T.C.

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KOMPLEKS ANALİZDE SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

BANU YILMAZ

TEMMUZ 2009

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürünün onayı

10./07/2009

Doç. Dr. Burak BİRGÖREN
Müdür V.

Bu tezin Yüksek Lisans Tezi olarak Matematik Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve Yüksek Lisans Tezi olarak bütün gerekliliklerini yerine getirdiğini onaylarız.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Kerim KOCA

Doç. Dr. Nuri ÖZALP

Doç. Dr. Ali ARAL

ÖZET

KOMPLEKS ANALİZDE SINIR-DEĞER PROBLEMLERİ

YILMAZ, Banu

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Kerim Koca

Temmuz 2009, 76 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezin amacı ve kaynak özetleri hakkında kısa bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde kompleks analizde temel kavramlar ve Gauss Teoremlerinin kompleks versiyonu ele alınmıştır. Üçüncü bölümde kompleks analizde Schwarz, Neumann ve Dirichlet Sınır Değer Problemleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde ise bu sınır değer problemlerinin çözümü için q-analizindeki temel kavramlar araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Schwarz Sınır Değer Problemi, Dirichlet Sınır Değer Problemi, Neumann Sınır Değer Problemi, q-İntegrali

ABSTRACT

BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN COMPLEX ANALYSIS

YILMAZ, Banu

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, M.Sc. Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Kerim Koca

July 2009, 76 pages

This thesis consists of four basic chapters. In the first chapter, the purpose of the thesis and the summary of the literature are given.

In the second chapter, the basic concepts in complex analysis and complex version of Gauss Theorem are considered. In the third chapter, Schwarz, Neumann and Dirichlet boundary value problems in complex analysis are obtained.

In the fourth chapter, basic concepts in *q*-Analysis are investigated to solve these problems.

Key Words : Schwarz Boundary Value Problem, Dirichlet Boundary Value Problem, Neumann Boundary Value Problem, q- Integral

TEŞEKKÜR

Tez çalışmalarım esnasında destek ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen, çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Kerim KOCA' ya teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Kompleks Analiz, matematikteki en etkili konulardan biridir. Reel anlamda çözülemeyen bazı problemler, hesaplanamayan bazı integraller vs. kompleks analiz yöntemleri ile kolayca çözülebilmektedir. Bu konu cebir, cebirsel geometri, sayılar teorisi, potansiyel teori, diferansiyel denklemler, harmonik analiz, operatör teorisi ve daha birçok dalları kapsar. Bu konunun fizikte birçok uygulaması vardır. Örneğin elastisite teorisi, kuantum mekaniği, akışkanlar dinamiği, kabuk teorisi, su altı akustikleri vs. konuları kompleks analizin önemli uygulama alanlarıdır.

Analitik fonksiyonlar için sınır-değer problemleri bu tezin temelini oluşturmaktadır. Daha ileri düzeyde indeks teorisi, singüler integral denklemlerin çözümlerinin varlık ve tekliği, Riemann-Hilbert sınır değer problemleri, analitik fonksiyonlar için incelenen sınır-değer problemine indirgenerek çözülür.

Bilindiği gibi lisans düzeyindeki kompleks analiz dersi cebir, topoloji ve geometri ile çok yakından ilgilidir. Hatta sıralı küme kavramı kompleks analizin metodları ile ilişkilendirilerek incelenebilir.

Gauss, Cauchy, Weierstrass ve Riemann kompleks analizin temelini atan ve cebirsel yapıyı kuran matematikçilerdir.

Günümüzde, kompleks diferensiyel denklemlerin çözümleri, kompleks integral denklem sistemlerine dönüştürülmekte ve bu sistemlerin hangi koşullar altında çözümünün var ve tek olduğu araştırılmaktadır. Bu tezde, kompleks kısmi türevli denklemler için verilen Dirichlet, Schwarz ve Neumann sınır değer problemlerinin çözümlerinin elemanter olarak hangi koşullar altında ortay konulabileceğini ifade eden teoremler ispatlayacağız. Burada klasik kompleks analizdeki Cauchy integral formülü ve Pompeiu integral operatörleri ile Gauss-Ostrogradski formülleri temel olarak göz önüne alınacaktır.

1.1. Tezin Amacı

Tezin "Giriş" kısmında da belirtildiği gibi bu tezin esas amacı belli tipten kompleks kısmi türevli denklemler için verilen sınır değer problemleri incelemektir. Bu tezin diğer bir amacı da verilen çözüm metotlarının daha genel kompleks kısmi türevli denklemlere uygulanıp uygulanamayacağını araştırmaktır. Örneğin denklemin çözümlerini belli tipten integral denkleme dönüştürdükten sonra bir başlangıç fonksiyonu seçerek ardışık yaklaşıklar metodu ile elementer çözüm hangi koşullar altında elde edilebilir?

1.2. Kaynak Özetleri

Öncelikle Tutschke[(7)] nin "Partielle Differentialgleichungen, klassische, Funktionalanalytische und komplexe Methoden" kitabından T_D ve Π_D integral operatörleri ve özellikleri ortaya konulacaktır. Begehr[(15)] in "Boundary

Value Problems in Complex Analysis” kaynağından bu singüler integral operatörleri için normlar ve bu norma göre operatörlerin sınırlılığı ele alınacaktır. Daha sonra Begehr[9] in “Complex Analytic Methods for Partial Differential Equations” kitabından Gauss-Ostrogradski formülleri elde edilecektir. Böylece genel hazırlık yapıldıktan sonra Begehr[15] den sırasıyla $w_{\bar{z}} = 0$, $w_{\bar{z}} = f$ kompleks kısmı türevli denklemleri için Dirichlet, Schwarz ve Neumann problemlerinden yararlanılarak çözümler ortaya konulacaktır.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Tanım 2.1: D bölgesi bir $\gamma : z = z(t),\, a \le t \le b$ kapalı eğrisi tarafından sınırlanmış bir bölge olsun. Eğer her $t \in (a,b)$ için $z'(t)$ mevcut ise D bölgesinin sınırına düzgündür (regülerdir) denir.

Ayrıca sınırı düzgün olan bölgelere regüler bölge denir. Örneğin, bir çokgenin çevresi düzgün değil fakat parçalı düzgün bir eğridir.

$$w : D_1 \longrightarrow D_2$$

şeklinde verilen ve D_1 bölgesinde $\mathrm{k}-$ıncı basamağa kadar kısmi türevlere sahip fonksiyonların sınıfını $C^k(D_1, D_2)$ ile gösterelim. Bu durumda $C(D_1, D_2)$, D_1 üzerinde sürekli fonksiyonların sınıfı olur. Bu tezde D_2 bölgesi $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^2$ vs. olacaktır.

2.1. Reelde Green Teoremleri

Teorem 2.1: γ, pozitif yönde yönlendirilmiş parçalı düzgün, kapalı bir eğri ve D, γ tarafından sınırlanan bölge olsun. Ayrıca P ve Q fonksiyonları D de kısmi türevlere sahip $\overline{D} = D \cup \partial D = D \cup \gamma$ kümesinde sürekli iki fonksiyon ise

$$\iint_D P_y(x,y)\,dxdy = -\int_{\partial D} P(x,y)\,dx \qquad (2.1)$$

$$\iint_D Q_x(x,y)\,dxdy = \int_{\partial D} Q(x,y)\,dy \qquad (2.2)$$

olup buradan

$$\oint_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D \left[\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right] dxdy \qquad (2.3)$$

elde edilir.

2.2. Green – Gauss İntegral Formülünün Kompleks Versiyonu

Teorem 2.2: $w = f(z), D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde kompleks kısmi türevlere sahip ve ∂D sınırında sürekli ise

$$\iint_D \frac{\partial f(z,\bar{z})}{\partial \bar{z}} dxdy = \frac{1}{2i} \int_{\partial D} f(z,\bar{z}) dz \tag{2.4}$$

$$\iint_D \frac{\partial f(z,\bar{z})}{\partial z} dxdy = \frac{-1}{2i} \int_{\partial D} f(z,\bar{z}) d\bar{z} \tag{2.5}$$

dir.

İspat: $P, Q \in C^1(D)$, $P, Q : D \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları için (2.1) ve (2.2) den

$$\iint_D P_y(x,y) dxdy = -\int_{\partial D} P(x,y) dx$$

$$\iint_D Q_x(x,y) dxdy = \int_{\partial D} Q(x,y) dy$$

yazabiliriz.

