KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

4-BOYUTLU YARI-ÖKLİD UZAYINDA KUATERNİYONİK EĞRİLER VE UYGULAMALARI

Hussein Ali AHMED

HAZİRAN 2015

Matematik Anabilim Dalı Hussein AHMED tarafından hazırlanan *4-BOYUTLU YARI-ÖKLİD UZAYINDA KUATERNİYONİK EĞRİLER VE UYGULAMALARI* adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Faik BABADAĞ
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan : ______________

Üye : ______________

Üye : ______________

…./…./2015

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Mustafa YİĞİTOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

4-BOYUTLU YARI-ÖKLİD UZAYINDA KUATERNİYONİK EĞRİLER VE UYGULAMALARI

AHMED, Hussein

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Faik BABADAĞ

HAZİRAN 2015, 65 sayfa

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde giriş, tezin amacı ve kaynak özetleri hakkında bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde ilerideki bölümlerde gerekli olacak temel kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde 4-boyutlu yarı-Öklid uzayında kuaterniyonik eğrilerin genel tanımı yapıldıktan sonra kuaterniyonik eğriler için Serret-Frenet formülleri ve 4-boyutlu yarı-Öklid uzayında kuaterniyonik Bertrand eğrilerinin bazı karakterizasyonları verilmiştir.

Dördüncü bölümde 4-boyutlu yarı-Öklid uzayında kuaterniyonik $\left(N, B_2\right)$ Bertrand eğrilerinin bazı karakterizasyonları verilmiştir.

Beşinci bölümde ise 4-boyutlu yarı-Öklid uzayında bir helisin Bertrand eğrisi ve kuaterniyonik B_2-slant helis incelenmiştir. Son olarak, örnekler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yarı-reel kuaterniyonlar, Serret-Frenet formülleri, Bertrand eğrileri, helisler.

ABSTRACT

QUATERNIONIC CURVES IN THE SEMI-EUCLIDEAN 4-SPACE AND THEIR APPLICATIONS

AHMED, Hussein
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, Master Thesis
Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Faik BABADAĞ
June 2015, 65 pages

This thesis consists of five sections. In the first section, introduction, the aim of the study and the information about the references are given.

In the second section, fundamental concepts which will be necessary in the next sections are given.

In the third section, general definitions of the quaternionic curves in the semi-Euclidean 4-space followed by Serret-Frenet formulas for the quaternionic curves and some characterizations of the quaternionic Bertrand curves in the semi-Euclidean 4-space are given.

In the fourth section, some characterizations of the quaternionic (N, B_2) Bertrand curves in the semi-Euclidean 4-space are given.

In the fifth section, Bertrand curve of a helix and quaternionic B_2-slant helix in the semi-Euclidean 4-space have been investigated. Lastly, some examples are given.

Key Words: Semi-real quaternions, Serret-Frenet formulas, Bertrand curves, helices.

TEŞEKKÜR

Bana bu çalışmayı veren ve çalışmalarımı yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek akademik ortamda olduğu kadar beşeri ilişkilerde de engin fikirleri ile yetişme ve gelişmeme katkıda bulunan sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Faik BABADAĞ'a en derin saygı ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim. Çalışmalarım süresince birçok fedakarlık göstererek beni destekleyen ailem ve çocuklarım Abdırahman, Ashwak'a en derin duygularım ile teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

Kuaterniyonlar, 1843 yılında İrlandalı matematikçi William Rowan Hamilton'un kompleks sayıları 3-boyutlu uzaya genelleştirmek için yaptığı çalışmalar sırasında bulunmuştur. Reel kuaterniyonlar, iki kompleks sayının kombinasyonundan oluşmuştur. Buna göre kompleks sayılar da kuaterniyonların bir alt kümesi olması sonucu, kuaterniyonların hem reel sayılar hem de kompleks sayıları kapsayan daha geniş bir sayı sistemi olduğunu göstermektedir. Kuaterniyonlar son yıllarda her alanda artan bir hızla kullanılmaktadır. Hamilton'dan beri farklı yazarlar tarafından kuaterniyonlar çalışılmıştır.

$\mathbb{Q}_v$ yarı reel kuaterniyonlarına taban elemanları e_1, e_2, e_3 ve $e_4 = 1$ olan 4-boyutlu uzaydaki bir vektör gözü ile bakılabilir. $\mathbb{Q}_v$ deki her eleman

$$q = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4; \, (e_4 = 1\,)$$

biçiminde ifade edilebilir, burada a, b, c ve d reel sayılar ve e_1, e_2, e_3, e_4 ise 4-boyutlu uzaydaki baz vektörler olarak alınabilir. Burada 4-boyutlu yarı-Öklid uzayının elemanları bir doğal yol ile yarı-reel kuaterniyonlar ile özdeşleştirilmektedir. α, 4-boyutlu yarı-Öklid uzayında bir birim hızlı eğri olsun. T, N, B_1 ve B_2 vektörleri sırasıyla α üzerinde Frenet vektörleridir. Burada T, N, B_1 ve B_2 sırasıyla birim teğet, normal, birinci binormal ve ikinci binormal vektördür.

3-boyutlu reel Öklid uzayındaki bir eğrinin Serret-Frenet formülleri uzay-kuaterniyonları yardımıyla K. Bharathi and M. Nagaraj tarafından yeniden türetilmiştir. Bulunan bu formüller yardımıyla 4-boyutlu reel Öklid uzayındaki kuaterniyonik eğrilerin Serret-Frenet formülleri elde edilmiştir. Şimdiye kadar yapılmış olan çalışmaların çoğu elde edilen bu formüller kullanılarak yayınlanmıştır. A. C. Çöken and A. Tuna tarafından yapılan çalışmalarda

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 + dz^2 + dw^2$$

metrikli 4-boyutlu yarı-Öklid uzaylarındaki kuaterniyonik eğriler için Serret-Frenet formülleri, eğimli eğrileri, harmonik eğrilikleri ve bazı karakterizasyonlarının elde edilebileceği gösterilmiştir. Gök ve Kahramanın yaptığı çalışmada 4-boyutlu yarı-Öklid uzayındaki kuaterniyonik B_2 -slant helis tanımlanmıştır ve bazı karakterizasyonları verilmiştir.

Eğrilerin diferansiyel geometrisinde, en önemli problemlerden biri regüler bir eğrinin karakterizasyonudur. Bu problemin çözümünde eğrinin birinci eğriliği (κ) ve torsiyonu (τ) etkili bir rol oynar. Örneğin;

i) $\kappa \equiv 0$ ise eğri bir doğrudur,

ii) $\kappa \neq 0$ ve $\tau \equiv 0$ ise eğri düzlemseldir,

iii) $\kappa = sabit > 0$ ve $\tau \equiv 0$ ise eğri yarıçapı $1/_{\kappa}$ olan bir çemberdir.

Böylece bir eğrinin birinci eğriliğini ve torsiyonunu kullanılarak eğrinin biçimini ve uzunluğunu belirleyebiliriz. Teğet vektörü sabit bir doğrultu ile sabit açı yapan eğrilere genel helis veya sabit eğimli eğri denir. Helisler ile ilgili klasik bir sonuç 1802 yılında M. A. Lancret tarafından ifade edilmiş ve ilk olarak 1845 yılında B. de Saint Venant tarafından ispatlanmıştır. Eğer $\kappa = sabit > 0$ ve $\tau = sabit \neq 0$ ise eğriye dairesel helis denir. Diferansiyel geometride önemli bir yeri olan eğri 1850 yılında J. Bertrand tarafından bulunan Bertrand eğrileridir. Bertrand eğrisinin her noktasındaki normal vektörü Bertrand çifti denilen diğer bir eğrinin de normal vektörüdür. Yani, $\{\alpha, \beta\}$ Bertrand eğri çifti olarak alındığında β eğrisinin bir Bertrand eğrisi olma şartı α eğrisine bağlı olarak ifade edilebilir. $\forall s \in I$ için α eğrisinin Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şart $A\kappa(s) + B\tau(s) = 1$ olacak şekilde sıfırdan farklı A ve B reel sabitlerinin var olmasıdır. Böylece düzlemsel eğriler ve dairesel helisler Bertrand eğrileridir.

4-boyutlu yarı-Öklid uzayında kuaterniyonik eğrilerin üzerinde son yıllarda çalışılmakta olup bu alanda halen yeni çalışmalar yapılmaktadır. Bu tez çalışmasında ise 4-boyutlu yarı-Öklid uzayındaki kuaterniyonik eğriler için Serret-Frenet vektörleri verilmiştir. 4-boyutlu yarı-Öklid uzayında iki kuaterniyonik eğrinin karşılıklı noktalarında Frenet vektörleri arasındaki bağıntılar kurularak, eğrilerin karakterizasyonu elde edilmiştir. Örnek olarak kuaterniyonik Bertrand eğri çiftleri verilebilir.

1.1. Kaynak Özetleri

Bu tezin hazırlanmasında 4-boyutlu yarı-Öklid uzayında yarı-reel kuaterniyonlar ve kuaterniyonik eğriler ile ilgili bazı temel tanımlar ve kavramlar verilmiştir. Ayrıca, kuaterniyonik eğriler için Serret-Frenet formülleri verilmiştir [1]. [2, 3] de *n*-boyutlu reel Öklid uzayındaki Bertrand eğrileri için elde edilen karakterizasyonlardan yararlanarak, 4-boyutlu yarı-Öklid uzayında bir kuaterniyonik Bertrand eğrisi tanımlanmıştır ve kuaterniyonik Bertrand eğri çiftleri arasındaki uzaklık ve teğet vektörleri arasındaki açının sabit olmasının elde edilebileceğinden yararlanılmıştır. Daha sonra, 4-boyutlu yarı-Öklid uzayındaki kuaterniyonik eğrilerin Serret-Frenet formülleri kullanılarak bir helisin Bertrand eğrisinin elde edilebileceği gösterilmiştir. [4-6] numaralı kaynaklarda ise 4-boyutlu reel Öklid uzayındaki (N, B_2) Bertrand eğrileri için elde edilen karakterizasyonlardan faydalanarak, 4-boyutlu yarı-Öklid uzayında kuaterniyonik (N, B_2) Bertrand eğrisinin bazı karakterizasyonlarının elde edilebileceğinden yararlanılmıştır. Daha sonra, 4-boyutlu yarı-Öklid uzayındaki vektörel çarpım verilmiştir ve reel Öklid uzayındaki kuaterniyonik B_2-slant helis için elde edilen gerekli ve yeterli koşullardan faydalanarak, 4-boyutlu yarı-Öklid uzayındaki kuaterniyonik eğrilerin bir kuaterniyonik B_2-slant helis olması için gerek ve yeter koşullarin elde edilebilecegi gösterilmiştir. Diğer kaynaklardan ise konuyla ilgili çeşitli tanımlar ve kavramlar verilmiştir.

1.2. Tezin Amacı

Bu çalışmanın temel amacı, 4-boyutlu yarı-Öklid uzayındaki kuaterniyonik eğriler ile ilgilenilmektedir. Aynı uzaydaki kuaterniyonik eğriler için Serret-Frenet formüllerinden faydalanarak, 4-boyutlu yarı-Öklid uzayında bir kuaterniyonik Bertrand eğrilerinin karakterizasyonları elde edilmektedir. Bu karakterizasyonların elde edilmesinde eğrinin üçüncü eğriliği $(\sigma - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa)$ büyük bir rol oynar. Yani

1) $\sigma - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa = 0$ olduğu göz önüne alınarak, 4-boyutlu yarı-Öklid uzayında bir kuaterniyonik Bertrand eğrisinin karakterizasyonu elde edilmiştir.

2) $\sigma - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa \neq 0$ olduğu göz önüne alınarak, 4-boyutlu yarı-Öklid uzayında bir kuaterniyonik (N, B_2) Bertrand eğrisinin karakterizasyonu elde edilmiştir.

Daha sonra 4-boyutlu yarı-Öklid uzayındaki kuaterniyonik eğriler için Serret-Frenet formülleri kullanılarak bir helisin Bertrand eğrisinin elde edilebileceği gösterilmektedir. 4-boyutlu yarı-Öklid uzayındaki kuaterniyonik eğrilerin bir kuaterniyonik B_2-slant helis olması için gerek ve yeter koşulların elde edilebilecegi gösterilmektedir. Son olarakta, 4-boyutlu yarı-Öklid uzayındaki kuaterniyonik eğriler ile ilgili örnekler verilmektedir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Afin Uzaylar

Tanım 2.1. (Afin Uzay):
$A \neq \emptyset$ bir cümle ve V de K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer bir

$$\chi: A \times A \longrightarrow V$$

dönüşümü $P, Q \in A$ noktaları için $(P, Q) \longrightarrow \overrightarrow{PQ} \in V$ şeklinde tanımlanmış ve aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyor ise A cümlesine V ile birleştirilmiş bir "Afin Uzay" denir.

$i)$ $\forall\, P, Q, R \in A$ için $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ dir.

$ii)$ $\forall\, P \in A$ ve $\forall\, \alpha \in V$ için $\overrightarrow{PQ} = \alpha$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

$\overrightarrow{PQ}$ vektöründe P noktasına başlangıç ve Q noktasına uç noktası denir.

2.2. Öklid Uzayları

Tanım 2.2. (Öklid Uzayı):
n-boyutlu bir reel iç çarpım uzayı V olsun. V ile birleşen bir A afin uzayına *n*-boyutlu "Öklid Uzayı" denir ve $\mathbb{E}^n$ ile gösterilir.

Tanım 2.3. $\mathbb{E}^n$ *n*-boyutlu Öklid uzayında bir nokta X olsun. $\mathbb{E}^n$ de bir afin koordinat sistemine göre X noktasının koordinatları $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ olsun.

$$x_i: \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

bileşenlerine $\mathbb{E}^n$ in "i-yinci Koordinat Fonksiyonu" denir. $\mathbb{R}^n$ standart reel afin uzay olmak üzere; $\mathbb{R}^n$ de bir $\langle\, ,\rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ iç çarpımı $\forall\, X, Y \in \mathbb{R}^n$,

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ için

$$\langle\, ,\rangle(X,Y) = \langle X,Y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$$

biçiminde tanımlayalım. Bu iç çarpıma $\mathbb{R}^n$ de "Standart İç Çarpım" veya "Öklid İç Çarpımı" denir. Standart iç çarpımın tanımlı olduğu $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı ile birleşen $\mathbb{R}^n$ afin uzayına "n-boyutlu Standart Öklid Uzayı" denir ve $\mathbb{E}^n$ ile gösterilir.

Tanım 2.4. (Uzaklık):

$$d: \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(X,Y) \longrightarrow d(X,Y) = \left\|\overrightarrow{XY}\right\|$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında "Uzaklık Fonksiyonu" ve $d(X,Y)$ reel sayısına da $X,Y \in \mathbb{E}^n$ noktaları arasındaki "Uzaklık" denir.

Teorem 2.1. $\mathbb{E}^n$ de uzaklık fonksiyonu bir metriktir.

İspat: $\forall\, X,Y,Z \in \mathbb{E}^n$ için;

(i) $d(X,Y) \geq 0,\qquad d(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y,$

(ii) $d(X,Y) = d(Y,X)$, (simetri özelliği),

(iii) $d(X,Z) \leq d(X,Y) + d(Y,Z)$, (üçgen eşitsizliği),

olduğunu göstereceğiz.

(i) $\mathbb{E}^n$ ile birleşen $\mathbb{R}^n$ iç çarpım uzayında, iç çarpım pozitif tanımlı olduğundan,

$\forall \alpha \in \mathbb{R}^n$ için $\|\alpha\| \geq 0$ dır. Buna göre,

$\overrightarrow{XY} = \alpha$ ve $d(X,Y) = \left\|\overrightarrow{XY}\right\| \geq 0$ ve $\|\alpha\| = 0 \Rightarrow d(X,Y) = \left\|\overrightarrow{XY}\right\| = 0$ ve $\overrightarrow{XY} = \vec{0}$ veya $X = Y$

elde edilir. Tersine, $X = Y$ ise;

$\overrightarrow{XY} = \vec{0} \Longrightarrow \|\overrightarrow{XY}\| = 0 \Longrightarrow d(X, Y) = 0.$

(ii) $d(X, Y) = \|\overrightarrow{XY}\| = \|\overrightarrow{YX}\| = d(Y, X).$

(iii) iç çarpım uzayında norm'un özelliklerinden,

$\|\overrightarrow{XZ}\| = \|\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ}\| \leq \|\overrightarrow{XY}\| + \|\overrightarrow{YZ}\|$ veya $d(X, Z) \leq d(X, Y) + d(Y, Z).$

Tanım 2.5. (Öklid Metriği):

$$d: \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(X, Y) \longrightarrow d(X, Y) = \|\overrightarrow{XY}\|$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna $\mathbb{E}^n$ de "Öklid Metriği" denir.

Tanım 2.6. (Açı): $\forall\, X, Y, Z \in \mathbb{E}^n$ için $\widehat{XYZ}$ açısının ölçüsü

$$\cos\theta = \frac{\langle \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{YZ} \rangle}{\|\overrightarrow{XY}\| \|\overrightarrow{YZ}\|}$$

den hesaplanan θ reel sayısıdır.

Tanım 2.7. (Öklid Çatısı):

Bir n-boyutlu reel iç çarpım uzayı V olsun. V ile birleşen $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında sıralı bir $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta $(n+1)$ -lisine karşılık gelen $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ vektör sistemi V nin bir ortonormal bazı ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ çatısına dik çatı "Öklid Çatısı" denir.

Örnek 2.1. $\mathbb{E}^n$ de $E_0 = (0, \dots, 0)$, $E_1 = (1, 0, \dots, 0)$, …, $E_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ noktaları bir dik çatı oluştururlar. Gerçekten, $\langle \overrightarrow{E_0E_i}, \overrightarrow{E_0E_j} \rangle = \delta_{ij}$ dir, dolayısıyla $\{\overrightarrow{E_0E_1}, \dots, \overrightarrow{E_0E_n}\}$ vektör sistemi $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı için bir ortonormal bazdır.

Tanım 2.8. (Standart Öklid Çatısı):

$\mathbb{E}^n$ deki $\{E_0, E_1, \dots, E_n\}$ çatısına "Standart Öklid Çatısı" denir.

Örnek 2.2. $\mathbb{E}^2$ de $P_0 = (a_1, a_2)$, $P_1 = (a_1 + \cos\theta\, , a_2 + \sin\theta)$,

$P_2 = (a_1 - \sin\theta\, , a_2 + \cos\theta)$ noktaları, $\forall a_1\, , a_2, \theta \in \mathbb{R}$ için bir dik çatı meydana getirirler. Çünkü, $\langle \overrightarrow{P_0P_i}, \overrightarrow{P_0P_j} \rangle = \delta_{ij}$ ve dolayısıyla $\{\overrightarrow{P_0P_1},\ \overrightarrow{P_0P_2}\}$ vektör sistemi $\mathbb{R}^2$ vektör uzayı için bir ortonormal bazdır.

