KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

q-BASKAKOV OPERATÖRÜNÜN YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ

EMRE DENİZ

HAZİRAN 2011

Matematik Anabilim Dalı EMRE DENİZ tarafından hazırlanan q-BASKAKOV OPERATÖRÜNÜN YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ adlı Yükdek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr.Kerim KOCA

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Doç. Dr.Ali ARAL

Danışman

Juri Üyeleri

Başkan	: Prof. Dr. Kerim KOCA	__________________
Üye (Danışman)	: Doç. Dr. Ali ARAL	__________________
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK	__________________

…/…./2011

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini Onaylamıştır.

Prof. Dr. İhsan ULUER

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

q -BASKAKOV OPERATÖRÜNÜN YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ

DENİZ,Emre
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. Ali ARAL

Haziran 2011, 56 Sayfa

Bu tez, ikisi açıklama ikisi de temel bölüm olmak üzere toplam dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde tezin amacı ve kaynaklar hakkında genel bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde tezin konusunda kullanılacak bazı analiz kavramları açıklanmıştır.

Üçüncü bölümde klasik Baskakov operatörünün yakınsaklık özellikleri ele alınmıştır.

Dördüncü bölümde q -Baskakov operatörünün yakınsaklık özellikleri ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: Bölünmüş Fark, q -Bölünmüş Fark, İleri Fark, q -İleri Farklar, Süreklilik Modülü, P.P.Korovkin, q -Türev, Baskakov Operatörü, q - Baskakov Operatörü

ABSTRACT

THE CONVERGENCE PROPERTİES OF q-BASKAKOV OPERATORS

DENİZ,Emre
Kırıkkale Üniversity
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, M. Sc. Thesis
Supervisor:Assc.Prof. Ali ARAL
JUNE 2011, 56 pages

There are four chapters in this thesis, two of them are about explanations and two of them are about basic chapters.

Information about the purpose of the thesis and resources are given in the first chapter.

Some analysis concepts to be thesis are presented in the second chapter.

The convergence properties of classic Baskakov operators are given in third chapter.

The convergence properties of q-Baskakov operators are given in fourth chapter.

Key Words: Divided Differences, q- Divided Differences, Forward Differences, q-Forward Differences, Modulus of Continuity, P. P. Korovkin, q- Derivative, Baskakov Operators, q- Baskakov Operators

TEŞEKKÜR

Hayatımın başlangıcından itibaren olduğu gibi eğitim hayatım boyunca da maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme, yüksek lisans öğreniminde ve tezimin hazırlanması esnasında hiçbir yardımı ve ilgisini esirgemeyen, değerli danışman hocam, Sayın Doç. Dr. Ali ARAL' a ve kıymetli arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGİLER DİZİSİ

$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n]$	Bölünmüş Fark
$\Delta^k f(x_j)$	İleri Fark
$\omega(f: \delta)$	Süreklilik Modülü
$L_{\boldsymbol{n}}(f: x)$	Lineer Pozitif Operatörler
$[r]_q$	$\mathrm{q} -$ Tamsayısı
$[r]_q!$	$\mathrm{q} -$ Faktöriyel
$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q$	$\mathrm{q} -$ Binom Katsayısı
$d_q f(x)$	$\mathrm{q} -$ Diferansiyel
$D_q f(x)$	$\mathrm{q} -$ Türev
$\Delta_q^r f(x_j)$	Birinci $\mathrm{q} -$ İleri Fark
$\nabla_{\mathrm{q}}^{\mathrm{r}} f(x_j)$	İkinci $\mathrm{q} -$ İleri Fark
$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n]_q$	$\mathrm{q} -$ Bölünmüş Fark
$B_n(f; x)$	Baskakov Operatörü
$C[0, \infty)$	Süreklilik
$B_n^{(r)}(f; x)$	Baskakov Operatörünün r. Türevi
$B_{n,q}(f; x)$	$\mathrm{q} -$ Baskakov Operatörü
$D_q^r B_{n,q}(f; x)$	$\mathrm{q} -$ Baskakov Operatörü r. $\mathrm{q} -$ Türevi

1. GİRİŞ

1.1. Kaynak Özetleri

Yaklaşımlar teorisi, temel olarak verilen fonksiyona kendisinden çok daha basit ve kolay hesaplanabilen fonksiyona yaklaşmayı amaçlayan, Matematiksel Analiz' in temel konularından birisidir.

A. F. Timan'ın (A. F. Timan, 1963) hatırlattığı gibi reel değerli fonksiyonları ile yaklaşımlar teorisinin temeli 1885 yılında Weierstrass tarafından verilen bir teoreme dayanmaktadır. Bu teoreme göre " Solu $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı her sürekli fonksiyona, o fonksiyona düzgün yakınsayan bir polinom karşılık gelir."

1912 yılında S. N. Bernstein bu sonucu veren çok daha basit ispat yöntemleri kullanarak vermiştir.

Korovkin ise Lineer pozitif operatör dizilerinin, sürekli fonksiyona sonlu kapalı aralık üzerinde düzgün yakınsaklığını veren test fonksiyonlarının kümesinin varlığını göstermiştir. Bu sonuca göre test fonksiyonları $e_i(x) = x^i \quad i = 0,1,2$ fonksiyonlarından oluşur. Yani L_n lineer pozitif operatörler dizisinin sonlu $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonu düzgün yakınsak olması için gerek ve yeterli şart $L_n(t)$ operatör dizisinin f fonksiyonuna yalnızca $e_i(x) = x^i, i = 0,1,2$ fonksiyonları için düzgün yakınsamasıdır.

Günümüzde $q-$ analizi metodları kullanılarak operatör dizilerinin yakınsaklık şartlarını araştırmak, yaklaşımlar teorisinin önemli araştırma alanlarından birisi olmuştur. Araştırmalar göstermiştir ki $q-$sayıları kullanılarak oluşturulmuş operatör dizileri, klasik operatör dizilerine göre, yaklaşımların hızını bulma açısından daha etkilidir. Ayrıca klasik operatörler için elde edilemeyen bazı sonuçlar $q-$analiz yöntemleri ile elde edilebilmektedir. $q-$sayılar kullanılarak, 1987 yılanda Lupas ilk olarak Bernstein operatörlerinin $q-$ analoğunu tanımlamış ve bazı yaklaşım özelliklerini ispatlamıştır.

1997 yılında Phillips Bernstein operatörlerinin bir başka genelleştirmesini tanımlamış (G.M. Phillips, 1997) ve adına $q-$ Bernstein operatörleri demiştir. Bu operatörler ise birçok yazar tarafından çalışılmıştır. (V. Gupta, F. Altomare , Z. Xu, T. Ernst, …)

Biz bu tezde Aral A. and Gupta V. , 2011 makalesinde tanımlanan $\mathrm{q}-$Baskakov operatörlerini inceleyeceğiz. Bu operatörlerin bazı yaklaşım özelliklerini inceleyeceğiz ve monotonluk özelliklerini vereceğiz.

1.2. Çalışmanın Amacı

Bu tezde öncelikle G.M. Phillips, Bernstein polynomials based on the q-integers kitabından faydalanarak $\mathrm{q}-$sayılar ve özelliklerini vereceğiz ve buradaki bilgileri "Aral A. and Gupta V. , Generalized q- Baskakov operator" makalesinde tanıtılan ve incelenen $\mathrm{q}-$Baskakov operatörlerine uygulayacağız. Bu makale tezin temelini oluşturmaktadır. Klasik operatörlerin özellikleri "G.M. Phillips, Bernstein polynomials based on the q -integers " kaynağından öğrenilmiş ve bu teze aktarılmıştır

$\mathrm{q}-$Baskakov operatörlerinin yakınsaklık hızı klasik Baskakov operatörüne göre çok daha etkili ve hızlı olduğu gösterilmiştir. Daha sonra ağırlıklı uzay tanımı verilmiş ve ağırlıklı yaklaşım özelliklerinin bu operatör için de geçerli olduğu gösterilmiştir. Ayrıca q $-$Türev kavramı tanımlanmış ve operatöre uygulamaları tartışılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Tanım 2.1: (Bölünmüş Fark)

f, fonksiyonunun tanım kümesinde $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \dots\ ,\ x_n$ şeklinde $(n+1)$ tane nokta seçelim.

$$f[x_0] = f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1, x_2, \dots , x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots , x_n] - f[x_0, x_1, x_2, \dots , x_{n-1}]}{x_n - x_1} \quad , n \geq 1$$

biçiminde tanımlanmış eşitliğine f nin **bölünmüş farkları** denir.

Örnek 2.1:

Tanım 2.1. deki eşitliğin $n = 2$ için bölünmüş farkını bulalım.

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \\ &= \left[\frac{f(\,x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(\,x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right]\frac{1}{x_2 - x_0} \end{aligned}$$

dir.

Tanım 2.2: (İleri Fark)

$\Delta f(x_j) = f(x_{j+1}) - f(x_j)$ olmak üzere $k \geq 1$ için

$$\Delta^k f(x_j) = \Delta^{k-1} f(x_{j+1}) - \Delta^{k-1} f(x_j)$$

biçiminde tanımlanan eşitliğe **ileri fark** denir.

Aşağıdaki teoremde bölünmüş fark ile ileri fark operatörlerinin arasındaki bağıntıyı görelim..

Teorem 2.1:

∀ j,k ≥0 için $x_j = j$ olmak üzere

$$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, \dots , x_{j+k}] = \frac{1}{k!}\Delta^k f(x_j)$$

dir.

İspat :

Bu Teoremin ispatını tümevarım yöntemi ile yapalım.

$k = 0$ için

$$f[x_j] = f(x_j) = \frac{1}{0!}\Delta^0 f(x_j)$$

doğruluğu açıktır. Eşitliğin k için doğru olduğunu kabul edip $k + 1$ için doğruluğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, \dots , x_{j+k+1}] &= \frac{f[x_{j+1}, x_{j+1}, x_{j+2}, \dots , x_{j+k+1}] - f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, \dots , x_{j+k}]}{x_{j+k+1} - x_j} \\ &= \frac{1}{k+1}\left[\frac{\Delta^k f(x_{j+1})}{k!} - \frac{\Delta^k f(x_j)}{k!}\right] \\ &= \frac{\Delta^{k+1} f(x_j)}{(k+1)!} \quad . \end{aligned}$$

Bu da $k + 1$ için doğru olduğunu gösterir.