(2.1) ve (2.2) de P yerine $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ alırsak;

$$\iint_D f_y(z) dxdy = -\int_{\partial D} f(z) dx$$

$$\iint_D f_x(z) dxdy = \int_{\partial D} f(z) dy$$

elde edilir. Bu son iki eşitlikten

$$\iint_D (f_x + if_y) dxdy = -i \int_{\partial D} f(z) dx + \int_{\partial D} f(z) dy$$

$$= -i \int_{\partial D} f(z)(dx + idy)$$

$$= -i \int\limits_{\partial D} f(z)\, dz$$

olup buradan

$$\iint\limits_{D} \frac{1}{2}\left(f_x + i f_y\right) dxdy = \frac{-i}{2} \int\limits_{\partial D} f(z) dz = \frac{1}{2i} \int\limits_{\partial D} f(z) dz$$

elde edilir ki bu da

$$\iint\limits_{D} f_{\overline{z}}\, dxdy = \frac{1}{2i} \int\limits_{\partial D} f(z) dz$$

olduğunu gösterir.

Benzer şekilde

$$\iint\limits_{D} f_x(z) dxdy - i \int\limits_{D} f_y(z) dxdy = i \int\limits_{\partial D} f(z) dx + \int\limits_{\partial D} f(z) dy$$

$$= i \int\limits_{\partial D} f(z)(dx - i dy)$$

$$= i \int\limits_{\partial D} f(z)\, d\overline{z}$$

olup böylece

$$\iint\limits_{D} \frac{f_x(z) - i f_y(z)}{2} dxdy = \frac{i}{2} \int\limits_{\partial D} f(z) d\overline{z}$$

bulunur. Buradan da

$$\iint\limits_{D} f_z(z) dxdy = -\frac{1}{2i} \int\limits_{\partial D} f(z) d\overline{z}$$

elde edilir.

Tanım 2.2: D, $z-$ düzleminde sınırlı bir bölge olmak üzere, D de tanımlı kompleks değerli bir h fonksiyonu için

$$(T_D h)[\zeta] = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{h(z)}{z-\zeta}\,dxdy \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlanan T_D operatörüne zayıf singülerliğe sahip Vekua integral operatörü denir.

Tanım 2.3: D, $z-$ düzleminde sınırlı bir bölge olmak üzere, D de tanımlı kompleks değerli bir h fonksiyonu için Π_D olarak tanımlanan

$$(\Pi_D h)[z] = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{h(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\xi d\eta \tag{2.7}$$

operatörüne kuvvetli singülerliğe sahip Vekua integral operatörü denir.

Tanım 2.4: $z_0 \in D$ sabit bir nokta olmak üzere her $z \in D$ için

$$|u(z)-u(z_0)| \le H\,|z-z_0|^{\alpha} \tag{2.8}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde H pozitif reel sabiti ve $0<\alpha\le 1$ biçiminde α sabiti varsa $u(z)$ ye z_0 noktasında Hölder süreklidir denir.

Eğer her $z_1, z_2 \in D$ için (2.8) yazılabiliyorsa $u(z)$ ye D de Hölder süreklidir denir.

2.3. T_D ve Π_D Operatörlerinin Özellikleri

a) h, D de sınırlı olmak üzere $T_D h$ kompleks düzlemin tamamında düzgün sınırlıdır ve

$$|T_D h(z)| \le 2\sup|h|\left(\frac{mD}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.9}$$

dir.

b) T_D ve Π_D operatörleri

$$T_D : C^{\alpha}(\overline{D}) \longrightarrow C^{\alpha}(\overline{D})$$

$$\Pi_D : C^{\alpha}(\overline{D}) \longrightarrow C^{\alpha}(\overline{D})$$

şeklinde sınırlı operatörlerdir.

c) $T_D h$ nin Hölder normu

$$\|T_D h\|_{C^{\alpha}(\overline{D})} = \max\left(\sup|T_D h|, \ \sup_{\zeta_1 \neq \zeta_2} \frac{|(T_D h)(\zeta_1) - (T_D h)(\zeta_2)|}{|\zeta_1 - \zeta_2|^{\alpha}} \right) \tag{2.10}$$

olarak verilir.

d) $\partial_z T_D h = \Pi_D h$ (2.11)

dir.

2.4. Cauchy – Pompeiu Gösterim Formülleri

Teorem 2.3: $D \subset \mathbb{C}$ regüler bir bölge ve $w \in C^1(D; \mathbb{C}) \cap C(\overline{D}; \mathbb{C})$ olsun. Bu taktirde, her $z \in D$ için

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \int_{D} w_{\overline{\zeta}}(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}, \ \zeta = \xi + i\eta \tag{2.12}$$

ve

$$w(z) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial D} w(\zeta) \frac{d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta} - \overline{z}} - \frac{1}{\pi} \int_{D} w_{\zeta}(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\overline{\zeta} - \overline{z}} \tag{2.13}$$

dir.

İspat: $z_0 \in D$ olsun ve $\varepsilon > 0$ sayısını

$$K_\varepsilon(z_0) = \{z \in D : |z - z_0| < \varepsilon\} \subset D$$

olacak şekilde yeterince küçük seçelim. Diğer yandan

$$D_\varepsilon = D \setminus \overline{K_\varepsilon(z_0)}$$

diyelim. Eğer (2.4) bağıntısını w yerine $\dfrac{w(\zeta)}{\zeta - z_0}$ alarak D_ε bölgesi için yazarsak

$$-\int_{D\varepsilon} \frac{w_{\bar\zeta}(\zeta)}{\zeta - z_0} d\xi d\eta + \frac{1}{2i} \int_{\partial D_\varepsilon} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = 0$$

olur. Buradan kutupsal koordinatların kullanılmasıyla

$$\zeta - z_0 = te^{i\theta} \qquad d\xi d\eta = t dt d\theta$$

olacağından

$$\int_{K_\varepsilon(z_0)} w_{\bar\zeta}(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z_0} = \int_0^\varepsilon \int_0^{2\pi} w_{\bar\zeta}(z_0 + te^{i\theta}) e^{-i\theta} d\theta dt$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\int_D w_{\bar\zeta}(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z_0} = \int_{D_\varepsilon} w_{\bar\zeta}(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z_0} + \int_{K_\varepsilon(z_0)} w_{\bar\zeta}(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z_0}$$

olup diğer taraftan

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{D_\varepsilon} w_{\bar\zeta}(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z_0} = \int_D w_{\bar\zeta}(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z_0}$$

dır. Kutupsal koordinatların tekrar kullanılmasıyla

$$\int_{\partial D_\varepsilon} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = \int_{\partial D} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} - \int_{\partial K_\varepsilon(z_0)} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} \tag{2.14}$$

olur. Diğer yandan, $\zeta - z_0 = \varepsilon e^{i\theta}$ $d\zeta = \varepsilon i e^{i\theta} d\theta$ için

$$\int_{\partial K_\varepsilon(z_0)} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = \int_0^{2\pi} w(z_0 + \varepsilon e^{i\theta}) \frac{\varepsilon i e^{i\theta}}{\varepsilon e^{i\theta}} d\theta = 2\pi i w(z_0)$$

dir.

Böylece (2.14) ifadesinin her iki tarafının $\varepsilon \to 0$ için limiti alınırsa

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial D_\varepsilon} w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = \int_{\partial D} w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z_0} - 2\pi i w(z_0)$$

bulunur. Buradan z_0 ın keyfi olması nedeniyle her $z \in D$ için

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{w(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{\pi}\int_D \frac{w_{\bar\zeta}(\zeta)}{\zeta - z}d\xi d\eta$$

elde edilir. Böylece (2.12) ispatlanmış olur. (2.12) de $w_{\bar\zeta}(\zeta) = 0$ olduğunda Cauchy integral formülü elde edilir. (2.13) de benzer şekilde ispatlanabilir.

Tanım 2.4: $D \subset \mathbb{C}$ bölgesi verilsin. $K \subset D$ kompakt bir küme olmak üzere K da sıfırdan farklı, ∂K ve K nın dışında özdeş olarak sıfır olan bir φ fonksiyonuna D bölgesinde bir test fonksiyonu denir. D de $\mathrm{k}-$ıncı basamağa kadar türevlere sahip bütün test fonksiyonlarının sınıfı $C_0^k(D;\mathbb{C})$ ile gösterilir.