Tanım 2.9. (Öklid Koordinat Sistemi):

$\mathbb{E}^n$ n-boyutlu Öklid uzayında bir nokta X ve bu noktanın bileşenleri $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ olsun.

$$x_i: \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

bileşenlerine $\mathbb{E}^n$ in i-yinci koordinat fonksiyonu denir. Buna göre $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ reel sayıları n-lisine "Öklid Koordinat Sistemi" denir.

Tanım 2.10. (C^k Sınıfından Bir Fonksiyon):

$\mathbb{E}^n$ de bir açık alt cümle U olmak üzere bir $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun k yıncı mertebeden bütün kısmi türevleri var ve sürekli iseler f fonksiyonuna C^k sınıfından (k-yıncı sınıftan) diferensiyellenebilirdir denir. Özel olarak f sadece sürekli ise C^0 sınıfındandır denir. U üstünde tanımlı C^1 sınıfından fonksiyona U üstünde bir o-form adı verilir.

$C^k(U, R) = \{f \mid f: U \longrightarrow \mathbb{R}$ ve f fonksiyonu C^k sınıfından$\}$ ve

$C^\infty(U, R) = \{f \mid f \in C^k(U, R), k \in \mathbb{N}\}$.

2.3. *n*-Boyutlu Öklid Uzayında Eğriler

Tanım 2.11. ($\mathbb{E}^n$ de Eğri): n-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^n$ ve $\mathbb{R}$ nin bir irtibatlı açık alt cümlesi I olmak üzere;

$$\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^n$$

dönüşümü diferensiyellenebilir ise $\alpha(I)$ cümlesine "$\mathbb{E}^n$ de Bir Eğri" denir.

Tanım 2.12. $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere, (I, α) koordinat komşuluğu ile tanımlanan $\alpha(I) \subset \mathbb{E}^n$ eğrisi α ile gösterilsin.

$$\alpha: I \longrightarrow \mathbb{E}^n, \qquad I \subseteq \mathbb{R}$$

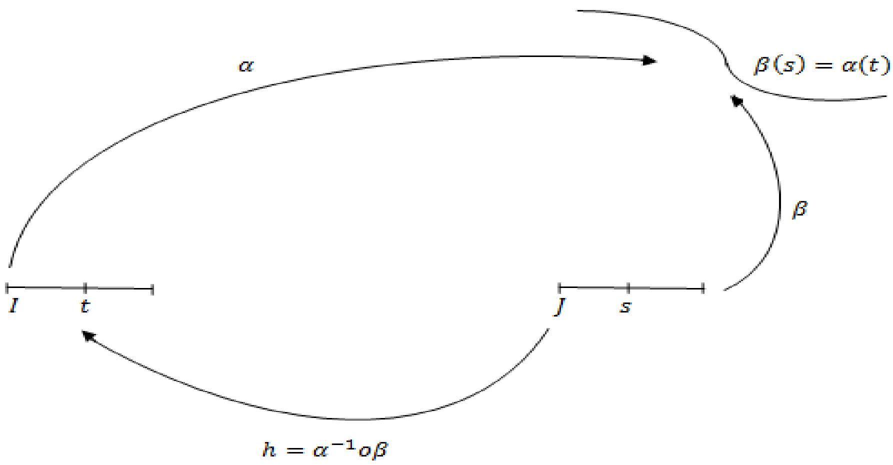
olmak üzere, $I \subseteq \mathbb{R}$ aralığına "α eğrisinin parametre aralığı" ve $t \in I$ değişkenine de "α eğrisinin parametresi" denir.

Tanım 2.13. (Parametre Değişimi):

$\mathbb{E}^n$ de bir M eğrisinin (I, α) ve (J, β) gibi iki koordinat komşuluğu verilsin.

$$h = \alpha^{-1} \circ \beta: J \longrightarrow I$$

diferensiyellenebilir fonksiyonuna "M nin bir Parametre Değişimi" (daha doğrusu M nin I daki parametresinin J deki parametre ile değişimi) denir.



Şekil 2.1. Parametre Değişimi

Tanım 2.14. (Bir Eğrinin Hız Vektörü):
$\mathbb{E}^n$ de M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\alpha: I \longrightarrow \mathbb{E}^n$$

fonksiyonunun Öklidiyen koordinat fonksiyonları $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ olmak üzere,

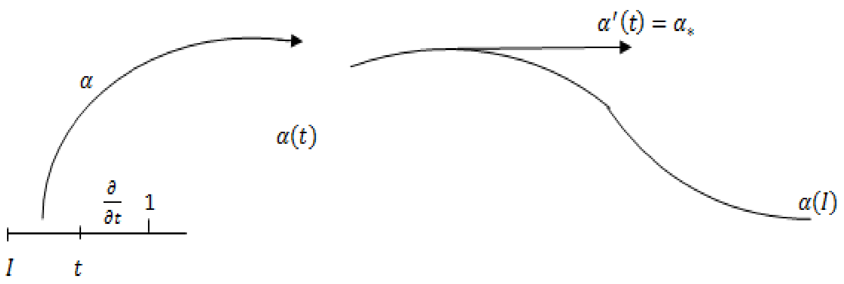
$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \qquad \alpha(t) \in M$$

ve

$$\alpha'(t) = \alpha_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}\bigg|_t, \dots, \frac{d\alpha_n}{dt}\bigg|_t\right), \qquad \alpha_* = \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial \alpha_n}{\partial t} \end{vmatrix}, \frac{\partial}{\partial t} = [1]$$

dır. $\big((\alpha(t), \alpha'(t)) \in T_{\mathbb{E}^n}(t)\big)$ tanjant vektörüne, M eğrisinin $t \in I$ parametre değerine karşılık gelen $\alpha(t)$ noktasında, (I, α) koordinat komşuluğuna göre "Hız Vektörü" denir. Bu hız vektörlerin cümlesi α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki tanjant uzayı olarak adlandırılır. $T_{\mathbb{E}^n}\big(\alpha(t)\big)$ ile gösterilir.



Şekil 2.2. Hız Vektör

Tanım 2.15. (Bir Eğrinin Tanjant Uzayı):

$M \subset \mathbb{E}^n$ eğrisi verilsin. M eğrisinin $m \in M$ noktasındaki tanjant uzayı diye, $m \in M$ noktasında M nin hız vektörlerini içine alan $T_M(m) = V(m)$ vektör uzayına denir. $m \in M$ seçilmiş bir nokta olmak üzere, $\mathbb{E}^n$ in $T_M(m)$ ile birleşen alt afin uzayına da, M eğrisinin $m \in M$ noktasındaki teğet doğrusu denir.

Tanım 2.16. (Skalar Hız Fonksiyonu Ve Skalar Hız):

$M \subset \mathbb{E}^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\|\alpha'\|: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longrightarrow \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\|$$

şeklinde tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna, M eğrisinin (I,α) koordinat komşuluğuna göre "Skalar Hız Fonksiyonu" ve $\|\alpha'(t)\|$ reel sayısına da M nin (I,α) koordinat komşuluğuna göre $\alpha(t)$ naktasındaki "Skalar Hızı" denir.

Tanım 2.17. (Birim Hızlı Eğri):

M eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Eğer $\forall\ s \in I$ için,

$$\|\alpha'(t)\| = 1$$

ise M eğrisi (I,α)' ya göre "Birim Hızlı Eğridir" denir. Bu durumda, eğrinin $s \in I$ parametresine yay-parametresi adı verilir.

Tanım 2.18. (Yay Uzunluğu):

M eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. $a,b \in I$ olmak üzere,

$t = a$ dan $t = b$ ye M eğrisinin yay uzunluğu diye, eğrinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki uzunluğuna karşılık gelen

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\|dt\ , \qquad t \in I$$

reel sayısına denir.

Tanım 2.19. (Regüler Eğri):

Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye "Regüler Eğri" denir.

Tanım 2.20. (Serret-Frenet Vektörleri):

$\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında bir $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisinin birim teğet vektörü (tanjant vektörü),

$$\alpha'(t) = \alpha_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = U_1$$

ve $\mathbb{E}^n$ deki konneksiyon D olmak üzere, $U_i = D_{U_1}U_{i-1}$, $1 < i \leq n$ biçiminde tanımlı vektör alanlarından oluşan, $\psi = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ sistemi lineer bağımsız olsun.

$\forall\, U_r$, $r > n$ için, $U_r \in span\{\psi\}$ olmak üzere, ψ sistemine Gram-Schmidt metodunun uygulanması ile elde edilen $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ ortonormal r-vektör sistemine $\mathbb{E}^n$ de α eğrisinin Serret-Frenet r-ayaklı alanı ve $m \in \alpha$ için, $\{V_1(m), V_2(m), \dots, V_r(m)\}$ sistemine ise $m \in \alpha$ noktasındaki "Serret-Frenet r-ayaklısı" denir. Herbir V_i, $1 \leq i \leq r$, ye "Serret-Frenet Vektörü" adı verilir.

Tanım 2.21. (Eğrilikler):

$M \subset \mathbb{E}^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ olsun. Buna göre,

$$k_i : I \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ 1 \leq i \leq r,$$

$$s \longrightarrow k_i(s) = \langle\, V_i'(s), V_{i+1}(s)\,\rangle$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna "M eğrisinin i-yinci eğrilik fonksiyonu" ve $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasında "M nin i-yinci eğriliği" denir.

Teorem 2.2. $M \subset \mathbb{E}^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay-parametresi olmak üzere, $\alpha(s)$ noktasında i-yinci eğrilik $k_i(s)$ ve Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ ise

1) $V_1{}'(s) = k_1(s)V_2(s)$

2) $V_i{}'(s) = -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s), \qquad 1 < i < r,$

3) $V_r{}'(s) = -k_{r-1}(s)V_{r-1}(s).$

Tanım 2.22. (Bertrand Eğri Çifti):

$M, N \subset \mathbb{E}^n$ eğrileri, sırasıyla, (I, α) ve (I, β) koordinat komşulukları ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s) \in M$ ve $\beta(s) \in N$ noktalarında M ve N nin

$$\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}, \qquad \{V_1{}^*(s), V_2{}^*(s), \dots, V_r{}^*(s)\}$$

Frenet r-ayaklıları verildiğinde $\forall\ s \in I$ için $\{V_2(s), V_2{}^*(s)\}$ lineer bağımlı ise (M, N) eğri 2-lisine bir “Bertrand Eğri Çifti” denir.

Tanım 2.23. (Helis):

$M \subset \mathbb{E}^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall s \in I$ için $\alpha'(s)$ hız vektörü, bir U sabit vektörü ile sabit açı yapıyor ise M ye bir helis ve $span\{U\}$ ya da M eğilim çizgisinin eğilim ekseni denir.

3. 4-BOYUTLU YARI-ÖKLİD UZAYINDA KUATERNİYONİK EĞRİLER

Tanım 3.1. Bir yarı-reel kuaterniyon sıralı dört sayının $+1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ gibi dört birime eşlik etmesiyle tanımlanır. Burada, $+1$ bir reel birim olup diğer üç birim ise,

1) $\vec{e}_i \times \vec{e}_i = -\varepsilon(\vec{e}_i);\ 1 \leq i \leq 3.$

2) $\mathbb{E}_2^4$, 4-boyutlu yarı-Öklid uzayında $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = -\varepsilon(\vec{e}_i)\varepsilon(\vec{e}_j)\vec{e}_k$, burada, (ijk); (123) ün çift permütasyonudur.

özelliklerini sağlar. Böylece bir yarı-reel kuaterniyon,

$$q = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 + d$$

şeklindedir. Burada,

$$S_q = d, \qquad \vec{V}_q = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$$

olmak üzere; S_q, q'nun skalar kısmı $\vec{V}_q$ ise vektörel kısmıdır. Bundan sonra yarı-reel kuaterniyonların cümlesi

$$\mathbb{Q}_v = \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{q} \,\middle|\, \mathrm{q} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 + d;\ a,b,c,d \in \mathbb{R}, \\ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \in \mathbb{E}_1^3, h(\vec{e}_i, \vec{e}_i) = \varepsilon(\vec{e}_i), 1 \leq i \leq 3 \end{array} \right\}$$

ile gösterilecektir. Burada,

$$\varepsilon(\vec{e}_i) = \begin{cases} -1, & \vec{e}_i \text{ time} - \text{like} \\ 1, & \vec{e}_i \text{ space} - \text{like} \end{cases}$$

dir. İki yarı-reel kuaterniyonun kuaterniyon çarpımı; $\forall p, q \in \mathbb{Q}_v$ için

$$p \times q = S_p S_q + \langle \vec{V}_p, \vec{V}_q \rangle + S_p \vec{V}_q + S_q \vec{V}_p + \vec{V}_p \Lambda \vec{V}_q$$

şeklindedir. Burada $\langle , \rangle$ ve Λ sırasıyla, $\mathbb{E}_1^3$ üzerindeki iç ve vektörel çarpımıdır.

Tanım 3.2. Bir $q \in \mathbb{Q}_v$ yarı-reel kuaterniyonunun eşleniği

$$\gamma q = -a\vec{e}_1 - b\vec{e}_2 - c\vec{e}_3 + d$$

şeklindedir.

Tanım 3.3. $\forall p, q \in \mathbb{Q}_v$ yarı-reel kuaterniyonları için

$h: \mathbb{Q}_v \times \mathbb{Q}_v \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(p, q) \longrightarrow h(p, q) = \frac{1}{2}\left[-\varepsilon_p \varepsilon_{\gamma q}(p \times \gamma q) - \varepsilon_q \varepsilon_{\gamma p}(q \times \gamma p)\right] \qquad (3.1)$$

şeklinde tanımlanan h formu yarı-reel kuaterniyon iç çarpımı adını alır. Bu h formu anti-simetriklik ve bilineerlik özelliklerine sahiptir. Burada $\times$ kuaterniyon çarpımını göstermektedir.

Tanım 3.4. Bir $q \in \mathbb{Q}_v$ yarı-reel kuaterniyonunun normu

$$\|q\|^2 = |h(q, q)| = \left|\varepsilon_q(q \times \gamma q)\right| = |a^2 + b^2 - c^2 - d^2| \qquad (3.2)$$

eşitliğini sağlayan $\|q\|$ reel sayısına denir.

Tanım 3.5. Eğer $q \in \mathbb{Q}_v$ yarı-reel kuaterniyonu için

$$\|q\| = 1$$

oluyorsa q'ya bir yarı-reel birim kuaterniyon denir.

Tanım 3.6. Eğer $q \in \mathbb{Q}_v$ yarı-reel kuaterniyonu için

$$q + \gamma q = 0$$

oluyorsa q 'ya bir yarı-reel uzaysal-kuaterniyonu denir. Eğer, $q \in \mathbb{Q}_v$ yarı-reel kuaterniyonu için $q - \gamma q = 0$ oluyorsa q bir temporal yarı-reel kuaterniyon adını alır.

Genel olarak, bir $q \in \mathbb{Q}_v$ yarı-reel kuaterniyonu

$$q = \frac{1}{2}[q + \gamma q] + \frac{1}{2}[q - \gamma q]$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 3.7. Eğer $p, q \in \mathbb{Q}_v$ yarı-reel kuaterniyonları için

$$h(p, q) = 0 \tag{3.3}$$

oluyorsa p ile q'ya h-ortogonaldir denir.

Tanım 3.8. Reel tek değişkenli yarı kuaterniyon değerli fonksiyonlara yarı kuaterniyonik eğri denir. Yani yarı kuaterniyonik eğri ile, $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere, bir

$$\alpha: I \longrightarrow \mathbb{Q}_v \subset \mathbb{E}_2^4$$

$$s \longrightarrow \alpha(s) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i(s)\vec{e}_i \ , (1 \leq i \leq 4) \, , e_4 = 1,$$

$$\alpha_4(s)e_4 = d(s),$$

reel tek değişkenli, yarı kuaterniyon değerli α dönüşümü altında I'nın $\alpha(I)$ resmi ifade edilmektedir.

Tanım 3.9. 4-boyutlu yarı-Öklid uzayında bir birim yarı kuaterniyonik eğri için

$$\alpha: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Q}_v$$

$$s \longrightarrow \alpha(s) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i(s)\vec{e}_i \ , (1 \leq i \leq 4) \, , e_4 = 1$$

şeklinde tanımlansın. $I = [0,1]$ olmak üzere, $\forall s \in I$ yay-parametresi için, α eğrisinin Frenet 4 ayaklısı,

$$T(s) = \alpha'(s)$$

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

$$B_1(s) = \eta\varepsilon_n\varepsilon_T\big(B_2(s)\Lambda T(s)\Lambda N(s)\big)$$

$$B_2(s) = \eta\varepsilon_n\varepsilon_b\varepsilon_T\varepsilon_N \frac{T(s)\Lambda N(s)\Lambda\alpha'''(s)}{\|T(s)\Lambda N(s)\Lambda\alpha'''(s)\|}, \qquad (\eta = \pm 1) \tag{3.4}$$

ve

$$\kappa(s) = \varepsilon_N \|\alpha''(s)\|$$

$$\tau(s) = \varepsilon_N \frac{\|T(s)\Lambda N(s)\Lambda \alpha'''(s)\|}{\|\alpha''(s)\|}$$

$$(\sigma - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa)(s) = \varepsilon_b \varepsilon_T \varepsilon_N \frac{h\left(\alpha^{\mathrm{iv}}(s), B_2(s)\right)}{\|T(s)\Lambda N(s)\Lambda \alpha'''(s)\|} \tag{3.5}$$

şeklindedir.

Tanım 3.10. 4-boyutlu yarı-Öklid uzayındaki herhangi $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ ve $c = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ vektörleri için a, b ve c vektörlerinin vektörel çarpımı

$$a \Lambda b \Lambda c = -\begin{vmatrix} -e_1 & -e_2 & e_3 & e_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} \tag{3.6}$$

olarak tanımlanır. Burada e_1, e_2, e_3 ve e_4 karşılıklı ortogonal vektörlerdir ve

$$e_1 \Lambda e_2 \Lambda e_3 = e_4,\ e_2 \Lambda e_3 \Lambda e_4 = e_1,\ e_3 \Lambda e_4 \Lambda e_1 = -e_2,\ e_4 \Lambda e_1 \Lambda e_2 = -e_3$$

özelliklerini sağlar.

Tanım 3.11. α, 4-boyutlu yarı-Öklid uzayında bir birim yarı kuaterniyonik eğri olsun. $\forall s \in I$ yay-parametresi ve $T(s) = \alpha'(s)$ olmak üzere; Frenet 4-ayaklısının α eğrisi boyunca türevleri ile eğrilikler arasındaki ilgi

$$\frac{d}{ds} T(s) = \varepsilon_N \kappa(s) N(s)$$

$$\frac{d}{ds} N(s) = -\varepsilon_t \varepsilon_N \kappa(s) T(s) + \varepsilon_n \tau(s) B_1(s)$$

$$\frac{d}{ds} B_1(s) = -\varepsilon_t \tau(s) N(s) + \varepsilon_n [\sigma - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa](s) B_2(s)$$

$$\frac{d}{ds} B_2(s) = -\varepsilon_b [\sigma - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa](s) B_1(s) \tag{3.7}$$

biçimindedir, burada $\kappa(s)$, $\tau(s)$ ve $[\sigma - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa](s)$ sırasıyla, α eğrisinin birinci eğrilik, torsiyon ve üçüncü eğriliğidir.

