60}$$

ve

$$1 = a\epsilon_1\kappa_1 + h\epsilon_3(a\kappa_2 - b\kappa_3) \tag{4.61}$$

elde edilir. Burada (4.55) denkleminden $h = \delta/\gamma = \mp 1$ olduğu görülür. (4.59) denklemi (4.58) de kullanılırsa

$$f'N^* = (\delta\kappa_1 - \gamma\kappa_2)N + \gamma\kappa_3 B_2 \tag{4.62}$$

olduğu görülür. Eğer

$$\lambda_1 = \frac{(\delta\kappa_1 - \gamma\kappa_2)}{f'} = \frac{\epsilon_3(a\kappa_2 - b\kappa_3)}{(f')^2}[(h\kappa_1 - \kappa_2)], \tag{4.63}$$

$$\lambda_2 = \frac{\gamma\kappa_3}{f'} = \frac{\epsilon_3(a\kappa_2 - b\kappa_3)}{(f')^2}\kappa_3 \tag{4.64}$$

alınırsa (4.62) denkleminden

$$N^* = \lambda_1 N + \lambda_2 B_2 \tag{4.65}$$

bulunur. (4.65) denkleminde s ye göre türev alınır, (2.1) ve (2.2) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$f'\kappa_2^* T^* - f'B_1^* = -\epsilon_1\kappa_1\lambda_1 T + \lambda_1' N + \epsilon_3(\lambda_1\kappa_2 - \lambda_2\kappa_3)B_1 + \lambda_2' B_2 \tag{4.66}$$

elde edilir. Bu denklem sırasıyla N ve B_2 ile çarpılırsa

$$\lambda_1' = 0 \quad \text{ve} \quad \lambda_2' = 0 \tag{4.67}$$

bulunur. $\lambda_2 \neq 0$ olduğundan, (4.63) ve (4.64) denklemlerinden

$$\mu\kappa_3 = h\kappa_1 - \kappa_2 \tag{4.68}$$

elde edilir. Burada $\mu = \lambda_1/\lambda_2$ dir. (4.67) ve (4.66) denklemlerinden

$$f'\kappa_2^* T^* - f' B_1^* = -\epsilon_1 \kappa_1 \lambda_1 T + \epsilon_3(\lambda_1 \kappa_2 - \lambda_2 \kappa_3) B_1 \tag{4.69}$$

olduğu görülür. (4.69) denklemi kendisi ile çarpılırsa

$$-2\left(f'\right)^2 \kappa_2^* = \frac{\epsilon_1 \left[\left(h\kappa_1 - \kappa_2\right)^2 \kappa_1^2 - \left(\left(h\kappa_1 - \kappa_2\right)\kappa_2 - \kappa_3^2\right)^2\right]}{\left(h\kappa_1 - \kappa_2\right)^2 + \kappa_3^2} \tag{4.70}$$

elde edilir. (4.69) ve (4.70) denklemlerinden

$$-f' B_1^* = \frac{(a\kappa_2 - b\kappa_3)}{2\left(f'\right)^2 (\mu^2 + 1)} \left[P_1(s) T + P_2(s) B_1\right]$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned} P_1(s) &= 2\mu^3 \kappa_1 \kappa_3 + h\mu^2 \left(\kappa_2^2 - \kappa_1^2\right) + 2\mu\kappa_3\left(\kappa_1 - h\kappa_2\right) + h\kappa_3^2, \\ P_2(s) &= 2\mu^3 \kappa_1 \kappa_3 + \mu^2 \left(\kappa_2^2 - \kappa_1^2 - 2\kappa_3^2\right) - \kappa_3^2 \neq 0 \end{aligned}$$

ve $P_1^2(s) = P_2^2(s)$ dir.

(ii) Kabul edelim ki, $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$ sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları κ_1, κ_2, κ_3 sabit, asli normal vektörü N ve ikinci binormal vektörü B_2 spacelike vektörler olan bir birim hızlı spacelike veya timelike eğri olsun ve a, b, $h = \mp 1$, μ reel sayıları için (4.47), (4.48), (4.49), (4.50) ve (4.51) durumları sağlansın. Bu durumda bir β^* eğrisi aşağıdaki gibi tanımlanabilir

$$\beta^*(s^*) = \beta(s) + aN(s) + bB_2(s). \tag{4.71}$$

(4.71) denkleminde s ye göre türev alınır ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\frac{d\beta^*}{ds} = (1 - a\epsilon_1\kappa_1)T + \epsilon_3(a\kappa_2 - b\kappa_3)B_1 \tag{4.72}$$

bulunur. (4.72) ve (4.48) denklemlerinden

$$\frac{d\beta^*}{ds} = \epsilon_3(a\kappa_2 - b\kappa_3)[hT + B_1] \tag{4.73}$$

elde edilir. (4.73) denkleminde s ye göre türev alınır ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\frac{d^2\beta^*}{ds^2} = \epsilon_3(a\kappa_2 - b\kappa_3)\left[\mu\kappa_3 N + \kappa_3 B_2\right]$$

elde edilir ve bu denklem yardımıyla

$$f' = \frac{ds^*}{ds} = g\left(\frac{d^2\beta^*}{ds^2}, \frac{d^2\beta^*}{ds^2}\right)^{1/4} = \sqrt{m_1(a\kappa_2 - b\kappa_3)}\sqrt{m_2\kappa_3}\left(\mu^2+1\right)^{1/4}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $m_1 = \pm 1$ öyle ki $m_1(a\kappa_2 - b\kappa_3) > 0$ ve $m_2 = \mp 1$ öyle ki $m_2\kappa_3 > 0$ dır. (4.73) denkleminden

$$T^* = \frac{\epsilon_3\sqrt{m_1(a\kappa_2 - b\kappa_3)}}{\sqrt{m_2\kappa_3}\left(\mu^2+1\right)^{1/4}}[hT + B_1] \tag{4.74}$$

bulunur. (4.74) denkleminde s ye göre türev alınır ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$N^* = \frac{\epsilon_3 m_2}{\left(\mu^2+1\right)^{1/2}}\left[\mu N + B_2\right] \tag{4.75}$$

elde edilir. Buradan $g\left(N^*, N^*\right) = 1$ bulunur. (4.75) denkleminde s ye göre türev alınır ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\frac{dN^*}{ds^*} = \frac{\epsilon_3 m_2}{f'\left(\mu^2+1\right)^{1/2}}\left[-\epsilon_1\mu\kappa_1 T + \epsilon_3\left(\mu\kappa_2 - \kappa_3\right)B_1\right] \tag{4.76}$$

bulunur. Bu denklemden

$$\kappa_2^* = \frac{-\epsilon_1\left(\mu^2\kappa_1^2 - \left(\mu\kappa_2 - \kappa_3\right)^2\right)}{2\left(f'\right)^2\left(\mu^2+1\right)} \tag{4.77}$$

olduğu görülür. (4.74) ve (4.77) denklemlerinden

$$\kappa_2^* T^* = \frac{\sqrt{m_1(a\kappa_2 - b\kappa_3)}\left(\mu^2\kappa_1^2 - \left(\mu\kappa_2 - \kappa_3\right)^2\right)}{2\sqrt{m_2\kappa_3}\left(\mu^2+1\right)^{5/4}\left(f'\right)^2}[hT + B_1] \tag{4.78}$$

elde edilir. (4.76) ve (4.78) denklemlerinden

$$B_1^* = -\left(\frac{dN^*}{ds^*} - \kappa_2^* T^*\right) = \frac{-m_2}{2f'\kappa_3\left(\mu^2+1\right)^{3/2}}\left[P_1\left(s\right)T + P_2\left(s\right)B_1\right] \tag{4.79}$$

bulunur. Buradan $g\left(B_1^*, B_1^*\right) = 0$ ve $g\left(T^*, B_1^*\right) = 1$ dir. Birim B_2^* vektörü

$$B_2^* = \frac{\epsilon_3 m_2}{\sqrt{\mu^2+1}}\left[N - \mu B_2\right] \tag{4.80}$$

olarak tanımlanabilir. Son olarak, (4.79) ve (4.80) denklemlerinden

$$\kappa_3^* = -g\left(\frac{dB_2^*}{ds^*}, B_1^*\right) = \frac{\epsilon_1}{2\left(f'\right)^2\kappa_3\left(\mu^2+1\right)^2}\left[\kappa_1 P_1\left(s\right) - \left(\kappa_2\left(s\right) + \mu\kappa_3\right)P_2\left(s\right)\right] \neq 0$$

olarak bulunur. Sonuç olarak β^* eğrisi üçüncü eğrilik fonksiyonu sıfırdan farklı olan bir Cartan null eğridir ve span$\{N^*, B_2^*\}$ =span$\{N, B_2\}$ olduğundan β eğrisinin $(1,3)$-Bertrand eşlenik eğrisidir.

Durum 4.3 β eğrilikleri $\kappa_1 = 1$, κ_2, $\kappa_3 \neq 0$ olan bir Cartan null eğri ve β^* sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları κ_1^*, κ_2^*, κ_3^*, asli normal vektörü N^* ve ikinci binormal vektörü B_2^* spacelike vektörler olan bir spacelike veya timelike eğri olsun. Bu durumda aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.3 $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$ eğrilikleri $\kappa_1 = 1$, κ_2, $\kappa_3 \neq 0$ olan birim hızlı bir Cartan null eğri olsun. Bu durumda β eğrisinin, $(1,3)$-Bertrand eşlenik eğrisi eğrilikleri sıfırdan farklı, spacelike asli normal ve ikinci binormal vektörlere sahip spacelike veya timelike bir eğri olan $(1,3)$-Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şart her $s \in I$ için aşağıdaki şartları sağlayan $a \neq 0$, b, h, μ reel sayıları vardır;

$$a\kappa_2(s) - b\kappa_3(s) = ah - 1, \tag{4.81}$$

$$\mu\kappa_3(s) = h + \kappa_2(s), \tag{4.82}$$

$$h^2 - \kappa_2^2(s) - \kappa_3^2(s) \neq 0. \tag{4.83}$$

İspat. Kabul edelim ki $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$ eğrilikleri $\kappa_1 = 1$, κ_2, $\kappa_3 \neq 0$ olan birim hızlı bir Cartan null eğri ve $\beta^* : I^* \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$ eğrisi β eğrisinin sıfırdan farklı eğrilikleri $\kappa_1^*, \kappa_2^*, \kappa_3^*$, asli normal vektörü N^* ve ikinci binormal vektörü B_2^* spacelike vektörler olan bir spacelike veya timelike $(1,3)$-Bertrand eşlenik eğrisi olsun. Bu durumda, her $s^* \in I^*$ ve her $s \in I$ için β^* aşağıdaki formda yazılabilir

$$\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s)) = \beta(s) + a(s)N(s) + b(s)B_2(s). \tag{4.84}$$

Burada $a(s)$ ve $b(s)$, I üzerinde $C^\infty-$fonksiyonlardır. (4.84) denkleminde s ye göre türev alınır, (2.1) ve (2.2) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$f'T^* = (1 + a\kappa_2 - b\kappa_3)T + a'N - aB_1 + b'B_2 \tag{4.85}$$

elde edilir. Bu son eşitlik sırasıyla N ve B_2 ile çarpılırsa

$$a' = 0 \quad \text{ve} \quad b' = 0 \tag{4.86}$$

bulunur. (4.86) denklemi (4.85) denkleminde yazılırsa

$$f'T^{*} = (1 + a\kappa_2 - b\kappa_3)T - aB_1 \tag{4.87}$$

bulunur. (4.87) denklemi kendisi ile çarpılırsa

$$\epsilon_1^{*}(f')^2 = -2a(1 + a\kappa_2 - b\kappa_3) \tag{4.88}$$

olduğu görülür. Eğer

$$\delta = \frac{(1 + a\kappa_2 - b\kappa_3)}{f'} \text{ ve } \gamma = \frac{-a}{f'} \tag{4.89}$$

alınırsa (4.87) denkleminden

$$T^{*} = \delta T + \gamma B_1 \tag{4.90}$$

elde edilir. (4.90) denkleminde s ye göre türev alınır, (2.1) ve (2.2) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$f'\kappa_1^{*}N^{*} = \delta' T + (\delta - \gamma\kappa_2)N + \gamma' B_1 + \gamma\kappa_3 B_2 \tag{4.91}$$

bulunur. Bu denklem sırasıyla T ve B_1 ile çarpılırsa

$$\delta' = 0 \quad \text{ve} \quad \gamma' = 0 \tag{4.92}$$

elde edilir. Kabul edelim ki $\gamma = 0$ olsun. Bu durumda (4.90) denkleminden N ile N^{*} vektörlerinin lineer bağımlı olduğu görülür. Bölüm 3 den bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $\gamma \neq 0$ dır. Öyleyse (4.89) denkleminden $a \neq 0$ ve

$$a\kappa_2 - b\kappa_3 = ah - 1$$

elde edilir. Burada $h = -\delta/\gamma$ dir. (4.92) denklemi (4.91) de kullanılırsa,

$$f'\kappa_1^{*}N^{*} = (\delta - \gamma\kappa_2)N + \gamma\kappa_3 B_2 \tag{4.93}$$