Teorem 2.4: Her $\varphi \in C_0^1(D;\mathbb{C})$ ve $f \in L_1(D;\mathbb{C})$ için

$$\int_D \left[T_D f(z)\varphi_{\bar z}(z) + f(z)\varphi(z)\right]dxdy = 0 \qquad (2.15)$$

dir.

İspat: $\varphi \in C_0^1(D;\mathbb{C})$ olsun. Sınırda φ nin değeri sıfıra eşit olduğundan

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\varphi(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi}\int_D \varphi_{\bar\zeta}(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} = (T\varphi_{\bar\zeta})(z)$$

yazabiliriz. Böylece integrasyonun sırası değiştirilerek

$$\int_D Tf(z)\varphi_{\bar z}(z)dxdy = -\frac{1}{\pi}\int_D f(\zeta)\int_D \varphi_{\bar z}(z)\frac{dxdy}{\zeta - z}d\xi d\eta$$

$$= -\int_D f(\zeta)\varphi(\zeta)\,d\xi d\eta$$

dir. Çünkü ispatı yaparken kullandığımız bağıntıda

$$\int_D \varphi_{\bar\zeta}(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} = -\pi\varphi(z)$$

olduğundan

$$-\int_D \varphi_{\bar z}(z)\frac{dxdy}{z - \zeta} = -(-\pi\varphi(\zeta)) = \pi\varphi(\zeta)$$

dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Bu bağıntılar göz önüne alındığında

$$\partial_{\bar{z}} Tf = f$$

olduğu görülür.

Tanım 2.5: $f, g \in L_1(D; \mathbb{C})$ olsun. Her $\varphi \in C_0^1(D; \mathbb{C})$ test fonksiyonu için

$$\int_D [g(z)\varphi_{\bar{z}}(z) + f(z)\varphi(z)]dxdy = 0$$

oluyorsa $f(z)$ fonksiyonuna $g(z)$ nin D bölgesinde $\bar{z}$ değişkenine göre Sobolev türevi denir ve bu türev

$$f = g_{\bar{z}} = \partial_{\bar{z}} g$$

biçiminde gösterilir.

Aynı zamanda, z ye bağlı Sobolev türevler de verilebilir. Fonksiyon klasik anlamda diferensiyellenebilir olduğunda Sobolev anlamda da diferensiyellenebilirdir ve her iki türev aynıdır.

$z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$ için açıktır ki Tf analitiktir ve türevi

$$\partial_z Tf(z) = \Pi f(z) = -\frac{1}{\pi}\int_D f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{(\zeta - z)^2} \tag{2.16}$$

dir.

Tanım 2.6: Her $f \in L_p(D; \mathbb{C})$ $\mathrm{p} > 1$ için

$$\int_D f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{(\zeta - z)^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{D \setminus \overline{K_\varepsilon(z)}} f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{(\zeta - z)^2}$$

ifadesinde sağdaki limit mevcut ise bu limite $\Pi_D f$ nin esas değeri denir.

Kompleks kısmi türevli denklem için $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diskinde sınır-değer problemleri incelenmesi sırasında Cauchy-Pompeiu formülünün değişik versiyonları karşımıza çıkar.

Her $f \in L_p(D;\ \mathbb{C})$ $1 < p$ olduğunda hemen hemen her yerde her $z \in D$ için (2.16) genelleştirilmiş anlamda sağlanır. Sağ taraftaki integral, Cauchy esas değeri anlamındadır.

Teorem 2.5: $w \in C^1(\mathbb{D};\ \mathbb{C}) \cap C(\overline{\boldsymbol{D}};\ \mathbb{C})$ olmak üzere

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} [\operatorname{Re} w(\zeta)] \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} [\operatorname{Im} w(\zeta)] \frac{d\zeta}{\zeta} -$$

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{|\zeta|<1} \left(\frac{w_{\overline{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{z\overline{w_{\overline{\zeta}}(\zeta)}}{1 - z\overline{\zeta}} \right) d\xi d\eta,\ |z| < 1 \qquad (2.17)$$

dir.

İspat: $w \in C^1(\mathbb{D};\ \mathbb{C}) \cap C(\overline{\boldsymbol{D}};\ \mathbb{C})$ için

$$\int\limits_{D} w_{\overline{z}}(z) dxdy = \frac{1}{2i} \int\limits_{\partial D} w(z) dz$$

olduğunu biliyoruz. z sabit bir nokta $|z| < 1$ için

$$\mathbb{D} = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}$$

birim diskinde bu formülü yeniden yazarsak

$$\int\limits_{|\zeta|<1} w_{\overline{\zeta}}(\zeta)\, d\xi d\eta - \frac{1}{2i} \int\limits_{|\zeta|=1} w(\zeta)\, d\zeta = 0$$

bulunur.

Bunun her iki tarafını $-\frac{1}{\pi}$ ile çarparsak

$$-\frac{1}{\pi} \int\limits_{|\zeta|<1} w_{\overline{\zeta}}(\zeta)\, d\xi d\eta + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} w(\zeta)\, d\zeta = 0$$

olup bu son ifadede $w(\zeta)$ yerine $w(\zeta)\dfrac{\overline{z}}{1 - \overline{z}\zeta}$ yazarsak

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} w(\zeta)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\zeta-\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1} w_{\bar{\zeta}}(\zeta)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\xi d\eta=0$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının kompleks eşleniğini alırsak

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \overline{w(\zeta)}\frac{z}{1-z\bar{\zeta}}d\bar{\zeta}-\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1} \overline{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)}\frac{z}{1-z\bar{\zeta}}d\xi d\eta=0$$

olur. Bunu (2.12) eşitliği olan

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta-z}d\xi d\eta$$

ile taraf tarafa toplayıp birim diskte de

$$\bar{\zeta}d\zeta=-\zeta d\bar{\zeta} \qquad |\zeta|=1$$

olduklarını göz önüne alırsak

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\left[\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}+\overline{w(\zeta)}\frac{z}{1-z\bar{\zeta}}\frac{\bar{\zeta}}{\zeta}\right]d\zeta-\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\left[\frac{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta-z}+\frac{\overline{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)}\,z}{1-z\bar{\zeta}}\right]d\xi d\eta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\left[\frac{\zeta_w(\zeta)}{\zeta-z}+\frac{z\bar{\zeta}\overline{w(\zeta)}}{1-z\bar{\zeta}}\right]\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\left[\frac{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta-z}+\overline{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)}\frac{z}{1-z\bar{\zeta}}\right]d\xi d\eta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\left[\frac{\zeta_w(\zeta)}{\zeta-z}+\frac{z\zeta\bar{\zeta}\overline{w(\zeta)}}{\zeta-z\zeta\bar{\zeta}}\right]\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\left[\frac{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta-z}+\overline{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)}\frac{z}{1-z\bar{\zeta}}\right]d\xi d\eta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\left[\frac{\zeta_w(\zeta)}{\zeta-z}+\frac{z\overline{w(\zeta)}}{\zeta-z}\right]\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\left[\frac{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta-z}+\overline{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)}\frac{z}{1-z\bar{\zeta}}\right]d\xi d\eta \quad (2.18)$$

bulunur.

Diğer taraftan

$$[\operatorname{Re} w]\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+i\operatorname{Im} w=\frac{1}{2}(w+\overline{w})\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{1}{2}(w-\overline{w})$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{\zeta-z}{\zeta-z}\right]w+\frac{1}{2}\left[\frac{\zeta+z}{\zeta-z}-\frac{\zeta-z}{\zeta-z}\right]\overline{w}$$

$$= \frac{\zeta_w(\zeta) + z\overline{w(\zeta)}}{\zeta - z}$$

$$= \frac{\zeta_w(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{z\overline{w(\zeta)}}{\zeta - z}$$

dir. Bu ifade (2.18) te yerine yazılırsa (2.17) eşitliği elde edilmiş olur.