Frenet formüllerinin matrisel ifadesi,

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_N \kappa(s) & 0 & 0 \\ -\varepsilon_t \varepsilon_N \kappa(s) & 0 & \varepsilon_n \tau(s) & 0 \\ 0 & -\varepsilon_t \tau(s) & 0 & \varepsilon_n [\sigma - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa](s) \\ 0 & 0 & -\varepsilon_b [\sigma - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa](s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

şeklindendir, burada $\kappa(s) = \varepsilon_N \left\| \frac{d}{ds} T(s) \right\|$ ve $\|N(s)\|^2 = |\varepsilon_N|$ olur.

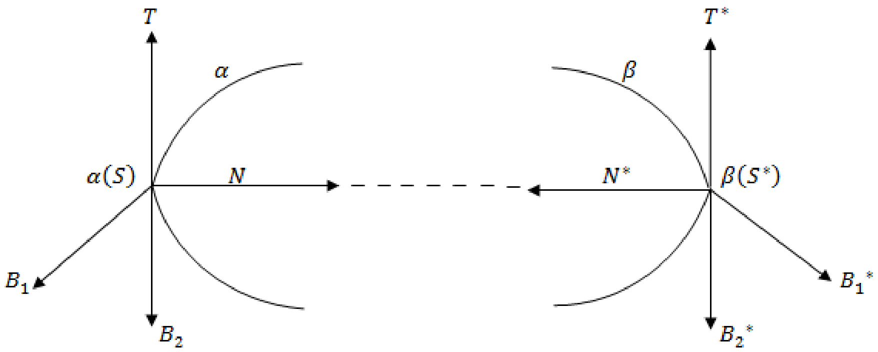
3.1 4-Boyutlu Yarı-Öklid Uzayında Kuaterniyonik Bertrand Eğrileri

Bu kesimde, 4-boyutlu yarı-Öklid uzayındaki kuaterniyonik eğrilerin üçüncü eğriliğinin sıfır olduğu gözönüne alınarak, 4-boyutlu yarı-Öklid uzayında bir kuaterniyonik Bertrand eğrisi için aşağıdaki tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 3.12. α ve β 4-boyutlu yarı-Öklid uzayında kuaterniyonik eğriler olsun. Sırasıyla, s ve s^* yay-parametreleri olmak üzere, $\alpha(s)$ ve $\beta(s^*)$ noktalarında α ve β nın Frenet 4-ayaklısı sırası ile,

$$\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\} \text{ ve } \{T^*(s^*), N^*(s^*), {B_1}^*(s^*), {B_2}^*(s^*)\}$$

olsun. Eğer $\{N(s), N^*(s^*)\}$ lineer bağımlı ise, α eğrisine bir "Kuaterniyonik Bertrand Eğrisi" ve β eğrisine de "α nın Kuaterniyonik Bertrand Eğri Çifti" denir.



Şekil 3.1. Bertrand Eğri Çifti

Teorem 3.1. α, β 4-boyutlu yarı-Öklid uzayında kuaterniyonik eğriler olsun. s, s^* yay-parametresi olmak üzere, eğer $\{\alpha, \beta\}$ Bertrand eğri çifti ise bu durumda, $\alpha(s)$ ve $\beta(s^*)$ noktaları arasındaki uzaklık sabittir.

İspat: β, α ile kuaterniyonik Bertrand eğri çifti oluştursun. Bu takdirde

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + \lambda(s)\mathrm{N}(s) \tag{3.8}$$

şeklinde yazılabilir. (3.8) eşitliğinin s ’ye göre türevi alınıp (3.7) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{d\beta(s^*)}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} &= T(s) + \left(\frac{d}{ds}\lambda(s)\right)N(s) + \lambda(s)[-\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)T(s) + \varepsilon_n\tau(s)B_1(s)] \\
&= \big(1 - \lambda(s)\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)\big)T(s) + \left(\frac{d}{ds}\lambda(s)\right)N(s) + \lambda(s)\varepsilon_n\tau(s)B_1(s)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\dfrac{d\beta\left(s^*\right)}{ds^*} = T^*\left(s^*\right)$ olsun. Bu durumda

$$T^*(s^*) = \frac{ds}{ds^*}\left[\big(1 - \lambda(s)\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)\big)T(s) + \left(\frac{d}{ds}\lambda(s)\right)N(s) + \lambda(s)\varepsilon_n\tau(s)B_1(s)\right]$$

yazılabilir. (3.1) eşitliğine göre h bir iç çarpım olmak üzere, son ifade $N^*(s^*)$ ile iç çarpılırsa

$$h\big(T^*(s^*), N^*(s^*)\big) = \frac{ds}{ds^*}\begin{bmatrix} \big(1 - \lambda(s)\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)\big)h\big(T(s), N^*(s^*)\big) \\ +\left(\dfrac{d}{ds}\lambda(s)\right)h\big(N(s), N^*(s^*)\big) \\ +\lambda(s)\varepsilon_n\tau(s)h\big(B_1(s), N^*(s^*)\big) \end{bmatrix}.$$

$N^*(s^*) = \pm N(s)$, $h\big(T(s), N(s)\big) = 0$, $h\big(B_1(s), N(s)\big) = 0$ ve $\|N(s)\|^2 = |\varepsilon_N| = 1$ olduğuna göre, $\dfrac{d}{ds}\lambda\left(s\right) = 0$ olur. Bu ise λ nın sabit olmasını gerektirir. (3.8) eşitliğinden

$$d\big(\alpha(s), \beta(s^*)\big) = \|\beta(s^*) - \alpha(s)\|$$

$$= \|\lambda N(s)\| = \lambda$$

bulunur. Bu durumda, $\alpha(s)$ ile $\beta(s^*)$ arasındaki uzaklık sabittir.

Teorem 3.2. α, 4-boyutlu yarı-Öklid uzayında bir kuaterniyonik Bertrand eğrisi olsun β da α nın kuaterniyonik Bertrand eğri çifti olsun. Bu durumda, α , β eğrilerinin teğet vektörleri arasındaki açının ölçüsü sabittir.

İspat: α, β 4-boyutlu yarı-Öklid uzayında kuaterniyonik Bertrand eğrileri s, s^* yay-parametreleri olsun. Bu durumda $T^*(s^*)$ ve $T(s)$ arasındaki açı ϕ olmak üzere;

$$h\Big(T(s), T^*\big(s^*\big)\Big) = \xi_1(\phi) \qquad \big(\xi_1(\phi) = sabit\big) \tag{3.9}$$

dır. (3.9) eşitliğinin sol tarafının s'ye göre türevi alınırsa

$$\frac{d}{ds} h\big(T(s), T^*(s^*)\big) = h\left(\frac{dT(s)}{ds}, T^*(s^*)\right) + h\left(T(s), \frac{dT^*(s^*)}{ds^*}\frac{ds^*}{ds}\right)$$

$$= h\big(\varepsilon_N \kappa(s) N(s), T^*(s^*)\big) + h\left(T(s), \varepsilon_N \kappa^*(s^*) N^*(s^*)\frac{ds^*}{ds}\right)$$

$$= \varepsilon_N \kappa(s) h\big(N(s), T^*(s^*)\big) + \varepsilon_N \kappa^*(s^*)\frac{ds^*}{ds} h\big(T(s), N^*(s^*)\big)$$

bulunur. $N^*(s^*) = \pm N(s)$ ve (3.3) eşitliğine göre, $h\big(N(s), T^*(s^*)\big) = 0$ ve $h\big(T(s), N^*(s^*)\big) = 0$ dır. Bu ise $\frac{d}{ds} h\Big(T(s), T^*\big(s^*\big)\Big) = 0$ olması demektir. Yani $T^*(s^*)$ ve $T(s)$ vektörleri arasındaki açı sabittir.

Teorem 3.3. α, 4-boyutlu yarı-Öklid uzayında bir kuaterniyonik eğri olsun.

$\kappa(s) \neq 0$, $\tau(s) \neq 0$ ve $[\sigma - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa](s) = 0$ olmak üzere, α nın bir kuaterniyonik Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şart

$$\lambda \varepsilon_t \varepsilon_N \kappa(s) + \mu \varepsilon_n \tau(s) = 1 \tag{3.10}$$

olacak şekilde sıfırdan farklı λ ve μ reel sayılarının var olmasıdır.

İspat: $\{\alpha,\beta\}$ kuaterniyonik Bertrand eğri çifti olsun. $\varphi = I \longrightarrow I^*$, $\varphi(s) = s^*$ şeklinde tanımlansın. (3.8) eşitliğinin s'ye göre türevi alınarak ve (3.7) eşitlikleri kullanılarak

$$T^*(\varphi(s)) = \frac{ds}{ds^*}\left[\left(1-\lambda\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)\right)T(s)+\lambda\varepsilon_n\tau(s)B_1(s)\right] \tag{3.11}$$

elde edilir. β eğrisinin α eğrisi ile Bertrand eğri çifti oluşturduğuna göre

$$T^*(\varphi(s)) = \xi_1(\phi)T(s) + \xi_2(\phi)B_1(s)$$

dir. Bu ifade (3.11) ile karşılaştırılırsa

$$\xi_1(\phi) = \left(1-\lambda\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)\right)\frac{ds}{ds^*} \tag{3.12}$$

$$\xi_2(\phi) = \lambda\varepsilon_n\tau(s)\frac{ds}{ds^*} \tag{3.13}$$

olduğu görülür. (3.12) ve (3.13) taraf tarafa bölünürse

$$\frac{\xi_1(\phi)}{\xi_2(\phi)} = \xi(\phi) = \frac{1-\lambda\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)}{\lambda\varepsilon_n\tau(s)}$$

bulunur. $\lambda\xi(\phi)=\mu$ alındığında, $\lambda\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)+\mu\varepsilon_n\tau(s)=1$ elde adilir. Bu ise istenilen (3.10) koşuludur.

Tersine $\kappa(s)\neq 0$ ve $\tau(s)\neq 0$ koşulları altında α nın (3.10) şartını sağlıdığını varsayalım. Bu durumda, $1-\lambda\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)=\mu\varepsilon_n\tau(s)$ dir. Bu ifade (3.11) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} T^*(s^*) &= \frac{ds}{ds^*}\left[\mu\varepsilon_n\tau(s)T(s)+\lambda\varepsilon_n\tau(s)B_1(s)\right] \\ &= \frac{ds}{ds^*}\left[\varepsilon_n\tau(s)\left(\mu T(s)+\lambda B_1(s)\right)\right] \end{aligned}$$

olup buradan

$$h(T^*(s^*),T^*(s^*)) = \left(\frac{ds}{ds^*}\varepsilon_n\tau(s)\right)^2 h\big(\mu T(s)+\lambda B_1(s),\mu T(s)+\lambda B_1(s)\big)$$

$$= \left(\frac{ds}{ds^*}\varepsilon_n\tau(s)\right)^2 \begin{bmatrix} \mu^2 h\big(T(s),T(s)\big)+\mu\lambda h\big(T(s),B_1(s)\big) \\ +\lambda\mu h\big(B_1(s),T(s)\big)+\lambda^2 h\big(B_1(s),B_1(s)\big)\end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{ds}{ds^*}\varepsilon_n\tau(s)\right)^2 (\lambda^2+\mu^2)$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{ds}{ds^*} = \pm\frac{1}{|\varepsilon_n||\tau(s)|\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}$$

elde edilir. Buna göre

$T^*(s^*) = \pm\dfrac{\varepsilon_n\tau(s)}{|\varepsilon_n||\tau(s)|\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\left[\mu T(s)+\lambda B_1(s)\right]$ olur. Eğer $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} = A$ alınırsa

$$T^*(s^*) = \pm A\left[\mu T(s)+\lambda B_1(s)\right] \tag{3.14}$$

yazılabilir. (3.14) eşitliğinin s ’ye göre türevi alınıp (3.7) eşitlikleri kullanılırsa

$$\frac{dT^*(s^*)}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} = \pm A\left[\mu\frac{dT(s)}{ds}+\lambda\frac{dB_1(s)}{ds}\right]$$

$$\varepsilon_N\kappa^*(s^*)N^*(s^*) = \pm A\frac{ds}{ds^*}\left[\mu\varepsilon_N\kappa(s)N(s)-\lambda\varepsilon_t\tau(s)N(s)\right]$$

$$= \pm A\frac{ds}{ds^*}\left[\mu\varepsilon_N\kappa(s)-\lambda\varepsilon_t\tau(s)\right]N(s)$$

elde edilir. $\dfrac{ds}{ds^*} = \pm\dfrac{1}{|\varepsilon_n||\tau(s)|}A$ olduğundan

$$\varepsilon_N\kappa^*(s^*)N^*(s^*) = \pm\frac{1}{|\varepsilon_n||\tau(s)|}A^2\left[\mu\varepsilon_N\kappa(s)-\lambda\varepsilon_t\tau(s)\right]N(s)$$

dir. Böylece $N^*(s^*)$ ve $N(s)$ lineer bağımlı olur.

Teorem 3.4. α, β 4-boyutlu yarı-Öklid uzayında kuaterniyonik eğriler olsun. s, s^* yay-parametresi olmak üzere, eğer $\{\alpha, \beta\}$ Bertrand eğri çifti ise, α ve β nın karşılıklı noktalarındaki $\tau(s)$ ve $\tau^*(s^*)$ eğrilik fonksiyonlarının çarpımı sabittir.

İspat: (3.8) eşitliğinde α ve β eğrilerinin yerleri değiştirilirse

$$\alpha(s) = \beta(s^*) - \lambda \mathrm{N(s)}$$

yazılabilir. Bu eşitliğin s'ye göre türevi alınıp (3.7) eşitlikleri kullanılırsa

$$T(s) = T^*(s^*)\frac{ds^*}{ds} - \lambda[-\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa^*(s^*)T^*(s^*) + \varepsilon_n\tau^*(s^*){B_1}^*(s^*)]\frac{ds^*}{ds}$$

$$= \left(1 + \lambda\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa^*(s^*)\right)T^*(s^*)\frac{ds^*}{ds} - \lambda\varepsilon_n\tau^*(s^*){B_1}^*(s^*)\frac{ds^*}{ds}$$

olur. β eğrisinin α eğrisi ile Bertrand eğri çifti oluşturduğuna göre

$$T(s) = \xi_1(\phi)T^*(s^*) + \xi_2(\phi){B_1}^*(s^*)$$

dır. Bu ifade son eşitlik ile karşılaştırılırsa

$$\xi_1(\phi) = \left(1 + \lambda\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa^*(s^*)\right)\frac{ds^*}{ds} \tag{3.15}$$

$$\xi_2(\phi) = -\lambda\varepsilon_n\tau^*(s^*)\frac{ds^*}{ds} \tag{3.16}$$

bulunur. (3.13) ve (3.16) taraf tarafa çarpılırsa

$$\tau(s)\tau^*(s^*) = -\frac{\left(\xi_2(\phi)\right)^2}{(\lambda\varepsilon_n)^2} = sabit$$

olur.

Teorem 3.5. α, β 4-boyutlu yarı-Öklid uzayında kuaterniyonik eğriler ve s, s^* yay-parametresi olsun. Eğer $\{\alpha, \beta\}$ Bertrand eğri çifti ise

$$\mu\varepsilon_n\left(\tau(s) + \tau^*(s^*)\right) + \lambda\varepsilon_t\varepsilon_N\left(\kappa(s) + \kappa^*(s^*)\right) = 0$$

dır. Burada, $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ sırasıyla, α nın birinci eğrilik ve torsiyonudur $\kappa^*(s^*)$ ve $\tau^*(s^*)$ ise sırasıyla, β nın birinci eğrilik ve torsiyonudur.

İspat: (3.12) ve (3.13) taraf tarafa bölünürse

$$\xi(\phi) = \frac{\left(1-\lambda\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)\right)\frac{ds}{ds^*}}{\lambda\varepsilon_n\tau(s)\frac{ds}{ds^*}} = sabit$$

bulunur. Yine (3.15) ve (3.16) taraf tarafa bölünürse

$$\xi(\phi) = -\frac{\left(1+\lambda\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa^*(s^*)\right)\frac{ds^*}{ds}}{\lambda\varepsilon_n\tau^*(s^*)\frac{ds^*}{ds}}$$

olur ve burada $\lambda\xi(\phi)=\mu$ olsun. Bu takdirde

$$\mu\varepsilon_n\tau(s)+\lambda\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)=1 \qquad (3.17)$$

$$\mu\varepsilon_n\tau^*(s^*)+\lambda\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa^*(s^*)=-1 \qquad (3.18)$$

dir. (3.17) ve (3.18) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$\mu\varepsilon_n\left(\tau(s)+\tau^*(s^*)\right)+\lambda\varepsilon_t\varepsilon_N\left(\kappa(s)+\kappa^*(s^*)\right)=0$$

elde edilir. Bu durumda ispat tamamlanmıştır.