olduğu görülür. (4.93) denklemi kendisi ile çarpılır, (4.88) ve (4.89) denklemleri kullanılırsa

$$(f')^2\,(\kappa_1^{*})^2 = \frac{\epsilon_3^{*}[(h + \kappa_2)^2 + \kappa_3^2]}{2h} \tag{4.94}$$

bulunur. Eğer

$$\lambda_1 = \frac{\delta - \gamma\kappa_2}{f'\kappa_1^*} = \frac{a\,(h+\kappa_2)}{(f')^2\,\kappa_1^*}, \tag{4.95}$$

$$\lambda_2 = \frac{\gamma\kappa_3}{f'\kappa_1^*} = \frac{-a\kappa_3}{(f')^2\,\kappa_1^*} \tag{4.96}$$

alınırsa (4.93) denkleminden

$$N^* = \lambda_1 N + \lambda_2 B_2 \tag{4.97}$$

bulunur. (4.97) denkleminde s ye göre türev alınır, (2.1) ve (2.2) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$-\epsilon_1^* f'\kappa_1^* T^* + \epsilon_3^* f'\kappa_2^* B_1^* = (\lambda_1\kappa_2 - \lambda_2\kappa_3)\,T + \lambda_1' N - \lambda_1 B_1 + \lambda_2' B_2 \tag{4.98}$$

elde edilir. Bu denklem sırasıyla N ve B_2 ile çarpılırsa

$$\lambda_1' = 0 \quad \text{ve} \quad \lambda_2' = 0 \tag{4.99}$$

bulunur. $\lambda_2 \neq 0$ olduğundan, (4.95) ve (4.96) denklemlerinden

$$\mu\kappa_3 = h + \kappa_2$$

elde edilir. Burada $\mu = -\lambda_1/\lambda_2$ dir. (4.99) ve (4.98) denklemlerinden

$$-\epsilon_1^* f'\kappa_1^* T^* + \epsilon_3^* f'\kappa_2^* B_1^* = (\lambda_1\kappa_2 - \lambda_2\kappa_3)\,T - \lambda_1 B_1 \tag{4.100}$$

olduğu görülür. Ayrıca (4.131) ve (4.100) denklemlerinden

$$\epsilon_3^* f'\kappa_2^* B_1^* = A(s)T + B(s)B_1$$

bulunur. Burada

$$A(s) = \frac{-a}{2\,(f')^2\,\kappa_1^*}\left[h^2 - \kappa_2^2 - \kappa_3^2\right],$$

ve

$$B(s) = \frac{-a}{2\,(f')^2\,\kappa_1^* h}\left[h^2 - \kappa_2^2 - \kappa_3^2\right]$$

dir. $\epsilon_3^* f'\kappa_2^* B_1^* \neq 0$ olduğundan dolayı

$$h^2 - \kappa_2^2 - \kappa_3^2 \neq 0$$

olduğu görülür.

Tersine, kabul edelim ki $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^4$ eğrilikleri $\kappa_1 = 1$, κ_2, $\kappa_3 \neq 0$ olan birim hızlı bir Cartan null eğri olsun ve $a \neq 0$, b, h, μ reel sayıları için, (4.81), (4.82) ve (4.83) durumları sağlansın. Bu durumda bir β^* eğrisi aşağıdaki gibi tanımlanabilir

$$\beta^*(s^*) = \beta(s) + aN(s) + bB_2(s). \tag{4.101}$$

(4.101) denkleminde s ye göre türev alınır ve (2.2) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\frac{d\beta^*}{ds} = (1 + a\kappa_2 - b\kappa_3)T - aB_1 \tag{4.102}$$

bulunur. (4.102) ve (4.81) denklemlerinden

$$\frac{d\beta^*}{ds} = a[hT - B_1] \tag{4.103}$$

elde edilir ve bu denklem yardımıyla

$$f' = \frac{ds^*}{ds} = \left\| \frac{d\beta^*}{ds} \right\| = \sqrt{2m_1 a^2 h} > 0 \tag{4.104}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $m_1 = \pm 1$ öyle ki $2m_1 a^2 h > 0$ dır. (4.103) denklemi yeniden yazılarak

$$T^* f' = a[hT - B_1] \tag{4.105}$$

bulunur. (4.104) denklemi (4.105) denkleminde yazılarak

$$T^* = \frac{m_2}{\sqrt{2m_1 h}}[hT - B_1] \tag{4.106}$$

elde edilir. Burada $m_2 = a/|a| = \mp 1$ dir. (4.106) denkleminden, $g(T^*, T^*) = -m_1 = \epsilon_1^*$ olduğu görülür. (4.106) denkleminde s ye göre türev alınır ve (2.2) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\frac{dT^*}{ds^*} = \frac{m_2}{f'\sqrt{2m_1 h}}[(h + \kappa_2)N - \kappa_3 B_2] \tag{4.107}$$

bulunur. (4.107) denkleminden

$$\kappa_1^* = \left\| \frac{dT^*}{ds^*} \right\| = \frac{\sqrt{(h + \kappa_2)^2 + \kappa_3^2}}{f'\sqrt{2m_1 h}} > 0 \tag{4.108}$$

elde edilir. (4.107) ve (4.108) denklemlerinden

$$N^* = \frac{1}{\kappa_1^*}\frac{dT^*}{ds^*} = \frac{m_2}{\sqrt{(h + \kappa_2)^2 + \kappa_3^2}}[(h + \kappa_2)N - \kappa_3 B_2] \tag{4.109}$$

olduğu bulunur. Buradan $g(N^*, N^*) = 1$ olduğu görülür. Eğer

$$\lambda_3 = \frac{m_2(h+\kappa_2)}{\sqrt{(h+\kappa_2)^2+\kappa_3^2}} \quad \text{ve} \quad \lambda_4 = \frac{-m_2\kappa_3}{\sqrt{(h+\kappa_2)^2+\kappa_3^2}} \tag{4.110}$$

alınırsa, (4.109) denkleminden

$$N^* = \lambda_3 N + \lambda_4 B_2 \tag{4.111}$$

elde edilir. (4.111) denkleminde s ye göre türev alınır ve (2.2) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$f'\frac{dN^*}{ds^*} = (\kappa_2\lambda_3 - \kappa_3\lambda_4)T + \lambda_3' N - \lambda_3 B_1 + \lambda_4' B_2 \tag{4.112}$$

olduğu görülür. (4.82) de s ye göre türev alınırsa,

$$\kappa_2'\kappa_3 - (h+\kappa_2)\kappa_3' = 0 \tag{4.113}$$

elde edilir. (4.110) de s ye göre türev alınır ve (4.113) kullanılırsa

$$\lambda_3' = 0 \quad \text{ve} \quad \lambda_4' = 0 \tag{4.114}$$

olduğu bulunur. (4.110) ve (4.114) denklemleri (4.112) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\frac{dN^*}{ds^*} = \frac{m_2\left(h\kappa_2+\kappa_2^2+\kappa_3^2\right)}{f'\sqrt{(h+\kappa_2)^2+\kappa_3^2}}T - \frac{m_2(h+\kappa_2)}{f'\sqrt{(h+\kappa_2)^2+\kappa_3^2}}B_1 \tag{4.115}$$

elde edilir. (4.106) ve (4.108) denklemlerinden,

$$\epsilon_1^*\kappa_1^*T^* = \frac{-m_2\sqrt{(h+\kappa_2)^2+\kappa_3^2}}{2hf'}[hT - B_1] \tag{4.116}$$

olduğu görülür. (4.115) ve (4.116) denklemleri birlikte kullanıldığında,

$$\frac{dN^*}{ds^*} + \epsilon_1^*\kappa_1^*T^* = \frac{m_2\left(\kappa_2^2+\kappa_3^2-h^2\right)}{2f'\sqrt{(h+\kappa_2)^2+\kappa_3^2}}[T + \frac{1}{h}B_1] \tag{4.117}$$

olarak elde edilir. (4.117) denkleminden

$$\kappa_2^* = \frac{|\kappa_2^2+\kappa_3^2-h^2|}{f\sqrt{2\,|h|}\sqrt{(h+\kappa_2)^2+\kappa_3^2}} > 0 \tag{4.118}$$

olduğu görülür. (4.117) ve (4.118) denklemleri birlikte düşünüldüğünde,

$$B_1^* = \frac{\epsilon_3^*}{\kappa_2^*}[\frac{dN^*}{ds^*} + \epsilon_1^*\kappa_1^*T^*] = \frac{\epsilon_3^* m_2 m_3\sqrt{2\,|h|}}{2}[T + \frac{1}{h}B_1] \tag{4.119}$$

bulunur. Burada $m_3 = (\kappa_2^2 + \kappa_3^2 - h^2) / |\kappa_2^2 + \kappa_3^2 - h^2| = \pm 1$ ve $\epsilon_3^* = \pm 1$ dir. (4.119) denkleminden, $g(B_1^*, B_1^*) = m_1 = \epsilon_3^* = -\epsilon_1^*$ bulunur. Birim B_2^* vektörü $B_2^* = -\lambda_4 N + \lambda_3 B_2$ olarak tanımlanabilir, yani

$$B_2^* = \frac{m_2\kappa_3}{\sqrt{(h+\kappa_2)^2 + \kappa_3^2}} N + \frac{m_2(h+\kappa_2)}{\sqrt{(h+\kappa_2)^2 + \kappa_3^2}} B_2 \tag{4.120}$$

şeklinde tanımlanabilir. Buradan $g(B_2^*, B_2^*) = 1$ dir. Son olarak, (4.119) ve (4.120) denklemlerinden

$$\kappa_3^* = g(\frac{dB_1^*}{ds^*}, B_2^*) = \frac{\epsilon_3^* m_3 \sqrt{2\,|h|}\kappa_3}{f' \sqrt{(h+\kappa_2)^2 + \kappa_3^2}} \neq 0$$

olarak bulunur. Sonuç olarak β^* eğrisi eğrilik fonksiyonları sıfırdan farklı, spacelike asli normal vektör ve ikinci binormal vektöre sahip spacelike veya timelike bir eğridir ve span$\{N^*, B_2^*\}$ =span$\{N, B_2\}$ olduğundan β eğrisinin $(1,3)$-Bertrand eşlenik eğrisidir.

Durum 4.4. β eğrilikleri $\kappa_1 = 1$, κ_2, $\kappa_3 \neq 0$ olan bir Cartan null eğri ve β^* da eğrilikleri $\kappa_1^* = 1$, κ_2^*, $\kappa_3^* \neq 0$ olan bir Cartan null eğri olsun. Bu durumda aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.4 $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$ eğrilikleri $\kappa_1 = 1$, κ_2, $\kappa_3 \neq 0$ olan birim hızlı bir Cartan null eğri olsun. Bu durumda β eğrisinin, $(1,3)$-Bertrand eşlenik eğrisi sıfırdan farklı üçüncü eğrilik fonksiyonuna sahip bir Cartan null eğri olan $(1,3)$-Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şart her $s \in I$ için aşağıdaki şartları sağlayan $\lambda \neq 0$, δ, γ, $\mu \neq 0$ reel sayıları vardır;

$$1 + \lambda\kappa_2(s) - \mu\kappa_3(s) = 0, \tag{4.121}$$

$$\kappa_2^2(s) + \kappa_3^2(s) = \frac{\lambda^2}{\delta^4}, \tag{4.122}$$

$$-\frac{\kappa_2(s)}{\kappa_3(s)} = \gamma. \tag{4.123}$$

İspat. Bu teoremin ispatı [16] makalesinde görülebilir.

4.1.1. Bazı Örnekler

Bu bölümde Bölüm 4.1. deki teoremlere ilişkin örnekler verilecektir.