Tanım 2.3: (Konveks Fonksiyon)

$\forall x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ ve $\lambda_n \in \mathbb{R}$ için $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$ olmak üzere

$$\sum_{r=0}^{n} \lambda_r f(x_r) \geq f\left(\sum_{r=0}^{n} \lambda_r x_r\right)$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonuna **konveks fonksiyon** denir.

Teorem 2.2:

f fonksiyonu $[a,b]$ de konvekstir $\Leftrightarrow$ ikinci mertebeden bölünmüş farkları pozitif olmasıdır.

İspat:

$a \leq x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq b$ için $f[x_0, x_1, x_2]$ farkını düşünelim.

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \geq 0$$

olması için $f[x_1, x_2] \geq f[x_0, x_1]$ olmalıdır.

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_0)\,\{f(x_2) - f(x_1)\} \geq (x_2 - x_1)\{f(x_1) - f(x_0)\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0}\, f(x_2) + \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_0}\, f(x_0) \geq f(x_1)$$

$\lambda = \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0} \in [0,1]$ denilirse $1 - \lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_0}$ olur.

$$\Leftrightarrow \lambda f(x_2) + (1-\lambda) f(x_0) \geq f(x_1)$$

$\lambda = \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0}$ dan $x_1 = \lambda x_2 + (1-\lambda)x_0$ olur.

$$\Leftrightarrow \lambda f(x_2) + (1-\lambda) f(x_0) \geq f(\lambda x_2 + (1-\lambda)x_0)$$

dir. Bu da ispatı tamamlar.

Tanım 2.4: (Newton İnterpolasyon Polinomu)

Verilen f fonksiyonu için $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, $y_n = f(x_n)$ biçiminde n tane nokta için

$$P_j = y_j \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

olmak üzere

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n} P_j\,(x)$$

biçiminde tanımlanan polinoma **Newton İnterpolasyon Polinomu** denir.

Şimdi İnterpolasyon polinomu ile o polinomu oluşturan f fonksiyonu arasındaki hatayı (farkı) veren teoremi ifade ve ispat edelim.

Teorem 2.3:

$x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ ve bu aralık üzerinde f ve f nin n. türevi sürekli, $(n+1)$. türev (a, b) de mevcutsa

$$f(x) - p_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}, \qquad a \le \xi_x \le b$$

olacak şekilde ξ_x vardır.

İspat :

Bu ispatı Rolle Teoremini kullanarak ispatlayalım.

Rolle Teoremine göre fonksiyonun iki sıfır yeri arasındaki türevin sıfır olduğu en az bir nokta vardır.

$$G(x) = f(x) - p_n(x) - \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(\alpha-x_0)(\alpha-x_1)\dots(\alpha-x_n)}\big(f(\alpha) - p_n(\alpha)\big) \qquad (2.1)$$

$\alpha \in [a,b]$ eşitliği ile verilen G fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyonun $n+2$ tane sıfır yeri vardır ve bu noktalar $\alpha, x_0, x_1, \dots, x_n$ dir.
G fonksiyonuna Rolle Teoremi uygulanırsa G' nin en az $n+1$ tane sıfır yeri vardır. Bu şekilde Rolle Teoremi uygulamaya devam edilirse;
G'' en az n tane sıfır yeri vardır, … , $G^{(n+1)}$nin en az bir tane sıfır yeri vardır ve biz bu noktayı $x = \xi_x$ ile gösterelim. Böylece (2.1) eşitliğinin $(n+1)$ kez türevini alırsak

$$0 = f^{(n+1)}(x) - 0 - \frac{(n+1)!\big(f(\alpha) - p_n(\alpha)\big)}{(\alpha-x_0)(\alpha-x_1)\dots(\alpha-x_n)}$$

eşitliğini elde edilir.
Bu son eşitlikte α keyfiydi $\alpha = x$ alınırsa

$$f(x) - p_n(\alpha) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

eşitliğini elde ederiz.
Şimdi interpolasyon polinomu için alternatif bir hata verelim. Bu hata miktarında $f^{(n+1)}$ yerine f nin bölünmüş farklarını kullanırız. Tanım 2.1 kullanarak $f[x, x_0, x_1, x_2, \dots, x_n]$ bölünmüş farkları için bir formül elde edelim.

$$f[x, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$$
$$= f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] + (x - x_n) f[x, x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] \qquad (2.2)$$

bu formülde $f[x] = f[x_0] + (x - x_0) f[x, x_0]$ tekrar (2.2) formülünde $n = 1$ için kullanırsak

$$f[x] = f[x_0] + (x - x_0)f[x, x_0]$$
$$= f[x_0] + (x - x_0)f[x, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)f[x, x_0, x_1]$$

formülü elde edilir. Yukarıdaki formülü

$$f[x] = p_1(x) + (x - x_0)(x - x_1)f[x, x_0, x_1]$$

biçiminde yazarız.

(2.2) formülünde $n = 2,3, \dots$ için devam edilirse

$$f[x] = p_n(x) + (x - x_0) \dots (x - x_n)f[x, x_0, \dots, x_n]$$

formülü elde edilir. Bu formül Teorem 2.2 deki formülle karşılaştırılırsa

$$f[x, x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \quad , \xi_x \in [a, b]$$

elde edilir. n yerine $n - 1$, x_n yerine x alınırsa

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi_x)}{n!}$$

elde edilir. Bu şekilde bölünmüş farklar türev yardımıyla bulunmuş olur.

Tanım 2.5: (Süreklilik Modülü)

$x, y \in [a, b]$ olmak üzere $|x - y| \leq \delta$ şartını sağlayan $\delta > 0$ için $|f(x) - f(y)|$ nin en küçük üst sınırına f nin **Süreklilik Modülü** denir.

$$\omega(f: \delta) = \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|$$

veya

$$\omega(f:\delta) = \sup_{|h|\leq\delta}|f(x+h) - f(x)|$$

sembolleri ile gösterilir.

Süreklilik Modülünün bazı özellikleri;

1) ω fonksiyonu monoton artandır. Yani;

$$\delta_1 \leq \delta_2 \Rightarrow \omega(f:\delta_1) \leq \omega(f:\delta_2)$$

2) $m \in \mathbb{N}$ ise $\omega(f:m\delta) \leq m\omega(f;\delta)$

$$\begin{aligned}
\omega(f:m\delta) &= \sup_{|h|\leq m\delta}|f(x+h) - f(x)| \\
&= \sup_{|mh|\leq m\delta}|f(x+mh) - f(x)| \\
&= \sup_{|h|\leq\delta}\left|\sum_{k=1}^{m}[f(x+kh) - f(x+(k-1)h)]\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{m}\sup_{|h|\leq\delta}|f(x+kh) - f(x+(k-1)h)| \\
&= m\omega(f:\delta)
\end{aligned}$$

3) $\lambda > 0$ için $\omega(f:\lambda\delta) \leq (1+\lambda)\omega(f:\delta)$ dir.

$$\begin{aligned}
\omega(f:\lambda\delta) &\leq \omega(f:([\![\lambda]\!]+1)\delta) \\
&\leq (1+[\![\lambda]\!])\omega(f:\delta) \\
&\leq (1+\lambda)\omega(f:\delta)
\end{aligned}$$

4) f, $[a,b]$ de sürekli ise,

$$|f(t) - f(x)| \leq \omega(f:|t-x|)$$

dir.

$$\omega(f:|t-x|) = \sup_{|t-x|\leq|t-x|} |f(t)-f(x)|$$
$$= \sup_{t,x\in [a,b]} |f(t)-f(x)|$$
$$\geq |f(t)-f(x)|$$

5) $|f(x)-f(y)| < \left(1+\frac{|x-y|}{\delta}\right)\omega(f:\delta)$ dır.

$$|f(x)-f(y)| \leq \omega(f:|x-y|)$$
$$\leq \omega(f:\frac{\delta|x-y|}{\delta})$$
$$\leq \left(1+\frac{|x-y|}{\delta}\right)\omega(f:\delta)$$

Tanım 2.6: (Star-shape)

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ olsun. $f(0)=0\,, f(x)\geq 0$ olmak üzere $x\in[0,1]$ için $xf'(x)-f(x)\geq 0$ veya $\lambda\in(0,1)$ için $f(\lambda x)\leq \lambda f(x)$ şartlarını sağlanırsa f'e star shape denir.

Teorem 2.4: (P. P. Korovkin)

$\{L_{\boldsymbol{n}}(f:x)\}$ lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. $\alpha_n(x), \beta_n(x) ve\ \gamma_n(x)$, $[a,b]$ de düzgün olarak sıfıra yakınsayan diziler olmak üzere $\forall\ x\in[a,b]$ için;

$$L_{\boldsymbol{n}}(1:x) = 1+\alpha_n(x)$$
$$L_{\boldsymbol{n}}(t:x) = x+\beta_n(x)$$
$$L_{\boldsymbol{n}}(t^2:x) = x^2+\gamma_n(x)$$

koşulları sağlayan $L_{\boldsymbol{n}}(f:x)$ $f(x)$ e düzgün yakınsar. Burada f, $[a,b]$ de sürekli a da soldan b de sağdan sürekli ve reel eksenin tamamında sınırlı bir fonksiyondur.

Tanım 2.7: (q-tamsayılar)

$q > 0, r \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$[r]_q = \begin{cases} \dfrac{1-q^r}{1-q} & ,q \neq 1 \\ r & ,q = 1 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $[r]_q$ sayısına ***q*-tamsayısı** denir.

Tanım 2.8: (q-faktöriyel)

$q > 0$ şeklinde verilsin. $r \in \mathbb{N}$ için

$$[r]_q! = \begin{cases} [r]_q [r-1]_q \dots [1]_q & ,r \geq 1 \\ 1 & ,r = 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $[r]_q!$ eşitliğe ***q*- faktöriyel** denir.

Tanım 2.9: (q-binom katsayıları)

Tüm n ve r doğal sayıları için

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[n-r]_q!\,[r]_q!}$$

biçiminde tanımlanan $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q$ eşitliğe ***q*-binom katsayıları** denir. Burada $r > n$ için $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q = 0$ dır.