Örnek 3.1. $\alpha: I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{E}_2^4$

$$s\longrightarrow\alpha(s)=\left(coshs,\sqrt{2}s,sinhs,\sqrt{2}\right)$$

olmak üzere, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasında, Frenet 4-ayaklısını, (3.4) eşitlikleri yardımıyla bulacağız.

$$\alpha'(s)=\left(sinhs,\sqrt{2},coshs,0\right)$$

$$\|\alpha'(s)\|=\pm\sqrt{sinh^2s+2-cosh^2s-0}=1$$

$$\alpha''(s)=(coshs,0,sinhs,0)$$

$$\|\alpha''(s)\|=\pm\sqrt{cosh^2s+0-sinh^2s-0}=1$$

$$\alpha'''(s)=(sinhs,0,coshs,0)$$

$$\alpha^{\text{iv}}(s) = (coshs, 0, sinhs, 0)$$

olduğundan

$$T(s) = \left(sinhs, \sqrt{2}, coshs, 0\right)$$

$$N(s) = (coshs, 0, sinhs, 0)$$

elde edilir. Burada (3.6) ifadesi uygulanırsa

$$T(s)\Lambda N(s)\Lambda\alpha'''(s) = -\begin{vmatrix} -e_1 & -e_2 & e_3 & e_4 \\ \sinh s & \sqrt{2} & \cosh s & 0 \\ \cosh s & 0 & \sinh s & 0 \\ \sinh s & 0 & \cosh s & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(0)e_1 + (0)e_2 + (0)e_3 + \left(\sqrt{2}\right)e_4$$

$$= -\left(0, 0, 0, \sqrt{2}\right)$$

olup buradan

$$\|T(s)\Lambda N(s)\Lambda\alpha'''(s)\| = \pm\varepsilon_T\varepsilon_N\sqrt{2}$$

elde edilir. (3.4) ifadesine göre

$$B_2(s) = -\varepsilon_n\varepsilon_b(0, 0, 0, 1)$$

olur. Şimdi $B_2(s)\Lambda T(s)\Lambda N(s)$ vektör formunu elde edelim.

$$B_2(s)\Lambda T(s)\Lambda N(s) = -\varepsilon_n\varepsilon_b\begin{vmatrix} -e_1 & -e_2 & e_3 & e_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \sinh s & \sqrt{2} & \cosh s & 0 \\ \cosh s & 0 & \sinh s & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\varepsilon_n\varepsilon_b\left(\left(\sqrt{2}sinhs\right)e_1 + (1)e_2 + \left(\sqrt{2}coshs\right)e_3 + (0)e_4\right)$$

dir. (3.4) ifadesine göre

$$B_1(s) = -\varepsilon_b\varepsilon_T\left(\sqrt{2}sinhs, 1, \sqrt{2}coshs, 0\right)$$

elde edilir. Şimdi de α eğrisinin eğriliklerini bulacağız.

$$\kappa(s) = -1$$

$$\tau(s) = \sqrt{2}$$

$$(\sigma - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa)(s) = -\varepsilon_b \frac{h\big((sinhs, 0, coshs, 0), (0, 0, 0, 1)\big)}{\sqrt{2}} = 0$$

dır. $\lambda = \dfrac{1}{\varepsilon_t \varepsilon_N}$ ve $\mu = \dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon_n}$ reel sayıları için, α eğrisinin

$$\lambda \varepsilon_t \varepsilon_N \kappa(s) + \mu \varepsilon_n \tau(s) = 1$$

şartını sağladığına göre α eğrisi bir kuaterniyonik Bertrand eğrisidir. Dolayısıyla kuaterniyonik Bertrand eğri çifti denilen $\beta(s^*)$ eğrisi ise (3.8) eşitliği kullanılarak

$$\beta(s^*) = \big(2coshs, \sqrt{2}s, 2sinhs, \sqrt{2}\big)$$

bulunur.

Örnek 3.2. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}_2^4$

$$s \longrightarrow \alpha(s) = \sqrt{2}\left(sins, coss, \frac{1}{\sqrt{2}}s, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

olmak üzere, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasında, Frenet 4-ayaklısını, (3.4) eşitlikleri yardımıyla bulacağız.

$$\alpha'(s) = \sqrt{2}\left(coss, -sins, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$\|\alpha'(s)\| = \pm\sqrt{2\left(cos^2 s + sin^2 s - \frac{1}{2} - 0\right)} = 1$$

$$\alpha''(s) = \sqrt{2}(-sins, -coss, 0, 0)$$

$$\|\alpha''(s)\| = \pm\sqrt{2(sin^2 s + cos^2 s - 0 - 0)} = \sqrt{2}$$

$$\alpha'''(s) = \sqrt{2}(-coss, sins, 0, 0)$$

$$\alpha^{\text{iv}}(s) = \sqrt{2}(sins, coss, 0, 0)$$

olduğundan

$$T(s) = \sqrt{2}\left(coss, -sins, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$N(s) = (-sins, -coss, 0, 0)$$

elde edilir. Burada (3.6) ifadesi uygulanırsa

$$T(s)\Lambda N(s)\Lambda\alpha'''(s) = -2\begin{vmatrix} -e_1 & -e_2 & e_3 & e_4 \\ \cos s & -\sin s & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\sin s & -\cos s & 0 & 0 \\ -\cos s & \sin s & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -2\left((0)e_1 + (0)e_2 + (0)e_3 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e_4\right)$$

$$= -\left(0, 0, 0, \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

olup buradan

$$\|T(s)\Lambda N(s)\Lambda\alpha'''(s)\| = \pm\varepsilon_T\varepsilon_N\frac{2}{\sqrt{2}}$$

elde edilir. (3.4) ifadesine göre

$$B_2(s) = -\varepsilon_n\varepsilon_b(0, 0, 0, 1)$$

olur. Şimdi $B_2(s)\Lambda T(s)\Lambda N(s)$ vektör formunu elde edelim.

$$B_2(s)\Lambda T(s)\Lambda N(s)=\varepsilon_n\varepsilon_b\sqrt{2}\begin{vmatrix} -e_1 & -e_2 & e_3 & e_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \cos s & -\sin s & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\sin s & -\cos s & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\varepsilon_n\varepsilon_b\sqrt{2}\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}coss\right)e_1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}sins\right)e_2+(-1)e_3+(0)e_4\right)$$

dir. (3.4) ifadesine göre

$$B_1(s)=\varepsilon_b\varepsilon_T\left(-coss,sins,-\sqrt{2},0\right)$$

elde edilir. Şimdi de α eğrisinin eğriliklerini, (3.5) eşitlikleri yardımıyla bulacağız.

$$\kappa(s)=\sqrt{2}$$

$$\tau(s)=1$$

$$(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)=\varepsilon_b\varepsilon_T\varepsilon_N\frac{h\left(\alpha^{\mathrm{iv}}(s),B_2(s)\right)}{\|T(s)\Lambda N(s)\Lambda\alpha'''(s)\|}$$

$$=-\varepsilon_b\frac{\sqrt{2}h\big((sins,coss,0,0),(0,0,0,1)\big)}{\frac{2}{\sqrt{2}}}=0$$

dır. $\lambda=-\dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon_t\varepsilon_N}$ ve $\mu=\dfrac{3}{\varepsilon_n}$ reel sayıları için, α eğrisinin

$$\lambda\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)+\mu\varepsilon_n\tau(s)=1$$

şartını sağladığına göre α eğrisi bir kuaterniyonik Bertrand eğrisidir. Dolayısıyla kuaterniyonik Bertrand eğri çifti denilen $\beta(s^*)$ eğrisi ise (3.8) eşitliği kullanılarak

$$\beta(s^*)=\sqrt{2}\left(2sins,2coss,\frac{1}{\sqrt{2}}s,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

bulunur.

4. 4-BOYUTLU YARI-ÖKLİD UZAYINDA KUATERNİYONİK (N, B_2) BERTRAND EĞRİLERİ

Bu kesimde, torsiyonu ve üçüncü eğriliği sıfıra eşit olmayan kuaterniyonik eğrilerin 4-boyutlu yarı-Öklid uzayında bir kuaterniyonik Bertrand eğrisi olmadığı gösterilecektir. Sonra da 4-boyutlu yarı-Öklid uzayındaki kuaterniyonik eğrilerin üçüncü eğriliğinin sıfırdan farklı olduğu gözönüne alınarak, 4-boyutlu yarı-Öklid uzayında bir (N, B_2) kuaterniyonik Bertrand eğrisi tanımlanacak ve elde edilecektir.

Teorem 4.1. Eğer $[\sigma - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa](s) \neq 0$ ve $\tau(s) \neq 0$ ise bu durumda 4-boyutlu yarı-Öklid uzayındaki kuaterniyonik eğriler bir kuaterniyonik Bertrand eğrisi değildir.

İspat: α, 4-boyutlu yarı-Öklid uzayında bir kuaterniyonik Bertrand eğrisi olsun β da α nın kuaterniyonik Bertrand eğri çifti olsun. β nın α dan farklı olduğunu varsayalım. α ve β nın karşılıklı noktaları sırasıyla, $\alpha(s)$ ve $\beta(s^*) = \beta(\varphi(s))$ $(Burada;\ \varphi = I \longrightarrow I^*,\ \varphi(s) = s^*)$ olsun. (3.8) eşitliğinin s'ye göre türevi alınarak ve (3.7) eşitlikleri kullanılarak

$$\varphi'(s)\frac{d\beta(\varphi(s))}{ds^*} = \big(1 - \lambda(s)\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)\big)T(s) + \left(\frac{d}{ds}\lambda(s)\right)N(s) + \lambda(s)\varepsilon_n\tau(s)B_1(s)$$

elde edilir. Burada $\dfrac{d\beta(\varphi(s))}{ds^*} = T^*(\varphi(s))$ olsun, bu durumda

$$\left\{\begin{array}{c} \varphi'(s)T^*(\varphi(s)) \\ = \big(1 - \lambda(s)\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)\big)T(s) + \left(\dfrac{d}{ds}\lambda(s)\right)N(s) + \lambda(s)\varepsilon_n\tau(s)B_1(s) \end{array}\right\} \qquad (4.1)$$

yazılabilir. Bu ifade $N^*(\varphi(s))$ ile iç çarpılırsa

$$\varphi'(s)h\Big(T^*\big(\varphi(s)\big),N^*\big(\varphi(s)\big)\Big)=\big(1-\lambda(s)\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)\big)h\Big(T(s),N^*\big(\varphi(s)\big)\Big)$$

$$+\left(\frac{d}{ds}\lambda(s)\right)h\Big(N(s),N^*\big(\varphi(s)\big)\Big)$$

$$+\lambda(s)\varepsilon_n\tau(s)h\Big(B_1(s),N^*\big(\varphi(s)\big)\Big)$$

bulunur. $N^*\big(\varphi(s)\big)=\pm N(s)$ ve $\|N(s)\|^2=|\varepsilon_N|=1$ olduğundan dolayı

$\frac{d}{ds}\lambda(s)=0$ olur. Bu ise λ nın sabit olmasını gerektirir. Yani $\lambda=sabit.$ Bu ifade (4.1) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\varphi'(s)T^*\big(\varphi(s)\big)=\big(1-\lambda\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)\big)T(s)+\lambda\varepsilon_n\tau(s)B_1(s)$$

dir. Buradan

$$T^*\big(\varphi(s)\big)=\left(\frac{1-\lambda\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)}{\varphi'(s)}\right)T(s)+\left(\frac{\lambda\varepsilon_n\tau(s)}{\varphi'(s)}\right)B_1(s)$$

dir. Eğer

$$a(s)=\frac{1-\lambda\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)}{\varphi'(s)},\quad b(s)=\frac{\lambda\varepsilon_n\tau(s)}{\varphi'(s)} \tag{4.2}$$

alınırsa, bu takdirde

$$T^*\big(\varphi(s)\big)=a(s)T(s)+b(s)B_1(s)$$

yazılabilir. Bu eşitliğin s'ye göre türevi alınarak ve (3.7) eşitlikleri kullanılarak

$$\varphi'(s)\varepsilon_N\kappa^*\big(\varphi(s)\big)N^*\big(\varphi(s)\big)=\frac{da(s)}{ds}T(s)+\big(a(s)\varepsilon_N\kappa(s)-b(s)\varepsilon_t\tau(s)\big)N(s)$$

$$+\frac{db(s)}{ds}B_1(s)+b(s)\varepsilon_n[\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa](s)B_2(s)$$

bulunur. Bu ifade $B_2{}^*\big(\varphi(s)\big)$ ile iç çarpılırsa

$$\varphi'(s)\varepsilon_N\kappa^*(\varphi(s))h\left(N^*(\varphi(s)),{B_2}^*(\varphi(s))\right)$$
$$=\frac{da(s)}{ds}h\left(T(s),{B_2}^*(\varphi(s))\right)$$
$$+\left(a(s)\varepsilon_N\kappa(s)-b(s)\varepsilon_t\tau(s)\right)h\left(N(s),{B_2}^*(\varphi(s))\right)$$
$$+\frac{db(s)}{ds}h\left(B_1(s),{B_2}^*(\varphi(s))\right)$$
$$+b(s)\varepsilon_n[\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa](s)h\left(B_2(s),{B_2}^*(\varphi(s))\right)$$

elde edilir. $N^*(\varphi(s))=\pm N(s)$ olduğundan dolayı

$$b(s)\varepsilon_n[\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa](s)=0$$

olur. $[\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa](s)\neq 0$ olduğu göz önüne alınırsa, $b(s)=0$ olur; $b(s)$ nin değeri (4.2) eşitliğinde yerine konursa, $\frac{\lambda\varepsilon_n\tau(s)}{\varphi'(s)}=0$ olduğu görülür. $\tau(s)\neq 0$ olduğuna göre, $\lambda=0$ olur. Buna göre β, α ile çakışır bu ise bizim varsayımız ile bir çelişkidir.

Tanım 4.1. α ve β 4-boyutlu yarı-Öklid uzayında kuaterniyonik eğriler olsun. $\alpha(s)$ ve $\beta(s^*)$ noktalarında α ve β nın Frenet 4-ayaklıları sırası ile

$$\{T(s),N(s),B_1(s),B_2(s)\}\text{ ve }\{T^*(s^*),N^*(s^*),{B_1}^*(s^*),{B_2}^*(s^*)\}$$

olsun. Bir φ dönüşümü

$$\varphi=I\longrightarrow I^*$$

$$s\longrightarrow\varphi(s)=s^*,\qquad\frac{ds^*}{ds}\neq 0$$

şeklinde tanımlansın. Eğer α nın $\alpha(s)$ noktasındaki $\{N(s),B_2(s)\}$ düzlemini, β nın $\beta(s^*)=\beta(\varphi(s))$ noktasındaki $\{N^*(s^*),{B_2}^*(s^*)\}$ düzlemini kapsıyorsa, α 'ya "Kuaterniyonik (N,B_2) Bertrand Eğrisi" ve β'ya da "α nın Kuaterniyonik (N,B_2) Bertrand Eğri Çifti" denir.

Teorem 4.2. α, 4-boyutlu yarı-Öklid uzayında bir kuaterniyonik eğri olsun.

$\kappa(s) \neq 0$, $\tau(s) \neq 0$ ve $[\sigma - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa](s) \neq 0$ olmak üzere, her $s \in I$ için, α nın bir kuaterniyonik (N, B_2) Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şart

$$\lambda \varepsilon_n \tau(s) - \mu \varepsilon_b [\sigma - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa](s) \neq 0 \tag{4.3 − i}$$

$$\gamma[\lambda \varepsilon_n \tau(s) - \mu \varepsilon_b [\sigma - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa](s)] + \lambda \varepsilon_t \varepsilon_N \kappa(s) = 1 \tag{4.3 − ii}$$

$$\gamma \varepsilon_N \kappa(s) - \varepsilon_t \tau(s) = \delta \varepsilon_n (\sigma - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa)(s) \tag{4.3 − iii}$$

$$(\gamma^2 - 1)\varepsilon_t \varepsilon_N \kappa(s)\tau(s) + \gamma \varepsilon_t \begin{bmatrix} \left(\varepsilon_N \kappa(s)\right)^2 - \left(\varepsilon_t \tau(s)\right)^2 \\ -\left(\varepsilon_n (\sigma - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa)(s)\right)^2 \end{bmatrix} \neq 0 \tag{4.3 − iv}$$

olacak şekilde sıfırdan farklı λ, μ, γ ve δ reel sayılarının var olmasıdır.

İspat: $\{\alpha, \beta\}$ kuaterniyonik (N, B_2) Bertrand eğri çifti olsun. α ve β eğrileri sırasıyla, s ve s^* yay-parametreleri ile verilsin. Bu durumda

$$\beta(s^*) = \beta(\varphi(s)) = \alpha(s) + \lambda(s)N(s) + \mu(s)B_2(s)$$

dir. Bu eşitliğin s'ye göre türevi alınıp (3.7) eşitlikleri kullanılırsa

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi'(s)T^*(\varphi(s)) = \left(1 - \lambda(s)\varepsilon_t \varepsilon_N \kappa(s)\right)T(s) + \left(\dfrac{d}{ds}\lambda(s)\right)N(s) \\ +[\lambda(s)\varepsilon_n \tau(s) - \mu(s)\varepsilon_b(\sigma - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa)(s)]B_1(s) + \dfrac{d\mu(s)}{ds}B_2(s) \end{array} \right\} \tag{4.4}$$

olur. $span\{N^*(\varphi(s)), {B_2}^*(\varphi(s))\} = span\{N(s), B_2(s)\}$ olduğuna göre

$$N^*(\varphi(s)) = m(s)N(s) + n(s)B_2(s) \tag{4.5}$$

$${B_2}^*(\varphi(s)) = p(s)N(s) + q(s)B_2(s) \tag{4.6}$$

dir. (4.5), (4.4) ifadesi ile iç çarpılırsa

$$
\begin{aligned}
h\left(N^*(\varphi(s)),\varphi'(s)T^*(\varphi(s))\right)
&= m(s)\big(1-\lambda(s)\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)\big)h\big(N(s),T(s)\big)\\
&+ m(s)\frac{d\lambda(s)}{ds}h\big(N(s),N(s)\big)\\
&+ m(s)[\lambda(s)\varepsilon_n\tau(s)-\mu(s)\varepsilon_b(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)]h\big(N(s),B_1(s)\big)\\
&+ m(s)\frac{d\mu(s)}{ds}h\big(N(s),B_2(s)\big)\\
&+ n(s)\big(1-\lambda(s)\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)\big)h\big(B_2(s),T(s)\big)\\
&+ n(s)\frac{d\lambda(s)}{ds}h\big(B_2(s),N(s)\big)\\
&+ n(s)[\lambda(s)\varepsilon_n\tau(s)-\mu(s)\varepsilon_b(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)]h\big(B_2(s),B_1(s)\big)\\
&+ n(s)\frac{d\mu(s)}{ds}h\big(B_2(s),B_2(s)\big)
\end{aligned}
$$

elde edilir. $\|N(s)\|^2 = |\varepsilon_N| = 1$ ve $\|B_2(s)\|^2 = \left|\varepsilon_{B_2}\right| = 1$ olduğundan

$$m(s)\frac{d}{ds}\lambda(s) + n(s)\frac{d}{ds}\mu(s) = 0$$

olur. Benzer bir şekilde (4.6), (4.4) ifadesi ile iç çarpılırsa

$$h\left({B_2}^*(\varphi(s)),\varphi'(s)T^*(\varphi(s))\right) = p(s)\frac{d}{ds}\lambda(s) + q(s)\frac{d}{ds}\mu(s) = 0$$

dır. $\left\{N^*(\varphi(s)),{B_2}^*(\varphi(s))\right\}$ lineer bağımlı olduğundan

$$\begin{vmatrix} m(s) & n(s) \\ p(s) & q(s) \end{vmatrix} \neq 0$$

elde edilir. Buna göre $\frac{d}{ds}\lambda(s)=0$ ve $\frac{d}{ds}\mu(s)=0$ olur. Bu ise λ ve μ nun sabit olmasıdır. Bundan dolayı

$$\beta(s^*) = \beta\big(\varphi(s)\big) = \alpha(s) + \lambda \mathrm{N}(s) + \mu B_2(s) \tag{4.7}$$

olur. $\frac{d}{ds}\lambda(s)=0$ ve $\frac{d}{ds}\mu(s)=0$ ifadeleri, (4.4) ifadesinde yerlerine yazılırsa

$$\left\{\varphi'(s)T^*\big(\varphi(s)\big) = \begin{matrix}\big(1-\lambda\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)\big)T(s) \\ +[\lambda\varepsilon_n\tau(s)-\mu\varepsilon_b(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)]B_1(s)\end{matrix}\right\} \tag{4.8}$$

yazılabilir. (4.8) ifadesinin her iki tarafının h iç çarpımı alınırsa

$$\big(\varphi'(s)\big)^2 = [1-\lambda\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)]^2 + [\lambda\varepsilon_n\tau(s)-\mu\varepsilon_b(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)]^2 \neq 0 \tag{4.9}$$

bulunur. (4.8) eşitliğinden

$$T^*\big(\varphi(s)\big) = \left(\frac{1-\lambda\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)}{\varphi'(s)}\right)T(s) + \left(\frac{\lambda\varepsilon_n\tau(s)-\mu\varepsilon_b(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)}{\varphi'(s)}\right)B_1(s)$$

bulunur. Burada

$$a(s) = \frac{1-\lambda\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)}{\varphi'(s)}, \qquad b(s) = \frac{\lambda\varepsilon_n\tau(s)-\mu\varepsilon_b(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)}{\varphi'(s)} \tag{4.10}$$

olsun. Bu durumda

$$T^*\big(\varphi(s)\big) = a(s)T(s) + b(s)B_1(s)$$

yazılabilir. Son eşitliğin s'ye göre türevi alınıp (3.7) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\varepsilon_N\kappa^*\big(\varphi(s)\big)N^*\big(\varphi(s)\big)\varphi'(s) &= \frac{da(s)}{ds}T(s) + \big(a(s)\varepsilon_N\kappa(s) - b(s)\varepsilon_t\tau(s)\big)N(s) \\ &\quad + \frac{db(s)}{ds}B_1(s) + b(s)\varepsilon_n(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)B_2(s)\end{aligned} \tag{4.11}$$

elde edilir. $N^*\big(\varphi(s)\big) = span\{N(s), B_2(s)\}$ olduğundan dolayı, $\frac{d}{ds}a(s)=0$ ve $\frac{d}{ds}b(s)=0$ dır. Bu ise a ve b nin sabit olmasını gerektirir. Bu ifadeler (4.11) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\varepsilon_N\kappa^*\big(\varphi(s)\big)N^*\big(\varphi(s)\big)\varphi'(s) &= \big(a\varepsilon_N\kappa(s) - b\varepsilon_t\tau(s)\big)N(s) \\ &\quad + b\varepsilon_n(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)B_2(s)\end{aligned} \tag{4.12}$$