Örnek 4.1 Spacelike eğri β

$$\beta(s) = \frac{1}{\sqrt{6}}\Big(\sinh\sqrt{3}s, \cosh\sqrt{3}s, 3\sin s, -3\cos s\Big)$$

olarak verilsin. β eğrisinin Frenet çatısı

$$\begin{aligned}
T(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\cosh\sqrt{3}s, \sinh\sqrt{3}s, \sqrt{3}\cos s, \sqrt{3}\sin s\Big), \\
N(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\sinh\sqrt{3}s, \cosh\sqrt{3}s, -\sin s, \cos s\Big), \\
B_1(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\sqrt{3}\cosh\sqrt{3}s, \sqrt{3}\sinh\sqrt{3}s, \cos s, \sin s\Big), \\
B_2(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\sinh\sqrt{3}s, \cosh\sqrt{3}s, \sin s, -\cos s\Big)
\end{aligned}$$

ve eğrilik fonksiyonları $k_1(s) = \sqrt{3}$, $k_2(s) = -2$, $k_3(s) = 1$ olarak elde edilir. Teorem 4.1 de $a = 0$, $b = \sqrt{3}$, $h = 1/\sqrt{3}$ ve $\mu = 3$ alınırsa (4.124), (4.125), (4.126) ve (4.127) durumları sağlanır. Öyleyse β eğrisi E_1^4 uzayında $(1,3)$-Bertrand eğrisidir ve $(1,3)$-Bertrand eşlenik eğrisi β^* timelike eğridir öyle ki

$$\beta^*(s) = \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\sinh\sqrt{3}s, \frac{2\sqrt{6}}{3}\cosh\sqrt{3}s, \sqrt{6}\sin s, -\sqrt{6}\cos s\right)$$

olarak elde edilir. β^* eğrisinin Frenet çatısı

$$\begin{aligned}
T^*(s) &= \Big(2\cosh\sqrt{3}s, 2\sinh\sqrt{3}s, \sqrt{3}\cos s, \sqrt{3}\sin s\Big), \\
N^*(s) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(2\sinh\sqrt{3}s, 2\cosh\sqrt{3}s, -\sin s, \cos s\Big), \\
B_1^*(s) &= \Big(-\sqrt{3}\cosh\sqrt{3}s, -\sqrt{3}\sinh\sqrt{3}s, -2\cos s, -2\sin s\Big), \\
B_2^*(s) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\sinh\sqrt{3}s, \cosh\sqrt{3}s, 2\sin s, -2\cos s\Big)
\end{aligned}$$

ve eğrilik fonksiyonları $k_1^*(s) = \sqrt{30}/2$, $k_2^*(s) = 4\sqrt{10}/5$, $k_3^*(s) = 1/\sqrt{10}$ olarak bulunur. Ayrıca aşağıdaki eşitlikler sağlanır

$$\begin{aligned}
N^*(s) &= \frac{3}{\sqrt{10}}N(s) + \frac{1}{\sqrt{10}}B_2(s), \\
B_2^*(s) &= \frac{-1}{\sqrt{10}}N(s) + \frac{3}{\sqrt{10}}B_2(s).
\end{aligned}$$

Örnek 4.2 Timelike eğri β

$$\beta(s) = \Big(\sqrt{2}\sinh s, \sqrt{2}\cosh s, \sin s, \cos s\Big)$$

olarak verilsin. β eğrisinin Frenet çatısı

$$
\begin{aligned}
T(s) &= \left(\sqrt{2}\cosh s, \sqrt{2}\sinh s, \cos s, -\sin s\right), \\
N(s) &= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\sqrt{2}\sinh s, \sqrt{2}\cosh s, -\sin s, -\cos s\right), \\
B_1(s) &= \left(-\cosh s, -\sinh s, -\sqrt{2}\cos s, \sqrt{2}\sin s\right), \\
B_2(s) &= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\sinh s, \cosh s, \sqrt{2}\sin s, \sqrt{2}\cos s\right)
\end{aligned}
$$

ve eğrilik fonksiyonları $k_1(s) = \sqrt{3}$, $k_2(s) = 2\sqrt{6}/3$, $k_3(s) = 1/\sqrt{3}$ olarak elde edilir. Teorem 4.1 de $a = 0$, $b = \sqrt{6}$, $h = -1/\sqrt{2}$ ve $\mu = -7/\sqrt{2}$ alınırsa (4.124), (4.125), (4.126) ve (4.127) durumları sağlanır. Öyleyse β eğrisi E_1^4 uzayında $(1,3)$-Bertrand eğrisidir ve $(1,3)$-Bertrand eşlenik eğrisi β^* timelike birinci binormal vektöre sahip spacelike eğridir öyle ki

$$
\beta^*(s) = \left(2\sqrt{2}\sinh s, 2\sqrt{2}\cosh s, 3\sin s, 3\cos s\right)
$$

olarak elde edilir. β^* eğrisinin Frenet çatısı

$$
\begin{aligned}
T^*(s) &= \left(2\sqrt{2}\cosh s, 2\sqrt{2}\sinh s, 3\cos s, -3\sin s\right), \\
N^*(s) &= \frac{1}{\sqrt{17}}\left(2\sqrt{2}\sinh s, 2\sqrt{2}\cosh s, -3\sin s, -3\cos s\right), \\
B_1^*(s) &= \left(-3\cosh s, -3\sinh s, -2\sqrt{2}\cos s, 2\sqrt{2}\sin s\right), \\
B_2^*(s) &= \frac{1}{\sqrt{17}}\left(3\sinh s, 3\cosh s, 2\sqrt{2}\sin s, 2\sqrt{2}\cos s\right)
\end{aligned}
$$

ve eğrilik fonksiyonları $k_1^*(s) = \sqrt{17}$, $k_2^*(s) = 12\sqrt{34}/17$, $k_3^*(s) = -1/\sqrt{17}$ olarak bulunur. Ayrıca aşağıdaki eşitlikler sağlanır

$$
\begin{aligned}
N^*(s) &= \frac{7}{\sqrt{51}}N(s) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{51}}B_2(s), \\
B_2^*(s) &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{51}}N(s) + \frac{7}{\sqrt{51}}B_2(s).
\end{aligned}
$$

Örnek 4.3 Örnek 4.1 deki aynı spacelike eğri için, Teorem 4.2 nin (ii) şıkkında $a = 1$, $b = -1 - \sqrt{3}$, $h = 1$ ve $\mu = 2 + \sqrt{3}$ alınırsa (4.47), (4.48), (4.49), (4.50) ve (4.51) durumları sağlanır. Öyleyse β eğrisi E_1^4 uzayında $(1,3)$-Bertrand eğrisidir ve $(1,3)$-Bertrand eşlenik eğrisi β^* bir Cartan null eğridir öyle ki

$$
\beta^*(s) = \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\sinh\sqrt{3}s, -\frac{\sqrt{6}}{3}\cosh\sqrt{3}s, -\sqrt{2}\sin s, \sqrt{2}\cos s\right)
$$

olarak bulunur. β^* eğrisinin Frenet çatısı

$$
\begin{aligned}
T(s) &= -\frac{1}{2^{\frac{1}{4}}}\left(\cosh\sqrt{3}s, \sinh\sqrt{3}s, \cos s, \sin s\right), \\
N(s) &= -\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\sinh\sqrt{3}s, \sqrt{3}\cosh\sqrt{3}s, -\sin s, \cos s\right), \\
B_1(s) &= \frac{1}{2^{\frac{3}{4}}}\left(\cosh\sqrt{3}s, \sinh\sqrt{3}s, -\cos s, -\sin s\right), \\
B_2(s) &= \frac{1}{2}\left(\sinh\sqrt{3}s, \cosh\sqrt{3}s, \sqrt{3}\sin s, -\sqrt{3}\cos s\right)
\end{aligned}
$$

ve eğrilik fonksiyonları $k_1^*(s) = 1$, $k_2^*(s) = \sqrt{2}/4$, $k_3^*(s) = \sqrt{6}/4$ olarak elde edilir. Ayrıca aşağıdaki eşitlikler sağlanır

$$
\begin{aligned}
N^*(s) &= -\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)N(s) - \left(\frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)B_2(s), \\
B_2^*(s) &= -\left(\frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)N(s) + \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)B_2(s).
\end{aligned}
$$

Örnek 4.4 ([16]) Cartan null eğri β

$$\beta(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sinh s, \cosh s, \sin s, \cos s)$$

olarak verilsin. β eğrisinin Frenet çatısı

$$
\begin{aligned}
T(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cosh s, \sinh s, \cos s, -\sin s), \\
N(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sinh s, \cosh s, -\sin s, -\cos s), \\
B_1(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cosh s, -\sinh s, \cos s, -\sin s), \\
B_2(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sinh s, \cosh s, \sin s, \cos s)
\end{aligned}
$$

ve eğrilik fonksiyonları $k_1(s) = 1$, $k_2(s) = 0$, $k_3(s) = -1$ olarak elde edilir. Teorem 4.3 de $a = b = 1$, $h = 2$ ve $\mu = -2$ alınırsa (4.81), (4.82) ve (4.83) durumları sağlanır. Öyleyse β eğrisi E_1^4 uzayında $(1,3)$-Bertrand eğrisidir ve $(1,3)$-Bertrand eşlenik eğrisi β^* bir timelike eğridir öyle ki

$$\beta^*(s) = \left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\sinh s, \frac{3}{2}\sqrt{2}\cosh s, \frac{1}{2}\sqrt{2}\sin s, \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos s\right)$$

olarak bulunur. β^* eğrisinin Frenet çatısı

$$\begin{aligned}
T^*(s) &= \left(\frac{3}{4}\sqrt{2}\cosh s, \frac{3}{4}\sqrt{2}\sinh s, \frac{1}{4}\sqrt{2}\cos s, -\frac{1}{4}\sqrt{2}\sin s\right), \\
N^*(s) &= \left(\frac{3}{10}\sqrt{10}\sinh s, \frac{3}{10}\sqrt{10}\cosh s, -\frac{1}{10}\sqrt{10}\sin s, -\frac{1}{10}\sqrt{10}\cos s\right), \\
B_1^*(s) &= \left(-\frac{1}{4}\sqrt{2}\cosh s, -\frac{1}{4}\sqrt{2}\sinh s, -\frac{3}{4}\sqrt{2}\cos s, \frac{3}{4}\sqrt{2}\sin s\right), \\
B_2^*(s) &= \left(\frac{1}{10}\sqrt{10}\sinh s, \frac{1}{10}\sqrt{10}\cosh s, \frac{3}{10}\sqrt{10}\sin s, \frac{3}{10}\sqrt{10}\cos s\right)
\end{aligned}$$

ve eğrilik fonksiyonları $k_1^*(s) = \sqrt{5}/4$, $k_2^*(s) = 3\sqrt{5}/20$, $k_3^*(s) = 1/\sqrt{5}$ olarak elde edilir. Ayrıca aşağıdaki eşitlikler sağlanır

$$\begin{aligned}
N^*(s) &= \frac{2}{\sqrt{5}}N(s) + \frac{1}{\sqrt{5}}B_2(s), \\
B_2^*(s) &= \frac{-1}{\sqrt{5}}N(s) + \frac{2}{\sqrt{5}}B_2(s).
\end{aligned}$$

Örnek 4.5 Örnek 4.4 deki aynı Cartan null eğri için, Teorem 4.3 de $a = 1$, $b = -3$, $h = -2$ ve $\mu = 2$ alınırsa (4.81), (4.82) ve (4.83) durumları sağlanır. Öyleyse β eğrisi E_1^4 uzayında $(1,3)$-Bertrand eğrisidir ve $(1,3)$-Bertrand eşlenik eğrisi β^* timelike birinci binormal vektöre sahip spacelike eğridir öyle ki

$$\beta^*(s) = \frac{-1}{\sqrt{2}}(\sinh s, \cosh s, 3\sin s, 3\cos s)$$

olarak bulunur. β^* eğrisinin Frenet çatısı

$$\begin{aligned}
T^*(s) &= \frac{-1}{2\sqrt{2}}(\cosh s, \sinh s, 3\cos s, -3\sin s), \\
N^*(s) &= \frac{-1}{\sqrt{10}}(\sinh s, \cosh s, -3\sin s, -3\cos s), \\
B_1^*(s) &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(3\cosh s, 3\sinh s, \cos s, -\sin s), \\
B_2^*(s) &= \frac{-1}{\sqrt{10}}(3\sinh s, 3\cosh s, \sin s, \cos s)
\end{aligned}$$

ve eğrilik fonksiyonları $k_1^*(s) = \sqrt{5}/4$, $k_2^*(s) = 3\sqrt{5}/20$, $k_3^*(s) = -1/\sqrt{5}$ olarak elde edilir. Ayrıca aşağıdaki eşitlikler sağlanır

$$\begin{aligned}
N^*(s) &= -\frac{2}{\sqrt{5}}N(s) + \frac{1}{\sqrt{5}}B_2(s), \\
B_2^*(s) &= -\frac{1}{\sqrt{5}}N(s) - \frac{2}{\sqrt{5}}B_2(s).
\end{aligned}$$

Örnek 4.6 Örnek 4.4 deki aynı Cartan null eğri için, Teorem 4.4 de $\lambda = \delta = 1$, $\gamma = 0$ ve $\mu = -1$ alınırsa, (4.121), (4.122) ve (4.123) durumları sağlanır. Öyleyse β eğrisi E_1^4 uzayında $(1,3)$-Bertrand eğrisidir ve $(1,3)$-Bertrand eşlenik eğrisi β^* bir Cartan null eğridir öyle ki

$$\beta^*(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sinh s, \cosh s, -\sin s, -\cos s)$$

olarak bulunur. β^* eğrisinin Frenet çatısı

$$\begin{aligned}
T^*(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cosh s, \sinh s, -\cos s, \sin s), \\
N^*(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sinh s, \cosh s, \sin s, \cos s), \\
B_1^*(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cosh s, -\sinh s, -\cos s, \sin s), \\
B_2^*(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sinh s, -\cosh s, \sin s, \cos s)
\end{aligned}$$

ve eğrilik fonksiyonları $k_1^*(s) = 1$, $k_2^*(s) = 0$, $k_3^*(s) = 1$ olarak elde edilir. Ayrıca aşağıdaki eşitlikler sağlanır

$$N^*(s) = B_2(s) \quad \text{ve} \quad B_2^*(s) = -N(s).$$

4.2. Minkowski Uzay-Zamanda Timelike $(1,3)$-Normal Düzlemli Bertrand Eğrileri

Bu bölümde, Minkowski uzay-zamanda ortak $(1,3)$-normal düzlemleri timelike olan Bertrand eğri çiftleri eğrilerin farklı casual karakterlerine göre incelenecektir.