Örnek 2.2:

$$(-x,q)_n = \prod_{s=1}^{n} (1 + q^{s-1}x) = \sum_{s=0}^{n} q^{\frac{s(s-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ s \end{bmatrix}_q x^s \qquad (2.3)$$

eşitliğinin doğruluğunu bulalım.

$$G_n(x) = (1+x)(1+qx)\dots(1+q^{n-1}x) = \sum_{r=0}^{n} C_r x^r$$

dir.

$$(1+q^n x)G_n(x) = (1+x)G_n(qx)$$
$$(1+q^n x)\sum_{r=0}^{n} C_r x^r = (1+x)\sum_{r=0}^{n} C_r (qx)^r$$

dır. x^s lerin katsayılarını eşitlenirse

$$C_s + q^n C_{s-1} = q^s C_s + q^{s-1} C_{s-1}$$
$$C_s = \frac{1-q^{n-s+1}}{1-q^s} q^{s-1} C_{s-1}$$
$$= \frac{[n-s+1]_q}{[s]_q} q^{s-1} C_{s-1}$$

$s = 1$ için $C_1 = [n]_q C_0$

$s = 2$ için $C_2 = \frac{[n-1]_q}{[2]_q} q C_1 = \frac{[n]_q [n-1]_q}{[2]_q [1]_q} q$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

s için $C_s = q^{\frac{s(s+1)}{2}} \frac{[n]_q [n-1]_q \dots [1]_q}{[1]_q [2]_q \dots [s]_q} = q^{\frac{s(s+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ s \end{bmatrix}_q$ olur. Bu da (2.3) eşitliğinin doğruluğunu göstermiş olur.

Örnek 2.3:

$$(-x,q)_n^{-1} = \prod_{s=1}^{n}(1+q^{s-1}x)^{-1} = \sum_{s=0}^{\infty}\begin{bmatrix} n+s-1 \\ s \end{bmatrix}_q (-1)^s x^s \qquad (2.4)$$

eşitliğinin doğruluğunu bulalım.

$$H_n(x) = (1+x)^{-1}(1+qx)^{-1} \ldots (1+q^{n-1}x) = \sum_{s=0}^{\infty} d_s x^s$$

dir.

$$(1+x)H_n(x) = (1+q^n x)H_n(qx)$$
$$(1+x)\sum_{s=0}^{\infty} d_s x^s = (1+q^n x)\sum_{s=0}^{\infty} d_s (qx)^s$$

Bu eşitlikte x^s nin katsayılarını bulalım.

$$d_s + d_{s-1} = q^s d_s + q^{n+s-1} d_{s-1}$$
$$d_s = -\frac{(1-q^{n+s-1})}{1-q^s} d_{s-1}$$
$$= -\frac{[n+s-1]_q}{[s]_q} d_{s-1}$$

$s = 1$ için $d_1 = -\frac{[n]_q}{[1]_q} d_0$

$s = 2$ için $d_2 = -\frac{[n+1]_q}{[2]_q} d_1 = -\frac{[n+1]_q [n]_q}{[2]_q [1]_q}$

. . . .

. . . .

. . . .

s için $d_s = (-1)^s \frac{[n+s-1]_q \ldots [n]_q}{[s]_q [s-1]_q \ldots [1]_q} = (-1)^s \begin{bmatrix} n+s-1 \\ s \end{bmatrix}_q$ olur. Bu da (2.4) eşitliğinin doğruluğunu göstermiş olur.

Örnek 2.4:

$$\begin{bmatrix} n+k \\ k+1 \end{bmatrix}_q [k+1]_q = [n]_q \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q$$

ve

$$\begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q [n+k]_q = [n]_q \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q$$

eşitliklerinin doğruluğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n+k \\ k+1 \end{bmatrix}_q [k+1]_q &= \frac{[n+k]_q!}{[n-1]_q!\,[k+1]_q!}[k+1]_q \\ &= \frac{[n+k]_q!}{[n-1]_q!\,[k+1]_q!}[k+1]_q \frac{[n]_q}{[n]_q} \\ &= [n]_q \frac{[n+k]_q!}{[n]_q!\,[k]_q!} \\ &= [n]_q \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q [n+k]_q &= \frac{[n+k-1]_q!}{[n-1]_q!\,[k]_q!}[n+k]_q \\ &= \frac{[n+k-1]_q!}{[n-1]_q!\,[k]_q!}[n+k]_q \frac{[n]_q}{[n]_q} \\ &= [n]_q \frac{[n+k]_q!}{[n]_q!\,[k]_q!} \\ &= [n]_q \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \end{aligned}$$

dir.

Tanım 2.10: (q-diferensiyel)

Anlamlı olacak şekilde keyfi bir $f(x)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $f(x)$ in ***q*-diferensiyeli**

$$d_q f(x) = f(qx) - f(x)$$

olarak tanımlanmaktadır. Örneğin x in q-diferensiyeli

$$d_q f(x) = d_q x = qx - x = (q-1)x$$

dir.

Tanım 2.11: (q-türev)

$$D_q f(x) = \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x}$$

biçiminde tanımlanan eşitliğine $f(x)$ fonksiyonunun ***q*-türevi** denir.

$f(x)$ fonksiyonu türevlenebilir bir fonksiyon ise

$$\lim_{q \to 1} D_q f(x) = \lim_{q \to 1} \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x} = f'(x)$$

olur.

Buradaki $D_q f(x)$ operatörü lineer bir operatördür. Yani a, b sabitler olmak üzere f ve g fonksiyonları

$$D_q[af(x) + bg(x)] = aD_q f(x) + bD_q g(x)$$

dir. Gerçekten;

$$
\begin{aligned}
D_q[af(x)+bg(x)] &= \frac{d_q[af(x)+bg(x)]}{d_q x} \\
&= \frac{af(qx)+bg(qx)-\{af(x)+bg(x)\}}{(q-1)x} \\
&= aD_q f(x) + bD_q g(x)
\end{aligned}
$$

dir.

Bu da lineer operatör olduğunu gösterir.

Örnek 2.5:

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f(x) = x^n$ fonksiyonuna q-türevini bulalım.

$$D_q f(x) = D_q x^n = \frac{(qx)^n - x^n}{(q-1)x} = \frac{q^n - 1}{q-1} x^{n-1} = [n]_q x^{n-1}$$

dir.

$$D_q\{f(x)g(x)\} = f(qx)D_q g(x) + g(x)D_q f(x) \tag{2.5}$$

$$D_q\{g(x)f(x)\} = g(qx)D_q f(x) + f(x)D_q g(x) \tag{2.6}$$

(2.5) ve (2.6) eşitliklerine çarpımın q-türevleri denir.

$$g(x)\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)$$

eşitliğine (2.5) deki çarpımın q-türevini uygulanırsa

$$\Rightarrow g(qx)D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) + \frac{f(x)}{g(x)}D_q g(x) = D_q f(x)$$

$$\Rightarrow D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)D_q f(x) - f(x)D_q g(x)}{g(x)g(qx)} \tag{2.7}$$

elde edilir.

Şimdi de (2.6) daki çarpımın q-türevini uygulayalım.

$$\Rightarrow g(x)D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)+\frac{f(qx)}{g(qx)}D_q g(x)=D_q f(x)$$

$$\Rightarrow D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(qx)D_q f(x)-f(qx)D_q g(x)}{g(x)g(qx)} \tag{2.8}$$

elde edilir.

(2.7) ve (2.8) eşitliklerine bölümün q-türevleri denir.

Örnek 2.6:

$$D_q(-x,q)_n=[n]_q(-qx,q)_{n-1} \tag{2.9}$$

eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} D_q(-x,q)_n &= \frac{1}{(q-1)x}\left\{\prod_{j=0}^{n-1}(1+q^{j+1}x)-\prod_{j=0}^{n-1}(1+q^j x)\right\} \\ &= \frac{1}{(q-1)x}\prod_{j=0}^{n-2}\left(1+q^{j+1}x\right)\{1+q^n x-(1+x)\} \\ &= \frac{q^n-1}{q-1}\prod_{j=0}^{n-2}\left(1+q^{j+1}x\right) \\ &= [n]_q(-qx,q)_{n-1} \end{aligned}$$

elde ederiz.

Örnek 2.7:

$n,k\in\mathbb{N}$ için

$$D_q[x^k(-x,q)_{n+k}^{-1}]=[k]_q x^{k-1}(-x,q)_{n+k}^{-1}-(qx)^k[n+k]_q(-x,q)_{n+k+1}^{-1} \tag{2.10}$$

eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim.

(2.7) deki bölümün q-türev formülünden

$$
\begin{aligned}
D_q(-x,q)_{n+k}^{-1} &= \frac{-D_q(-x,q)_{n+k}}{(-x,q)_{n+k}(-qx,q)_{n+k}} \\
&= \frac{-[n+k]_q(-qx,q)_{n+k-1}}{(-x,q)_{n+k}(-qx,q)_{n+k}} \\
&= -[n+k]_q(-x,q)_{n+k+1}^{-1} \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

dir.

$$D_q x^k = [k]_q x^{k-1} \qquad (2.12)$$

eşitliğinin doğru olduğunu biliyoruz. O halde (2.11) ve (2.12) eşitliklerini kullanarak çarpımın türevinden (2.10) eşitliğin doğru olduğu açıkça görülmektedir.

Tanım 2.12: (Birinci q-İleri Fark)

f nin birinci q-ileri farkı

$$
\begin{aligned}
&\Delta_q^0 f(x_j) = f(x_j) \\
&\Delta_q^r f(x_j) = \Delta_q^{r-1} f(x_{j+1}) - q^{r-1}\Delta_q^{r-1} f(x_j) \quad r \geq 1
\end{aligned}
$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.13: (İkinci q-İleri Fark)

f nin ikinci q-ileri farkı

$$
\begin{aligned}
&\nabla_q^0 f(x_j) \coloneqq f(x_j) \\
&\nabla_q^r f(x_j) \coloneqq q^{r-1}\nabla_q^{r-1} f(x_{j+1}) - \nabla_q^{r-1} f(x_j) \quad r \geq 1
\end{aligned}
$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.14: (q-Bölünmüş Fark)

$f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesinde $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ şeklinde $(n+1)$ tane nokta seçelim.

$$f[x_0]_q = f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n]_q = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n]_q - f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]_q}{x_n - x_1} \quad , n \geq 1$$

biçiminde tanımlanan eşitlikleri f nin **q-bölünmüş fark** denir.

Şimdi q-bölünmüş fark ile ikinci q-ileri fark arasındaki bağıntıyı veren aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.5:

Tüm $j, r \geq 0$ için

$$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_{j+r}]_q = q^{\frac{r(2j+r-1)}{2}} \frac{\nabla_{\mathrm{q}}^{\mathrm{r}} f(x_j)}{[r]_q!} [n]_q^r \qquad (2.13)$$

elde ederiz. Burada $x_j = \frac{[j]_q}{q^{j-1}[n]_q}$ biçimindedir.