Ayrıca $|z|<1$ için

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}[\operatorname{Re} w(\zeta)]\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|<1}\left[\frac{w_{\bar\zeta}}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z} + \frac{\overline{w_{\bar\zeta}(\zeta)}}{\bar\zeta}\frac{1+z\bar\zeta}{1-z\bar\zeta}\right]d\xi d\eta$$

$$+ i\operatorname{Im} w(0)$$

dir. Diğer yandan

$$w(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{w(\zeta)}{\zeta}d\zeta - \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{w_{\bar\zeta}(\zeta)}{\zeta}d\xi d\eta$$

$$\overline{w(0)} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\overline{w(\zeta)}}{\bar\zeta}d\bar\zeta - \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{\overline{w_{\bar\zeta}(\zeta)}}{\bar\zeta}d\xi d\eta$$

$$i\operatorname{Im} w(0) = \frac{1}{2}\left(w(0) - \overline{w(0)}\right)$$

olduğunu biliyoruz.

Daha önce (2.17) bağıntısı olan

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}[\operatorname{Re} w(\zeta)]\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1}[\operatorname{Im} w(\zeta)]\frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\left[\frac{w_{\bar\zeta}(\zeta)}{\zeta-z} + \frac{z\overline{w_{\bar\zeta}(\zeta)}}{1-z\bar\zeta}\right]d\xi d\eta$$

elde edilmişti. (2.19) formülü ile karşılaştırıldığında istenilen formülün doğruluğu için

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1}[\operatorname{Im} w(\zeta)]\frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\left[\frac{w_{\bar\zeta}(\zeta)}{\zeta-z} + \frac{z\overline{w_{\bar\zeta}(\zeta)}}{1-z\bar\zeta}\right]d\xi d\eta - i\operatorname{Im} w(0)$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|<1}\left[\frac{w_{\bar\zeta}(\zeta)}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z} + \frac{\overline{w_{\bar\zeta}(\zeta)}}{\bar\zeta}\frac{1+z\bar\zeta}{1-z\bar\zeta}\right]d\xi d\eta$$

olduğu gösterilmelidir. O halde,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1}\frac{1}{2i}(w-\overline{w})\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|<1}\left[\frac{2w_{\overline{\zeta}}(\zeta)}{\zeta-z}+\frac{2z\overline{w_{\overline{\zeta}}(\zeta)}}{1-z\overline{\zeta}}\right]d\xi d\eta-$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{w(\zeta)}{\zeta}d\zeta-\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|=1}\frac{w_{\overline{\zeta}}(\zeta)}{\zeta}d\xi d\eta+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\overline{w(\zeta)}}{\overline{\zeta}}\left(\frac{-\overline{\zeta}}{\zeta}d\zeta\right)+\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{\overline{w_{\overline{\zeta}}(\zeta)}}{\overline{\zeta}}d\xi d\eta\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{w(\zeta)}{\zeta}d\zeta-\frac{1}{4\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\overline{w(\zeta)}}{\zeta}d\zeta-\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|<1}\left[\frac{2w_{\overline{\zeta}}}{\zeta-z}+\frac{2z\overline{w_{\overline{\zeta}}}}{1-z\overline{\zeta}}-\frac{w_{\overline{\zeta}}}{\zeta}+\frac{\overline{w_{\overline{\zeta}}}}{\overline{\zeta}}\right]d\xi d\eta$$

$$-\frac{1}{4\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{w(\zeta)}{\zeta}d\zeta+\frac{1}{4\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\overline{w(\zeta)}}{\zeta}d\zeta$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|<1}\left[\left(\frac{2}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta}\right)w_{\overline{\zeta}}+\left(\frac{2z}{1-z\overline{\zeta}}+\frac{1}{\overline{\zeta}}\right)\overline{w_{\overline{\zeta}}}\right]d\xi d\eta$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|<1}\left[\frac{2\zeta-\zeta+z}{\zeta(\zeta-z)}w_{\overline{\zeta}}+\frac{2z\overline{\zeta}+1-z\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}(1-z\overline{\zeta})}\overline{w_{\overline{\zeta}}}\right]d\xi d\eta$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|<1}\left[\frac{w_{\overline{\zeta}}}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{\overline{w_{\overline{\zeta}}}}{\overline{\zeta}}\frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\right]d\xi d\eta$$

olup

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}[\operatorname{Re}w(\zeta)]\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|<1}\left[\frac{w_{\overline{\zeta}}}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{\overline{w_{\overline{\zeta}}(\zeta)}}{\overline{\zeta}}\frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\right]d\xi d\eta$$

dir.

Sonuç 1: $w\in C^1(\mathbb{D};\,\mathbb{C})\cap C(\overline{\boldsymbol{D}};\,\mathbb{C})$ ise $w(z)$ fonksiyonu

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\operatorname{Re}w(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|<1}\left(\frac{w_{\overline{\zeta}}(\zeta)}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{\overline{w_{\overline{\zeta}}(\zeta)}}{\overline{\zeta}}\frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\right)d\xi d\eta$$

$$+\operatorname{Im}w(0) \tag{2.19}$$

biçiminde gösterilebilir.

Not: Eğer $w(z)$ birim diskte analitik bir fonksiyon ise (2.19) formülü

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \operatorname{Re} w(\zeta) \left(\frac{2\zeta}{\zeta - z} - 1 \right) \frac{d\zeta}{\zeta} + i \operatorname{Im} w(0) \tag{2.20}$$

şekline gelir.

Tanım 2.7: $w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \operatorname{Re} w(\zeta) \left(\frac{2\zeta}{\zeta - z} - 1 \right) \frac{d\zeta}{\zeta} + i \operatorname{Im} w(0)$

formülüne analitik fonksiyonlar için “Schwarz – Poisson formülü” denir. Ayrıca

$$\frac{\zeta + z}{\zeta - z} = \frac{2\zeta}{\zeta - z} - 1$$

ifadesine “Schwarz çekirdeği” ve bunun reel kısmı olan

$$\frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta} - \overline{z}} - 1 = \frac{\zeta(\overline{\zeta} - \overline{z}) + \overline{\zeta}(\zeta - z) - (\zeta - z)(\overline{\zeta} - \overline{z})}{|\zeta - z|^2} = \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}$$

ifadesine de “Poisson çekirdeği” denir.

Tanım 2.8: $\varphi(z)$ birim diskte analitik bir fonksiyon olmak üzere

$$S\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \varphi(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} \tag{2.21}$$

şeklinde tanımlanan S operatörüne Schwarz operatörü denir.

$z \in \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ve $\zeta \in \partial D$ olmak üzere

$$\lim_{z \to \zeta} S\varphi(z) = \varphi(\zeta) \qquad \varphi \in C(\partial D; \mathbb{R}) \tag{2.22}$$

olduğu gösterilebilir.

(2.19) formülü, Cauchy - Schwarz - Poisson formülü olarak bilinir.

Şimdi

$$w_{\overline{z}} = f \ \ (\mathbb{D} \text{ de}),\ \operatorname{Re} w = \varphi(\partial\, \mathbb{D} \text{ de})\ \operatorname{Im} w(0) = c \tag{2.23}$$

Schwarz sınır değer problemini göz önüne alalım. Eğer (2.22) göz önüne alınırsa (2.19) bağıntısından elde edilen

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\varphi(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|<1}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{\overline{f(\zeta)}}{\overline{\zeta}}\frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\right)d\xi d\eta+ic \quad (2.24)$$

fonksiyonunun (2.23) probleminin çözümü olduğu görülür. Gerçekten (2.21) ve (2.22) özellikleri ile beraber T_D operatörünün $\frac{\partial}{\partial\overline{z}}(T_D f(z))=f(z)$ özelliği göz önüne alınırsa (2.24) deki $w(z)$ fonksiyonunun (2.23) probleminin koşullarını sağladığı görülebilir.

Buradan da görüldüğü gibi integral gösterilim formülleri birim diskte belli tipten sınır değer problemlerinin çözümleridir.

2.5. İntegral Gösterim Formüllerinin Tekrarlanması

Birinci basamaktan denklemlerin çözümleri için elde edilen integral formülleri, tekrarlama yoluyla daha yüksek basamaktan denklemler için de ortaya konulabilir. Bunu görebilmek için önce tek değişkenli reel fonksiyonlarda bilinen Calculus'un temel teoremini verelim:

Teorem 2.6: $f\in C^{n+1}((a,b);\mathbb{R})\cap C^{n}([a,b];\mathbb{R})$ ise bu taktirde $x,\ x_0\in(a,b)$ için

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^k}{k!}f^{(k+1)}(t)dt \quad (2.25)$$

dir.