$\beta : I \to \mathbb{E}_1^4$ eğrilikleri $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ ve Frenet çatısı $\{T, N, B_1, B_2\}$ olan bir $(1,3)$-Bertrand eğrisi ve $\beta^* : I \to \mathbb{E}_1^4$ da eğrilikleri $\kappa_1^*, \kappa_2^*, \kappa_3^*$ ve Frenet çatısı $\{T^*, N^*, B_1^*, B_2^*\}$ olmak üzere β nın $(1,3)$-Bertrand eşlenik eğrisi olsun. Kabul edelim ki $\{N, B_2\}$ tarafından gerilen $(1,3)$-normal düzlemi timelike düzlem olsun. Bu durumda aşağıdaki dört durum söz konusudur.

Durum 4.5 β sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları κ_1, κ_2, κ_3 ve birinci binormal vektörü B_1 spacelike vektör olan bir spacelike eğri ve β^* da sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları κ_1^*, κ_2^*, κ_3^* ve birinci binormal vektörü B_1^* spacelike vektör olan bir spacelike eğridir.

Durum 4.6 β sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları κ_1, κ_2, κ_3 ve birinci binormal vektörü B_1 spacelike olan bir spacelike eğri ve β^* eğrilikleri $\kappa_1^* = 1$, $\kappa_2^* \neq 0$, κ_3^* olan bir pseudo null eğridir.

Durum 4.7 β eğrilikleri $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 \neq 0$, κ_3 olan bir pseudo null eğri ve β^* sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları κ_1^*, κ_2^*, κ_3^* ve birinci binormal vektörü B_1^* spacelike vektör olan bir spacelike eğridir.

Durum 4.8 β eğrilikleri $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 \neq 0$, κ_3 olan bir pseudo null eğri ve β^* da eğrilikleri $\kappa_1^* = 1$, $\kappa_2^* \neq 0$, κ_3^* olan bir pseudo null eğridir.

Sırasıyla bu dört durum ayrı ayrı ele alınacaktır.

Durum 4.5 β sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları κ_1, κ_2, κ_3 ve birinci binormal vektörü B_1 spacelike vektör olan bir spacelike eğri ve β^* da sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları κ_1^*, κ_2^*, κ_3^* ve birinci binormal vektörü B_1^* spacelike vektör olan bir spacelike eğri olsun. Bu durumda aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.5 $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$ sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları κ_1, κ_2, κ_3 ve birinci binormal vektörü B_1 spacelike vektör olan birim hızlı spacelike eğri olsun. Bu durumda β eğrisinin, $(1,3)$-Bertrand eşlenik eğrisi sıfırdan farklı eğriliklere ve spacelike birinci binormal vektöre sahip spacelike bir eğri olan $(1,3)$-Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şart her $s \in I$ için aşağıdaki şartları sağlayan a, b, h, $\mu \neq \pm 1$ reel sayıları vardır;

$$a\kappa_2(s) - b\kappa_3(s) \neq 0, \tag{4.124}$$

$$1 = a\kappa_1(s) + h(a\kappa_2(s) - b\kappa_3(s)), \tag{4.125}$$

$$-\mu\kappa_3(s) = h\kappa_1(s) - \kappa_2(s), \tag{4.126}$$

$$\kappa_1(s)\kappa_2(s)(h^2 - 1) + h(\kappa_1^2(s) - \kappa_2^2(s) + \kappa_3^2(s)) \neq 0. \tag{4.127}$$

İspat. Kabul edelim ki $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$ sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları κ_1, κ_2, κ_3 ve birinci binormal vektörü B_1 spacelike vektör olan birim hızlı spacelike eğri ve $\beta^* : I^* \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$ eğrisi β eğrisinin eğrilikleri $\kappa_1^*, \kappa_2^*, \kappa_3^*$ sıfırdan farklı ve spacelike birinci binormal vektöre B_1^* sahip olan spacelike $(1,3)$-Bertrand eşlenik eğrisi olsun. Bu durumda, her $s^* \in I^*$ ve her $s \in I$ için β^* aşağıdaki formda yazılabilir

$$\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s)) = \beta(s) + a(s)N(s) + b(s)B_2(s). \tag{4.128}$$

Burada $a(s)$ ve $b(s)$, I üzerinde $C^\infty-$fonksiyonlardır. (4.128) denkleminde s ye göre türev alınır ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$T^* f' = (1 - a\kappa_1)T + a'N + (a\kappa_2 - b\kappa_3)B_1 + b'B_2 \tag{4.129}$$

elde edilir. Bu son eşitlik sırasıyla N ve B_2 ile çarpılırsa

$$a' = 0 \quad \text{ve} \quad b' = 0 \tag{4.130}$$

bulunur. (4.130) denklemi (4.129) denkleminde yazılırsa

$$T^* f' = (1 - a\kappa_1)T + (a\kappa_2 - b\kappa_3)B_1 \tag{4.131}$$

bulunur. (4.131) denklemi kendisi ile çarpılırsa

$$(f')^2 = (1 - a\kappa_1)^2 + (a\kappa_2 - b\kappa_3)^2 \tag{4.132}$$

olduğu görülür. Eğer

$$\delta = \frac{1 - a\kappa_1}{f'} \quad \text{ve} \quad \gamma = \frac{a\kappa_2 - b\kappa_3}{f'}, \tag{4.133}$$

alınırsa (4.131) denkleminden

$$T^* = \delta T + \gamma B_1 \tag{4.134}$$

elde edilir. (4.134) denkleminde s ye göre türev alınır ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\epsilon_2^* f' \kappa_1^* N^* = \delta' T + \epsilon_2(\delta\kappa_1 - \gamma\kappa_2)N + \gamma' B_1 - \epsilon_2\gamma\kappa_3 B_2 \tag{4.135}$$

bulunur. Bu denklem sırasıyla T ve B_1 ile çarpılırsa

$$\delta' = 0 \quad \text{ve} \quad \gamma' = 0 \tag{4.136}$$

elde edilir. Kabul edelim ki $\gamma = 0$ olsun. Bu durumda (4.134) denkleminden N ile N^* vektörlerinin lineer bağımlı olduğu görülür. Bölüm 3 den bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $\gamma \neq 0$ dır. Öyleyse (4.133) denkleminden

$$a\kappa_2 - b\kappa_3 \neq 0$$

ve

$$1 = a\kappa_1 + h(a\kappa_2 - b\kappa_3) \tag{4.137}$$

elde edilir. Burada $h = \delta/\gamma$. (4.136) denklemi (4.135) de kullanılırsa

$$\epsilon_2^* f' \kappa_1^* N^* = \epsilon_2(\delta\kappa_1 - \gamma\kappa_2)N - \epsilon_2\gamma\kappa_3 B_2 \tag{4.138}$$

olduğu görülür. (4.138) denklemi kendisi ile çarpılırsa

$$\epsilon_2^*(f')^2(\kappa_1^*)^2 = \epsilon_2(\delta\kappa_1 - \gamma\kappa_2)^2 + \epsilon_4\gamma^2\kappa_3^2 \tag{4.139}$$

bulunur. (4.133) ve (4.139) denklemlerinden

$$\epsilon_2^*(f')^2(\kappa_1^*)^2 = \frac{(a\kappa_2 - b\kappa_3)^2}{(f')^2}[\epsilon_2(h\kappa_1 - \kappa_2)^2 + \epsilon_4\kappa_3^2] \tag{4.140}$$

elde edilir. (4.137) denklemi (4.132) denkleminde yazılırsa

$$(f')^2 = (a\kappa_2 - b\kappa_3)^2[h^2 + 1] \tag{4.141}$$

olduğu görülür. (4.141) ve (4.140) denklemlerinden

$$\epsilon_2^*(f')^2(\kappa_1^*)^2 = \frac{1}{h^2+1}[\epsilon_2(h\kappa_1 - \kappa_2)^2 + \epsilon_4\kappa_3^2] \tag{4.142}$$

bulunur. Eğer

$$\lambda_1 = \frac{\epsilon_2(\delta\kappa_1 - \gamma\kappa_2)}{\epsilon_2^* f'\kappa_1^*} = \frac{\epsilon_2(a\kappa_2 - b\kappa_3)}{\epsilon_2^*(f')^2\kappa_1^*}[h\kappa_1 - \kappa_2], \tag{4.143}$$

$$\lambda_2 = \frac{-\epsilon_2\gamma\kappa_3}{\epsilon_2^* f'\kappa_1^*} = \frac{\epsilon_2(a\kappa_2 - b\kappa_3)}{\epsilon_2^*(f')^2\kappa_1^*}\kappa_3 \tag{4.144}$$

alınırsa (4.138) denkleminden

$$N^* = \lambda_1 N + \lambda_2 B_2 \tag{4.145}$$

bulunur. (4.145) denkleminde s ye göre türev alınır ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$-f'\kappa_1^* T^* + f'\kappa_2^* B_1^* = -\kappa_1\lambda_1 T + \lambda_1' N + (\lambda_1\kappa_2 + \lambda_2\kappa_3)B_1 + \lambda_2' B_2 \tag{4.146}$$

elde edilir. Bu denklem sırasıyla N ve B_2 ile çarpılırsa

$$\lambda_1' = 0 \quad \text{ve} \quad \lambda_2' = 0 \tag{4.147}$$

bulunur. $\lambda_2 \neq 0$ olduğundan, (4.143) ve (4.144) denklemlerinden

$$-\mu\kappa_3 = h\kappa_1 - \kappa_2 \tag{4.148}$$

elde edilir. (4.140) den dolayı $\mu = \lambda_1/\lambda_2 \neq \pm 1$ dır. (4.147) ve (4.146) denklemlerinden

$$-f'\kappa_1^* T^* + f'\kappa_2^* B_1^* = -\kappa_1\lambda_1 T + (\lambda_1\kappa_2 - \lambda_2\kappa_3)B_1 \tag{4.149}$$

olduğu görülür. Ayrıca (4.131) ve (4.149) denklemlerinden

$$f'\kappa_2^* B_1^* = A(s)T + B(s)B_1$$

bulunur. Burada

$$A(s) = \frac{-\epsilon_2(a\kappa_2 - b\kappa_3)}{\epsilon_2^*(f')^2\kappa_1^*(h^2+1)}[\kappa_1\kappa_2(h^2-1) + h(-\kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa_1^2)]$$

ve

$$B(s) = \frac{\epsilon_2 h(a\kappa_2 - b\kappa_3)}{\epsilon_2^*(f')^2\kappa_1^*(h^2+1)}[\kappa_1\kappa_2(h^2-1) + h(-\kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa_1^2)]$$

dir. $f'\kappa_2^* B_1^* \neq 0$ olduğundan dolayı

$$\kappa_1\kappa_2(h^2-1) + h(-\kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa_1^2) \neq 0$$

olduğu görülür.

Tersine, kabul edelim ki $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$ sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları κ_1, κ_2, κ_3 ve birinci binormal vektörü B_1 spacelike vektör olan birim hızlı spacelike eğri olsun ve a, b, h, $\mu \neq \pm 1$ reel sayıları için, (4.124), (4.125), (4.126) ve (4.127) durumları sağlansın. Bu durumda bir β^* eğrisi aşağıdaki gibi tanımlanabilir

$$\beta^*(s^*) = \beta(s) + aN(s) + bB_2(s). \tag{4.150}$$

(4.150) denkleminde s ye göre türev alınır ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\frac{d\beta^*}{ds} = (1 - a\kappa_1)T + (a\kappa_2 - b\kappa_3)B_1 \tag{4.151}$$

bulunur. (4.151) ve (4.125) denklemlerinden

$$\frac{d\beta^*}{ds} = (a\kappa_2 - b\kappa_3)[hT + B_1] \tag{4.152}$$

elde edilir ve bu denklem yardımıyla

$$f' = \frac{ds^*}{ds} = \left\| \frac{d\beta^*}{ds} \right\| = m_1(a\kappa_2 - b\kappa_3)\sqrt{h^2+1} > 0$$