İspat:

Tanım 2.13 den $r = 0$ için sonuç açıktır. Şimdi (2.13) eşitliğinde tüm $j \geq 0$ ve bazı $r \geq 0$ için doğru olduğunu kabul edelim.

$$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_{j+r+1}]_q = \frac{f[x_{j+1}, \dots, x_{j+r+1}]_q - f[x_j, \dots, x_{j+r}]_q}{x_{j+r+1} - x_j}$$

dir. Burada $x_{j+r+1} - x_j = \frac{[r+1]_q}{q^{j+r}[n]_q}$ dir.

$$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_{j+r+1}]_q = \frac{f[x_{j+1}, \dots, x_{j+r+1}]_q - f[x_j, \dots, x_{j+r}]_q}{\frac{[r+1]_q}{q^{j+r}[n]_q}}$$

$$= \frac{q^{j+r}[n]_q^{r+1}}{[r+1]_q!}\left\{q^{\frac{r(2j+r+1)}{2}}\nabla_q^r f(x_{j+1}) - q^{\frac{r(2j+r-1)}{2}}\nabla_q^r f(x_j)\right\}$$

$$= \frac{q^{j+r}[n]_q^{r+1}}{[r+1]_q!} q^{\frac{r(2j+r-1)}{2}}\{q^r\nabla_q^r f(x_{j+1}) - \nabla_q^r f(x_j)\}$$

$$= \frac{[n]_q^{r+1} q^{\frac{r(2j+r-1)}{2}+j+r}}{[r+1]_q!} q^{\frac{r(2j+r-1)}{2}}\nabla_q^{r+1} f(x_j)$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.6:

f fonksiyonu star-shapeddir $\Leftrightarrow$ Her bir $q \in (0,1)$ ve $x \in (0, a]$ için $xD_q f(x) \geq f(x)$ dir.

İspat:

f fonksiyonu star-shaped olsun. Bu durumda

$$D_q f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x} \geq \frac{f(x)\{q-1\}}{(q-1)x}$$

$$D_q f(x) \geq \frac{f(x)}{x}$$

$$xD_q f(x) \geq f(x)$$

dir. Terside doğrudur.

Tanım 2.15: (q-Taylor Formülü)

$f(x)$ fonksiyonu (a,b) aralığında sürekli fonksiyon ve $c \in [a,b]$ için q -Taylor formülü aşağıdaki gibidir.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_q^k f(c)}{[k]_q!} (z-c)_q^k \qquad , z \in (a,b)$$

Burada

$$(z-c)_q^0 = 1 \quad , (z-c)_q^k = \prod_{s=0}^{k-1} (z - cq^s) \quad (k \in \mathbb{N})$$

dır.

Teorem 2.7: (Hölder Eşitsizliği)

$p > 0 , \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $x = (\xi_i) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots),\ y = (\eta_k) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots)$ dizileri olsun. $\xi_i, \eta_k \in \ell_p$ ise $\xi_i \eta_k \in \ell_1$ ve

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j \eta_j| \leq \left(\sum_{m=1}^{\infty} |\xi_m|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

dır.

Teorem 2.8: (Minkowsky Eşitsizliği)

$x = (\xi_i) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots),\ y = (\eta_k) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots)$ dizileri olsun. Eğer $p \geq 1$, $\xi_i, \eta_k \in \ell_p$ ise $\xi_i + \eta_k \in \ell_p$ dir ve

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j+\eta_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{m=1}^{\infty}|\xi_m|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

dır.

3. BASKAKOV OPERATÖRÜNÜN YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ

Tanım 3.1: (Baskakov Operatörü)

$f \in C[0,\infty)$ ve her bir $n > 0$ tamsayıları için Baskakov operatörü

$$B_n(f;x) = \frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right) \qquad (3.1)$$

biçiminde tanımlanır.

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}$$

olduğundan

$$B_n(1;x) = \frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty} 1\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k} = 1$$

$$B_n(t;x) = \frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}$$

$$= \frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{n}\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}\frac{x^k}{(1+x)^k}$$

$$= \frac{x}{(1+x)}\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!}\frac{x^{k-1}}{(1+x)^{k-1}}$$

$$= \frac{x}{(1+x)}\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k)!}{n!\,k!}\frac{x^k}{(1+x)^k}$$

$$= \frac{x}{(1+x)}\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}$$

$$= \frac{x}{(1+x)}\frac{1}{(1+x)^n}(1+x)^{n+1} = x \;\; (\alpha_n(x) = 0)$$

dir.

$$B_n(t^2;x) = \frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{n^2}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}$$

$$= \frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k(k-1)}{n^2}\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}\frac{x^k}{(1+x)^k}$$

$$+\frac{1}{n}\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n}\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}\frac{x^k}{(1+x)^k}$$

$$= \frac{x^2}{(1+x)^2}\frac{1}{n}\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-2)!}\frac{x^{k-2}}{(1+x)^{k-2}}+\frac{1}{n}B_n(t;x)$$

$$= \frac{x^2}{(1+x)^2}\frac{1}{n}\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k+1)!}{n!\,k!}\frac{x^k}{(1+x)^k}+\frac{x}{n}$$

$$= \frac{x^2}{(1+x)^2}\frac{n+1}{n}\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k+1)!}{(n+1)!\,k!}\frac{x^k}{(1+x)^k}+\frac{x}{n}$$

$$= \frac{x^2}{(1+x)^2}\frac{n+1}{n}\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k+1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}+\frac{x}{n}$$

$$= \frac{x^2}{(1+x)^2}\frac{n+1}{n}\frac{1}{(1+x)^n}(1+x)^{n+2}+\frac{x}{n}$$

$$= x^2+\frac{x(1+x)}{n} \quad \left(\beta_n(x)=\frac{x(1+x)}{n}\right)$$

dir.

Not :

Korovkin Teoremi uygulandığında da Baskakov operatörünün sonlu aralıkta kendisini oluşturan f fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğu kolayca görülür.

Teorem 3.1:

Baskakov operatörünün r. türevi

$$B_n^{(r)}(f;x) = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+r+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+r+k}}\Delta^r f\left(\frac{k}{n}\right) \qquad (3.2)$$

$$= \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{\infty} P_{n+r,k}(x)\,\Delta^r f\left(\frac{k}{n}\right)$$

biçiminde gösterimine sahiptir.

İspat :

Öncelikle ispatta kullanacağımız iki eşitliğin doğruluğunu gösterelim.

$$\binom{n+k}{k+1}(k+1) = \frac{(n+k)!}{(n-1)!\,(k+1)!}(k+1)$$

$$= \frac{n}{n}\frac{(n+k)!}{(n-1)!\,k!}$$

$$= n\frac{(n+k)!}{n!\,k!} = n\binom{n+k}{k}$$

$$\binom{n+k-1}{k}(n+k) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}(n+k)$$

$$= \frac{n}{n}\frac{(n+k)!}{(n-1)!\,k!} = n\binom{n+k}{k}$$

(3.1) eşitliğindeki Baskakov operatörünün 1. türevi

$$B_n^{'}(f;x) = \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n+k-1}{k}\frac{k.\,x^{k-1}}{(1+x)^{k+n}} - \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n+k-1}{k}\frac{(n+k)x^k}{(1+x)^{k+n+1}}$$

biçimindedir.

Sağdaki toplam serisinde $k \to k+1$ yazıp, ispatın başındaki verdiğimiz eşitlikleri kullanarak ortak parantezde yazalım.

$$B_n'(f;x) = n\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k+1}}\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f(\frac{k}{n})\right]$$
$$= n\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k+1}}\Delta' f\left(\frac{k}{n}\right)$$

olduğundan $r=1$ için doğrudur. (3.2) formülünün doğru olduğunu kabul edelim. $(r+1)$ için (3.2) formülünün doğru olduğunu gösterelim.
(3.2) eşitliğinin tekrar türevini alırsak

$$B_n^{(r+1)}(f;x) = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{n+r+k-1}{k}\frac{kx^{k-1}}{(1+x)^{n+r+k}}\Delta^r f\left(\frac{k}{n}\right)$$
$$-\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+r+k-1}{k}\frac{(n+r+k)x^k}{(1+x)^{n+r+k+1}}\Delta^r f\left(\frac{k}{n}\right)$$

elde edilir.
Birinci toplamda $k \to k+1$ yazılırsa

$$B_n^{(r+1)}(f;x) = \frac{(n+r-1)!\,(n+r)}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+r+k}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+r+k+1}}$$
$$\times\left[\Delta^r f\left(\frac{k+1}{n}\right)-\Delta^r f\left(\frac{k}{n}\right)\right]$$
$$=\frac{(n+r)!}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+r+k}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+r+k+1}}\Delta^{r+1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

bulunur.
Bu da (3.2) formülünün $(r+1)$ içinde doğru olduğunu gösterir. Tüme varım prensibi gereğiyle (3.2) formülü doğrudur.

Sonuç 3.1:

Baskakov operatörünün ileri fark operatörü yardımıyla gösterimi

$$B_n(f;x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!}\Delta^r f(0)\frac{x^r}{r!}$$

biçimindedir.

İspat :

f fonksiyonunun Maclaurin seri açılımı

$$f(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{f^{(r)}(0)}{r!}x^r$$

dır.

Baskakov operatörünün Maclaurin seri açılımını yazarsak

$$\begin{aligned}
B_n(f;x)&=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{B_n^r(f;x)|_{x=0}}{r!}x^r\\
&=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!}\frac{P_{n+r,0}(0)\Delta^r f(0)}{r!}x^r\\
&=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{n+r-1}{0}\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!}\Delta^r f(0)\frac{x^r}{r!}\\
&=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!}\Delta^r f(0)\frac{x^r}{r!}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 3.2:

Baskakov operatörünün bölünmüş fark yardımıyla gösterimi

$$B_n(f;x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!} . \frac{f\left[0,\frac{1}{n},\dots,\frac{r}{n}\right] x^r}{n^r}$$

biçimindedir.