şeklinde yazılabilir. (4.10) daki ifadeler taraf tarafa bölünürse

$$\frac{a}{b}=\frac{1-\lambda\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)}{\lambda\varepsilon_n\tau(s)-\mu\varepsilon_b(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)}$$

olup buradan

$$b[1-\lambda\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)]=a[\lambda\varepsilon_n\tau(s)-\mu\varepsilon_b(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)] \qquad (4.13)$$

dır. Burada b sıfırdan farklı bir sabittir. $b=0$ değeri (4.12) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\varepsilon_N\kappa^*\big(\varphi(s)\big)N^*\big(\varphi(s)\big)\varphi'(s)=a\varepsilon_N\kappa(s)N(s)$$

bulunur. Bu ifadeye göre, $N^*\big(\varphi(s)\big)=\pm N(s)$ olur. Bu ise Teorem 4.1 ile bir çelişkidir. Dolayısıyla, $b\neq 0$ olmalıdır. Öyleyse

$$\lambda\varepsilon_n\tau(s)-\mu\varepsilon_b(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)\neq 0$$

olduğu kolayca görülür. Böylece $(4.3-i)$ eşitliği elde edilmiş oldu. (4.13) eşitliğinde $\frac{a}{b}$ yerine γ alınırsa

$$\gamma[\lambda\varepsilon_n\tau(s)-\mu\varepsilon_b(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)]=1-\lambda\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)$$

olup buradan

$$\gamma[\lambda\varepsilon_n\tau(s)-\mu\varepsilon_b(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)]+\lambda\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)=1$$

elde edilir. Böylece $(4.3-ii)$ eşitliği elde edilmiş oldu. (4.12) ifadesinin her iki tarafının h iç çarpımı alınırsa

$$\left\{\varepsilon_N\kappa^*\big(\varphi(s)\big)\varphi'(s)\right\}^2=[a\varepsilon_N\kappa(s)-b\varepsilon_t\tau(s)]^2+[b\varepsilon_n(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)]^2\neq 0$$

olup buradan

$$\left\{\varepsilon_N\kappa^*\big(\varphi(s)\big)\varphi'(s)\right\}^2= b^2\left[\begin{array}{c}\left(\frac{a}{b}\right)^2\big(\varepsilon_N\kappa(s)\big)^2-2\frac{a}{b}\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)\tau(s)\\ +\Big(\big(\varepsilon_t\tau(s)\big)^2+\big(\varepsilon_n(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)\big)^2\Big)\end{array}\right]$$

elde edilir. $\frac{a}{b}=\gamma$ olduğuna göre

$$\left\{\varepsilon_N\kappa^*\big(\varphi(s)\big)\varphi'(s)\right\}^2 = b^2\left[\big(\gamma\varepsilon_N\kappa(s)-\varepsilon_t\tau(s)\big)^2+\big(\varepsilon_n(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)\big)^2\right]$$

olur. (4.10) ifadesi son eşitlikte yerine yazılırsa

$$\left\{\varepsilon_N\kappa^*\big(\varphi(s)\big)\varphi'(s)\right\}^2 = \frac{\big(\lambda\varepsilon_n\tau(s)-\mu\varepsilon_b(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)\big)^2}{\big(\varphi'(s)\big)^2}\begin{bmatrix}\big(\gamma\varepsilon_N\kappa(s)-\varepsilon_t\tau(s)\big)^2\\+\big(\varepsilon_n(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)\big)^2\end{bmatrix}$$

olur. $(4.3-ii)$ ifadesi (4.9) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\big(\varphi'(s)\big)^2 = [\lambda\varepsilon_n\tau(s)-\mu\varepsilon_b(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)]^2(\gamma^2+1)$$

yazılabilir. Bu ifade son eşitlikte yerine yazılırsa

$$\left\{\varepsilon_N\kappa^*\big(\varphi(s)\big)\varphi'(s)\right\}^2 = \frac{1}{\gamma^2+1}\begin{bmatrix}\big(\gamma\varepsilon_N\kappa(s)-\varepsilon_t\tau(s)\big)^2\\+\big(\varepsilon_n(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)\big)^2\end{bmatrix} \tag{4.14}$$

olur. (4.12) eşitliğinde $\varepsilon_N\kappa^*\big(\varphi(s)\big)\varphi'(s)\neq 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$N^*\big(\varphi(s)\big) = \left(\frac{a\varepsilon_N\kappa(s)-b\varepsilon_t\tau(s)}{\varepsilon_N\kappa^*\big(\varphi(s)\big)\varphi'(s)}\right)N(s)+\left(\frac{b\varepsilon_n(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)}{\varepsilon_N\kappa^*\big(\varphi(s)\big)\varphi'(s)}\right)B_2(s)$$

yazılabilir. Burada

$$m(s) = \frac{a\varepsilon_N\kappa(s)-b\varepsilon_t\tau(s)}{\varepsilon_N\kappa^*\big(\varphi(s)\big)\varphi'(s)},\qquad n(s) = \frac{b\varepsilon_n(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)}{\varepsilon_N\kappa^*\big(\varphi(s)\big)\varphi'(s)} \tag{4.15}$$

olsun. O halde

$$N^*\big(\varphi(s)\big) = m(s)N(s)+n(s)B_2(s)$$

dir. Bu eşitliğin her iki tarafının s'ye göre türevi alınıp (3.7) eşitlikleri kullanılırsa

$$\left\{\begin{aligned}&\varphi'(s)\left\{-\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa^*\big(\varphi(s)\big)T^*\big(\varphi(s)\big)+\varepsilon_n\tau^*\big(\varphi(s)\big)B_1{}^*\big(\varphi(s)\big)\right\}\\&\qquad = -m(s)\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)T(s)+\frac{dm(s)}{ds}N(s)\\&\qquad +[m(s)\varepsilon_n\tau(s)-n(s)\varepsilon_b(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)]B_1(s)\\&\qquad +\frac{dn(s)}{ds}B_2(s)\end{aligned}\right\} \tag{4.16}$$

olup buradan

$$\frac{d}{ds}m(s) = 0\,, \qquad \frac{d}{ds}\,n(s) = 0 \tag{4.17}$$

bulunur. Bu ise, m ve n nin sabit olduğunu gösterir. (4.15) deki ifadeler taraf tarafa bölünürse

$$\frac{m}{n} = \frac{a\varepsilon_N\kappa(s) - b\varepsilon_t\tau(s)}{b\varepsilon_n(\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)}$$

olur. Burada $\delta = \dfrac{m}{n}$ olsun. Bu durumda

$$a\varepsilon_N\kappa(s) - b\varepsilon_t\tau(s) = \delta b\varepsilon_n(\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)$$

$$\frac{a}{b}\varepsilon_N\kappa(s) - \varepsilon_t\tau(s) = \delta\varepsilon_n(\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)$$

dir. $\dfrac{a}{b} = \gamma$ olduğuna göre

$$\gamma\varepsilon_N\kappa(s) - \varepsilon_t\tau(s) = \delta\varepsilon_n(\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)$$

olur. Böylece $(4.3 - iii)$ eşitliği elde edilmiş oldu. (4.10), (4.15) ve $(4.3 - ii)$ eşitliklerinden

$$m = \frac{[\lambda\varepsilon_n\tau(s) - \mu\varepsilon_b(\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)]\big(\gamma\varepsilon_N\kappa(s) - \varepsilon_t\tau(s)\big)}{\varepsilon_N\kappa^*\big(\varphi(s)\big)\big(\varphi'(s)\big)^2}$$

$$n = \frac{[\lambda\varepsilon_n\tau(s) - \mu\varepsilon_b(\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)]\big(\varepsilon_n(\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)\big)}{\varepsilon_N\kappa^*\big(\varphi(s)\big)\big(\varphi'(s)\big)^2} \tag{4.18}$$

elde edilir. (4.17) deki değerler (4.16) eşitliğinde yerlerine konularak

$$\begin{aligned}\varphi'(s)\varepsilon_n\tau^*\big(\varphi(s)\big)B_1{}^*\big(\varphi(s)\big) = {}& -\varphi'(s)\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa^*\big(\varphi(s)\big)T^*\big(\varphi(s)\big)\\ & -m(s)\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)T(s)\\ & +[m(s)\varepsilon_n\tau(s) - n(s)\varepsilon_b(\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)]B_1(s)\end{aligned}$$

olur ve (4.8) ifadeleri burada yerine konularak

$$\varphi'(s)\varepsilon_n\tau^*\big(\varphi(s)\big)B_1{}^*\big(\varphi(s)\big) = \big[\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa^*\big(\varphi(s)\big)\big(1-\lambda\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)\big) - m\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)\big]T(s)$$

$$+\begin{bmatrix} \varepsilon_t\varepsilon_N\kappa^*\big(\varphi(s)\big)\begin{Bmatrix} \lambda\varepsilon_n\tau(s) \\ -\mu\varepsilon_b(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)\end{Bmatrix} \\ +m\varepsilon_n\tau(s) - n\varepsilon_b(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)\end{bmatrix} B_1(s) \quad (4.19)$$

elde edilir. Şimdi (4.19) eşitliğide $T(s)$ nin katsayısı gözönüne alınarak ve (4.18) ve $(4.3-ii)$ eşitlikleri kullanılarak

$$\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa^*\big(\varphi(s)\big)\big(1-\lambda\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)\big) - m\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)$$

$$= \frac{\big(\lambda\varepsilon_n\tau(s)-\mu\varepsilon_b(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)\big)\begin{bmatrix} \gamma\varepsilon_t\Big(\varepsilon_N\kappa^*\big(\varphi(s)\big)\varphi'(s)\Big)^2 \\ -\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)\big(\gamma\varepsilon_N\kappa(s)-\varepsilon_t\tau(s)\big)\end{bmatrix}}{\varepsilon_N\kappa^*\big(\varphi(s)\big)\big(\varphi'(s)\big)^2}$$

bulunur. (4.14) ifadesi burada yerine yazılırsa

$$\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa^*\big(\varphi(s)\big)\big(1-\lambda\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)\big) - m\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s) = \frac{A(s)}{\varepsilon_N\kappa^*\big(\varphi(s)\big)\big(\varphi'(s)\big)^2}$$

elde edilir. Benzer bir şekilde $B_1(s)$ nin katsayısı gözönüne alınarak

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_t\varepsilon_N\kappa^*\big(\varphi(s)\big)[\lambda\varepsilon_n\tau(s)-\mu\varepsilon_b(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)] \\ +m\varepsilon_n\tau(s)-n\varepsilon_b(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)\end{Bmatrix} = \frac{B(s)}{\varepsilon_N\kappa^*\big(\varphi(s)\big)\big(\varphi'(s)\big)^2}$$

elde edilir. Burada

$$A(s) = -\frac{\big(\lambda\varepsilon_n\tau(s)-\mu\varepsilon_b(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)\big)}{\gamma^2+1}\begin{bmatrix} (\gamma^2-1)\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)\tau(s) \\ +\gamma\varepsilon_t\begin{pmatrix} \big(\varepsilon_N\kappa(s)\big)^2-\big(\varepsilon_t\tau(s)\big)^2 \\ -\big(\varepsilon_n(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)\big)^2\end{pmatrix}\end{bmatrix}$$

$$B(s) = \frac{\gamma\big(\lambda\varepsilon_n\tau(s)-\mu\varepsilon_b(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)\big)}{\gamma^2+1}\begin{bmatrix} (\gamma^2-1)\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)\tau(s) \\ +\gamma\varepsilon_t\begin{pmatrix} \big(\varepsilon_N\kappa(s)\big)^2-\big(\varepsilon_t\tau(s)\big)^2 \\ -\big(\varepsilon_n(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)\big)^2\end{pmatrix}\end{bmatrix}$$

dır. Bulunan bu ifadeler (4.19) eşitliğinde yerlerine konularak

$$\varphi'(s)\varepsilon_n\tau^*\big(\varphi(s)\big){B_1}^*\big(\varphi(s)\big) = \frac{1}{\varepsilon_N\kappa^*\big(\varphi(s)\big)\big(\varphi'(s)\big)^2}[A(s)T(s)+B(s)B_1(s)]$$

yazılabilir. $\varepsilon_N\kappa^*\big(\varphi(s)\big)\big(\varphi'(s)\big)^2 \neq 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$(\gamma^2-1)\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)\tau(s) + \gamma\varepsilon_t\begin{bmatrix}\big(\varepsilon_N\kappa(s)\big)^2 - \big(\varepsilon_t\tau(s)\big)^2 \\ -\big(\varepsilon_n(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)\big)^2\end{bmatrix} \neq 0$$

olduğu kolayca görülür. Böylece $(4.3-\text{iv})$ eşitliği elde edilmiş oldu.

Tersine $\kappa(s)\neq 0$, $\tau(s)\neq 0$ ve $[\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa](s)\neq 0$ koşulları altında α nın $(4.3-i)$, $(4.3-ii)$, $(4.3-iii)$ ve $(4.3-\text{iv})$ şartlarını sağladığını varsayalım. $(4.3-ii)$ eşitliği (4.8) da yerine yazılırsa

$$\varphi'(s)T^*\big(\varphi(s)\big) = \big(\lambda\varepsilon_n\tau(s) - \mu\varepsilon_b(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)\big)[\gamma T(s)+B_1(s)] \qquad (4.20)$$

elde edilir. Bu ifadenin her iki tarafının h iç çarpımı alınırsa

$$\big(\varphi'(s)\big)^2 = \big(\lambda\varepsilon_n\tau(s) - \mu\varepsilon_b(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)\big)^2(\gamma^2+1)$$

olup buradan

$$\varphi'(s) = \xi\big(\lambda\varepsilon_n\tau(s) - \mu\varepsilon_b(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)\big)\sqrt{\gamma^2+1}$$

bulunur. Burada $\xi = \pm 1$ dır. Bu ifade (4.20) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$T^*\big(\varphi(s)\big) = \xi(\gamma^2+1)^{-\frac{1}{2}}[\gamma T(s)+B_1(s)] \qquad (4.21)$$

elde edilir. (4.21) eşitliğinin s'ye göre türevi alınıp (3.7) eşitlikleri kullanılırsa

$$\varphi'(s)\frac{dT^*\big(\varphi(s)\big)}{ds^*} = \xi(\gamma^2+1)^{-\frac{1}{2}}\left[\gamma\frac{dT(s)}{ds} + \frac{dB_1(s)}{ds}\right]$$

$$= \xi(\gamma^2+1)^{-\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}\big(\gamma\varepsilon_N\kappa(s) - \varepsilon_t\tau(s)\big)N(s) \\ +\varepsilon_n(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)B_2(s)\end{bmatrix}$$

olur. $\beta(s^*)$ eğrisinin Frenet formüllerine göre

$$\frac{d}{ds^*}T^*\big(\varphi(s)\big) = \varepsilon_N\kappa^*\big(\varphi(s)\big)N^*\big(\varphi(s)\big) \qquad (4.22)$$

dir. Bu ifade son eşitlikte yerine yazılırsa

$$\varepsilon_N \kappa^*\big(\varphi(s)\big)N^*\big(\varphi(s)\big)\varphi'(s) = \xi(\gamma^2+1)^{-\frac{1}{2}}\begin{bmatrix} \big(\gamma\varepsilon_N\kappa(s) - \varepsilon_t\tau(s)\big)N(s) \\ +\varepsilon_n(\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)B_2(s) \end{bmatrix}$$

olur. (4.14) eşitliğinden

$$\varepsilon_N \kappa^*\big(\varphi(s)\big) = \xi\,\frac{\sqrt{\big(\gamma\varepsilon_N\kappa(s) - \varepsilon_t\tau(s)\big)^2 + \big(\varepsilon_n(\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)\big)^2}}{\varphi'(s)\sqrt{\gamma^2+1}} \tag{4.23}$$

yazılabilir. (4.22) eşitliğinden

$$N^*\big(\varphi(s)\big) = \frac{1}{\varepsilon_N\kappa^*\big(\varphi(s)\big)}\frac{d}{ds^*}T^*\big(\varphi(s)\big)$$

$$= \xi\,\frac{\big(\gamma\varepsilon_N\kappa(s) - \varepsilon_t\tau(s)\big)N(s) + \varepsilon_n(\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)B_2(s)}{\sqrt{\big(\gamma\varepsilon_N\kappa(s) - \varepsilon_t\tau(s)\big)^2 + \big(\varepsilon_n(\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)\big)^2}}$$