şeklinde tanımlanır. Burada $m_1 = \pm 1$ öyle ki $m_1\left(a\kappa_2 - b\kappa_3\right) > 0$ dır. (4.152) denklemi yeniden yazılarak

$$T^* = \frac{m_1}{\sqrt{h^2+1}}[hT + B_1] \tag{4.153}$$

elde edilir. Buradan $g(T^*, T^*) = 1$ olduğu görülür. (4.153) denkleminde s ye göre türev alınır ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\frac{dT^*}{ds^*} = \frac{m_1\epsilon_2}{f'\sqrt{h^2+1}}[(h\kappa_1 - \kappa_2)N - \kappa_3 B_2] \tag{4.154}$$

bulunur. (4.154) denkleminden

$$\kappa_1^* = \left\| \frac{dT^*}{ds^*} \right\| = \frac{\sqrt{m_2[(h\kappa_1 - \kappa_2)^2 - \kappa_3^2]}}{f'\sqrt{h^2+1}} \tag{4.155}$$

elde edilir. Burada $m_2 = \mp 1$ öyle ki $m_2[(h\kappa_1 - \kappa_2)^2 - \kappa_3^2] > 0$. (4.154) ve (4.155) denklemlerinden

$$N^* = \frac{\epsilon_2^*}{\kappa_1^*}\frac{dT^*}{ds^*} = \frac{m_1\epsilon_2^*\epsilon_2}{\sqrt{m_2[(h\kappa_1 - \kappa_2)^2 - \kappa_3^2]}}[(h\kappa_1 - \kappa_2)N - \kappa_3 B_2] \tag{4.156}$$

olduğu bulunur. Buradan $g(N^*, N^*) = \epsilon_2 m_2 = \epsilon_2^*$ olduğu görülür. Eğer

$$\lambda_3 = \frac{m_1\epsilon_2^*\epsilon_2(h\kappa_1 - \kappa_2)}{\sqrt{m_2[(h\kappa_1 - \kappa_2)^2 - \kappa_3^2]}} \quad \text{ve} \quad \lambda_4 = \frac{-m_1\epsilon_2^*\epsilon_2\kappa_3}{\sqrt{m_2[(h\kappa_1 - \kappa_2)^2 - \kappa_3^2]}} \tag{4.157}$$

alınırsa, (4.156) denkleminden

$$N^* = \lambda_3 N + \lambda_4 B_2 \tag{4.158}$$

elde edilir. (4.158) denkleminde s ye göre türev alınır ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$f'\frac{dN^*}{ds^*} = -\lambda_3\kappa_1 T + \lambda_3' N + (\lambda_3\kappa_2 - \lambda_4\kappa_3)B_1 + \lambda_4' B_2 \tag{4.159}$$

olduğu görülür. (4.126) de s ye göre türev alınırsa

$$(h\kappa_1' - \kappa_2')\kappa_3 - (h\kappa_1 - \kappa_2)\kappa_3' = 0 \tag{4.160}$$

elde edilir. (4.157) de s ye göre türev alınır ve (4.160) kullanılırsa

$$\lambda_3' = 0 \quad \text{ve} \quad \lambda_4' = 0 \tag{4.161}$$

olduğu bulunur. (4.157) ve (4.161) denklemleri (4.159) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{dN^*}{ds^*} = \frac{-m_1\epsilon_2^*\epsilon_2\kappa_1(h\kappa_1-\kappa_2)}{f'\sqrt{m_2[(h\kappa_1-\kappa_2)^2-\kappa_3^2]}}T + \frac{m_1\epsilon_2^*\epsilon_2[\kappa_2(h\kappa_1-\kappa_2)+\kappa_3^2]}{f'\sqrt{m_2[(h\kappa_1-\kappa_2)^2-\kappa_3^2]}}B_1 \tag{4.162}$$

elde edilir. (4.153) ve (4.155) denklemlerinden

$$\kappa_1^*T^* = \frac{m_1\sqrt{m_2[(h\kappa_1-\kappa_2)^2-\kappa_3^2]}}{f'(h^2+1)}[hT+B_1] \tag{4.163}$$

olduğu görülür. (4.162) ve (4.163) denklemleri birlikte kullanıldığında

$$\frac{dN^*}{ds^*} + \kappa_1^*T^* = \frac{P(s)}{R(s)}[T-hB_1] \tag{4.164}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned} P(s) &= -m_1\epsilon_2^*\epsilon_2[\kappa_1\kappa_2(h^2-1)+h(\kappa_1^2-\kappa_2^2+\kappa_3^2)] \neq 0, \\ R(s) &= f'(h^2+1)\sqrt{m_2[(h\kappa_1-\kappa_2)^2-\kappa_3^2]} \neq 0 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. (4.164) denkleminden

$$\kappa_2^* = \frac{|\kappa_1\kappa_2(h^2-1)+h(\kappa_1^2-\kappa_2^2+\kappa_3^2)|}{f'\sqrt{h^2+1}\sqrt{m_2[(h\kappa_1-\kappa_2)^2-\kappa_3^2]}} \tag{4.165}$$

olduğu görülür. (4.164) ve (4.165) denklemlerinden

$$B_1^* = \frac{1}{\kappa_2^*}[\frac{dN^*}{ds^*} + \kappa_1^*T^*] = \frac{-m_1m_3\epsilon_2^*\epsilon_2}{\sqrt{h^2+1}}[T-hB_1] \tag{4.166}$$

bulunur. Burada

$$m_3 = \frac{|\kappa_1\kappa_2(h^2-1)+h(\kappa_1^2-\kappa_2^2+\kappa_3^2)|}{(\kappa_1\kappa_2(h^2-1)+h(\kappa_1^2-\kappa_2^2+\kappa_3^2))} = \pm 1$$

dir. (4.166) denkleminden, $g(B_1^*, B_1^*) = 1$ olduğu görülür. Birim B_2^* vektörü $B_2^* = -\lambda_4 N - \lambda_3 B_2$ olarak tanımlanabilir, yani

$$B_2^* = \frac{m_1\epsilon_2^*\epsilon_2\kappa_3}{\sqrt{m_2[(h\kappa_1-\kappa_2)^2-\kappa_3^2]}}N - \frac{m_1\epsilon_2^*\epsilon_2(h\kappa_1-\kappa_2)}{\sqrt{m_2[(h\kappa_1-\kappa_2)^2-\kappa_3^2]}}B_2 \tag{4.167}$$

şeklinde tanımlanabilir. Buradan $g(B_2^*, B_2^*) = m_2\epsilon_4 = \epsilon_4^* = -\epsilon_2^*$ bulunur. Son olarak

$$\kappa_3^* = g(\frac{dB_1^*}{ds^*}, B_2^*) = \frac{-m_3\kappa_1\kappa_3\sqrt{h^2+1}}{f'\sqrt{m_2[(h\kappa_1-\kappa_2)^2-\kappa_3^2]}} \neq 0$$

olarak bulunur. Sonuç olarak β^* eğrisi sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları κ_1^*, κ_2^*, κ_3^* ve birinci binormal vektörü B_1^* spacelike vektör olan bir spacelike eğridir ve span$\{N^*, B_2^*\}$ =span$\{N, B_2\}$ olduğundan β eğrisinin $(1,3)$-Bertrand eşlenik eğrisidir.

Durum 4.6 β sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları κ_1, κ_2, κ_3 ve birinci binormal vektörü B_1 spacelike vektör olan bir spacelike eğri ve β^* eğrilikleri $\kappa_1^* = 1$, $\kappa_2^* \neq 0$, κ_3^* olan bir pseudo null eğri olsun. Bu durumda aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.6 $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$ sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları κ_1, κ_2, κ_3 ve birinci binormal vektörü B_1 spacelike vektör olan birim hızlı spacelike eğri olsun. Bu durumda β eğrisinin, $(1,3)$-Bertrand eşlenik eğrisi sıfırdan farklı ikinci eğrilik fonksiyonuna sahip bir pseudo null eğri olan $(1,3)$-Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şart her $s \in I$ için aşağıdaki şartları sağlayan a, b, h, $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 \neq 0$ reel sayıları vardır;

$$a\kappa_2(s) - b\kappa_3(s) \neq 0, \tag{4.168}$$

$$1 - a\kappa_1(s) = h(a\kappa_2(s) - b\kappa_3(s)), \tag{4.169}$$

$$h\kappa_1(s) - \kappa_2(s) = \mu_1(a\kappa_2(s) - b\kappa_3(s)), \tag{4.170}$$

$$\kappa_3(s) = \mu_2(a\kappa_2(s) - b\kappa_3(s)). \tag{4.171}$$

Burada $\mu_1^2 = \mu_2^2$.

İspat. Kabul edelim ki $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$ sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları κ_1, κ_2, κ_3 ve birinci binormal vektörü B_1 spacelike vektör olan birim hızlı spacelike eğri ve $\beta^* : I^* \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$ eğrisi β eğrisinin eğrilikleri $\kappa_1^* = 1$, $\kappa_2^* \neq 0$, κ_3^* olan pseudo null $(1,3)$-Bertrand eşlenik eğrisi olsun. Bu durumda, her $s^* \in I^*$ ve her $s \in I$ için β^* aşağıdaki formda yazılabilir

$$\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s)) = \beta(s) + a(s)N(s) + b(s)B_2(s). \tag{4.172}$$

Burada $a(s)$ ve $b(s)$, I üzerinde $C^\infty-$fonksiyonlardır. (4.172) denkleminde s ye göre türev alınır, (2.1) ve (2.3) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$T^* f' = (1 - a\kappa_1)T + a'N + (a\kappa_2 - b\kappa_3)B_1 + b'B_2 \tag{4.173}$$

elde edilir. Bu son eşitlik sırasıyla N ve B_2 ile çarpılırsa

$$a' = 0 \quad \text{ve} \quad b' = 0 \tag{4.174}$$

bulunur. (4.174) denklemi (4.173) denkleminde yazılırsa

$$T^* f' = (1 - a\kappa_1)T + (a\kappa_2 - b\kappa_3)B_1 \tag{4.175}$$

bulunur. (4.175) denklemi kendisi ile çarpılırsa

$$(f')^2 = (1 - a\kappa_1)^2 + (a\kappa_2 - b\kappa_3)^2 \tag{4.176}$$

olduğu görülür. Eğer

$$\delta = \frac{1 - a\kappa_1}{f'} \quad \text{ve} \quad \gamma = \frac{a\kappa_2 - b\kappa_3}{f'} \tag{4.177}$$

alınırsa, (4.175) denkleminden

$$T^* = \delta T + \gamma B_1 \tag{4.178}$$

elde edilir. (4.178) denkleminde s ye göre türev alınır, (2.1) ve (2.3) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\epsilon_2^* f' \kappa_1^* N^* = \delta' T + \epsilon_2(\delta\kappa_1 - \gamma\kappa_2)N + \gamma' B_1 - \epsilon_2\gamma\kappa_3 B_2 \tag{4.179}$$

bulunur. Bu denklem sırasıyla T ve B_1 ile çarpılırsa

$$\delta' = 0 \quad \text{ve} \quad \gamma' = 0 \tag{4.180}$$

elde edilir. Kabul edelim ki $\gamma = 0$ olsun. Bu durumda (4.178) denkleminden N ile N^* vektörlerinin lineer bağımlı olduğu görülür. Bölüm 3 den bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $\gamma \neq 0$ dır. Öyleyse (4.177) denkleminden

$$a\kappa_2 - b\kappa_3 \neq 0$$

ve

$$1 - a\kappa_1 = h(a\kappa_2 - b\kappa_3) \tag{4.181}$$

elde edilir. Burada $h = \delta/\gamma$. (4.180) denklemi (4.179) de kullanılırsa

$$\epsilon_2^* f' \kappa_1^* N^* = \epsilon_2(\delta\kappa_1 - \gamma\kappa_2)N - \epsilon_2\gamma\kappa_3 B_2 \tag{4.182}$$

olduğu görülür. (4.182) denklemi kendisi ile çarpılırsa

$$(\delta\kappa_1 - \gamma\kappa_2)^2 = \gamma^2\kappa_3^2 \tag{4.183}$$

bulunur. (4.181) denklemi (4.176) denkleminde yazılırsa

$$(f')^2 = (a\kappa_2 - b\kappa_3)^2[h^2 + 1] \tag{4.184}$$

elde edilir. Eğer

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\epsilon_2(\delta\kappa_1 - \gamma\kappa_2)}{\epsilon_2^* f'\kappa_1^*} = \frac{\epsilon_2(a\kappa_2 - b\kappa_3)}{(f')^2}[h\kappa_1 - \kappa_2], && (4.185)\\ \lambda_2 &= \frac{-\epsilon_2\gamma\kappa_3}{\epsilon_2^* f'\kappa_1^*} = \frac{\epsilon_2(a\kappa_2 - b\kappa_3)}{(f')^2}\kappa_3 && (4.186) \end{aligned}$$

alınırsa (4.182) denkleminden

$$N^* = \lambda_1 N + \lambda_2 B_2 \tag{4.187}$$

bulunur. (4.187) denkleminde s ye göre türev alınır, (2.1) ve (2.3) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$f'\kappa_2^* B_1^* = -\kappa_1\lambda_1 T + \lambda_1' N + (\lambda_1\kappa_2 + \lambda_2\kappa_3)B_1 + \lambda_2' B_2 \tag{4.188}$$

elde edilir. Bu denklem sırasıyla N ve B_2 ile çarpılırsa

$$\lambda_1' = 0 \quad \text{ve} \quad \lambda_2' = 0 \tag{4.189}$$

bulunur. (4.177), (4.183), (4.185), (4.186) ve (4.189) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} h\kappa_1 - \kappa_2 &= \mu_1(a\kappa_2 - b\kappa_3),\\ \kappa_3 &= \mu_2(a\kappa_2 - b\kappa_3) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\mu_1^2 = \mu_2^2$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}/\{0\}$.