İspat: Tümevarımla ispatlayalım.

$k=0$ için

$$f(x_0)+\int_{x_0}^{x}f(t)dt=f(x_0)+f(x)-f(x_0)=f(x)$$

olup, verilen eşitlik doğrudur.

$k = n$ için

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

eşitliği doğru olsun.

$k = n+1$ için

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt$$

olduğunu göstereceğiz.

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$$+ \left[\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \Bigg|_{x_0}^{x} \right] + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{n+1}(t)(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!} dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + f^{(n+1)}(x_0)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$+ \left[\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \Bigg|_{x_0}^{x} \right] + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + f^{(n+1)}(x_0)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$- \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

$$= f(x)$$

olup, böylece ispat tamamlanır.

Taylor formülü

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi}\int_D \frac{w_{\overline{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta\,,$$

$$w(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{w(\zeta)}{\overline{\zeta} - \overline{z}} d\overline{\zeta} - \frac{1}{\pi}\int_D \frac{w_{\zeta}(\zeta)}{\overline{\zeta} - \overline{z}} d\xi d\eta$$

bağlantılarına uygulanırsa Cauchy-Pompeiu tipi integrallerin yüksek basamaktan integral gösterimleri elde edilebilir.

Teorem 2.7: $D \subset \mathbb{C}$ bir regüler bölge olmak üzere $w \in C^2(D;\ \mathbb{C}) \cap C^1(\overline{D};\ \mathbb{C})$ için

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w_{\overline{\zeta}}(\zeta)\frac{\overline{\zeta} - \overline{z}}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{\pi}\int_D w_{\overline{\zeta}\overline{\zeta}}(\zeta)\frac{\overline{\zeta} - \overline{z}}{\zeta - z} d\xi d\eta \qquad (2.26)$$

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w_{\overline{\zeta}}(\zeta)\log|\zeta - z|^2\, d\overline{\zeta} +$$

$$\frac{1}{\pi}\int_D w_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta)\log|\zeta - z|^2 d\xi d\eta \qquad (2.27)$$

dir.

İspat: $w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi}\int_D \frac{w_{\overline{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta$

formülünde w yerine $w_{\overline{t}}$ alırsak

$$w_{\overline{\zeta}}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w_{\overline{t}}(t)\frac{dt}{t - \zeta} - \frac{1}{\pi}\int_D w_{\overline{t}\overline{t}}(t)\frac{dt_1 dt_2}{t - \zeta}, \quad t = t_1 + it_2$$

olur. Bu bağıntı (2.12) de yerine yazılırsa

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{\pi}\int_{D}\frac{1}{\zeta-z}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}w_{\bar t}(t)\frac{dt}{t-\zeta}-\frac{1}{\pi}\int_{D}w_{\bar t\bar t}(t)\frac{dt_1dt_2}{t-\zeta}\right\}d\xi d\eta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}w_{\bar t}(t)\left[\frac{1}{\pi}\int_{D}\frac{d\xi d\eta}{(\zeta-z)(\zeta-t)}\right]dt$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{D}w_{\bar t\bar t}(t)\left[\frac{1}{\pi}\int_{D}\frac{1}{\zeta-t}\frac{1}{\zeta-z}d\xi d\eta\right]dt_1dt_2$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}w_{\bar t}(t)\varphi(z,t)dt-\frac{1}{\pi}\int_{D}w_{\bar t\bar t}(t)\varphi(z,t)dt_1dt_2 \qquad (2.27)$$

elde edilir. Burada

$$\varphi(z,t)=\frac{1}{\pi}\int_{D}\frac{d\xi d\eta}{(\zeta-t)(\zeta-z)}=\frac{1}{\pi(t-z)}\int_{D}\left(\frac{1}{\zeta-t}-\frac{1}{\zeta-z}\right)d\xi d\eta$$

dir. Çünkü

$$\frac{1}{(\zeta-t)(\zeta-z)}=\frac{A}{\zeta-t}+\frac{B}{\zeta-z}=\frac{A\zeta-Az+B\zeta-Bt}{(\zeta-t)(\zeta-z)}=\frac{(A+B)\zeta-Az-Bt}{(\zeta-t)(\zeta-z)}$$

eşitliğinden

$$A=\frac{1}{t-z},\quad B=\frac{1}{z-t}$$

bulunur. Böylece

$$\frac{1}{(\zeta-t)\,(\zeta-z)}=\frac{1}{t-z}\left(\frac{1}{\zeta-t}-\frac{1}{\zeta-z}\right)$$

elde edilir.

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{\pi}\int_{D}\frac{w_{\bar\zeta}(\zeta)}{\zeta-z}d\xi d\eta \qquad (2.12)$$

bağıntısında $w(z)$ yerine $\frac{\bar t-\bar z}{t-z}$ alırsak $w(\zeta)=\frac{\bar t-\bar\zeta}{t-\zeta}$ ve $w_{\bar\zeta}(\zeta)=\frac{1}{\zeta-t}$ olur.

Yine (2.8) bağıntısında $w(z)$ yerine $\bar z$ alınırsa

$$\bar z=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\bar\zeta d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z}$$

elde edilir.

Diğer taraftan (2.12) bağıntısında $w(z)$ yerine $\dfrac{\bar{t}-\bar{z}}{t-z}$ alalım. Bu durumda

$$\frac{\bar{t}-\bar{z}}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\bar{t}-\bar{\zeta}}{(t-\zeta)(\zeta-z)}d\zeta-\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{d\xi d\eta}{(\zeta-t)(\zeta-z)}$$

$$=\frac{\bar{t}}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{d\zeta}{(t-\zeta)(\zeta-z)}-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|<1}\frac{\bar{\zeta}}{(t-\zeta)(\zeta-z)}d\zeta-\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{d\xi d\eta}{(\zeta-t)(\zeta-z)}$$

$$=\frac{\bar{t}}{2\pi i(t-z)}\int_{|\zeta|=1}\left(\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta-t}\right)d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\bar{\zeta}d\zeta}{(\zeta-t)(\zeta-z)}-\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{d\xi d\eta}{(\zeta-t)(\zeta-z)}$$

olur. Şimdi

$$\int_{|\zeta|=1}\frac{d\zeta}{\zeta-z}$$

integralini hesaplayalım.

$$\zeta-z=re^{i\theta}\qquad d\zeta=ire^{i\theta}d\theta\qquad r=|\zeta-z|\ \text{için}$$

$$\int_{|\zeta|=1}\frac{d\zeta}{\zeta-z}=\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{ire^{i\theta}d\theta}{re^{i\theta}}=2\pi i$$

dir. Benzer şekilde

$$\int_{|\zeta|=1}\frac{d\zeta}{\zeta-t}=2\pi i$$

olup böylece

$$\int_{|\zeta|=1}\frac{\bar{t}d\zeta}{(t-\zeta)(\zeta-z)}=\frac{\bar{t}}{t-z}\int_{|\zeta|=1}\left(\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta-t}\right)d\zeta$$

$$=\frac{\bar{t}}{t-z}\int_{|\zeta|=1}\frac{d\zeta}{\zeta-z}-\frac{\bar{t}}{t-z}\int_{|\zeta|=1}\frac{d\zeta}{\zeta-t}$$

$$=\frac{\bar{t}}{t-z}(2\pi i-2\pi i)=0$$

dır.

Böylece

$$\frac{\bar{t}-\bar{z}}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\bar{\zeta}d\zeta}{(\zeta-t)(\zeta-z)}-\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{d\xi d\eta}{(\zeta-t)(\zeta-z)}$$

$$=\tilde{\varphi}(z,t)-\varphi(z,t) \qquad (2.28)$$

elde edilir. Burada

$$\tilde{\varphi}(z,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{\bar{\zeta}d\zeta}{(\zeta-t)(\zeta-z)}$$

olup bu fonksiyon hem t, hem de z ye göre analitiktir.