yazılabilir. Eğer

$$m(s) = \frac{\gamma\varepsilon_N\kappa(s) - \varepsilon_t\tau(s)}{\xi\sqrt{\big(\gamma\varepsilon_N\kappa(s) - \varepsilon_t\tau(s)\big)^2 + \big(\varepsilon_n(\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)\big)^2}}$$

$$n(s) = \frac{\varepsilon_n(\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)}{\xi\sqrt{\big(\gamma\varepsilon_N\kappa(s) - \varepsilon_t\tau(s)\big)^2 + \big(\varepsilon_n(\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)\big)^2}} \tag{4.24}$$

alınırsa, Bu durumda

$$N^*\big(\varphi(s)\big) = m(s)N(s) + n(s)B_2(s)$$

olur. Burada $m(s)$ ve $n(s)$ sıfırdan farklı sabitlerdir. Son eşitliğin s'ye göre türevi alınıp (3.7) eşitliği kullanılırsa

$$\varphi'(s)\frac{d}{ds^*}N^*(\varphi(s)) = m\frac{d}{ds}N(s) + n\frac{d}{ds}B_2(s)$$

$$= -m\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)T(s)$$

$$+\left(m\varepsilon_n\tau(s) - n\varepsilon_b[\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa](s)\right)B_1(s)$$

elde edilir. (4.24) eşitlikleri burada yerlerine yazılırsa

$$\frac{d}{ds^*}N^*(\varphi(s)) = \frac{-\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)\left(\gamma\varepsilon_N\kappa(s) - \varepsilon_t\tau(s)\right)}{\varphi'(s)\xi\sqrt{\left(\gamma\varepsilon_N\kappa(s) - \varepsilon_t\tau(s)\right)^2 + \left(\varepsilon_n(\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)\right)^2}}T(s)$$
$$+\frac{\varepsilon_n\tau(s)\left(\gamma\varepsilon_N\kappa(s) - \varepsilon_t\tau(s)\right) - \varepsilon_n\varepsilon_b[\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa](s)}{\varphi'(s)\xi\sqrt{\left(\gamma\varepsilon_N\kappa(s) - \varepsilon_t\tau(s)\right)^2 + \left(\varepsilon_n(\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)\right)^2}}B_1(s) \quad (4.25)$$

olur. (4.21) ve (4.23) taraf tarafa çarpılırsa

$$\varepsilon_N\kappa^*(\varphi(s))T^*(\varphi(s)) = \frac{\left\{\begin{array}{c}\left(\gamma\varepsilon_N\kappa(s) - \varepsilon_t\tau(s)\right)^2 \\ +\left(\varepsilon_n(\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)\right)^2\end{array}\right\}^{\frac{1}{2}}}{\varphi'(s)(\gamma^2+1)}[\gamma T(s) + B_1(s)]$$

olup buradan

$$\varepsilon_N\kappa^*(\varphi(s))T^*(\varphi(s)) = \frac{\left(\gamma\varepsilon_N\kappa(s) - \varepsilon_t\tau(s)\right)^2 + \left(\varepsilon_n(\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)\right)^2}{\varphi'(s)(\gamma^2+1)\left\{\begin{array}{c}\left(\gamma\varepsilon_N\kappa(s) - \varepsilon_t\tau(s)\right)^2 \\ +\left(\varepsilon_n(\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)\right)^2\end{array}\right\}^{1/2}}[\gamma T(s) + B_1(s)]$$

yazılabilir. Bu ifade (4.25) ile taraf tarafa toplanırsa

$$\frac{d}{ds^*}N^*(\varphi(s)) + \varepsilon_t\varepsilon_N\kappa^*(\varphi(s))T^*(\varphi(s)) = \frac{P(s)}{R(s)}T(s) + \frac{Q(s)}{R(s)}B_1(s) \quad (4.26)$$

bulunur. Burada

$$P(s) = -\left((\gamma^2-1)\varepsilon_t{}^2\varepsilon_N\kappa(s)\tau(s) + \gamma\varepsilon_t\left(\begin{array}{c}\left(\varepsilon_N\kappa(s)\right)^2 - \left(\varepsilon_t\tau(s)\right)^2 \\ -\left(\varepsilon_n(\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)\right)^2\end{array}\right)\right)$$

$$Q(s)=\gamma\left((\gamma^2-1)\varepsilon_t{}^2\varepsilon_N\kappa(s)\tau(s)+\gamma\varepsilon_t\begin{pmatrix}\left(\varepsilon_N\kappa(s)\right)^2-\left(\varepsilon_t\tau(s)\right)^2\\-\left(\varepsilon_n(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)\right)^2\end{pmatrix}\right)$$

$$R(s)=\xi\varphi'(s)(\gamma^2+1)\sqrt{\left(\gamma\varepsilon_N\kappa(s)-\varepsilon_t\tau(s)\right)^2+\left(\varepsilon_n(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)\right)^2}$$

dir. $\beta(s^*)$ eğrisinin Frenet formüllerine göre

$$\frac{d}{ds^*}N^*\big(\varphi(s)\big)+\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa^*\big(\varphi(s)\big)T^*\big(\varphi(s)\big)=\varepsilon_n\tau^*\big(\varphi(s)\big)B_1{}^*\big(\varphi(s)\big) \qquad (4.27)$$

dır. (4.27) ifadesi (4.26) da yerine yazılırsa

$$\varepsilon_n\tau^*\big(\varphi(s)\big)B_1{}^*\big(\varphi(s)\big)=\frac{P(s)}{R(s)}T(s)+\frac{Q(s)}{R(s)}B_1(s)$$

olur. Son ifadenin her iki tarafının h iç çarpımı alınırsa

$$\left(\varepsilon_n\tau^*\big(\varphi(s)\big)\right)^2=\left(\frac{P(s)}{R(s)}\right)^2+\left(\frac{Q(s)}{R(s)}\right)^2$$

$$\varepsilon_n\tau^*\big(\varphi(s)\big)=\frac{1}{R(s)}\sqrt{P^2(s)+Q^2(s)}$$

$$\tau^*\big(\varphi(s)\big)=\frac{1}{\varepsilon_nR(s)}\sqrt{P^2(s)+Q^2(s)}$$

bulunur. (4.27) eşitliğinden

$$B_1{}^*\big(\varphi(s)\big)=\frac{1}{\varepsilon_n\tau^*\big(\varphi(s)\big)}\left(\frac{d}{ds^*}N^*\big(\varphi(s)\big)+\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa^*\big(\varphi(s)\big)T^*\big(\varphi(s)\big)\right)$$

elde edilir. $\beta(s^*)$ eğrisinin Frenet formüllerine göre

$$\varepsilon_n[\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa](s)B_2{}^*\big(\varphi(s)\big)=\frac{dB_1{}^*\big(\varphi(s)\big)}{ds^*}+\varepsilon_t\tau^*\big(\varphi(s)\big)N^*\big(\varphi(s)\big) \qquad (4.28)$$

dır. (4.28) eşitliğinden

$$\varepsilon_n[\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa](s) = \left\| \frac{dB_1{}^*(\varphi(s))}{ds^*} + \varepsilon_t\tau^*(\varphi(s))N^*(\varphi(s)) \right\|$$

$$= \frac{\varepsilon_n\varepsilon_N[\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa](s)\sqrt{\gamma^2+1}}{\sqrt{\left(\gamma\varepsilon_N\kappa(s) - \varepsilon_t\tau(s)\right)^2 + \left(\varepsilon_n(\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)\right)^2}}$$

elde edilir. (4.28) eşitliğinden

$$B_2{}^*(\varphi(s)) = \frac{1}{\varepsilon_n[\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa](s)}\left(\frac{dB_1{}^*(\varphi(s))}{ds^*} + \varepsilon_t\tau^*(\varphi(s))N^*(\varphi(s))\right)$$

olur. Böylece, $span\{N^*(\varphi(s)), B_2{}^*(\varphi(s))\} = span\{N(s), B_2(s)\}$ olduğu gösterilmiş oldu.

Teorem 4.3. α, β 4-boyutlu yarı-Öklid uzayında kuaterniyonik eğriler olsun. s , s^* sırasıyla yay-parametreleri olmak üzere; eğer $\{\alpha, \beta\}$ kuaterniyonik (N, B_2) Bertrand eğri çifti ise bu durumda, $\alpha(s)$ ve $\beta(s^*)$ noktaları arasındaki uzaklık sabittir.

İspat: (4.7) eşitliğinden

$$\beta(s^*) - \alpha(s) = \lambda \mathrm{N(s)} + \mu B_2(s)$$

yazılabilir. Bu ifadenin her iki tarafının h iç çarpımı alınırsa

$$h\left(\beta(s^*) - \alpha(s), \beta(s^*) - \alpha(s)\right) = \lambda^2 + \mu^2$$

elde edilir. Buradan

$$\|\beta(s^*) - \alpha(s)\| = \pm\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$$

bulunur. Bu ise $\alpha(s)$ ve $\beta(s^*)$ noktaları arasındaki uzaklığın sabit olduğunu gösterir.

Örnek 4.1. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}_2^4$

$$s \longrightarrow \alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(sinh2s, coshs, cosh2s, sinhs)$$

olmak üzere, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasında, Frenet 4-ayaklısını, (3.4) eşitlikleri yardımıyla bulacağız.

$$\alpha'(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(2cosh2s, sinhs, 2sinh2s, coshs)$$

$$\|\alpha'(s)\| = \pm\sqrt{\frac{1}{3}(4cosh^2 2s + sinh^2 s - 4sinh^2 2s - cosh^2 s)} = 1$$

$$\alpha''(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(4sinh2s, coshs, 4cosh2s, sinhs)$$

$$\|\alpha''(s)\| = \pm\sqrt{\left|\frac{1}{3}(16sinh^2 2s + cosh^2 s - 16cosh^2 2s - sinh^2 s)\right|} = \sqrt{5}$$

$$\alpha'''(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(8cosh2s, sinhs, 8sinh2s, coshs)$$

$$\alpha^{\mathrm{iv}}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(16sinh2s, coshs, 16cosh2s, sinhs)$$

olduğundan

$$T(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(2cosh2s, sinhs, 2sinh2s, coshs)$$

$$N(s) = \frac{1}{\sqrt{15}}(4sinh2s, coshs, 4cosh2s, sinhs)$$

$$B_1(s) = -\varepsilon_b \varepsilon_T \frac{1}{\sqrt{3}}(cosh2s, 2sinhs, sinh2s, 2coshs)$$

$$B_2(s) = \varepsilon_n \varepsilon_b \frac{1}{\sqrt{15}}(sinh2s, 4coshs, cosh2s, 4sinhs)$$

elde edilir. Şimdi α eğrisinin eğriliklerini, (3.5) eşitlikleri yardımıyla bulacağız.

$$\kappa(s) = \varepsilon_N \sqrt{5}$$

$$\tau(s) = \varepsilon_t \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$(\sigma - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa)(s) = \varepsilon_b \frac{2}{\sqrt{5}}$$

dir. $\lambda = \dfrac{\sqrt{5}}{\varepsilon_t}$, $\mu = -\varepsilon_n \sqrt{5}$, $\gamma = -\dfrac{1}{\varepsilon_n}$ ve $\delta = \dfrac{-7}{2\varepsilon_b}$ reel sayıları için, α eğrisinin $(4.3 - i)$, $(4.3 - ii)$, $(4.3 - iii)$ ve $(4.3 - \mathrm{iv})$ şartlarını sağladığına göre α eğrisi bir kuaterniyonik (N, B_2) Bertrand eğrisidir. Dolayısıyla kuaterniyonik (N, B_2) Bertrand eğri çifti denilen $\beta(s^*)$ eğrisi (4.7) eşitliği kullanılarak

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{3}}(4sinh2s, 2coshs, 4cosh2s, 2sinhs)$$

biçimindedir.

Örnek 4.2. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}_2^4$

$$s \longrightarrow \alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(sin2s, cos2s, sins, coss)$$

olmak üzere, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasında, Frenet 4-ayaklısını, (3.4) eşitlikleri yardımıyla bulacağız.

$$\alpha'(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(2cos2s, -2sin2s, coss, -sins)$$

$$\|\alpha'(s)\| = \pm\sqrt{\frac{1}{3}(4cos^2 2s + 4sin^2 s - cos^2 s - sin^2 s)} = 1$$

$$\alpha''(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(-4sin2s, -4cos2s, -sins, -coss)$$

$$\|\alpha''(s)\| = \pm\sqrt{\frac{1}{3}(16sin^2 2s + 16cos^2 2s - sin^2 s - cos^2 s)} = \sqrt{5}$$

$$\alpha'''(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(-8cos2s, 8sin2s, -coss, sins)$$

$$\alpha^{\mathrm{iv}}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(16sin2s, 16cos2s, sins, coss)$$

olduğundan

$$T(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(2cos2s, -2sin2s, coss, -sins)$$

$$N(s) = -\frac{1}{\sqrt{15}}(4sin2s, 4cos2s, sins, coss)$$

$$B_1(s) = -\varepsilon_b \varepsilon_T \frac{1}{\sqrt{3}}(cos2s, -sin2s, 2coss, -2sins)$$

$$B_2(s) = -\varepsilon_n \varepsilon_b \frac{1}{\sqrt{15}}(sin2s, cos2s, 4sins, 4coss)$$

elde edilir. Şimdi α eğrisinin eğriliklerini bulacağız.

$$\kappa(s) = \varepsilon_N \sqrt{5}$$

$$\tau(s) = \varepsilon_t \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$(\sigma - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa)(s) = \varepsilon_b \frac{2}{\sqrt{5}}$$

dir. $\lambda = -\frac{\sqrt{5}}{\varepsilon_t}$, $\mu = \varepsilon_n \sqrt{5}$, $\gamma = -\frac{1}{\varepsilon_n}$ ve $\delta = \frac{-7}{2\varepsilon_b}$ reel sayıları için, α eğrisinin $(4.3 - i)$, $(4.3 - ii)$, $(4.3 - iii)$ ve $(4.3 - \mathrm{iv})$ şartlarını sağladığına göre α eğrisi bir kuaterniyonik (N, B_2) Bertrand eğrisidir. Dolayısıyla kuaterniyonik (N, B_2) Bertrand eğri çifti denilen $\beta(s^*)$ eğrisi (4.7) eşitliği kullanılarak

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{3}}(4sin2s, 4cos2s, 2sins, 2coss)$$

biçimindedir.

5. 4-BOYUTLU YARI-ÖKLİD UZAYINDA HELİSLER

5.1 Bir Helisin Bertrand Eğrisi

Bu kesimde, 4-boyutlu yarı-Öklid uzayındaki kuaterniyonik eğrilerin Frenet 4-ayaklıları ile bir helisin Bertrand eğrisi arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile ifade edilecektir.

Tanım 5.1. (Genel helis): $\alpha: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}_2^4$ birim kuaterniyonik eğrisi için, α nın T tanjant vektörü, sabit bir U vektörü ile sabit açı ϕ yapıyor ise yani; $h(T, U) = \xi_1(\phi)$ eğri boyunca sabit ise, α ya bir "Genel Helis" denir.

Tanım 5.2. (Slant Helis Eğrisi): $\alpha: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}_2^4$, $\|\alpha'(s)\| = 1$ olacak şekilde bir birim kuaterniyonik eğri olsun. $\kappa(s) \neq 0$ ve $\tau(s) \neq 0$ olacak şekilde α eğrisine bir "Slant Helis Eğrisi" denir eğer α nın N normal vektörleri, sabit bir U vektörü ile sabit bir açı ϕ yapıyor ise yani; $h(N, U) = \xi_1(\phi)$.

Tanım 5.3. (B_2-Slant Helis Eğrisi): $\alpha: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}_2^4$, $\|\alpha'(s)\| = 1$ olacak şekilde bir birim kuaterniyonik eğri olsun. $\kappa(s) \neq 0$ ve $\tau(s) \neq 0$ olacak şekilde α eğrisine bir "B_2-Slant Helis Eğrisi" denir eğer α nın B_2 ikinci binormal vektörleri, sabit bir U vektörü ile sabit bir açı ϕ yapıyor ise yani; $h(B_2, U) = \xi_1(\phi)$.

Teorem 5.1. α ve β 4-boyutlu yarı-Öklid uzayında bir birim yarı kuaterniyonik eğriler olup β, α nın Bertrand eğri çifti olsun. Eğer $\alpha = \alpha(s)$ bir helis ise bu durumda, β nın Frenet 4-ayaklıları, α nın Frenet 4-ayaklıları ile oluşturulabilir.