İspat :

f fonksiyonunun bölünmüş fark ile ileri farkı arasında

$$f\left[0,\frac{1}{n},\dots,\frac{r}{n}\right] = \frac{n^r}{r!}\Delta^r f(0) \tag{3.3}$$

eşitliğinin olduğunu biliyoruz. Sonuç 3.1 de ileri fark ile gösterimde ileri fark operatörünün yerine (3.3) eşitliğini kullanılırsa

$$\begin{aligned} B_n(f;x) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!} \frac{r!\, f\left[0,\frac{1}{n},\dots,\frac{r}{n}\right]}{n^r} \frac{x^r}{r!} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!} \frac{f\left[0,\frac{1}{n},\dots,\frac{r}{n}\right]}{n^r} x^r \end{aligned}$$

ispat tamamlanmış olur.

Lemma 3.1:

Basakakov operatörü için

$$B_n(1;x) = 1 \quad , B_n(t;x) = x \quad , B_n(t^2;x) = x^2 + \frac{x(1+x)}{n}$$

eşitlikleri doğrudur.

İspat:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_r] = \frac{f^{(r)}(\xi)}{r!} \qquad , x_0 < \xi < x_r \quad .$$

Ayrıca

$$\frac{n^r}{r!}\Delta^r f(x_0) = f[x_0, x_1, \dots, x_r] = \frac{f^{(r)}(\xi)}{r!}$$

olduğunu biliyoruz.

Yukarıdaki eşitlikten görülür ki x^r fonksiyonunun r den büyük sayılar için ileri fark sıfırdır.

Dolayısıyla Sonuç 3.1 den

$$B_n(1; x) = \Delta^0 f(0) = 1$$

elde edilir.

$f(t) = t$ seçelim.

$$\begin{aligned} B_n(t; x) &= \Delta^0 f(0) + n\Delta' f(0).x \\ &= 0 + n.f\left(\frac{1}{n}\right).x = x \end{aligned}$$

$f(t) = \ t^2$seçelim.

$$B_n(t^2; x) = \Delta^0 f(0) + n\Delta' f(0).x + n.(n+1).\Delta^2 f(0)\frac{x^2}{2}$$

$$\Delta^0 f(0) = f(0) = 0$$

$$\Delta' f(0) = \ f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0) = \frac{1}{n^2}$$

$$\Delta^2 f(0) = \Delta' f\left(\frac{1}{n}\right) - \Delta' f(0)$$
$$= f\left(\frac{2}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) + f(0)$$
$$= \frac{2}{n^2}$$

$$B_n(t^2; x) = \Delta^0 f(0) + n\Delta' f(0).x + n.(n+1).\Delta^2 f(0)\frac{x^2}{2}$$
$$= 0 + n.\frac{1}{n^2}.x + \frac{2}{n^2}.\frac{x^2}{2}.n.(n+1)$$
$$= x^2 + \frac{x(1+x)}{n}$$

elde edilir.

Teorem 3.2:

$f \in C_{K_f}[0,\infty) = \left\{f; f, [0,\infty)\ sürekli\ ve\ \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} = K_f\right\}$ ise ℝ nin her kompakt alt aralığında

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f; x) = f(x)$$

yakınsaması düzgündür ve

$$|B_n(f; x) - f(x)| \le m\omega\left(f; \sqrt{\frac{x(1+x)}{n}}\right)$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat:

$$B_n(f;x)-f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}-f(x).1$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}-\sum_{k=0}^{\infty} f(x)\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right\}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\ .$$

Eşitliğin her iki tarafının mutlak değerine alalım.

$$|B_n(f;x)-f(x)|=\left|\sum_{k=0}^{\infty}\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right\}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\right|$$

$$\leq\sum_{k=0}^{\infty}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}$$

$$\leq\sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}\,\omega\left(f;\left|\frac{k}{n}-x\right|\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}\,\omega\left(f;\left|\frac{k}{n}-x\right|\frac{\delta}{\delta}\right)$$

$$\leq\omega(f;\delta)\sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}\left(1+\frac{\left|\frac{k}{n}-x\right|}{\delta}\right)$$

$$=\omega(f;\delta)\left\{1+\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k}{n}-x\right|P_{n,k}\right\}.$$

Toplam serisine Hölder eşitsizliğini uygulayalım. O halde

$$|B_n(f;x)-f(x)|\ =\omega(f;\delta)\left\{1+\frac{1}{\delta}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k}{n}-x\right|\sqrt{P_{n,k}}\,.\sum_{k=0}^{\infty}\sqrt{P_{n,k}}\right]\right\}$$

$$\leq\omega(f;\delta)\left\{1+\frac{1}{\delta}\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k}{n}-x\right|^2 P_{n,k}}\right\}$$

$$= \omega(f;\delta)\left\{1 + \frac{1}{\delta}\sqrt{B_n\left(\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 ; x\right)}\right\}$$

$$= \omega(f;\delta)\left\{1 + \frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{x(1+x)}{n}}\right\}$$

bulunur.

$\delta = \sqrt{\frac{x(1+x)}{n}}$ seçer ve parantez içindeki sabiti m ile gösterirsek.

$$|B_n(f;x) - f(x)| \leq m\omega\left(f;\sqrt{\frac{x(1+x)}{n}}\right)$$

elde edilir.

Teorem 3.3:

$$f star - shapeddir \Leftrightarrow B_n(f;x)\ de\ star - shapeddir.$$

İspat :

$$B_n^{'}(f;x) - \frac{B_n(f;x)}{x} \geq 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$B_n^{'}(f;x) - \frac{B_n(f;x)}{x}$$
$$= n\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k+1}}\Delta^{'} f\left(\frac{k}{n}\right)$$
$$-\sum_{k=1}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k}} f\left(\frac{k}{n}\right)$$
$$= n\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k+1}}\Delta^{'} f\left(\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k+1}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k+1}} f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

dir.

$$\binom{n+k}{k+1}(k+1) = n\binom{n+k}{k}$$

eşitliği kullanılırsa

$$B_n^{'}(f;x) = n\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k+1}}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{k+1} f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right)$$
$$= n\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k+1}}\left(\left(\frac{k}{k+1}\right) f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$
$$\geq 0$$

olduğundan Baskakov operatörü star-shapeddir.

Teorem 3.4:

$f(x)$, $(0,\infty)$ aralığında tanımlı ve $f(x) \geq 0$ olsun.

Eğer

$$\frac{f(x)}{x}, \qquad x \in (0,\infty) \text{ için azalansa } \left(\frac{B_n(f;x)}{x}\right)^{'} \leq 0 \quad dir$$

İspat :

$$\frac{B_n(f;x)}{x} = \frac{f(0)}{x(1+x)^n} + \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n+k-1}{k}\frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k}}$$

olduğundan

$$\left(\frac{B_n(f;x)}{x}\right)' = -\frac{f(0)}{x^2(1+x)^n} - \frac{nf(0)}{x(1+x)^{n+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{k+1}{n}\right)\binom{n+k}{k+1}\frac{kx^{k-1}}{(1+x)^{n+k+1}}$$
$$-\sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n+k-1}{k}\frac{(n+k)x^{k-1}}{(1+x)^{n+k+1}}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte

$$\binom{n+k}{k+1}(k+1) = n\binom{n+k}{k}$$

ve

$$\binom{n+k-1}{k}(n+k) = n\binom{n+k}{k}$$

eşitliklerini kullanırsak

$$\left(\frac{B_n(f;x)}{x}\right)' = -\frac{f(0)}{x^2(1+x)^n} - \frac{nf(0)}{x(1+x)^{n+1}}$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k+1}}k\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)\frac{n}{k+1} - f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{n}{k}\right)$$

yazılabilir.

$\frac{f(x)}{x}$ azalan olduğundan parantez içeriside negatif çıkar. Buda ispatı tamamlar.

Şimdi $B_n(f;x)$ Baskakov operatörü için ardışık iki terimi arasındaki aşağıdaki bağıntıyı verelim

Teorem 3.5:

$$B_{n+1}(f;x)-B_n(f;x)=-\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{(1+x)^{n+k+1}}\binom{n+k}{k}\frac{(n+k+1)}{(n+1)}f\left[\frac{k}{n+1},\frac{k+1}{n+1},\frac{k+1}{n}\right]$$

dir.

İspat :

$$B_{n+1}(f;x)=\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{k}{n+1}\right)\binom{n+k}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k+1}}$$

operatöründe 1 yerine $1+x-x$ yazalım. Bu durumda

$$B_{n+1}(f;x)=\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{k}{n+1}\right)\binom{n+k}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}-\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{k}{n+1}\right)\binom{n+k}{k}\frac{x^{k+1}}{(1+x)^{n+k+1}}$$

eşitliği bulunur.

$$\begin{aligned}B_n(f;x)&=\frac{f(0)}{(1+x)^n}+\sum_{k=1}^{\infty}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\\&=\frac{f(0)}{(1+x)^n}+\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\binom{n+k}{k+1}\frac{x^{k+1}}{(1+x)^{n+k+1}}\end{aligned}$$

yazılabilir.

$$B_{n+1}(f;x)-B_n(f;x)$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{(1+x)^{n+k+1}}\left[f\left(\frac{k+1}{n+1}\right)\binom{n+k+1}{k+1}-f\left(\frac{k}{n+1}\right)\binom{n+k}{k}\right.$$
$$\left.-f\left(\frac{k+1}{n}\right)\binom{n+k}{k+1}\right]$$

elde edilir.

$$\binom{n+k+1}{k+1}=\frac{n+k+1}{k+1}\binom{n+k}{k}$$

ve

$$\binom{n+k}{k+1}=\frac{n}{k+1}\binom{n+k}{k}$$

eşitlikleri yerine yazılırsa

$$B_{n+1}(f;x)-B_n(f;x)$$
$$=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{(1+x)^{n+k+1}}\binom{n+k}{k}\left[f\left(\frac{k}{n+1}\right)-\frac{(n+k+1)}{(k+1)}f\left(\frac{k+1}{n+1}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{n}{k+1}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right]$$

elde edilir.

$$f\left[\frac{k}{n+1},\frac{k+1}{n+1},\frac{k+1}{n}\right]$$
$$=\frac{n(n+1)^2}{(n+k+1)}\left[f\left(\frac{k}{n+1}\right)-\frac{(n+k+1)}{(k+1)}f\left(\frac{k+1}{n+1}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{n}{k+1}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right]$$

eşitliğinin doğruluğunu gösterirsek ispat tamamlanmış olur.

$$f\left[\frac{k}{n+1},\frac{k+1}{n+1},\frac{k+1}{n}\right]=\frac{f\left[\frac{k+1}{n+1},\frac{k+1}{n}\right]-f\left[\frac{k}{n+1},\frac{k+1}{n+1}\right]}{\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n+1}}$$

$$=\frac{(k+n+1)}{n(n+1)}\left[\frac{f\left[\frac{k+1}{n}\right]-f\left[\frac{k+1}{n+1}\right]}{\frac{k+1}{n}-\frac{k+1}{n+1}}-\frac{f\left[\frac{k+1}{n+1}\right]-f\left[\frac{k}{n+1}\right]}{\frac{k+1}{n+1}-\frac{k}{n+1}}\right]$$

$$=\frac{(k+n+1)}{n(n+1)}\left\{\frac{n(n+1)f\left[\frac{k+1}{n}\right]}{(k+1)}-\frac{(n+1)(k+n+1)f\left[\frac{k+1}{n+1}\right]}{(k+1)}\right.$$

$$\left.+(n+1)f\left[\frac{k}{n+1}\right]\right\}$$

$$=\frac{n(n+1)^2}{(n+k+1)}\left\{\frac{n}{(k+1)}f\left[\frac{k+1}{n}\right]-\frac{(k+n+1)}{(k+1)}f\left[\frac{k+1}{n+1}\right]+f\left[\frac{k}{n+1}\right]\right\}$$

dir. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.3:

f fonksiyonu $[0,\infty)$ da konveks ise $B_n(f;x)$ artmayan bir dizidir.