Tersine, kabul edelim ki $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$ sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları κ_1, κ_2, κ_3 ve birinci binormal vektörü B_1 spacelike vektör olan birim hızlı spacelike eğri olsun ve a, b, h, $\mu \neq \pm 1$ reel sayıları için, (4.168), (4.169), (4.170) ve (4.171) durumları sağlansın. Bu durumda bir β^* eğrisi aşağıdaki gibi tanımlanabilir

$$\beta^*(s^*) = \beta(s) + aN(s) + bB_2(s). \tag{4.190}$$

(4.190) denkleminde s ye göre türev alınır ve (2.1) verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\frac{d\beta^*}{ds} = (1 - a\kappa_1)T + (a\kappa_2 - b\kappa_3)B_1 \tag{4.191}$$

bulunur. (4.191) ve (4.169) denklemlerinden

$$\frac{d\beta^*}{ds} = (a\kappa_2 - b\kappa_3)[hT + B_1] \tag{4.192}$$

elde edilir ve bu denklem yardımıyla

$$f' = \frac{ds^*}{ds} = \left\| \frac{d\beta^*}{ds} \right\| = m_1(a\kappa_2 - b\kappa_3)\sqrt{h^2+1} > 0$$

şeklinde tanımlanır. Burada $m_1 = \pm 1$ öyle ki $m_1\,(a\kappa_2 - b\kappa_3) > 0$. (4.192) denklemi yeniden yazılarak

$$T^* = \frac{m_1}{\sqrt{h^2+1}}[hT + B_1] \tag{4.193}$$

elde edilir. Buradan $g(T^*, T^*) = 1$ olduğu görülür. (4.193) denkleminde s ye göre türev alınır, (2.1) de verilen Frenet denklemleri, (4.170) ve (4.171) kullanılırsa

$$\frac{dT^*}{ds^*} = \frac{\epsilon_2}{\sqrt{h^2+1}}[\mu_1 N - \mu_2 B_2] \tag{4.194}$$

elde edilir. Buradan $g\,(dT^*/ds^*, dT^*/ds^*) = 0$ olduğu görülür. Öyleyse (4.194) denkleminden, $\kappa_1^* = 1$ ve

$$N^* = \frac{\epsilon_2}{\sqrt{h^2+1}}[\mu_1 N - \mu_2 B_2] \tag{4.195}$$

olduğu görülür. (4.195) denkleminde s ye göre türev alınır ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\frac{dN^*}{ds^*} = \frac{\epsilon_2}{f'\,(h^2+1)}[-\mu_1\kappa_1 T + (\mu_1\kappa_2 + \mu_2\kappa_3)\,B_1] \tag{4.196}$$

elde edilir. (4.196) denklemi kullanılarak

$$\kappa_2^* = \left\| \frac{dN^*}{ds^*} \right\| = \frac{\sqrt{\mu_1^2\kappa_1^2 + (\mu_1\kappa_2 + \mu_2\kappa_3)^2}}{f'\,(h^2+1)} \neq 0 \tag{4.197}$$

bulunur. (4.196) ve (4.197) denklemlerinden

$$B_1^* = \frac{\epsilon_2}{\sqrt{\mu_1^2\kappa_1^2 + (\mu_1\kappa_2 + \mu_2\kappa_3)^2}}[-\mu_1\kappa_1 T + (\mu_1\kappa_2 + \mu_2\kappa_3)\,B_1] \tag{4.198}$$

olarak elde edilir. Öyleyse $g\left(N^{*},B_{2}^{*}\right)=1$ olacak şekilde aşağıdaki gibi bir null vektör B_{2}^{*} tanımlanabilir

$$B_{2}^{*}=\frac{h^{2}+1}{2}\left[\frac{1}{\mu_{1}}N+\frac{1}{\mu_{2}}B_{2}\right]. \tag{4.199}$$

(4.198) ve (4.199) denklemleri kullanılarak

$$\kappa_{3}^{*}=\frac{-\epsilon_{2}\left(h^{2}+1\right)\left(\kappa_{1}^{2}+\kappa_{2}^{2}-\kappa_{3}^{2}\right)}{2f'\sqrt{\mu_{1}^{2}\kappa_{1}^{2}+\left(\mu_{1}\kappa_{2}+\mu_{2}\kappa_{3}\right)^{2}}}$$

elde edilir. Sonuç olarak β^{*} eğrisi ikinci eğriliği sıfırdan farklı olan bir pseudo null eğridir ve span$\{N^{*},B_{2}^{*}\}$ =span$\{N,B_{2}\}$ olduğundan β eğrisinin $(1,3)$-Bertrand eşlenik eğrisidir.

Durum 4.7 β eğrilikleri $\kappa_{1}=1$, $\kappa_{2}\neq0$, κ_{3} olan bir pseudo null eğri ve β^{*} sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları κ_{1}^{*}, κ_{2}^{*}, κ_{3}^{*} ve birinci binormal vektörü B_{1}^{*} spacelike vektör olan bir spacelike eğri olsun. Bu durumda aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.7 $\beta:I\subset\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{E}_{1}^{4}$ eğrisi eğrilikleri $\kappa_{1}=1$, $\kappa_{2}\neq0$, κ_{3} olan bir pseudo null eğri olsun. Bu durumda β eğrisinin, $(1,3)$-Bertrand eşlenik eğrisi sıfırdan farklı eğriliklere ve spacelike birinci binormal vektöre sahip spacelike bir eğri olan $(1,3)$-Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şart her $s\in I$ için aşağıdaki şartları sağlayan a,b,h,μ reel sayıları vardır;

$$a\kappa_{2}\left(s\right)-b\kappa_{3}\left(s\right)\neq0, \tag{4.200}$$

$$1=b+h(a\kappa_{2}\left(s\right)-b\kappa_{3}\left(s\right)), \tag{4.201}$$

$$-\mu\kappa_{2}\left(s\right)=h+\kappa_{3}\left(s\right), \tag{4.202}$$

$$\kappa_{2}\left(s\right)-2\kappa_{2}\left(s\right)\kappa_{3}\left(s\right)h-\kappa_{2}\left(s\right)h^{2}\neq0. \tag{4.203}$$

İspat. Kabul edelim ki $\beta:I\subset\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{E}_{1}^{4}$ eğrisi eğrilikleri $\kappa_{1}=1$, $\kappa_{2}\neq0$, κ_{3} olan birim hızlı bir pseudo null eğri ve $\beta^{*}:I^{*}\subset\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{E}_{1}^{4}$ eğrisi β eğrisinin eğrilikleri $\kappa_{1}^{*},\kappa_{2}^{*},\kappa_{3}^{*}$ sıfırdan farklı ve spacelike birinci binormal vektöre B_{1}^{*} sahip olan spacelike $(1,3)$-Bertrand eşlenik eğrisi olsun. Bu durumda, her $s^{*}\in I^{*}$ ve her $s\in I$ için β^{*} aşağıdaki formda yazılabilir

$$\beta^{*}(s^{*})=\beta^{*}(f(s))=\beta(s)+a(s)N(s)+b(s)B_{2}(s). \tag{4.204}$$

Burada $a(s)$ ve $b(s)$, I üzerinde $C^\infty-$fonksiyonlardır. (4.204) denkleminde s ye göre türev alınır, (2.1) ve (2.3) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$T^* f' = (1-b)T + a'N + (a\kappa_2 - b\kappa_3)B_1 + b'B_2 \tag{4.205}$$

elde edilir. Bu son eşitlik sırasıyla N ve B_2 ile çarpılırsa

$$a' = 0 \quad \text{ve} \quad b' = 0 \tag{4.206}$$

bulunur. (4.206) denklemi (4.205) denkleminde yazılırsa

$$T^* f' = (1-b)T + (a\kappa_2 - b\kappa_3)B_1 \tag{4.207}$$

bulunur. (4.207) denklemi kendisi ile çarpılırsa

$$(f')^2 = (1-b)^2 + (a\kappa_2 - b\kappa_3)^2 \tag{4.208}$$

olduğu görülür. Eğer

$$\delta = \frac{1-b}{f'} \quad \text{ve} \quad \gamma = \frac{a\kappa_2 - b\kappa_3}{f'} \tag{4.209}$$

alınırsa (4.207) denkleminden

$$T^* = \delta T + \gamma B_1 \tag{4.210}$$

elde edilir. (4.210) denkleminde s ye göre türev alınır, (2.1) ve (2.3) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\epsilon_2^* f' \kappa_1^* N^* = \delta' T + (\delta + \gamma\kappa_3)N + \gamma' B_1 - \gamma\kappa_2 B_2 \tag{4.211}$$

bulunur. Bu denklem sırasıyla T ve B_1 ile çarpılırsa

$$\delta' = 0 \quad \text{ve} \quad \gamma' = 0 \tag{4.212}$$

elde edilir. Kabul edelim ki $\gamma = 0$ olsun. Bu durumda (4.210) denkleminden N ile N^* vektörlerinin lineer bağımlı olduğu görülür. Bölüm 3 den bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $\gamma \neq 0$ dır. Öyleyse (4.209) denkleminden

$$a\kappa_2 - b\kappa_3 \neq 0$$

ve

$$1 - b = h(a\kappa_2 - b\kappa_3) \tag{4.213}$$

elde edilir. Burada $h = \delta/\gamma$. (4.212) denklemi (4.211) de kullanılırsa

$$\epsilon_2^* f' \kappa_1^* N^* = (\delta + \gamma\kappa_3)N - \gamma\kappa_2 B_2 \tag{4.214}$$

olduğu görülür. (4.214) denklemi kendisi ile çarpılırsa

$$\epsilon_2^* (f')^2 (\kappa_1^*)^2 = -2\gamma\kappa_2(\delta + \gamma\kappa_3) \tag{4.215}$$

bulunur. (4.209) ve (4.215) denklemlerinden

$$\epsilon_2^* (f')^2 (\kappa_1^*)^2 = \frac{-2\kappa_2(a\kappa_2 - b\kappa_3)^2}{(f')^2} (h + \kappa_3) \tag{4.216}$$

elde edilir. (4.213) denklemi (4.208) denkleminde yazılırsa

$$(f')^2 = (a\kappa_2 - b\kappa_3)^2 \left(h^2 + 1\right) \tag{4.217}$$

olduğu görülür. (4.217) ve (4.216) denklemlerinden

$$\epsilon_2^* (f')^2 (\kappa_1^*)^2 = \frac{-2\kappa_2}{h^2 + 1} (h + \kappa_3) \tag{4.218}$$

bulunur. Eğer

$$\lambda_1 = \frac{\delta + \gamma\kappa_3}{\epsilon_2^* f' \kappa_1^*} = \frac{(a\kappa_2 - b\kappa_3)(h + \kappa_3)}{\epsilon_2^* (f')^2 \kappa_1^*}, \tag{4.219}$$

$$\lambda_2 = \frac{-\gamma\kappa_2}{\epsilon_2^* f' \kappa_1^*} = \frac{-\kappa_2(a\kappa_2 - b\kappa_3)}{\epsilon_2^* (f')^2 \kappa_1^*} \tag{4.220}$$

alınırsa (4.214) denkleminden

$$N^* = \lambda_1 N + \lambda_2 B_2 \tag{4.221}$$

bulunur. (4.221) denkleminde s ye göre türev alınır, (2.1) ve (2.3) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$-f'\kappa_1^* T^* + f'\kappa_2^* B_1^* = -\lambda_2 T + \lambda_1' N + (\lambda_1\kappa_2 - \lambda_2\kappa_3) B_1 + \lambda_2' B_2 \tag{4.222}$$

elde edilir. Bu denklem sırasıyla N ve B_2 ile çarpılırsa

$$\lambda_1' = 0 \quad \text{ve} \quad \lambda_2' = 0 \tag{4.223}$$

bulunur. $\lambda_2 \neq 0$ olduğundan, (4.219) ve (4.220) denklemlerinden

$$-\mu\kappa_2 = h + \kappa_3 \tag{4.224}$$

elde edilir. Burada $\mu = \lambda_1/\lambda_2$ dır. (4.223) ve (4.222) denklemlerinden

$$-f'\kappa_1^* T^* + f'\kappa_2^* B_1^* = -\lambda_2 T + (\lambda_1\kappa_2 - \lambda_2\kappa_3)\, B_1 \tag{4.225}$$

olduğu görülür. Ayrıca (4.207) ve (4.225) denklemlerinden

$$f'\kappa_2^* B_1^* = A(s)T + B(s)B_1$$

bulunur. Burada

$$A(s) = \frac{(a\kappa_2 - b\kappa_3)}{\epsilon_2^*(f')^2\kappa_1^*(h^2+1)}[\kappa_2 - 2\kappa_2\kappa_3 h - \kappa_2 h^2]$$

ve

$$B(s) = \frac{-(a\kappa_2 - b\kappa_3)h}{\epsilon_2^*(f')^2\kappa_1^*(h^2+1)}[\kappa_2 - 2\kappa_2\kappa_3 h - \kappa_2 h^2]$$

dir. $f'\kappa_2^* B_1^* \neq 0$ olduğundan dolayı

$$\kappa_2 - 2\kappa_2\kappa_3 h - \kappa_2 h^2 \neq 0$$

olduğu görülür.