İspat: (3.8) eşitliğinin s'ye göre türevi alınıp (3.7) eşitlikleri kullanılarak

$$\beta'(s^*) = T^*(s^*)\frac{ds^*}{ds} = \big(1 - \lambda\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)\big)T(s) + \lambda\varepsilon_n\tau(s)B_1(s) \tag{5.1}$$

elde edilir. Buradan

$$\|\beta'(s^*)\|^2 = \left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 = \big(1 - \lambda\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)\big)^2 + \big(\lambda\varepsilon_n\tau(s)\big)^2 \neq 0$$

$$\frac{ds^*}{ds} = \|\beta'(s^*)\| = \pm\sqrt{\left(1-\lambda\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)\right)^2 + \left(\lambda\varepsilon_n\tau(s)\right)^2}$$

olur. Burada $K(s) = \pm\sqrt{\left(1-\lambda\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)\right)^2 + \left(\lambda\varepsilon_n\tau(s)\right)^2}$ olsun. Bu durumda

$$\frac{ds^*}{ds} = \|\beta'(s^*)\| = K(s)$$

dir. bu ifade (5.1) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$T^*(s^*) = \frac{1}{K}\left[\left(1-\lambda\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)\right)T(s) + \lambda\varepsilon_n\tau(s)B_1(s)\right] \tag{5.2}$$

şeklinde yazılabilir. (5.1) eşitliğinin s 'ye göre türevi alınıp (3.7) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\beta''(s^*) &= \left(1-\lambda\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)\right)\frac{dT(s)}{ds} + \lambda\varepsilon_n\tau(s)\frac{dB_1(s)}{ds}\\ &= \left[\varepsilon_N\kappa(s) - \lambda\left(\varepsilon_t\left(\varepsilon_N\kappa(s)\right)^2 + \varepsilon_t\varepsilon_n\tau^2(s)\right)\right]N(s)\\ &\quad +\lambda{\varepsilon_n}^2\tau(s)(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)B_2(s)\end{aligned} \tag{5.3}$$

olup buradan

$$\|\beta''(s^*)\| = \pm\left\{\begin{array}{c}\left(\varepsilon_N\kappa(s) - \lambda\left(\varepsilon_t\left(\varepsilon_N\kappa(s)\right)^2 + \varepsilon_t\varepsilon_n\tau^2(s)\right)\right)^2\\ +\left(\lambda{\varepsilon_n}^2\tau(s)(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)\right)^2\end{array}\right\}^{1/2}$$

elde edilir. Eğer

$$a(s) = \varepsilon_N\kappa(s) - \lambda\left(\varepsilon_t\left(\varepsilon_N\kappa(s)\right)^2 + \varepsilon_t\varepsilon_n\tau^2(s)\right)$$

$$b(s) = \lambda{\varepsilon_n}^2\tau(s)(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)$$

$$L(s) = \pm\left\{\begin{array}{c}\left(\varepsilon_N\kappa(s) - \lambda\left(\varepsilon_t\left(\varepsilon_N\kappa(s)\right)^2 + \varepsilon_t\varepsilon_n\tau^2(s)\right)\right)^2\\ +\left(\lambda{\varepsilon_n}^2\tau(s)(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)\right)^2\end{array}\right\}^{1/2}$$

alınırsa, o halde

$$N^*(s^*) = \frac{\beta''(s^*)}{\|\beta''(s^*)\|} = \frac{1}{L}\big(a(s)N(s) + b(s)B_2(s)\big) \tag{5.4}$$

olur. (5.3) eşitliğinin s'ye göre türevi alınıp (3.7) eşitlikleri kullanılırsa

$$\beta'''(s^*) = \left[\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)\left(\lambda\left(\varepsilon_t\big(\varepsilon_N\kappa(s)\big)^2 + \varepsilon_t\varepsilon_n\tau^2(s)\right) - \varepsilon_N\kappa(s)\right)\right]T(s)$$

$$+\left[\varepsilon_n\tau(s)\left(\varepsilon_N\kappa(s) - \lambda\begin{pmatrix}\varepsilon_t\big(\varepsilon_N\kappa(s)\big)^2 + \varepsilon_t\varepsilon_n\tau^2(s)\\ +\varepsilon_n\varepsilon_b\big((\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)\big)^2\end{pmatrix}\right)\right]B_1(s)$$

olur. Burada

$$m(s) = \varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)\left(\lambda\left(\varepsilon_t\big(\varepsilon_N\kappa(s)\big)^2 + \varepsilon_t\varepsilon_n\tau^2(s)\right) - \varepsilon_N\kappa(s)\right)$$

$$n(s) = \varepsilon_n\tau(s)\left(\varepsilon_N\kappa(s) - \lambda\begin{pmatrix}\varepsilon_t\big(\varepsilon_N\kappa(s)\big)^2 + \varepsilon_t\varepsilon_n\tau^2(s)\\ +\varepsilon_n\varepsilon_b\big((\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)\big)^2\end{pmatrix}\right)$$

olsun. Bu durumda

$$\beta'''(s^*) = m(s)T(s) + n(s)B_1(s) \tag{5.5}$$

dir. Burada $m(s)$ ve $n(s)$ sıfırdan farkılı sabittir. Şimdi $T^*(s^*)\Lambda N^*(s^*)\Lambda\beta'''(s^*)$ vektör formu hesaplanabilir. (5.2), (5.4) ve (5.5) eşitliklerinden

$$T^*\left(s^*\right)\Lambda N^*\left(s^*\right)\Lambda\beta'''\left(s^*\right) = -\frac{1}{KL}\begin{vmatrix} -T & -N & B_1 & B_2 \\ 1-\lambda\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s) & 0 & \lambda\varepsilon_n\tau(s) & 0 \\ 0 & a(s) & 0 & b(s) \\ m(s) & 0 & n(s) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{KL}\begin{bmatrix} -\big((\lambda\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s) - 1)n(s)b(s) + \lambda\varepsilon_n\tau(s)m(s)b(s)\big)N \\ \Big(\big(1 - \lambda\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)\big)n(s)a(s) - \lambda\varepsilon_n\tau(s)m(s)a(s)\Big)B_2 \end{bmatrix}$$

elde edilir. $a(s)$, $b(s)$, $m(s)$ ve $n(s)$ eşitlikleri burada yerlerine yazılırsa

$$T^*(s^*)\Lambda N^*(s^*)\Lambda\beta'''(s^*) = -\frac{1}{KL}\left[\begin{array}{c} M(s) \\ \times\left(\begin{array}{c} \lambda{\varepsilon_n}^2\tau(s)(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)N(s) \\ -\left(\varepsilon_N\kappa(s)-\lambda\begin{pmatrix}\varepsilon_t\big(\varepsilon_N\kappa(s)\big)^2 \\ +\varepsilon_t\varepsilon_n\tau^2(s)\end{pmatrix}\right)B_2(s)\end{array}\right)\end{array}\right]$$

elde edilir. Burada

$$M(s) = \varepsilon_n\tau(s)\left(\begin{array}{c}\lambda\left(\varepsilon_t\big(\varepsilon_N\kappa(s)\big)^2+\varepsilon_t\varepsilon_n\tau^2(s)+\varepsilon_n\varepsilon_b\big((\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)\big)^2\right) \\ -\varepsilon_N\kappa(s)\left(1+\lambda^2\varepsilon_t\varepsilon_n\varepsilon_b\big((\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)\big)^2\right)\end{array}\right)$$

dır ve bu durumda

$$T^*(s^*)\Lambda N^*(s^*)\Lambda\beta'''(s^*) = -\frac{M}{KL}\left[\begin{array}{c}\lambda{\varepsilon_n}^2\tau(s)(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)N(s) \\ -\left(\varepsilon_N\kappa(s)-\lambda\left(\varepsilon_t\big(\varepsilon_N\kappa(s)\big)^2+\varepsilon_t\varepsilon_n\tau^2(s)\right)\right)B_2(s)\end{array}\right]$$

olup buradan

$$\|T^*(s^*)\Lambda N^*(s^*)\Lambda\beta'''(s^*)\| = \pm\frac{M}{KL}\left\{\begin{array}{c}\big(\lambda{\varepsilon_n}^2\tau(s)(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)\big)^2 \\ +\left(\varepsilon_N\kappa(s)-\lambda\left(\varepsilon_t\big(\varepsilon_N\kappa(s)\big)^2+\varepsilon_t\varepsilon_n\tau^2(s)\right)\right)^2\end{array}\right\}^{1/2}$$

elde edilir. (3.4) ifadesine göre

$${B_2}^*(s^*) = \eta\varepsilon_n\varepsilon_b\varepsilon_T\varepsilon_N\left[\frac{\begin{array}{c}\lambda{\varepsilon_n}^2\tau(s)(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)N(s) \\ -\left(\varepsilon_N\kappa(s)-\lambda\left(\varepsilon_t\big(\varepsilon_N\kappa(s)\big)^2+\varepsilon_t\varepsilon_n\tau^2(s)\right)\right)B_2(s)\end{array}}{\sqrt{\begin{array}{c}\big(\lambda{\varepsilon_n}^2\tau(s)(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s)\big)^2 \\ +\left(\varepsilon_N\kappa(s)-\lambda\left(\varepsilon_t\big(\varepsilon_N\kappa(s)\big)^2+\varepsilon_t\varepsilon_n\tau^2(s)\right)\right)^2\end{array}}}\right]$$

dır. $L(s)$ nin değeri burada yerine yazılırsa

$$B_2{}^*(s^*) = \eta \frac{\varepsilon_n \varepsilon_b \varepsilon_T \varepsilon_N}{L} \begin{bmatrix} \lambda \varepsilon_n{}^2 \tau(s)(\sigma - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa)(s) N(s) \\ -\left(\varepsilon_N \kappa(s) - \lambda\left(\varepsilon_t\big(\varepsilon_N \kappa(s)\big)^2 + \varepsilon_t \varepsilon_n \tau^2(s)\right)\right) B_2(s) \end{bmatrix}$$

olur. Burada

$$P(s) = \lambda \varepsilon_n{}^2 \tau(s)(\sigma - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa)(s)$$

$$R(s) = \varepsilon_N \kappa(s) - \lambda\left(\varepsilon_t\big(\varepsilon_N \kappa(s)\big)^2 + \varepsilon_t \varepsilon_n \tau^2(s)\right)$$

olsun. O halde

$$B_2{}^*(s^*) = \eta \frac{\varepsilon_n \varepsilon_b \varepsilon_T \varepsilon_N}{L} [P(s)N(s) - R(s)B_2(s)] \tag{5.6}$$

dır. Şimdi de $B_2{}^*(s^*) \Lambda T^*(s^*) \Lambda N^*(s^*)$ vektör formu hesaplanabilir. (5.2), (5.4) ve (5.6) eşitliklerinden

$$B_2^*\left(s^*\right) \Lambda T^*\left(s^*\right) \Lambda N^*\left(s^*\right) = -\eta \frac{\varepsilon_n \varepsilon_b \varepsilon_T \varepsilon_N}{KL^2} \begin{vmatrix} -T & -N & B_1 & B_2 \\ 0 & P(s) & 0 & -R(s) \\ 1 - \lambda \varepsilon_t \varepsilon_N \kappa(s) & 0 & \lambda \varepsilon_n \tau(s) & 0 \\ 0 & a(s) & 0 & b(s) \end{vmatrix}$$

$$= \eta \frac{\varepsilon_n \varepsilon_b \varepsilon_T \varepsilon_N \big(P(s)b(s) + R(s)a(s)\big)}{KL^2} \begin{bmatrix} \lambda \varepsilon_n \tau(s) T(s) \\ +\big(1 - \lambda \varepsilon_t \varepsilon_N \kappa(s)\big) B_1(s) \end{bmatrix}$$

elde edilir. $a(s)$, $b(s)$, $P(s)$ ve $R(s)$ eşitliklerine dikkat edilirse, $P(s) = b(s)$ ve $R(s) = a(s)$ olduğu kolayca görülebilir. Buna göre

$$B_2{}^*(s^*) \Lambda T^*(s^*) \Lambda N^*(s^*) = \eta \frac{\varepsilon_n \varepsilon_b \varepsilon_T \varepsilon_N \big(a^2(s) + b^2(s)\big)}{KL^2} \begin{bmatrix} \lambda \varepsilon_n \tau(s) T(s) \\ +\big(1 - \lambda \varepsilon_t \varepsilon_N \kappa(s)\big) B_1(s) \end{bmatrix}$$

yazılabilir. $a(s)$, $b(s)$ ve $L(s)$ eşitliklerinin her iki tarafının karesi alınırsa

$$a^2(s) + b^2(s) = L^2(s)$$

olup buradan

$$B_2{}^*(s^*) \Lambda T^*(s^*) \Lambda N^*(s^*) = \eta \frac{\varepsilon_n \varepsilon_b \varepsilon_T \varepsilon_N}{K} \left[\lambda \varepsilon_n \tau(s) T(s) + \big(1 - \lambda \varepsilon_t \varepsilon_N \kappa(s)\big) B_1(s)\right]$$

dır. (3.4) ifadesine göre

$$B_1{}^*(s^*) = \eta \frac{\varepsilon_n \varepsilon_b \varepsilon_T \varepsilon_N}{K} \left[\lambda \varepsilon_n \tau(s) T(s) + \big(1 - \lambda \varepsilon_t \varepsilon_N \kappa(s)\big) B_1(s)\right]$$

olur.

Örnek 5.1. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}_2^4$

$$s \longrightarrow \alpha(s) = \big(coshs, \sqrt{3}s, sinhs, s\big)$$

olmak üzere, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasında, Frenet 4-ayaklısını, (3.4) eşitlikleri yardımıyla bulacağız.

$$\alpha'(s) = \big(sinhs, \sqrt{3}, coshs, 1\big)$$

$$\|\alpha'(s)\| = \pm\sqrt{sinh^2 s + 3 - cosh^2 s - 1} = 1$$

$$\alpha''(s) = (coshs, 0, sinhs, 0)$$

$$\|\alpha''(s)\| = \pm\sqrt{cosh^2 s + 0 - sinh^2 s - 0} = 1$$

$$\alpha'''(s) = (sinhs, 0, coshs, 0)$$

$$\alpha^{\mathrm{iv}}(s) = (coshs, 0, sinhs, 0)$$

olduğundan

$$T(s) = \big(sinhs, \sqrt{3}, coshs, 1\big)$$

$$N(s) = (coshs, 0, sinhs, 0)$$

$$B_1(s) = -\varepsilon_b \varepsilon_T \frac{1}{\sqrt{2}} \big(2sinhs, -\sqrt{3}, 2coshs, 1\big)$$

$$B_2(s) = -\varepsilon_n \varepsilon_b \frac{1}{\sqrt{2}} \big(0, -1, 0, \sqrt{3}\big)$$

elde edilir. α eğrisinin eğrilikleri

$$\kappa(s) = -1$$

$$\tau(s) = \sqrt{2}$$

$$(\sigma - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa)(s) = -\varepsilon_b \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} h\left((coshs, 0, sinhs, 0), \left(0, -1, 0, \sqrt{3}\right)\right)}{\sqrt{2}} = 0$$

dır. $\lambda = \dfrac{1}{\varepsilon_t \varepsilon_N}$ ve $\mu = \dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon_n}$ reel sayıları için, α eğrisinin

$$\lambda \varepsilon_t \varepsilon_N \kappa(s) + \mu \varepsilon_n \tau(s) = 1$$

şartını sağladığına göre α eğrisi bir kuaterniyonik Bertrand eğrisidir. Dolayısıyla kuaterniyonik Bertrand eğri çifti denilen $\beta(s^*)$ eğrisi ise (3.8) eşitliğinden

$$\beta(s^*) = \left(2coshs, \sqrt{3}s, 2sinhs, s\right)$$

bulunur.

Örnek 5.2. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}_2^4$

$$s \longrightarrow \alpha(s) = \left(sin2s, cos2s, \sqrt{3}s, \sqrt{3}\right)$$

olmak üzere, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasında, Frenet 4-ayaklısını, (3.4) eşitlikleri yardımıyla bulacağız.

$$\alpha'(s) = \left(2cos2s, -2sin2s, \sqrt{3}, 0\right)$$

$$\|\alpha'(s)\| = \pm\sqrt{4cos^2 2s + 4sin^2 2s - 3 - 0} = 1$$

$$\alpha''(s) = (-4sin2s, -4cos2s, 0, 0)$$

$$\|\alpha''(s)\| = \pm\sqrt{16sin^2 2s + 16cos^2 2s - 0 - 0} = 4$$

$$\alpha'''(s) = (-8cos2s, 8sin2s, 0, 0)$$

$$\alpha^{\mathrm{iv}}(s) = (16sin2s, 16cos2s, 0, 0)$$

olduğundan

$$T(s) = \left(2cos2s, -2sin2s, \sqrt{3}, 0\right)$$

$$N(s) = -(sin2s, cos2s, 0, 0)$$

$$B_1(s) = -\varepsilon_b\varepsilon_T\left(\sqrt{3}cos2s, -\sqrt{3}sin2s, 2, 0\right)$$

$$B_2(s) = -\varepsilon_n\varepsilon_b(0, 0, 0, 1)$$

elde edilir. Şimdi α eğrisinin eğriliklerini (3.5) eşitlikleri yardımıyla bulacağız.

$$\kappa(s) = 4$$

$$\tau(s) = \frac{8\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}$$

$$(\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s) = 0$$

dır. $\lambda = -\dfrac{1}{\varepsilon_t\varepsilon_N}$ ve $\mu = \dfrac{5}{\varepsilon_n 2\sqrt{3}}$ reel sayıları için, α eğrisinin

$$\lambda\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s) + \mu\varepsilon_n\tau(s) = 1$$

şartını sağladığına göre α eğrisi bir kuaterniyonik Bertrand eğrisidir. Dolayısıyla kuaterniyonik Bertrand eğri çifti denilen $\beta(s^*)$ eğrisi ise (3.8) eşitliğinden

$$\beta(s^*) = \left(2sin2s, 2cos2s, \sqrt{3}s, \sqrt{3}\right)$$

bulunur.

5.2 4-Boyutlu Yarı-Öklid Uzayında Kuaterniyonik B_2-Slant Helis

Bu kesimde, 4-boyutlu yarı-Öklid uzayındaki kuaterniyonik eğrilerin bir kuaterniyonik B_2-slant helis olması için gerek ve yeter koşullar verilecektir.

Teorem 5.2. $\alpha = \alpha(s)$, 4-boyutlu yarı-Öklid uzayında bir birim kuaterniyonik eğri olsun. $\kappa(s) \neq 0$, $\tau(s) \neq 0$ ve $[\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa](s) \neq 0$ olmak üzere, α nın bir B_2-slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\left(\frac{\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)^2 + \left(\varepsilon_N\frac{1}{\kappa}\right)^2\left(\frac{d}{ds}\left(\frac{\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)\right)^2 \qquad (5.7)$$

sabit olmasıdır.

İspat: α, 4-boyutlu yarı-Öklid uzayında bir B_2-slant helis olsun. U sabit ve birim bir vektör olarak tanımlansın. Bu takdirde

$$h(B_2, U) = \xi_1(\phi) \qquad (\xi_1(\phi) = sabit)$$

dir. Bu eşitliğin s'ye göre türevi alınarak ve (3.7) eşitlikleri kullanılarak

$$\frac{d}{ds} h(B_2, U) = -\varepsilon_b[\sigma - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa] h(B_1, U) = 0$$

olur. Buna göre

$$U = a_1(s)T(s) + a_2(s)N(s) + a_3(s)B_2(s) \tag{5.8}$$

yazılabilir. Bu ifade $B_2(s)$ ile iç çarpılırsa

$$a_3(s) = h(B_2, U) = \xi_1(\phi) = sabit \tag{5.9}$$

dir. (5.8) eşitliğinin s'ye göre türevi alınarak ve (3.7) eşitlikleri kullanılarak

$$\left(\frac{da_1}{ds} - a_2 \varepsilon_t \varepsilon_N \kappa\right) T + \left(\frac{da_2}{ds} + a_1 \varepsilon_N \kappa\right) N + (a_2 \varepsilon_n \tau - a_3 \varepsilon_b [\sigma - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa]) B_1 = 0$$

olup buradan

$$\frac{da_1}{ds} - a_2 \varepsilon_t \varepsilon_N \kappa = 0, \qquad \frac{da_2}{ds} + a_1 \varepsilon_N \kappa = 0, \qquad a_2 \varepsilon_n \tau - a_3 \varepsilon_b [\sigma - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa] = 0$$

$$a_2 = \varepsilon_n \varepsilon_b \frac{\sigma - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa}{\tau} a_3 = \varepsilon_t \varepsilon_N \frac{1}{\kappa} \frac{da_1}{ds} \tag{5.10}$$

$$\frac{da_2}{ds} = -\varepsilon_N \kappa a_1 \tag{5.11}$$

elde edilir. (5.10) eşitliğinin s'ye göre türevi alınarak ve (5.11) eşitliği kullanılarak

$$\frac{d^2 a_1}{ds^2} - \frac{\kappa'}{\kappa} \frac{da_1}{ds} + \varepsilon_t \varepsilon_N \kappa^2 a_1 = 0 \tag{5.12}$$

bulunur. Böylece ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemi elde edilmiş oldu. (5.12) formundaki değişkenler değiştirilebilmek için $t = a_1(s)$ biçiminde tanımlansın. Buna göre

$$\frac{da_1}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{da_1}{dt}$$

$$\frac{d^2a_1}{ds^2} = \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \frac{d^2a_1}{dt^2} + \frac{d^2t}{ds^2}\frac{da_1}{dt} \tag{5.13}$$

dır. (5.12) eşitliğinde $\frac{da_1}{ds}$ ve $\frac{d^2a_1}{ds^2}$ yerine (5.13) deki eşitlikleri konularak

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \frac{d^2a_1}{dt^2} + \left[\frac{d^2t}{ds^2} - \frac{\kappa'}{\kappa}\frac{dt}{ds}\right]\frac{da_1}{dt} + \varepsilon_t\varepsilon_N\kappa^2 a_1 = 0$$

$$\frac{d^2a_1}{dt^2} + \left[\frac{\frac{d^2t}{ds^2} - \frac{\kappa'}{\kappa}\frac{dt}{ds}}{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2}\right]\frac{da_1}{dt} + \frac{\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa^2}{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2}a_1 = 0 \tag{5.14}$$

elde edilir. Burada $t = \int_0^s \varepsilon_t\varepsilon_N\kappa(s)ds$ olsun. Bu durumda

$$\frac{dt}{ds} = \varepsilon_t\varepsilon_N\kappa, \qquad \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = \varepsilon_t\varepsilon_N\kappa^2, \qquad \frac{d^2t}{ds^2} = \varepsilon_t\varepsilon_N\kappa' \tag{5.15}$$

dır. (5.15) teki ifadeler (5.14) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\frac{d^2a_1}{dt^2} + a_1 = 0$$

olur. Bu denklemin çözümü $a_1 = e^{rt}$ şeklinde ve $\frac{da_1}{dt} = re^{rt}$, $\frac{d^2a_1}{dt^2} = r^2e^{rt}$ ifadeleri yukarıdaki denklemde yerlerine yazılırsa

$e^{rt}(r^2+1) = 0; r = \pm i$, kompleks iki kök vardır. r kompleks sayı olduğuna göre $r = \lambda + \mu i$ şeklindedir.