4. q-BASKAKOV OPERATÖRÜNÜN YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ

Tanım 4.1:

$f \in C[0,\infty), q > 0$ ve her bir $n > 0$ tamsayısı için q-Baskakov operatörü

$$B_{n,q}(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k (-x,q)_{n+k}^{-1} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^q(x) f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right)$$

biçiminde tanımlanır. $q = 1$ için bu operatör Tanım 3.1 deki klasik Baskakov operatörüne dönüşür.

Teorem 4.1:

$r > 0$ için q-Baskakov operatörünün $r.$ q-türevi

$$D_q^r B_{n,q}(f;x) = \frac{[n+r-1]_q!}{[n-1]_q!} \sum_{k=0}^{\infty} q^{rk} P_{n+r,k}^q(x) \nabla_q^r f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right) \qquad (4.1)$$

biçiminde gösterime sahiptir.

İspat:

Örnek 2.7 deki eşitlikten (4.1) eşitliğinin $r = 1$ için aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$D_q' B_{n,q}(f;x) = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} [k]_q x^{k-1} (-x,q)_{n+k}^{-1} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right)$$
$$- \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} (qx)^k [n+k]_q (-x,q)_{n+k+1}^{-1} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right)$$

Şimdi ilk toplam seride $k \to k+1$ yazıp Örnek 2.4 deki eşitliklerden faydalanarak yukarıdaki eşitliği aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$D'_q B_{n,q}(f;x) = [n]_q \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}+k} x^k (-x,q)_{n+k+1}^{-1} \left\{ f\left(\frac{[k+1]_q}{q^k [n]_q}\right) - f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right) \right\}$$

$$= [n]_q \sum_{k=0}^{\infty} q^k P_{n+1,k}^q(x) \nabla'_{\mathrm{q}} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right).$$

$r=1$ için (4.1) eşitliğinin doğruluğunu göstermiş olduk. Şimdi (4.1)eşitliğin r için sağladığını kabul edelim. $r+1$ için (4.1) formülünün doğru olduğunu gösterelim. Şimdi (4.1) eşitliğini bir kez daha q-türevini alalım.

$$D_q^{r+1} B_{n,q}(f;x)$$
$$= \frac{[n+r-1]_q!}{[n-1]_q!} \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n+r+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}+rk} [k]_q x^{k-1} (-x,q)_{n+k+r}^{-1} \nabla_{\mathrm{q}}^{\mathrm{r}} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right)$$
$$- \frac{[n+r-1]_q!}{[n-1]_q!} \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+r+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}+rk} (qx)^k [n+k+r]_q (-x,q)_{n+k+r+1}^{-1} \nabla_{\mathrm{q}}^{\mathrm{r}} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right).$$

elde edilir.

Şimdi ilk toplam seride $k \to k+1$ yazıp Örnek 2.4 deki eşitliklerden faydalanarak yukarıdaki eşitliği aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$D_q^{r+1} B_{n,q}(f;x)$$
$$= \frac{[n+r]_q!}{[n-1]_q!} \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+r+k \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}+(r+1)k} x^k (-x,q)_{n+k+r+1}^{-1} \left\{ q^r \nabla_{\mathrm{q}}^{\mathrm{r}} f\left(\frac{[k+1]_q}{q^k [n]_q}\right) - \nabla_{\mathrm{q}}^{\mathrm{r}} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right) \right\}$$

$$= \frac{[n+r]_q!}{[n-1]_q!}\sum_{k=0}^{\infty} q^{(r+1)k} P_{n+r+1,k}^{q}(x)\nabla_{\mathrm{q}}^{\mathrm{r}+1} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right).$$

Bu da bize (4.1) eşitliğinin $r+1$ için sağlandığını verir. O halde tümevarım prensibine gereğiyle ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1:

q-Baskakov operatörünün ikinci q-ileri fark operatör yardımıyla gösterimi

$$B_{n,q}(f;x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{[n+r-1]_q!}{[n-1]_q!}\nabla_q^r f(0)\frac{x^r}{[r]_q!}$$

biçimindedir.

İspat:

Teorem 4.1 den

$$D_q^r B_{n,q}(f;x)\Big|_{x=0} = \frac{[n+r-1]_q!}{[n-1]_q!} P_{n+r,0}^{q}(0)\nabla_{\mathrm{q}}^{\mathrm{r}} f(0)$$
$$= \frac{[n+r-1]_q!}{[n-1]_q!}\nabla_{\mathrm{q}}^{\mathrm{r}} f(0)$$

dir. Yukarıdaki eşitliği Tanım 2.15 deki q-Taylor formülünde kullanılırsa

$$B_{n,q}(f;x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{[n+r-1]_q!}{[n-1]_q!}\nabla_{\mathrm{q}}^{\mathrm{r}} f(0)\frac{\mathrm{x}^{\mathrm{r}}}{[\mathrm{r}]_{\mathrm{q}}!}$$

elde ederiz.

Teorem 2.5 ve Sonuç 4.1 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2:

q-Baskakov operatörünün q-bölünmüş fark operatörü yardımıyla gösterimi

$$B_{n,q}(f;x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{[n+r-1]_q!}{[n-1]_q!}q^{-\frac{r(r-1)}{2}}f\left[0,\frac{1}{[n]_q},\frac{[2]_q}{q[n]_q}.\dots,\frac{[r]_q}{q^{r-1}[n]_q}\right]_q\frac{x^r}{[n]_q^r}$$

biçimindedir.

Teorem 4.2:

$B_{n,q}(t^m;x),\, m=0,1,2$ için

$$B_{n,q}(1;x)=1\quad ,B_{n,q}(t;x)=x\quad ,B_{n,q}(t^2;x)=x^2+\frac{x}{[n]_q}(1+\frac{x}{q})$$

eşitlikleri doğrudur..

İspat:

$$f[x_0,x_1,\dots,x_r]_q=\frac{f^{(r)}(\xi)}{r!}\qquad \xi\in(x_0,x_r)\qquad (4.2)$$

Ayrıca Teorem 2.5 ve (4.2) eşitliğinden

$$q^{\frac{r(r-1)}{2}}[n]_q^r\,\frac{\nabla_q^r f(x_0)}{[r]_q!}=\frac{f^{(r)}(\xi)}{r!}$$

vardır.

Yukarıdaki eşitlikten görülür ki x^r fonksiyonu r den büyük sayılar için ikinci q-ileri fark sıfırdır.

Dolayısıyla Sonuç 4.1 den

$$B_{n,q}(1;x) = \nabla_{\mathrm{q}}^{0} f(0) = 1$$

olduğunu elde edilir.

$f(t) = t$ seçelim.

$$\begin{aligned} B_{n,q}(t;x) &= \nabla_{\mathrm{q}}^{0} f(0) + [n]_q \nabla'_{\mathrm{q}} f(0) x \\ &= 0 + [n]_q \left\{ f\left(\frac{1}{[n]_q}\right) - f(0) \right\} x \\ &= [n]_q \frac{1}{[n]_q} x = x \end{aligned}$$

$f(t) = \; t^2$ seçelim.

$$B_{n,q}(t^2;x) = \nabla_{\mathrm{q}}^{0} f(0) + [n]_q \nabla'_{\mathrm{q}} f(0) x + [n]_q [n+1]_q \nabla_{\mathrm{q}}^{2} f(0) \frac{x^2}{[2]_q} \qquad (4.3)$$

dir.

$$\begin{aligned} \nabla'_{\mathrm{q}} f(0) &= \left\{ f\left(\frac{1}{[n]_q}\right) - f(0) \right\} x = \left(\frac{1}{[n]_q}\right)^2 \\ \nabla_{\mathrm{q}}^{2} f(0) &= \mathrm{q} \nabla'_{\mathrm{q}} f\left(\frac{1}{[n]_q}\right) - \nabla'_{\mathrm{q}} f(0) \\ &= q f\left(\frac{[2]_q}{q[n]_q}\right) - (1+q) f\left(\frac{1}{[n]_q}\right) + f(0) \\ &= q\left(\frac{[2]_q}{q[n]_q}\right)^2 - (1+q)\left(\frac{1}{[n]_q}\right)^2 + 0 \\ &= \left(\frac{1}{[n]_q}\right)^2 \left\{ \frac{\left([2]_q\right)^2}{q} - 1 - q \right\} \\ &= \left(\frac{1}{[n]_q}\right)^2 \left\{ \frac{[2]_q}{q} \right\} \end{aligned}$$

eşitliklerini (4.3) de yerlerine yazalım.

$$B_{n,q}(t^2;x) = 0 + [n]_q \left(\frac{1}{[n]_q}\right)^2 x + [n]_q[n+1]_q \left(\frac{1}{[n]_q}\right)^2 \left\{\frac{[2]_q}{q}\right\} \frac{x^2}{[2]_q}$$
$$= \frac{x}{[n]_q} + \frac{[n+1]_q}{[n]_q}\frac{x^2}{q}$$
$$= \frac{x}{[n]_q} + \frac{q[n]_q + 1}{[n]_q}\frac{x^2}{q}$$
$$= \frac{x}{[n]_q} + \left\{q + \frac{1}{[n]_q}\right\}\frac{x^2}{q}$$
$$= x^2 + \frac{x}{[n]_q}\left\{1 + \frac{x}{q}\right\}$$

elde edilir.