Diğer taraftan

$$\int_{D} w_{\bar{\zeta}}(\zeta)d\xi d\eta=\frac{1}{2i}\int_{\partial D} w(\zeta)d\zeta$$

olması nedeniyle

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w(\zeta)d\zeta+\frac{1}{\pi}\int_{D} w_{\bar{\zeta}}(\zeta)d\xi d\eta=0$$

olur. Bu bağıntıda $w(\zeta)$ yerine $w_{\bar{t}}(t)$ yazılırsa

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w_{\bar{t}}(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{\partial D} w_{\bar{t}\bar{t}}(t)dt_1dt_2=0; \quad t=t_1+it_2$$

olur. Burada $w(t)$ yerine $w(t)\tilde{\varphi}(z,t)$ yazılırsa

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\tilde{\varphi}(z,t)w_{\bar{t}}(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{D}\tilde{\varphi}(z,t)w_{\bar{t}\bar{t}}(t)dt_1dt_2=0 \qquad (2.29)$$

bulunur. Çünkü

$$\tilde{\varphi}_{\bar{t}}=0 \qquad \tilde{\varphi}_{\bar{z}}=0$$

dır. Diğer yandan (2.28) den

$$\tilde{\varphi}(z,t)=\frac{\bar{t}-\bar{z}}{t-z}+\varphi(z,t)$$

olup (2.27) nin her iki yanına (2.29) bağıntısı eklenirse

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}w_{\bar t}(t)\varphi(z,t)dt-\frac{1}{\pi}\int_{D}w_{\bar t\bar t}(t)\varphi(z,t)dt_1dt_2$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\tilde\varphi(z,t)w_{\bar t}(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{D}\tilde\varphi(z,t)w_{\bar t\bar t}(t)dt_1dt_2$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}w_{\bar t}(t)\varphi(z,t)dt$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{D}w_{\bar t\bar t}(t)\varphi(z,t)dt_1dt_2-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\left[\varphi(z,t)+\frac{\bar t-\bar z}{t-z}\right]w_{\bar t}(t)dt$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{D}\left[\varphi(z,t)+\frac{\bar t-\bar z}{t-z}\right]w_{\bar t\bar t}(t)dt_1dt_2$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}w_{\bar t}(t)\frac{\bar t-\bar z}{t-z}dt+\frac{1}{\pi}\int_{D}w_{\bar t\bar t}(t)\frac{\bar t-\bar z}{t-z}dt_1dt_2$$

bulunur. Son bağıntıda $t=t_1+it_2=\zeta=\xi+i\eta$ alınırsa

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}w_{\bar\zeta}(\zeta)\frac{\bar\zeta-\bar z}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{\pi}\int_{D}w_{\bar\zeta\bar\zeta}(\zeta)\frac{\bar\zeta-\bar z}{\zeta-z}d\xi d\eta$$

elde edilir. Bu ise istenilen sonuçtur.

Diğer formülü elde etmek için (2.13) ile verilen

$$w(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{w(\zeta)}{\bar\zeta-\bar z}d\bar\zeta-\frac{1}{\pi}\int_{D}w_{\zeta}(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\bar\zeta-\bar z}$$

bağıntısında $w(z)$ yerine $w_{\bar z}(z)$ yazarsak

$$w_{\bar\zeta}(\zeta)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}w_{\bar t}(t)\frac{d\bar t}{\bar t-\bar\zeta}-\frac{1}{\pi}\int_{D}w_{\bar t t}(t)\frac{dt_1dt_2}{\bar t-\bar\zeta}$$

elde edilir. Bu bağıntı

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{\pi}\int_{D}\frac{w_{\bar\zeta}(\zeta)}{\zeta-z}d\xi d\eta$$

ifadesinde yerine yazılır ve integrasyon sırası değiştirilirse

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{\pi}\int_{D}\frac{1}{\zeta-z}\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}w_{\bar t}\frac{d\bar t}{\bar t-\bar\zeta}-\frac{1}{\pi}\int_{D}w_{t\bar t}(t)\frac{dt_1dt_2}{\bar t-\bar\zeta}\right\}d\xi d\eta$$

bulunur.

Böylece son eşitliğin düzenlenmesiyle

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}w_{\bar t}(t)\left[\frac{1}{\pi}\int_D\frac{d\xi d\eta}{(\bar\zeta-\bar t)(\zeta-z)}\right]d\bar t$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_D w_{t\bar t}(t)\left[\frac{1}{\pi}\int_D\frac{d\xi d\eta}{(\bar\zeta-\bar t)(\zeta-z)}\right]dt_1dt_2$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}w_{\bar t}(t)\psi(z,t)d\bar t-\frac{1}{\pi}\int_D w_{t\bar t}\psi(z,t)dt_1dt_2 \tag{2.30}$$

olur. Burada

$$\psi(z,t)=\frac{1}{\pi}\int_D\frac{d\xi d\eta}{(\bar\zeta-\bar t)(\zeta-z)}$$

dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

$\log|t-z|^2$ fonksiyonu sabit bir $t\in D$ noktası için $D\backslash\{t\}$ kümesinde C^1 sınıfındandır. Böylece yeterince küçük $\varepsilon>0$ sayısı için

$$D_\varepsilon=D\backslash\{z:|z-t|\le\varepsilon\},\quad z\in D$$

bölgesinde

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_\varepsilon}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{\pi}\int_{D_\varepsilon}\frac{w_{\bar\zeta}(\zeta)}{\zeta-z}d\xi d\eta \tag{2.31}$$

formülü geçerlidir. Diğer taraftan

$$\tilde\psi(z,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\log|\zeta-t|^2\frac{d\zeta}{\zeta-z}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\log[(\zeta-t)(\bar\zeta-\bar t)]\frac{d\zeta}{\zeta-z}$$

ve

$$\frac{\partial\tilde\psi(z,t)}{\partial t}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{d\zeta}{(\zeta-t)(\zeta-z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{1}{t-z}\left(\frac{1}{\zeta-t}-\frac{1}{\zeta-z}\right)d\zeta$$

yazılabilir. Eğer

$$w(z) = \log|t-z|^2 = \log[(z-t)(\bar{z}-\bar{t})]$$

fonksiyonu için D_ε bölgesinde (2.27) formülünü yeniden yazarsak

$$w(\zeta) = \log[(\zeta-t)(\bar{\zeta}-\bar{t})], \; w_{\bar{\zeta}}(\zeta) = \frac{\zeta-t}{(\zeta-t)(\bar{\zeta}-\bar{t})} = \frac{1}{\bar{\zeta}-\bar{t}}$$

olması nedeniyle

$$\log|z-t|^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_\varepsilon} \frac{\log|\zeta-t|^2}{\zeta-z}d\zeta - \frac{1}{\pi}\int_{D_\varepsilon} \frac{d\xi d\eta}{(\bar{\zeta}-\bar{t})(\zeta-z)} \tag{2.32}$$

elde edilir. Diğer yandan $\varepsilon < |z-t|$ bölgesi için

$$\zeta - t = re^{i\theta} \qquad d\xi d\eta = r dr d\theta$$

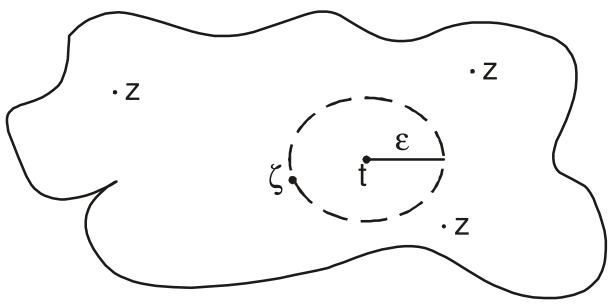
kutupsal gösterimi kullanılırsa

$$\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta-t|<\varepsilon} \frac{d\xi d\eta}{(\bar{\zeta}-\bar{t})(\zeta-z)} = \frac{1}{\pi}\int_0^\varepsilon\int_0^{2\pi} \frac{r d\theta dr}{re^{-i\theta}(t+re^{i\theta}-z)} = \frac{1}{\pi}\int_0^\varepsilon\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}d\theta dr}{t-z+re^{i\theta}}$$

olur ve bu integral mevcut olup $\varepsilon \to 0$ için integralin değeri sıfıra yaklaşır. Yine $\varepsilon < |z-t|$ için

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-t|=\varepsilon} \log|\zeta-t|^2 \frac{d\zeta}{\zeta-z} = \frac{2\log\varepsilon}{2\pi i}\int_{|\zeta-t|=\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta-z} = 0$$

olur. Çünkü, $|z-t| > \varepsilon$ için $\dfrac{1}{\zeta-z}$ fonksiyonu $|\zeta-t| = \varepsilon$ çemberinin içinde analitiktir. Bu durum, şekil 2.1 ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir.