Genel çözüm:

$$a_1 = e^{\lambda t}\left(A\,\xi_1(\mu t) + B\,\xi_2(\mu t)\right)$$

dir. Burada tanım 3.1'e göre $\xi_1(\mu t)$, $\xi_2(\mu t)$ ifadeleri sırası ile

$\{\cos(\mu t), \cosh(\mu t)\}, \{\sin(\mu t), \sinh(\mu t)\}$. $\lambda = 0$ ve $\mu = 1$ için

$$a_1 = A\,\xi_1(t) + B\,\xi_2(t) \tag{5.16}$$

elde edilir. Burada, A ve B sabitlerdir. (5.10), (5.11) ve (5.16) dan

$$a_2 = \varepsilon_n\varepsilon_b \frac{\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau} a_3 = -A\,\xi_2(t) + B\,\xi_1(t) \tag{5.17}$$

$$a_1 = -\varepsilon_n\varepsilon_b\varepsilon_N \frac{1}{\kappa}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)\right] a_3 = A\,\xi_1(t) + B\,\xi_2(t) \tag{5.18}$$

bulunur. (5.17) ve (5.18) eşitliklerinin her iki tarafı gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$A\left(\xi_2(t)\right)^2 - B\,\xi_1(t)\,\xi_2(t) = -\varepsilon_n\varepsilon_b a_3\left(\frac{\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)\xi_2(t)$$

$$A\left(\xi_1(t)\right)^2 + B\,\xi_1(t)\,\xi_2(t) = -\varepsilon_n\varepsilon_b\varepsilon_N a_3 \frac{1}{\kappa}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)\right]\xi_1(t)$$

olur. Bu ifade taraf tarafa toplanırsa

$$A = -\varepsilon_n\varepsilon_b a_3\left(\left(\frac{\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)\xi_2(t) + \varepsilon_N \frac{1}{\kappa}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)\right]\xi_1(t)\right)$$

elde edilir. Benzer bir şekilde (5.17) ve (5.18) eşitliklerinin her iki tarafı gerekli düzenlemeler yapılıp taraf tarafa toplanırsa

$$B = \varepsilon_n\varepsilon_b a_3\left(\left(\frac{\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)\xi_1(t) - \varepsilon_N \frac{1}{\kappa}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)\right]\xi_2(t)\right)$$

elde edilir. (5.9) ifadesi A ve B eşitliklerinde yerine yazılırsa

$$A = -\varepsilon_n\varepsilon_b\left(\left(\frac{\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)\xi_2(t) + \varepsilon_N \frac{1}{\kappa}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)\right]\xi_1(t)\right)\xi_1(\phi)$$

$$B = \varepsilon_n\varepsilon_b\left(\left(\frac{\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)\xi_1(t) - \varepsilon_N \frac{1}{\kappa}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)\right]\xi_2(t)\right)\xi_1(\phi)$$

olup buradan

$$A^2=\varepsilon_n\varepsilon_b\begin{pmatrix}\left(\frac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)^2\left(\xi_2(t)\right)^2\\+\varepsilon_N\frac{1}{\kappa}\left(\frac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)\right]\xi_1(t)\,\xi_2(t)\\+\left(\varepsilon_N\frac{1}{\kappa}\right)^2\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)\right]^2\left(\xi_1(t)\right)^2\end{pmatrix}\left(\xi_1(\phi)\right)^2$$

$$B^2=\varepsilon_n\varepsilon_b\begin{pmatrix}\left(\frac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)^2\left(\xi_1(t)\right)^2\\-\varepsilon_N\frac{1}{\kappa}\left(\frac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)\right]\xi_1(t)\,\xi_2(t)\\+\left(\varepsilon_N\frac{1}{\kappa}\right)^2\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)\right]^2\left(\xi_2(t)\right)^2\end{pmatrix}\left(\xi_1(\phi)\right)^2$$

bulunur. Bu ifadeler taraf tarafa toplanırsa

$$A^2+B^2=\varepsilon_n\varepsilon_b\left[\left(\frac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)^2+\left(\varepsilon_N\frac{1}{\kappa}\right)^2\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)\right]^2\right]\left(\xi_1(\phi)\right)^2$$

veya

$$\left(\frac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)^2+\left(\varepsilon_N\frac{1}{\kappa}\right)^2\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)\right]^2=\varepsilon_n\varepsilon_b\frac{A^2+B^2}{\left(\xi_1(\phi)\right)^2}=sabit \quad (5.19)$$

elde edilir. Bu ise istenilen (5.7) koşuludur.

Tersine (5.7) koşulu sağlansın. O zaman α nın B_2 ikinci binormal vektörü, birim ve sabit bir U vektörü ile sabit bir açı ϕ yapıyor demektir. Yani $h(B_2,U)=\xi_1(\phi)=sabittir.$ (5.9) , (5.17) ve (5.18) ifadeleri (5.8) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$U=\left[-\varepsilon_n\varepsilon_b\varepsilon_N\frac{1}{\kappa}\left(\frac{d}{ds}\left(\frac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)\right)T+\varepsilon_n\varepsilon_b\frac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}N+B_2\right]\xi_1(\phi)$$

dır. U nun s' ye göre türevi alınırsa

$$\frac{dU}{ds}=\begin{bmatrix}-\varepsilon_n\varepsilon_b\varepsilon_N\left(\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{d}{ds}\left(\frac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)\right)T+\frac{1}{\kappa}\frac{d}{ds}\left(\frac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)\frac{dT}{ds}\right)\\+\varepsilon_n\varepsilon_b\left(\frac{d}{ds}\left(\frac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)N+\left(\frac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)\frac{dN}{ds}\right)+\frac{dB_2}{ds}\end{bmatrix}\xi_1(\phi)$$

$$
=\begin{bmatrix} -\varepsilon_n\varepsilon_b\varepsilon_N\left(\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{\kappa}\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)\right)T+\varepsilon_N\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)N\right) \\ +\varepsilon_n\varepsilon_b\left(\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)N-\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa\left(\dfrac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)T+\varepsilon_n\left(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa\right)B_1\right) \\ -\varepsilon_b\left(\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa\right)B_1 \end{bmatrix}\xi_1(\phi)
$$

olur. Şimdi (5.19) eşitliğinin s'ye göre türevi alınarak

$$
\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{d}{ds}\left(\frac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)\right)=-\varepsilon_N\kappa\left(\frac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)
$$

olup Buradan, $\dfrac{dU}{ds}=0$ olduğu görülür. Bu ise U nun sabit olduğunu gösterir.

Teorem 5.3. $\alpha=\alpha(s)$, 4-boyutlu yarı-Öklid uzayında bir birim kuaterniyonik eğri olsun. $\kappa(s)\neq 0$, $\tau(s)\neq 0$ ve $[\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa](s)\neq 0$ olmak üzere, α nın bir B_2-slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$
\varepsilon_N\kappa f(s)=\frac{d}{ds}\left(\frac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right),\qquad \frac{d}{ds}f(s)=-\varepsilon_N\kappa\frac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau} \tag{5.20}
$$

olacak şekilde C^2-sınıfından bir f fonksiyonunun var olmasıdır.

İspat: (5.19) eşitliğinin s'ye göre türevi alınarak

$$
\left\{\begin{array}{c} \dfrac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right) \\ +\varepsilon_N\dfrac{1}{\kappa}\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)\dfrac{d}{ds}\left[\dfrac{1}{\kappa}\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)\right] \end{array}\right\}=0 \tag{5.21}
$$

olup buradan

$$
\varepsilon_N\frac{1}{\kappa}\frac{d}{ds}\left(\frac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)=-\frac{\left(\dfrac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)}{\dfrac{d}{ds}\left[\dfrac{1}{\kappa}\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)\right]}
$$

elde edilir. Burada

$$f(s)=-\frac{\left(\frac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)}{\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{\kappa}\frac{d}{ds}\left(\frac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)\right]}$$

olsun. Bu ifade son eşitlikte yerine yazılırsa

$$\varepsilon_N\kappa f(s)=\frac{d}{ds}\left(\frac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right) \tag{5.22}$$

olur. (5.21) eşitliğinden

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{\kappa}\frac{d}{ds}\left(\frac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)\right]=-\varepsilon_N\kappa\frac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau} \tag{5.23}$$

olur. (5.22) eşitliğinin s'ye göre türevi alınırsa

$$\frac{d}{ds}f(s)=\varepsilon_N\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{\kappa}\frac{d}{ds}\left(\frac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)\right]$$

bulunur. Bu ifade (5.23) ile karşılaştırılırsa

$$\frac{d}{ds}f(s)=-\varepsilon_N\kappa\frac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau} \tag{5.24}$$

olduğu görülür.

Tersine (5.20) koşulu sağlansın. O halde, (5.9), (5.17), (5.18) ve (5.22) ifadeleri (5.8) da yerlerine yazılırsa

$$U=\left[-\varepsilon_n\varepsilon_b f(s)T+\varepsilon_n\varepsilon_b\frac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}N+B_2\right]a_3$$

olur. Bu ifade B_2 ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned}h(B_2,U)&=h\left(B_2,\left[-\varepsilon_n\varepsilon_b f(s)T+\varepsilon_n\varepsilon_b\frac{\sigma-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}N+B_2\right]a_3\right)\\&=a_3h(B_2,B_2)\\&=\xi_1(\phi)\\&=sabit\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise α nın bir B_2-slant helis olduğunu gösterir.

Teorem 5.4. $\alpha = \alpha(s)$, 4-boyutlu yarı-Öklid uzayında bir birim kuaterniyonik eğri olsun. $\kappa(s) \neq 0$, $\tau(s) \neq 0$ ve $[\sigma - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa](s) \neq 0$ olmak üzere; α, bir B_2-slant helistir ancak ve ancak aşağıdaki koşulu sağlandığı takdirde

$$\frac{\sigma - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa}{\tau} = C_1\, \xi_1(\phi) + C_2\, \xi_2(\phi) \tag{5.25}$$

burada C_1 ve C_2 sabitlerdir.

İspat: α, bir B_2-slant helis olsun. C^2-sınıfından bir $\phi(s)$ fonksiyonu

$$\phi(s) = \int_0^s \varepsilon_N\, \kappa(s) ds \tag{5.26}$$

biçiminde tanımlansın. C^1-sınıfından $m(s)$ ve $n(s)$ fonksiyonları da

$$m(s) = \frac{\sigma - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa}{\tau}\, \xi_1(\phi) - f(s)\, \xi_2(\phi)$$

$$n(s) = \frac{\sigma - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa}{\tau}\, \xi_2(\phi) + f(s)\, \xi_1(\phi) \tag{5.27}$$

şeklinde tanımlansın. (5.27) ifadelerinin s'ye göre türevi alınarak ve (5.22), (5.24) ve (5.26) eşitlikleri kullanılarak

$$\frac{d}{ds} m(s) = \varepsilon_N \kappa f(s)\, \xi_1(\phi) + \frac{d}{ds} f(s)\, \xi_2(\phi) - \frac{d}{ds} f(s)\, \xi_2(\phi) - \varepsilon_N \kappa f(s)\, \xi_1(\phi) = 0$$

$$\frac{d}{ds} n(s) = \varepsilon_N \kappa f(s)\, \xi_2(\phi) - \frac{d}{ds} f(s)\, \xi_1(\phi) + \frac{d}{ds} f(s)\, \xi_1(\phi) - \varepsilon_N \kappa f(s)\, \xi_2(\phi) = 0$$

olur. Burada, $m(s) = C_1$ ve $n(s) = C_2$ olsun. Bu ifade (5.27) de yerine yazılırsa

$$C_1 = \frac{\sigma - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa}{\tau}\, \xi_1(\phi) - f(s)\, \xi_2(\phi)$$

$$C_2 = \frac{\sigma - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa}{\tau}\, \xi_2(\phi) + f(s)\, \xi_1(\phi) \tag{5.28}$$

bulunur. Bu son ifadenin her iki tarafı gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\left(\frac{\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)\left(\xi_1(\phi)\right)^2 - f(s)\,\xi_1(\phi)\,\xi_2(\phi) = C_1\,\xi_1(\phi)$$

$$\left(\frac{\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)\left(\xi_2(\phi)\right)^2 + f(s)\,\xi_1(\phi)\,\xi_2(\phi) = C_2\,\xi_2(\phi)$$

olur. Bu ifadeler taraf tarafa toplanırsa

$$\frac{\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau} = C_1\,\xi_1(\phi) + C_2\,\xi_2(\phi)$$

elde edilir.

Tersine (5.20) koşulu sağlanıyor ve (5.28) ifadesinin her iki tarafı düzenlenirse,

$$f(s)\left(\xi_2(\phi)\right)^2 - \left(\frac{\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)\xi_1(\phi)\,\xi_2(\phi) = -C_1\,\xi_2(\phi)$$

$$f(s)\left(\xi_1(\phi)\right)^2 + \left(\frac{\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}\right)\xi_1(\phi)\,\xi_2(\phi) = C_2\,\xi_1(\phi)$$

olur. Bu ifadeler taraf tarafa toplanırsa

$$f(s) = -C_1\,\xi_2(\phi) + C_2\,\xi_1(\phi) \tag{5.29}$$

olur. Son eşitliğin s'ye göre türevi alınarak

$$\frac{d}{ds}f(s) = -\varepsilon_N\kappa C_1\,\xi_1(\phi) - \varepsilon_N\kappa C_2\,\xi_2(\phi)$$

$$= -\varepsilon_N\kappa\left(C_1\,\xi_1(\phi) + C_2\,\xi_2(\phi)\right)$$

elde edilir. (5.25) ifadesi burada yarine yazılırsa

$$\frac{d}{ds}f(s) = -\varepsilon_N\kappa\frac{\sigma - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa}{\tau}$$

olur. (5.29) ifadesinin Teorem 5.3 teki koşulu sağladığına göre α bir B_2-slant helistir.

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada önce 4-boyutlu yarı-Öklid uzayındaki kuaterniyonik eğriler amaçlandı ve daha sonra bu kuaterniyonik eğriler için üçüncü bölümde tanımlanan Serret-Frenet formülleri yardımıyla 4-boyutlu yarı-Öklid uzayında bir kuaterniyonik Bertrand eğrisi, kuaterniyonik (N, B_2) Bertrand eğrisi ve kuaterniyonik B_2-slant helis tanımlanmıştır. 4-boyutlu yarı-Öklid uzayındaki kuaterniyonik eğrilerin Frenet formülleri kullanılarak tanımlanan kuaterniyonik Bertrand eğrisi, kuaterniyonik (N, B_2) Bertrand eğrisi ve kuaterniyonik B_2-slant helisin elde edilebilmesinin mümkün olduğu gösterilmiştir. 4-boyutlu yarı-Öklid uzayındaki kuaterniyonik eğrilerin Frenet formülleri için elde edilen teoremlerin matematiksel açıdan oldukça faydalı olacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Çöken, C. and Tuna, A., On the quaternionic inclined curves in the semi-Euclidean space E_2^4, Applied Mathematics and Computation, 155, 373-389, 2004.

[2] Ali, A. and Turgut, M., Some characterizations of special curves in Euclidean space E^4, Acta Universitatis Sapientiae, Mathematica, Vol. 2, No. 1, 111-122, 2010.

[3] Ekmekci, N. and Ilarslan, K., On Bertrand curves and their characterizations, Differential Geometry-Dynamical Systems, 3, 17-24, 2001.

[4] Matsuda, H. and Yorozu, S., Notes on Bertrand curves, Yokohama Math. J. 50, No. 1-2, 41-58, 2003.

[5] Yilmaz, S. and Turgut, M., On Frenet apparatus of partially null curves in semi-Euclidean space, Scientia Magna, Vol. 4, No. 2, 39-44, 2008.

[6] Kocayiğit, H. and Pekacar, B. B., Characterizations of N^3 slant helices according to quaternionic frame, Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 8, No. 2, 73-80, 2014.

[7] Çöken, C. and Tuna, A., E_2^4 yarı-Öklid uzayındaki kuaterniyonik eğriler için Serret-Frenet formülleri, Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 7-1, 92-99, 2003.

[8] Bharathi, K. and Nagaraj, M., Quaternion valued function of a real variable Serret-Frenet formulae, Indian J. Pure Appl. Math. 18(6): 507-511, 1987.

[9] Hacısalihoğlu, H. H., Yüksek boyutlu uzaylarda dönüşümler ve geometriler, İnönü Üniversitesi, Temel Bilimler Fakültesi Yayını, 1980.

[10] Izumiya, S. and Takeuchi, N., Generic properties of helices and Bertrand curves. Journal of Geometry, Vol. 74, 97-109, 2002.

[11] Hacısalihoğlu, H. H., Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, 1983.

[12] Millman, R. S. and Parker, G. D., Elements of differential geometry, Prentice-Hall, 265p. New Jersey, 1977.

[13] Hacısalihoğlu, H. H., Diferensiyel Geometri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, 2000.