Teorem 4.3:

(q_n), $q_n > 0$ ve

$$\lim_{n\to\infty} q_n = 1$$

olsun.

$\forall f \in B_2(\mathbb{R}^+)$ için

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\geq 0} \frac{\left|B_{n,q_n}(f;x) - f(x)\right|}{(1+x^2)^3} = 0$$

dir. Burada

$$B_2(\mathbb{R}^+) \coloneqq \left\{f: |f(x)| \leq B_f(1+x^2)\right\}$$

dir.

İspat:

f sürekli olduğundan düzgün süreklidir.

Her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki öyle ki $|t-x| < \delta$ şartını sağlayan t'lerin $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ elde ederiz.

$f \in B_2(\mathbb{R}^+)$ olduğundan $|t-x| \geq \delta$ için

$$
\begin{aligned}
|f(t) - f(x)| &\leq |f(t)| + |f(x)| \\
&\leq B_f(1+t^2) + B_f(1+x^2) \\
&= B_f(2+t^2+x^2) \\
&= B_f(2+(t-x+x)^2+x^2) \\
&= B_f(2+(t-x)^2+2(t-x)x+2x^2) \\
&\leq 2B_f(1+x^2+(t-x)^2+|t-x|x) \\
&= 2B_f\left\{(t-x)^2+(1+x^2)\left(1+\frac{|t-x|x}{(1+x^2)}\right)\right\} \\
&\leq 2B_f\{(t-x)^2+(1+x^2)(1+|t-x|)\} \\
&\leq 2B_f\left\{(t-x)^2+(1+x^2)\left(\frac{|t-x|}{\delta}+|t-x|\right)\right\} \\
&= 2B_f\left\{(t-x)^2+(1+x^2)|t-x|\left(\frac{1}{\delta}+1\right)\right\} \\
&\leq 2B_f\left\{(t-x)^2\left(\frac{1}{\delta}+1\right)+(1+x^2)|t-x|\left(\frac{1}{\delta}+1\right)\right\} \\
&< A_f(\delta)\{(t-x)^2+(1+x^2)|t-x|\}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada $A_f(\delta)$ f ve δ bağlı pozitif sabitlerdir.

Yukarıdaki sonuçlar birleştirilirse

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + A_f(\delta)\{(t-x)^2+(1+x^2)|t-x|\}$$

elde ederiz. Burada $t, x \in \mathbb{R}^+$ dir. Böylece

$$\left|B_{n,q_n}(f;x) - f(x)\right| < \varepsilon + A_f(\delta)\left\{B_{n,q_n}((t-x)^2;x) + (1+x^2)B_{n,q_n}(|t-x|;x)\right\}$$

olur.

$$B_{n,q_n}(|t-x|;x) \le \left(B_{n,q_n}((t-x)^2;x)\right)^{\frac{1}{2}} B_{n,q_n}(1;x)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{x}{[n]_{q_n}}\left(1+\frac{x}{q_n}\right)}$$

dir.

$$\sup_{x\ge 0} \frac{\left|B_{n,q_n}(f;x)-f(x)\right|}{(1+x^2)^3} < \varepsilon + A_f(\delta)\left\{\frac{1}{[n]_{q_n}}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)+\sqrt{\frac{1}{[n]_{q_n}}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)}\right\}$$

dir ve bu eşitliğin $n \to \infty$ için limit alınırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.4:
(q_n), $q_n > 0$ ve

$$\lim_{n\to\infty} q_n = 1$$

olacak şekilde reel sayıların bir dizisi olsun.
Bu durum da $\forall f \in E_2(\mathbb{R}^+)$ için

$$\lim_{n\to\infty} B_{n,q_n}(f;x) = f(x)$$

yakınsaması $\mathbb{R}^+$ kompakt alt kümesi üzerinde düzgündür. Burada

$$E_2(\mathbb{R}^+) \coloneqq \left\{f \in C(\mathbb{R}^+): \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{1+x^2}\ mevcut\right\}$$

dir.

İspat:

Teorem 4.2 de görülür ki $f(x) = 1$ ve $f(x) = x$ için $B_{n,q_n}(f;x) = f(x)$ dir.

$$\lim_{n\to\infty} q_n = 1$$

olduğundan $f(x) = x^2$ içinde $B_{n,q_n}(f;x) = f(x)$ e düzgün yakınsak olduğu görülür. Bu da Teorem 2.4 göre $B_{n,q_n}(f;x)$ operatörü düzgün yakınsaktır.

Sonuç 4.3:

$f \in C[0,\infty)$ ve $\forall x \in (0,a]$ için

$$\left|B_{n,q_n}(f;x) - f(x)\right| \le M\omega_2\left(f; \sqrt{\frac{x}{[n]_q}\left(1 + \frac{x}{q}\right)}\right)$$

elde edilir.

Teorem 4.5:

f fonksiyonu star-shaped ise $B_{n,q}(f;x)$ q-Baskakov operatörü de star-shapeddir.

İspat:

Teorem 4.1 den

$$\begin{aligned} D_q B_{n,q}(f;x) - \frac{B_{n,q}(f;x)}{x} &= [n]_q \sum_{k=0}^{\infty} q^k \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k (-x,q)_{n+k+1}^{-1} \nabla'_{\mathrm{q}} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right) \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right) \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^{k-1} (-x,q)_{n+k}^{-1} \end{aligned}$$

$$= [n]_q \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} q^k x^k (-x,q)_{n+k+1}^{-1} \left\{ f\left(\frac{[k+1]_q}{q^k [n]_q}\right) - f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right) - \frac{1}{[k+1]_q} f\left(\frac{[k+1]_q}{q^k [n]_q}\right) \right\}$$

biçiminde yazılabilir.

$$D_q B_{n,q}(f;x) - \frac{B_{n,q}(f;x)}{x} = [n]_q \sum_{k=0}^{\infty} q^k P_{n+1,k}^q \left\{ \frac{q[k]_q}{[k+1]_q} f\left(\frac{[k+1]_q}{q^k [n]_q}\right) - f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right) \right\} \quad (4.4)$$

elde ederiz.

f fonksiyonu star-shaped olduğundan

$$\frac{q[k]_q}{[k+1]_q} f\left(\frac{[k+1]_q}{q^k [n]_q}\right) \geq f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right)$$

dir.

Bu eşitsizlik ile (4.4) eşitliğinden istenilen sonuç elde edilir.

Şimdi Tanım 4.1 de tanımlı q-Baskakov operatörlerin monotonluk özelliklerini görelim.

Teorem 4.6:

Farz edelim ki $f(x)$ fonksiyonu $(0,\infty)$ da tanımlansın ve $x \in (0,\infty)$ için $f(x) \geq 0$ olsun. Eğer $\frac{f(x)}{x}$ tüm $x \in (0,\infty)$ için azalan ise bu durumda $x \in (0,\infty)$ ve $\forall q \in (0,\infty)$ için

$$D_q \left(\frac{B_{n,q}(f;x)}{x} \right) \leq 0$$

dır.

İspat:

Tanım 4.1 den

$$\frac{B_{n,q}(f;x)}{x}=\sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^{k-1}(-x,q)_{n+k}^{-1} + \frac{f(0)}{x}(-x,q)_n^{-1}$$

elde edilir.

Yukarıdaki eşitliğin q-türevi alırsak ve (2.10) eşitliğini kullanırsak

$$D_q\frac{B_{n,q}(f;x)}{x}=\sum_{k=2}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}}[k-1]_q x^{k-2}(-x,q)_{n+k}^{-1}$$
$$-\sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}}[n+k]_q$$
$$\times (qx)^{k-1}(-x,q)_{n+k+1}^{-1} + D_q\left\{\frac{f(0)}{x}(-x,q)_n^{-1}\right\}$$

elde edilir.

$$D_q\left\{\frac{f(0)}{x}(-x,q)_n^{-1}\right\}=\frac{xD_q(-x,q)_n^{-1}-(-x,q)_n^{-1}D_qx}{x.qx}f(0)$$
$$=\left\{-\frac{[n]_q}{qx}(-x,q)_{n+1}^{-1}-\frac{1}{qx^2}(-x,q)_n^{-1}\right\}f(0)$$

yazabiliriz.

Böylece

$$D_q \frac{B_{n,q}(f;x)}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{[k+1]_q}{q^k[n]_q}\right) \begin{bmatrix} n+k \\ k+1 \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} q^k [k]_q x^{k-1} (-x,q)_{n+k+1}^{-1}$$
$$-\sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right) \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} [n+k]_q$$
$$\times (qx)^{k-1} (-x,q)_{n+k+1}^{-1} - f(0)\frac{[n]_q}{qx}(-x,q)_{n+1}^{-1} - \frac{f(0)}{qx^2}(-x,q)_n^{-1}$$

dır.

Örnek 2.4 deki eşitlikleri kullanırsak

$$D_q\left(\frac{B_{n,q}(f;x)}{x}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^{k-1} (-x,q)_{n+k+1}^{-1} [k]_q$$
$$\times \left\{ f\left(\frac{[k+1]_q}{q^k[n]_q}\right) \frac{q^k[n]_q}{[k+1]_q} - f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right) \frac{q^{k-1}[n]_q}{[k]_q} \right\}$$
$$- f(0)\frac{[n]_q}{qx}(-x,q)_{n+1}^{-1} - \frac{f(0)}{qx^2}(-x,q)_n^{-1}$$

elde edilir.

$f(x) \geq 0$ ve $\frac{f(x)}{x}$ tüm $x \in (0,\infty)$ için artmayan olduğundan tüm $q \in (0,\infty)$ ve $x \in (0,\infty)$ için

$$D_q\left(\frac{B_{n,q}(f;x)}{x}\right) \leq 0$$

dır.

Şimdi $B_{n,q}(f;x)$ q-Baskakov operatörü için ardışık iki terimi arasındaki aşağıdaki bağıntıyı verelim.

Teorem 4.7:

$f \in C(\mathbb{R}^+)$ ise bu durumda aşağıdaki formül geçerlidir.

$$\begin{aligned}
&B_{n+1,q}(f;x) - B_{n,q}(f;x) \\
&= -\frac{q^n}{[n]_q[n+1]_q}\sum_{k=0}^{\infty} q^{\frac{k(k+1)}{2}-2k} x^{k+1}(-x,q)_{n+k+1}^{-1}\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \\
&\times \frac{[n+k+1]_q}{[n+1]_q} f\left[\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n+1]_q}, \frac{[k+1]_q}{q^k[n+1]_q}, \frac{[k+1]_q}{q^k[n]_q}\right]
\end{aligned}$$

İspat:

Tanım 4.1 den

$$B_{n+1,q}(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k(-x,q)_{n+k+1}^{-1} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n+1]_q}\right)$$

eşitliğini yazabiliriz.