Şekil 2.1 $\dfrac{1}{\zeta-z}$ fonksiyonunun analitikliğinin incelenmesi

Böylece (2.32) ifadesi D_ε bölgesinde

$$\log|t-z|^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{\log|\zeta-t|^2}{\zeta-z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-t|=\varepsilon}\frac{\log|\zeta-t|^2}{\zeta-z}d\zeta - \frac{1}{\pi}\int_D\frac{d\xi d\eta}{(\overline{\zeta}-\bar{t})(\zeta-z)}$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta-t|<\varepsilon}\frac{d\xi d\eta}{(\overline{\zeta}-\bar{t})(\zeta-z)}$$

şeklinde yazılabilir. Bu son eşitlikten $\varepsilon\to 0$ için limit alınırsa $z\in D$ olmak üzere

$$\log|z-t|^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{\log|\zeta-t|^2}{\zeta-z}d\zeta - \frac{1}{\pi}\int_D\frac{d\xi d\eta}{(\overline{\zeta}-\bar{t})(\zeta-z)} = \tilde{\psi}(z,t)-\psi(z,t) \qquad (2.33)$$

olur. Ayrıca

$$\tilde{\psi}(z,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\log|\zeta-t|^2\frac{d\zeta}{\zeta-z}$$

fonksiyonu z ye göre analitik fakat t ye göre anti analitiktir. Yani

$$\frac{\partial\tilde{\psi}(z,t)}{\partial\bar{z}} = 0, \qquad \frac{\partial\tilde{\psi}(z,t)}{\partial t} = 0$$

dır. Daha önce $w\in C^1(D;\ \mathbb{C})\cap C(\overline{D};\ \mathbb{C})$ için Gauss formülünün kompleks hali olan

$$\int_D w_\zeta(\zeta)d\xi d\eta = -\frac{1}{2i}\int_{\partial D}w(\zeta)d\overline{\zeta}$$

elde edilmişti.

Buradan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}w(\zeta)d\overline{\zeta}+\frac{1}{\pi}\int_D w_\zeta(\zeta)d\xi d\eta = 0$$

yazılabilir. Bu son ifadede $w(\zeta)$ yerine $w_{\overline{\zeta}}(\zeta)$ yazarsak

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}w_{\overline{\zeta}}(\zeta)d\overline{\zeta}+\frac{1}{\pi}\int_D w_{\overline{\zeta}\zeta}(\zeta)d\xi d\eta = 0$$

olur.

Böylece

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w_{\bar{t}}(t)\tilde{\psi}(z,t)d\bar{t}+\frac{1}{\pi}\int_{D} w_{t\bar{t}}(t)\tilde{\psi}(z,t)dt_1dt_2=0,\ \ t=t_1+it_2$$

elde edilir. Bunu (2.30) ifadesinin her iki yanına ilave edersek

$$w(z)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w_{\bar{t}}(t)\tilde{\psi}(z,t)d\bar{t}+\frac{1}{\pi}\int_{D} w_{t\bar{t}}(t)\tilde{\psi}(z,t)dt_1dt_2$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w_{\bar{t}}(t)\psi(z,t)d\bar{t}-\frac{1}{\pi}\int_{D} w_{t\bar{t}}(t)\psi(z,t)dt_1dt_2$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{D} w_{\bar{t}}(t)\tilde{\psi}(z,t)d\bar{t}+\frac{1}{\pi}\int_{D} w_{t\bar{t}}(t)\tilde{\psi}(z,t)dt_1dt_2$$

elde edilir. Buradan

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w_{\bar{t}}(t)\psi(z,t)d\bar{t}-\frac{1}{\pi}\int_{D} w_{t\bar{t}}(t)\psi(z,t)dt_1dt_2$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w_{\bar{t}}(t)\tilde{\psi}(z,t)d\bar{t}+\frac{1}{\pi}\int_{\partial D} w_{t\bar{t}}(t)\tilde{\psi}(z,t)dt_1dt_2$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w_{\bar{t}}(t)\left[\tilde{\psi}(z,t)-\log|z-t|^2\right]d\bar{t}$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{D} w_{t\bar{t}}(t)\left[\tilde{\psi}(z,t)-\log|z-t|^2\right]dt_1dt_2+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w_{\bar{t}}(t)\tilde{\psi}(z,t)d\bar{t}$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{D} w_{t\bar{t}}(t)\tilde{\psi}(z,t)dt_1dt_2$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w_{\bar{t}}(t)\log|z-t|^2\,d\bar{t}+\frac{1}{\pi}\int_{D} w_{t\bar{t}}(t)\log|z-t|^2\,dt_1dt_2$$

bulunur.

İntegral değişkenden bağımsız olduğundan

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w_{\bar{\zeta}}(\zeta)\log|\zeta-z|^2\,d\bar{\zeta}+\frac{1}{\pi}\int_{D} w_{\zeta\bar{\zeta}}(\zeta)\,|\zeta-z|^2\,d\xi d\eta$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

(2.13) formülünün elde edilmesi için (2.12) formülünde w yerine $\overline{w}$ alınıp bir düzenleme yapılabileceği belirtilmiştir. Benzer düşünce (2.26) ve (2.27) formülleri için uygulanırsa $w(z)$ için yeni dual formüller elde edilebilir. Gerçekten,

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}w_{\overline{\zeta}}(\zeta)\frac{\overline{\zeta}-\overline{z}}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{\pi}\int_{D}w_{\overline{\zeta}\overline{\zeta}}(\zeta)\frac{\overline{\zeta}-\overline{z}}{\zeta-z}d\xi d\eta$$

eşitliğinin kopleks eşleniği alınırsa

$$\overline{w}(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{\overline{w}(\zeta)}{\overline{\zeta}-\overline{z}}d\overline{\zeta}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\overline{w}_{\zeta}(\zeta)\frac{\zeta-z}{\overline{\zeta}-\overline{z}}d\overline{\zeta}+\frac{1}{\pi}\int_{D}\overline{w}_{\zeta\zeta}(\zeta)\frac{\zeta-z}{\overline{\zeta}-\overline{z}}d\xi d\eta$$

elde edilir. Bu formülde $\overline{w}$ yerine w yazılırsa

$$w(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{w(\zeta)}{\overline{\zeta}-\overline{z}}d\overline{\zeta}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}w_{\zeta}(\zeta)\frac{\zeta-z}{\overline{\zeta}-\overline{z}}d\overline{\zeta}+\frac{1}{\pi}\int_{D}w_{\zeta\zeta}(\zeta)\frac{\zeta-z}{\overline{\zeta}-\overline{z}}d\xi d\eta \qquad (2.34)$$

formülü ortaya çıkar. Yine (2.27) formülü olan

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}w_{\overline{\zeta}}(\zeta)\log|\zeta-z|^{2}\,d\overline{\zeta}+\frac{1}{\pi}\int_{D}w_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta)\log|\zeta-z|^{2}\,d\xi d\eta$$

eşitliğinin her iki tarafının kompleks eşleniği alınırsa

$$\overline{w(z)}=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{\overline{w(\zeta)}}{\overline{\zeta}-\overline{z}}d\overline{\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\overline{w}_{\zeta}(\zeta)\log|\zeta-z|^{2}\,d\zeta+\frac{1}{\pi}\int_{D}\overline{w}_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta)\log|\zeta-z|^{2}\,d\xi d\eta$$

elde edilir. Bu formülde $\overline{w}$ yerine w yazılırsa

$$w(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{w(\zeta)}{\overline{\zeta}-\overline{z}}d\overline{\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}w_{\zeta}(\zeta)\log|\zeta-z|^{2}\,d\zeta+$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{D}w_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta)\log|\zeta-z|^{2}\,d\xi d\eta \qquad (2.35)$$

bulunur. Bu da $w(z)$ nin bir başka integral gösterilimidir.

Cauchy - Riemann operatörü olan $\partial\overline{z}$ ve ∂z operatörleri için Cauchy ve anti-Cauchy çekirdekleri sırasıyla

$$\frac{1}{\zeta-z} \quad \text{ve} \quad \frac{1}{\overline{\zeta}-\overline{z}}$$

fonksiyonlarıdır. Böylece çekirdekler ve operatörlerden hareket ederek ikinci basamaktan $\partial^{2}\overline{z},\ \partial z\partial\overline{z},\ \partial^{2}z$ türev operatörleri için sırasıyla

$$\frac{\overline{\zeta}-\overline{z}}{\zeta-z},\ \log|\zeta-z|^{2},\ \frac{\zeta-z}{\overline{\zeta}-\overline{z}}$$

çekirdekleri elde edildi.