Tersine, kabul edelim ki $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$ eğrisi eğrilikleri $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 \neq 0$, κ_3 olan birim hızlı bir pseudo null eğri olsun ve a, b, h, μ reel sayıları için, (4.200), (4.201), (4.202) ve (4.203) durumları sağlansın. Bu durumda bir β^* eğrisi aşağıdaki gibi tanımlanabilir

$$\beta^*(s^*) = \beta(s) + aN(s) + bB_2(s). \tag{4.226}$$

(4.226) denkleminde s ye göre türev alınır ve (2.3) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\frac{d\beta^*}{ds} = (1-b)T + (a\kappa_2 - b\kappa_3)B_1 \tag{4.227}$$

bulunur. (4.227) ve (4.201) denklemlerinden,

$$\frac{d\beta^*}{ds} = (a\kappa_2 - b\kappa_3)[hT + B_1] \tag{4.228}$$

elde edilir ve bu denklem yardımıyla

$$f' = \frac{ds^*}{ds} = \left\| \frac{d\beta^*}{ds} \right\| = m_1(a\kappa_2 - b\kappa_3)\sqrt{h^2+1} > 0$$

şeklinde tanımlanır. Burada $m_1 = \pm 1$ öyle ki $m_1 (a\kappa_2 - b\kappa_3) > 0$ dır. (4.228) denklemi yeniden yazılarak

$$T^* = \frac{m_1}{\sqrt{h^2+1}}[hT + B_1] \tag{4.229}$$

elde edilir. Buradan $g(T^*, T^*) = 1$ olduğu görülür. (4.229) denkleminde s ye göre türev alınır ve (2.3) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\frac{dT^*}{ds^*} = \frac{m_1}{f'\sqrt{h^2+1}}[(h+\kappa_3)N - \kappa_2 B_2] \tag{4.230}$$

bulunur. (4.230) denkleminden

$$\kappa_1^* = \left\| \frac{dT^*}{ds^*} \right\| = \frac{\sqrt{2m_2\kappa_2(h+\kappa_3)}}{f'\sqrt{h^2+1}} \tag{4.231}$$

elde edilir. Burada $m_2 = \mp 1$ öyle ki $m_2\kappa_2(h+\kappa_3) > 0$. (4.230) ve (4.231) denklemlerinden

$$N^* = \frac{\epsilon_2^*}{\kappa_1^*}\frac{dT^*}{ds^*} = \frac{m_1\epsilon_2^*}{\sqrt{2m_2\kappa_2(h+\kappa_3)}}[(h+\kappa_3)N - \kappa_2 B_2] \tag{4.232}$$

olduğu bulunur. Buradan $g(N^*, N^*) = -m_2 = \epsilon_2^*$ olduğu görülür. Eğer

$$\lambda_3 = \frac{m_1\epsilon_2^*(h+\kappa_3)}{\sqrt{2m_2\kappa_2(h+\kappa_3)}} \quad \text{ve} \quad \lambda_4 = \frac{-m_1\epsilon_2^*\kappa_2}{\sqrt{2m_2\kappa_2(h+\kappa_3)}} \tag{4.233}$$

alınırsa, (4.232) denkleminden

$$N^* = \lambda_3 N + \lambda_4 B_2 \tag{4.234}$$

elde edilir. (4.234) denkleminde s ye göre türev alınır ve (2.3) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$f'\frac{dN^*}{ds^*} = -\lambda_4 T + \lambda_3' N + (\lambda_3\kappa_2 - \lambda_4\kappa_3) B_1 + \lambda_4' B_2 \tag{4.235}$$

olduğu görülür. (4.202) de s ye göre türev alınırsa

$$\kappa_3'\kappa_2 - (h+\kappa_3)\kappa_2' = 0 \tag{4.236}$$

elde edilir. (4.233) de s ye göre türev alınır ve (4.236) kullanılırsa

$$\lambda_3' = 0 \quad \text{ve} \quad \lambda_4' = 0 \tag{4.237}$$

olduğu bulunur. (4.233) ve (4.237) denklemleri (4.235) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\frac{dN^*}{ds^*} = \frac{\epsilon_2^* m_1 \kappa_2}{f'\sqrt{2m_2\kappa_2(h+\kappa_3)}}T + \frac{\epsilon_2^* m_1 \kappa_2 \left(h+2\kappa_3\right)}{f'\sqrt{2m_2\kappa_2(h+\kappa_3)}}B_1 \tag{4.238}$$

elde edilir. (4.229) ve (4.231) denklemlerinden,

$$\kappa_1^* T^* = \frac{2m_1 m_2 \kappa_2 \left(h+\kappa_3\right)}{f'\sqrt{2m_2\kappa_2(h+\kappa_3)}\left(h^2+1\right)}[hT + B_1] \tag{4.239}$$

olduğu görülür. (4.238) ve (4.239) denklemleri birlikte kullanıldığında,

$$\frac{dN^*}{ds^*} + \kappa_1^* T^* = \frac{X(s)}{R(s)}T + \frac{Y(s)}{R(s)}B_1 \tag{4.240}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned} X(s) &= -m_1 m_2 \left(\kappa_2 - 2\kappa_2\kappa_3 h - \kappa_2 h^2\right) \neq 0, \\ Y(s) &= m_1 m_2 h \left(\kappa_2 - 2\kappa_2\kappa_3 h - \kappa_2 h^2\right), \\ R(s) &= f'\sqrt{2m_2\kappa_2(h+\kappa_3)}\left(h^2+1\right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. (4.240) denkleminden,

$$\kappa_2^* = \frac{|\kappa_2 - 2\kappa_2\kappa_3 h - \kappa_2 h^2|}{f'\sqrt{2m_2\kappa_2(h+\kappa_3)}\sqrt{h^2+1}} \tag{4.241}$$

olduğu görülür. (4.240) ve (4.241) denklemlerinden,

$$B_1^* = \frac{1}{\kappa_2^*}[\frac{dN^*}{ds^*} + \kappa_1^* T^*] = \frac{-m_1 m_2 m_3}{\sqrt{h^2+1}}[T - hB_1] \tag{4.242}$$

bulunur. Burada

$$m_3 = \frac{|\kappa_2 - 2\kappa_2\kappa_3 h - \kappa_2 h^2|}{\kappa_2 - 2\kappa_2\kappa_3 h - \kappa_2 h^2} = \pm 1$$

dir. (4.242) denkleminden, $g(B_1^*, B_1^*) = 1$ olduğu görülür. Birim B_2^* vektörü $B_2^* = \lambda_3 N - \lambda_4 B_2$ olarak tanımlanabilir, yani

$$B_2^* = \frac{m_1 \epsilon_2^*}{\sqrt{2m_2\kappa_2(h+\kappa_3)}}\left[(h+\kappa_3)N + \kappa_2 B_2\right]$$

şeklinde tanımlanabilir. Buradan $g(B_2^*, B_2^*) = m_2 = \epsilon_4^* = -\epsilon_2^*$ bulunur. Son olarak,

$$\kappa_3^* = g(\frac{dB_1^*}{ds^*}, B_2^*) = \frac{m_3 \kappa_2 \sqrt{h^2+1}}{f'\sqrt{2m_2\kappa_2(h+\kappa_3)}} \neq 0$$

olarak bulunur. Sonuç olarak β^* eğrisi sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları κ_1^*, κ_2^*, κ_3^* ve birinci binormal vektörü B_1^* spacelike vektör olan bir spacelike eğridir ve span$\{N^*, B_2^*\}$ =span$\{N, B_2\}$ olduğundan β eğrisinin $(1,3)$-Bertrand eşlenik eğrisidir.

Durum 4.8 β eğrilikleri $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 \neq 0$, κ_3 olan bir pseudo null eğri ve β^* da eğrilikleri $\kappa_1^* = 1$, $\kappa_2^* \neq 0$, κ_3^* olan bir pseudo null eğri olsun. Bu durumda aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.8 $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$ eğrisi eğrilikleri $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 \neq 0$, κ_3 olan bir pseudo null eğri olsun. Bu durumda β eğrisinin, $(1,3)$-Bertrand eşlenik eğrisi sıfırdan farklı ikinci eğriliğe sahip pseudo null bir eğri olan $(1,3)$-Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şart her $s \in I$ için aşağıdaki şartları sağlayan $\lambda \neq 0$, γ, $\mu \notin \{0,1\}$ reel sayıları vardır;

$$\lambda\kappa_2(s) - \mu\kappa_3(s) \neq 0, \tag{4.243}$$

$$1 = \mu + \gamma(\lambda\kappa_2(s) - \mu\kappa_3(s)), \tag{4.244}$$

$$\gamma + \kappa_3(s) = 0. \tag{4.245}$$

İspat. Bu teoremin ispatı [14] makalesinde görülebilir.

4.2.1. Bazı Örnekler

Bu bölümde Bölüm 4.2. deki teoremlere ilişkin örnekler verilecektir.

Örnek 4.7 Timelike asli normale N sahip spacelike eğri β,

$$\beta(s) = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(\cosh 2s, \sinh 2s, \sqrt{6}\sin s, \sqrt{6}\cos s\right)$$

olarak verilsin. β eğrisinin Frenet çatısı

$$\begin{aligned}
T(s) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sqrt{2}\sinh 2s, \sqrt{2}\cosh 2s, \sqrt{3}\cos s, -\sqrt{3}\sin s\right),\\
N(s) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-2\sqrt{2}\cosh 2s, -2\sqrt{2}\sinh 2s, \sqrt{3}\sin s, \sqrt{3}\cos s\right),\\
B_1(s) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\sqrt{3}\sinh 2s, -\sqrt{3}\cosh 2s, \sqrt{2}\cos s, -\sqrt{2}\sin s\right),\\
B_2(s) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sqrt{3}\cosh 2s, \sqrt{3}\sinh 2s, -2\sqrt{2}\sin s, -2\sqrt{2}\cos s\right)
\end{aligned}$$

ve eğrilik fonksiyonları $k_1(s) = 1$, $k_2(s) = \sqrt{6}$, $k_3(s) = 2$ olarak elde edilir. Teorem 4.5 de, $a = 2$, $b = 2\sqrt{6}$, $h = \sqrt{6}/12$ ve $\mu = 25\sqrt{6}/48$ alınırsa (4.124), (4.125), (4.126) ve (4.127) durumları sağlanır. Öyleyse β eğrisi E_1^4 uzayında $(1,3)$-Bertrand eğrisidir ve $(1,3)$-Bertrand eşlenik eğrisi β^*, timelike asli normale N^* sahip spacelike bir eğridir öyle ki

$$\beta^*(s) = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\cosh 2s, \frac{\sqrt{10}}{2}\sinh 2s, -\sqrt{15}\sin s, -\sqrt{15}\cos s \right)$$

olarak elde edilir. β^* eğrisinin Frenet çatısı

$$\begin{aligned}
T^*(s) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sqrt{2}\sinh 2s, \sqrt{2}\cosh 2s, -\sqrt{3}\cos s, \sqrt{3}\sin s\right), \\
N^*(s) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-2\sqrt{2}\cosh 2s, -2\sqrt{2}\sinh 2s, -\sqrt{3}\sin s, -\sqrt{3}\cos s\right), \\
B_1^*(s) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\sqrt{3}\sinh 2s, -\sqrt{3}\cosh 2s, -\sqrt{2}\cos s, \sqrt{2}\sin s\right), \\
B_2^*(s) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sqrt{3}\cosh 2s, \sqrt{3}\sinh 2s, 2\sqrt{2}\sin s, 2\sqrt{2}\cos s\right)
\end{aligned}$$

ve eğrilik fonksiyonları $k_1^*(s) = 1/5$, $k_2^*(s) = \sqrt{6}/5$, $k_3^*(s) = 2/5$ olarak bulunur. Ayrıca aşağıdaki eşitlikler sağlanır

$$\begin{aligned}
N^*(s) &= \frac{11}{5}\sqrt{2}N(s) + \frac{4\sqrt{6}}{5}B_2(s), \\
B_2^*(s) &= -\frac{4\sqrt{6}}{5}N(s) - \frac{11}{5}B_2(s).
\end{aligned}$$

Örnek 4.8 Örnek 4.7 deki aynı spacelike eğri için, Teorem 4.6 da $a = -\left(1+\sqrt{6}\right)$, $b = -\left(\sqrt{6}+7\right)/2$, $h = 2+\sqrt{6}$ ve $\mu_1 = \mu_2 = 2$ alınırsa (4.168), (4.169), (4.170) ve (4.171) durumları sağlanır. Öyleyse β eğrisi E_1^4 uzayında $(1,3)$-Bertrand eğrisidir ve $(1,3)$-Bertrand eşlenik eğrisi β^* bir pseudo null eğridir öyle ki

$$\beta^*(s) = \frac{\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{5}}\left(\cosh 2s, \sinh 2s, 4\sin s, 4\cos s\right)$$

olarak bulunur. β^* eğrisinin Frenet çatısı

$$\begin{aligned}
T^*(s) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sinh 2s, \cosh 2s, 2\cos s, -2\sin s\right), \\
N^*(s) &= \frac{2}{\sqrt{55+20\sqrt{6}}}\left(\cosh 2s, \sinh 2s, -\sin s, -\cos s\right), \\
B_1^*(s) &= \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\sinh 2s, \cosh 2s, -2\cos s, 2\sin s\right), \\
B_2^*(s) &= -\frac{\sqrt{55+20\sqrt{6}}}{4}\left(\cosh 2s, \sinh 2s, \sin s, \cos s\right)
\end{aligned}$$

ve eğrilik fonksiyonları $k_1^*(s) = \sqrt{5}/4$, $k_2^*(s) = 3\sqrt{5}/20$, $k_3^*(s) = -1/\sqrt{5}$ olarak elde edilir. Ayrıca aşağıdaki eşitlikler sağlanır

$$
\begin{aligned}
N^*(s) &= \frac{2}{11+4\sqrt{6}}\left[-N(s)+B_2(s)\right], \\
B_2^*(s) &= \frac{11+4\sqrt{6}}{4}\left[N(s)+B_2(s)\right].
\end{aligned}
$$