Şimdi bu eşitliği 1 yerine $1 + q^{n+k}x - q^{n+k}x$ yazalım.

$$\begin{aligned}
B_{n+1,q}(f;x) &= \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n+1]_q}\right)\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k(-x,q)_{n+k}^{-1} \\
&\quad -\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n+1]_q}\right)\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} q^{n+k}x^{k+1}(-x,q)_{n+k+1}^{-1} \\
&= f(0)(-x,q)_n^{-1} \\
&\quad +\sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n+1]_q}\right)\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k(-x,q)_{n+k}^{-1} \\
&\quad -\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n+1]_q}\right)\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} q^{n+k}x^{k+1}(-x,q)_{n+k+1}^{-1}
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur.

Böylece

$$B_{n+1,q}(f;x) = f(0)(-x,q)_n^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k+1]_q}{q^k[n+1]_q}\right)\begin{bmatrix} n+k+1 \\ k+1 \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} q^k x^{k+1}(-x,q)_{n+k+1}^{-1} - \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n+1]_q}\right)\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} q^{n+k} x^{k+1}(-x,q)_{n+k+1}^{-1}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} B_{n,q}(f;x) &= f(0)(-x,q)_n^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k(-x,q)_{n+k}^{-1} \\ &= f(0)(-x,q)_n^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k+1]_q}{q^k[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n+k \\ k+1 \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} q^k x^{k+1}(-x,q)_{n+k+1}^{-1} \end{aligned}$$

olduğundan

$$B_{n+1,q}(f;x) - B_{n,q}(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} q^{\frac{k(k-1)}{2}} q^k x^{k+1}(-x,q)_{n+k+1}^{-1}\left\{f\left(\frac{[k+1]_q}{q^k[n+1]_q}\right)\begin{bmatrix} n+k+1 \\ k+1 \end{bmatrix}_q - q^n f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n+1]_q}\right)\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q - f\left(\frac{[k+1]_q}{q^k[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n+k \\ k+1 \end{bmatrix}_q\right\}$$

elde ederiz.

Örnek 2.4 den faydalanarak

$$B_{n+1,q}(f;x) - B_{n,q}(f;x) = -\sum_{k=0}^{\infty} q^{\frac{k(k+1)}{2}} x^{k+1}(-x,q)_{n+k+1}^{-1}\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \left\{q^n f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n+1]_q}\right) - \frac{[n+k+1]_q}{[k+1]_q} f\left(\frac{[k+1]_q}{q^k[n+1]_q}\right) + \frac{[n]_q}{[k+1]_q} f\left(\frac{[k+1]_q}{q^k[n]_q}\right)\right\}$$

elde edilir.

$$f\left[\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n+1]_q},\frac{[k+1]_q}{q^k[n+1]_q},\frac{[k+1]_q}{q^k[n]_q}\right]$$

$$=\frac{q^{2k}[n]_q[n+1]_q^2}{q^n[n+k+1]_q}\left\{q^n f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n+1]_q}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{[n+k+1]_q}{[k+1]_q}f\left(\frac{[k+1]_q}{q^k[n+1]_q}\right)+\frac{[n]_q}{[k+1]_q}f\left(\frac{[k+1]_q}{q^k[n]_q}\right)\right\}$$

eşitliğinin doğruluğunu gösterirsek ispat tamamlanmış olur.

$$f\left[\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n+1]_q},\frac{[k+1]_q}{q^k[n+1]_q},\frac{[k+1]_q}{q^k[n]_q}\right]$$

$$=\frac{f\left[\frac{[k+1]_q}{q^k[n+1]_q},\frac{[k+1]_q}{q^k[n]_q}\right]-f\left[\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n+1]_q},\frac{[k+1]_q}{q^k[n+1]_q}\right]}{\frac{[k+1]_q}{q^k[n]_q}-\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n+1]_q}}$$

$$=\frac{q^k[n]_q[n+1]_q}{[n+k+1]_q}\left\{\frac{f\left(\frac{[k+1]_q}{q^k[n]_q}\right)-f\left(\frac{[k+1]_q}{q^k[n+1]_q}\right)}{\frac{[k+1]_q}{q^k[n]_q}-\frac{[k+1]_q}{q^k[n+1]_q}}\right.$$

$$\left.-\frac{f\left(\frac{[k+1]_q}{q^k[n+1]_q}\right)-f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n+1]_q}\right)}{\frac{[k+1]_q}{q^k[n+1]_q}-\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n+1]_q}}\right\}$$

$$=\frac{q^k[n]_q[n+1]_q}{[n+k+1]_q}\left\{\frac{q^k[n]_q[n+1]_q}{q^n[k+1]_q}f\left(\frac{[k+1]_q}{q^k[n]_q}\right)\right.$$

$$-\left(\frac{q^k[n]_q[n+1]_q}{q^n[k+1]_q}+q^k[n+1]_q\right)f\left(\frac{[k+1]_q}{q^k[n+1]_q}\right)$$

$$\left.+q^k[n+1]_q f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n+1]_q}\right)\right\}$$

$$=\frac{q^{2k}[n]_q^2[n+1]_q^2}{q^n[n+k+1]_q[k+1]_q}f\left(\frac{[k+1]_q}{q^k[n]_q}\right)-\frac{q^{2k}[n+1]_q^2[n]_q}{q^n[k+1]_q}f\left(\frac{[k+1]_q}{q^k[n+1]_q}\right)$$

$$+q^k+\frac{q^{2k}[n+1]_q^2[n]_q}{[n+k+1]_q}f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n+1]_q}\right)$$

$$= \frac{q^{2k}[n+1]_q^2[n]_q}{q^n[n+k+1]_q}\left\{q^n f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n+1]_q}\right) - \frac{[n+k+1]_q}{[k+1]_q} f\left(\frac{[k+1]_q}{q^k[n+1]_q}\right) + \frac{[n]_q}{[k+1]_q} f\left(\frac{[k+1]_q}{q^k[n]_q}\right)\right\}$$

dir. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 4.4:

f fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ da tanımlı konveks bir fonksiyon ise Tanım 4.1 de tanımlanan $B_{n,q}(f;x)$ q-Baskakov operatörü monoton azalan dizidir.

KAYNAKLAR

Timan, A. F. Theory of Approximation of Functions of a Real Variable, Pegamon Press, Oxford-London-New York-Paris, 1963

Aral, A. and Gupta, V. Generalized q- Baskakov operator (Kabul edildi) Math. Slovaca,2011

Altomare, F. and Campiti, M. Korovkin-type Approximation Theory and its Applications, Vol. 17, de Gruyter Series Studies in Mathematics, de Gruyter, Berlin-New York, 1994.

Altomare, F. and Mangino, E. M. On a generalization of Baskakov operator, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., XLIV, 683-705.

Andrews, G. E Askey,. R. and Roy, R. Special Functions, Cambridge Univ. Press, 1999.

Aral, A. A generalization of Szasz operators based on q-integers, Math. Compt. Modelling, (in press)

Aral, A. and Gupta, V. q-derivative and applications to the q-Szasz Mirakyan Operators, Calcolo, 43 (2006), 151-170.

Aral, A. and Gupta, V. On q-Baskakov type operators, Georgian Math. Journal,

Baskakov, V. A. An example of sequence of linear positive operators in the space of continuous functions, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 113 (1957), 259-251.

Cao, F. , Ding, C. And Xu, Z. On multivariate Baskakov operator, J. Math. Anal. Appl. 307 (2005), 274-291.

Cheney, E. W. Introduction to Approximation Theory, Chelsea Pupishing Company. New York, 1982 (Second Edition).

Ernst, T. The history of q-calculus and a new method, U.U.D.M Report 2000, 16, ISSN 1101-3591, Department of Mathematics, Upsala University, 2000.

Gupta, V. and Aral, A. Generalized Baskakov-Beta operators, Rocky Mauntain Journal of Math. (In press)

Gupta, V. A note on modifed Baskakov operators, Approximation Theory Appl., 10 (3) 1994, 74-78.

Wang Heping, Korovkin-type theorem and application, J. Approx. Theory 132 (2005) (2), pp. 258.264.

Wang Heping and Meng Fanjun, The rate of convergence of q-Bernstein polynomials for 0 < q < 1, J. Approx. Theory 136 (2005) (2), pp. 151.158.

II'inskii, A. and. Ostrovska, S Convergence of generalized Bernstein polynomials, J. Approx. Theory 116 (2002) (1), pp. 100.112.

Lupas, A. A q-analogue of the Bernstein operators, Universty of Cluj-Napoca, Seminar on numerical and statistical calculus, No:9, 1987.

Mastroianni, G. A class of positive linear operators, Rend. Accad. Sci.Fis. Mat. Napoli, 48, (1980) 217-235.

Oruc, H.and Tuncer, N. On the convergence and iterates of q-Bernstein polynomials, J. Ap-prox. Theory, 117 (2002) (2), pp.301-313.

Ostrovska, S. q-Bernstein polynomials and their iterates, J. Approx. Theory 123 (2003) (2), pp. 232.255.

Ostrovska, S. On the improvement of analytic properties under the limit q-Bernstein operators, J. Approx. Theory 138 (2006) (1), pp. 37.53.

Pethe, S. On the Baskakov operator, Indian J. Math. 26 (1984), No:1-3, 43-48 (1985).

Phillips, G.M. Bernstein polynomials based on the q-integers, Ann. Numer. Math. 4 (1997), pp. 511.518.

Phillips, G.M. Interpolation and Approximation by Polynomials, CMS Books in Mathematics, vol. 14, Springer, Berlin, 2003.

Phillips, G.M. On generalized Bernstein polynomials, in: D. F. Griffits, G. A. Watson (Eds.), Numerical Analysis: A. R. Mitchell 75th Birthday Volume, World Science, Singapore, 1996, pp. 263-269.

Rajkovi´c, P. M. , Stankovi´c, M. S. and Marinkovic, Sladana D. Mean value theorems in q-Calculus, Math. Vesnic. 54 (2002), 171-

Videnskii, V.S. On some classes of q-parametric positive operators, Operator Theory Adv. Appl. 158 (2005), pp. 213.222.178.