Örnek 4.9 [14] Pseudo null eğri β

$$
\beta(s) = \frac{3}{\sqrt{10}}\left(\frac{1}{9}\cosh 3s, \frac{1}{9}\sinh 3s, \sin s, -\cos s\right)
$$

olarak verilsin. β eğrisinin Frenet çatısı

$$
\begin{aligned}
T(s) &= \frac{3}{\sqrt{10}}(\frac{1}{3}\sinh 3s, \frac{1}{3}\cosh 3s, \cos s, \sin s), \\
N(s) &= \frac{3}{\sqrt{10}}\left(\cosh 3s, \sinh 3s, -\sin s, \cos s\right), \\
B_1(s) &= \frac{1}{\sqrt{10}}\left(3\sinh 3s, 3\cosh 3s, -\cos s, -\sin s\right), \\
B_2(s) &= \frac{5}{3\sqrt{10}}\left(-\cosh 3s, -\sinh 3s, -\sin s, \cos s\right)
\end{aligned}
$$

ve eğrilik fonksiyonları $k_1(s) = 1$, $k_2(s) = 3$, $k_3(s) = 4/3$ olarak elde edilir. Teorem 4.7 de $a = b = -9/16$, $h = -5/3$ ve $\mu = 1/9$ alınırsa (4.200), (4.201), (4.202) ve (4.203) durumları sağlanır. Öyleyse β eğrisi E_1^4 uzayında $(1,3)$-Bertrand eğrisidir ve $(1,3)$-Bertrand eşlenik eğrisi β^* spacelike birinci binormal vektöre B_1^* sahip spacelike eğridir öyle ki

$$
\beta^*(s) = \left(-\frac{1}{24}\sqrt{10}\cosh 3s, -\frac{1}{24}\sqrt{10}\sinh 3s, \frac{9}{16}\sqrt{10}\sin s, -\frac{9}{16}\sqrt{10}\cos s\right)
$$

olarak bulunur. β^* eğrisinin Frenet çatısı

$$
\begin{aligned}
T^*(s) &= \left(-\frac{2}{85}\sqrt{85}\sinh 3s, -\frac{2}{85}\sqrt{85}\cosh 3s, \frac{9}{85}\sqrt{85}\cos s, \frac{9}{85}\sqrt{85}\sin s\right), \\
N^*(s) &= \left(-\frac{2}{5}\sqrt{5}\cosh 3s, -\frac{2}{5}\sqrt{5}\sinh 3s, -\frac{3}{5}\sqrt{5}\sin s, \frac{3}{5}\sqrt{5}\cos s\right), \\
B_1^*(s) &= \left(-\frac{9}{85}\sqrt{85}\sinh 3s, -\frac{9}{85}\sqrt{85}\cosh 3s, -\frac{2}{85}\sqrt{85}\cos s, -\frac{2}{85}\sqrt{85}\sin s\right), \\
B_2^*(s) &= \left(\frac{3}{5}\sqrt{5}\cosh 3s, \frac{3}{5}\sqrt{5}\sinh 3s, \frac{2}{5}\sqrt{5}\sin s, -\frac{2}{5}\sqrt{5}\cos s\right)
\end{aligned}
$$

ve eğrilik fonksiyonları $k_1^*(s) = 24\sqrt{2}/85$, $k_2^*(s) = 96\sqrt{2}/85$, $k_3^*(s) = 8\sqrt{2}/5$ olarak elde edilir. Ayrıca aşağıdaki eşitlikler sağlanır

$$\begin{aligned} N^*(s) &= \frac{1}{6}\sqrt{2}N(s) + \frac{3}{2}\sqrt{2}B_2(s), \\ B_2^*(s) &= \frac{1}{6}\sqrt{2}N(s) - \frac{3}{2}\sqrt{2}B_2(s). \end{aligned}$$

Örnek 4.10 Örnek 4.9 deki aynı pseudo null eğri için, Teorem 4.8 de $\lambda = -17/18$, $\mu = -1$ ve $\gamma = -4/3$ alınırsa (4.243), (4.244) ve (4.245) durumları sağlanır. Öyleyse β eğrisi E_1^4 uzayında $(1,3)$-Bertrand eğrisidir ve $(1,3)$-Bertrand eşlenik eğrisi β^* bir pseudo null eğridir öyle ki

$$\beta^*(s) = \frac{-5}{6\sqrt{10}}(\cosh 3s, \sinh 3s, -9\sin s, 9\cos s)$$

olarak bulunur. β^* eğrisinin Frenet çatısı

$$\begin{aligned} T^*(s) &= \frac{1}{\sqrt{10}}(-\sinh 3s, -\cosh 3s, 3\cos s, 3\sin s), \\ N^*(s) &= \frac{-3\sqrt{10}}{25}(\cosh 3s, \sinh 3s, \sin s, -\cos s), \\ B_1^*(s) &= \frac{-3}{\sqrt{10}}(\sinh 3s, \cosh 3s, 3\cos s, 3\sin s), \\ B_2^*(s) &= \frac{5\sqrt{10}}{12}(\cosh 3s, \sinh 3s, -\sin s, \cos s) \end{aligned}$$

ve eğrilik fonksiyonları $k_1^*(s) = 1$, $k_2^*(s) = 12/25$, $k_3^*(s) = 4/3$ olarak elde edilir. Ayrıca aşağıdaki eşitlikler sağlanır

$$N^*(s) = \frac{18}{25}B_2(s) \quad \text{ve} \quad B_2^*(s) = \frac{25}{18}N(s).$$

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

$(1,3)$-Bertrand eğrileri ile ilgili yapılan makaleler dikkate alındığında $(1,3)$-Bertrand eğrisi ve eşlenik eğrisi aynı casual karakterinde düşünülmüştür. Buradan farklı casual karakterindeki eğrilerin $(1,3)$-Bertrand eğri çifti oluşturup oluşturamayacağı sorusu akla gelmiştir. Bu sorunun çözümünü araştırmak için $(1,3)$-normal düzlemlerin casual karakterleri dikkate alınmıştır. Buradan bir spacelike eğrisinin $(1,3)$-Bertrand eşlenik eğrisinin spacelike eğri dışında timelike, Cartan null veya pseudo null eğri olabiliceği, bir timelike $(1,3)$-Bertrand eğrisinin $(1,3)$-Bertrand eşlenik eğrisinin timelike eğri dışında spacelike veya Cartan null eğri olabileceği, Cartan null $(1,3)$-Bertrand eğrisinin $(1,3)$-Bertrand eşlenik eğrisinin Cartan null eğri dışında spacelike veya timelike eğri olabileceği, pseudo null $(1,3)$-Bertrand eğrisinin $(1,3)$-Bertrand eşlenik eğrisinin pseudo null eğri dışında spacelike eğri olabileceği bulunmuştur.

Sonuç olarak, farklı casual karaktere sahip eğri çiftlerinin de $(1,3)$-Bertrand eğri çifti oluşturabildiği literatüre kazandırılmıştır. Buna benzer çalışmalar farklı uzaylarda da çalışılabilir. Örneğin, null $(1,3)$-Bertrand eğrileri 4-boyutlu 2-indeksli yarı-Öklidyen uzayda çalışılmıştır [29].

KAYNAKLAR

[1] Kuhnel, W., Differential geometry: curves-surfaces-manifolds. Braunschweig, Wiesbaden, 1999.

[2] Montiel, S., Ros, A., Curves and surfaces. Real Sociedad Matematica Espanola Madrid, Spain, 1998.

[3] O'Neill, B., Semi-Riemannian geometry with applications to relativity. Academic Press, New York, 1983.

[4] Bertrand, J. M., Mémoire sur la théorie des courbes á double courbure. Comptes Rendus. 15: 332-350, 1850.

[5] Saint Venant, B., Mémoire sur les lignes courbes non planes. Journal de l'Ecole Polytechnique. 18: 1-76, 1845.

[6] Bioche, Ch., Sur les courbes de M. Bertrand. Bull. Soc. Math. France. 17: 109-112, 1889.

[7] Burke, J. F., Bertrand Curves Associated with a Pair of Curves. Mathematics Magazine. 34 (1): 60-62, 1960.

[8] Matsuda, H., Yorozu, S., Notes on Bertrand curves. Yokohama Math. J. 50 (1-2): 41-58, 2003.

[9] Pears, L. R., Bertrand curves in Riemannian space. J London Math. Soc. 2 (1-10): 180-183, 1935.

[10] Balgetir, H., Bektaş, M., Ergüt, M., Bertrand curves for non-null curves in 3-dimensional Lorentzian space. Hadronic J. 27 (2): 229-236, 2004.

[11] Balgetir, H., Bektaş, M., Inoguchi, J., Null Bertrand curves in Minkowski 3-space and their characterizations. Note Mat. 23 (1): 7-13, 2004/2005.

[12] Ekmekci, N., İlarslan, K., On Bertrand curves and their characterization. Differ. Geom. Dyn. Syst. 3 (2): 17-24, 2001.

[13] Ersoy, S., İnalcık, A., Generalized spacelike Bertrand curves in Minkowski 5-space. Quaestiones Mathematicae. 37 (1): 19-29, 2014.

[14] Gök, İ., Nurkan, S. K., İlarslan, K., On Pseudo Null Bertrand Curves in Minkowski Space-Time. Kyungpook Math. J. 54 (4): 685-697, 2014.

[15] Jin, D. H., Null Bertrand curves in a Lorentz manifold. J. Korea Soc. Math. Educ. Ser. B Pure Appl. Math. 15 (3): 209-215, 2008.

[16] Kahraman, F., Gök, İ., İlarslan, K., Generalized Null Bertrand Curves in Minkowski Space-Time. Scientic Annals of "Al.I. Cuza" University of Iasi Mathematica. Tomul LX: 489-502, 2014.

[17] Lucas, P., Ortega-Yagües, JA., Bertrand curves in the three-dimensional sphere. Journal of Geometry and Physics. 62: 1903-1914, 2012.

[18] Oztekin, H. B., Weakened Bertrand curves in the Galilean space G^3. Journal of Advanced Mathematical Studies. 2 (2): 69-76, 2009.

[19] Whittemore, J. K., Bertrand curves and helices. Duke Math J. 6: 235-245, 1940.

[20] Yilmaz, M. Y., Bektaş, M., General properties of Bertrand curves in Riemann-Otsuki space. Nonlinear Analysis. 69: 3225-3231, 2008.

[21] Uçum, A., Keçilioğlu, O., İlarslan, K., Generalized Bertrand curves with spacelike (1,3)-normal plane in Minkowski space-time, to appear in Turkish Journal of Mathematics, 2015.

[22] Uçum, A., Keçilioğlu, O., İlarslan, K., Generalized Bertrand curves with timelike (1,3)-normal plane in Minkowski space-time. Kuwait J. Sci. 42 (3): 113-130, 2015.

[23] Duggal, K. L., Bejancu, A., Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications. 1-76. Kluwer Academic Publisher, London, 1996.

[24] Bonnor, W. B., Null curves in a Minkowski space-time. Tensor. 20: 229-242, 1969.

[25] İlarslan, K., Nesovic, E., Spacelike and Timelike Normal Curves in Minkowski Space-Time. Pub. de L'Institut Math. 85 (99): 111-118, 2009.

[26] Bonnor, W. B., Curves with null normals in Minkowski space-time. A random walk in relativity and cosmology, Wiley Easten Limited: 33-47, 1985.

[27] Lopez, R., Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space. Int. Electron. J. Geom. 7 (1): 44-107, 2014.

[28] Çöken, A. C., Çiftçi, Ü., On the cartan curvatures of a null curve in Minkowski spacetime. Geom. Dedicata. 114: 71-78, 2005.

[29] Uçum, A., İlarslan, K., Sakaki, M., On $(1,3)$-Cartan null Bertrand curves in semi-Euclidean 4-space with index 2, accepted in Journal of Geometry, 2015.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Ali UÇUM

Doğum Yeri: Fatih

Doğum Tarihi: 20/09/1990

Medeni Hali: Bekar

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise: Esenyurt Lisesi

Lisans: Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Matematik Bölümü, Haziran 2012

Yüksek Lisans: Eylül 2015

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl: Kırıkkale Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Yayınları: 1-) Uçum A., Keçilioğlu O. and İlarslan K., Generalized Bertrand curves with timelike (1,3)-normal plane in Minkowski space-time. Kuwait J. Sci. 42 (3): 113-130, 2015.
2-) Uçum A., Keçilioğlu O. and İlarslan K., Generalized Bertrand curves with spacelike (1,3)-normal plane in Minkowski space-time, to appear in Turkish Journal of Mathematics, 2015.