Begehr[10] in “A Hierarchy of Integral Operators”, Begehr[9] in “Complex Analytic Methods for Partial Differential Equations”, Begehr[11] in “Higher Order Cacuhy-Pompeiu Operator Theory for Complex and Hypercomplex Analysis” kitaplarından daha yüksek basamaktan integral operatörleri için (belli sırada) çekirdek fonksiyonları elde edildi ve yüksek basamaktan Cauchy - Pompeiu gösterim formülleri geliştirildi. Şimdi

$m,n\in\mathbb{Z},\ 0\le m^2+n^2$ olmak üzere

$$K_{m,n}(z,\zeta)=\begin{cases}\dfrac{(-1)^n(-m)!}{(n-1)!\ \pi}(\zeta-z)^{m-1}(\overline{\zeta}-\overline{z})^{n-1}, & m\le 0 \text{ için}\\[2ex] \dfrac{(-1)^m(-n)!}{(m-1)!\ \pi}(\zeta-z)^{m-1}(\overline{\zeta}-\overline{z})^{n-1}, & n\le 0 \text{ için}\\[2ex] \dfrac{(\zeta-z)^{m-1}(\overline{\zeta}-\overline{z})^{n-1}}{(m-1)!(n-1)!\pi}\left[\log|\zeta-z|^2-\sum\limits_{\mu=1}^{m-1}\dfrac{1}{\mu}-\sum\limits_{\nu-1}^{n-1}\dfrac{1}{\nu}\right], & 1\le m,n \text{ için}\end{cases}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Ayrıca $D\subset\mathbb{C}$ bir bölge, $f\in L_1(D;\ \mathbb{C})$ olmak üzere

$m=n=0$ için

$$T_{0,0}f(z)=f(z)$$

ve $(m,n)\neq(0,0)$ için

$$T_{m,n}f(z)=\int_D K_{m,n}(z,\zeta)f(\zeta)d\xi d\eta \tag{2.36}$$

integral dönüşümünü tanımlayalım. Şimdi (2.36) dönüşümünün bazı özel hallerini verelim.

Örnekler: $m=0,\ n=1$ ise $K_{0,1}(z,\zeta)=\dfrac{-1}{\pi(\zeta-z)}$ olacağından $f\in L_1(D;\ \mathbb{C})$ için

$$T_{0,1}f(z)=-\frac{1}{\pi}\int_D\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\xi d\eta$$

ve $m=1,\ n=0$ için $K_{1,0}(z,\zeta)=\dfrac{-1}{\pi(\overline{\zeta}-\overline{z})}$ olup

$$T_{1,0}f(z)=-\frac{1}{\pi}\int_D\frac{f(\zeta)}{\overline{\zeta}-\overline{z}}d\xi d\eta$$

elde edilir. $m=0,\ n=2$ için

$$K_{0,2}(z,\zeta)=\frac{(-1)^2(-0)!}{(2-1)!\pi}(\zeta-z)^{-1}(\overline{\zeta}-\overline{z})^{2-1}=\frac{\overline{\zeta}-\overline{z}}{\pi(\zeta-z)}$$

olup böylece

$$T_{0,2}f(z)=\frac{1}{\pi}\int_D\frac{(\overline{\zeta}-\overline{z})f(\zeta)}{\zeta-z}d\xi d\eta$$

bulunur. $m=2,\ n=0$ için

$$K_{2,0}(z,\zeta)=\frac{(-1)^2 0!}{1!\pi}(\zeta-z)^{2-1}(\overline{\zeta}-\overline{z})^{-1}=\frac{\zeta-z}{\pi(\overline{\zeta}-\overline{z})}$$

olup buradan

$$T_{2,0}f(z)=\frac{1}{\pi}\int_D\frac{(\zeta-z)f(\zeta)}{\overline{\zeta}-\overline{z}}d\xi d\eta\,;$$

$m=n=1$ için $K_{1,1}(z,\zeta)=\frac{1}{\pi}\log|\zeta-z|^2$ olacağından

$$T_{1,1}f(z)=\frac{1}{\pi}\int_D f(\zeta)\log|\zeta-z|^2 d\xi d\eta$$

elde edilir. $m=-1,\ n=1$ için

$$K_{-1,1}(z,\zeta)=\frac{(-1)^1(1)!}{0!\pi}(\zeta-z)^{-2}(\overline{\zeta}-\overline{z})^0=\frac{-1}{\pi(\zeta-z)^2}$$

olur ve buradan

$$T_{-1,1}f(z)=-\frac{1}{\pi}\int_D\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\xi d\eta\,;$$

$m=1,\ n=-1$ için

$$K_{1,-1}(z,\zeta)=\frac{(-1)^1(-(-1))!}{0!\pi}(\zeta-z)^0(\overline{\zeta}-\overline{z})^{-2}=\frac{-1}{\pi(\overline{\zeta}-\overline{z})^2}$$

olacağından

$$T_{1,-1}f(z)=-\frac{1}{\pi}\int_D\frac{f(\zeta)}{(\overline{\zeta}-\overline{z})^2}d\xi d\eta$$

elde edilir.

Bu örneklerden de görüldüğü gibi $m+n>0$ olduğu sürece $K_{m,n}(z,\zeta)$ çekirdek fonksiyonları zayıf singülerliğe sahiptir. Ancak $m+n=0$ ve $0<m^2+n^2$ olduğunda çekirdek fonksiyonu kuvvetli singülerliğe sahiptir. Bununla ilgili olan integraller ise kuvvetli singülerliğe sahip Calderon - Zygmund tipinden integraller olup bu tip integraller Cauchy Esas değeri anlamında mevcuttur. Bu integraller yüksek basamaktan kompleks kısmi türevli denklemlerin çözümünde kullanılır.

$m,n\geq 0$ olduğunda $K_{m,n}(z,\zeta)$ çekirdek fonksiyonları $\partial_{\overline{z}}{}^m\partial_z{}^n$ operatörleri için temel çözüm oluşturur.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

Schwarz - Poisson formülünde açıklandığı gibi sınır değer problemleri, bölge birim disk olduğunda kolayca çözülebilirdir. Ancak bölge birim disk olmayıp basit irtibatlı bir bölge için de sonuçlar geçerlidir. Çünkü bir $D \subset C$ sınırı düzgün basit irtibatlı bölgesi Riemann-Dönüşüm Teoremi yardımıyla birim diske dönüştürülebilir. (Rieman Dönüşüm Teoremi, herhangi basit irtibatlı bir bölgenin birim diske dönüştürülebileceğini ifade eder.)

3.1. Schwarz Sınır Değer Problemi

$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diskinde $w_{\bar{z}} = 0$ denkleminin

$$\operatorname{Re} w = \gamma(\partial\,\mathbb{D} \text{ de}),\quad \operatorname{Im} w(0) = c,\ \gamma \in C(\partial\,\mathbb{D}; \mathbb{R}),\ c \in \mathbb{R}$$

sınır koşullarını sağlayan $w(z)$ çözümünün bulunması problemi analitik fonksiyonlar için "Schwarz sınır değer problemi" olarak adlandırılır.

Teorem 3.1: $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ olmak üzere

$$w_{\bar{z}} = 0,\ z \in \mathbb{D}$$

$$\operatorname{Re} w(z) = \gamma(z)(\partial\,\mathbb{D} \text{ de}),\quad \gamma \in C(\partial\,\mathbb{D}; \mathbb{R}),\ \operatorname{Im} w(0) = c,\ c \in \mathbb{R}$$

Schwarz problemi tek çözüme sahiptir ve bu çözüm

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} + ic \tag{3.1}$$

formülü ile verilir.

İspat: Teoremin ispatı

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\left[\operatorname{Re}w(\zeta)\right]\left(\frac{2\zeta}{\zeta-z}-1\right)\frac{d\zeta}{\zeta}+i\operatorname{Im}w(0)$$

Schwarz – Poisson formülünden açıktır.

3.2. Dirichlet Sınır Değer Problemi

$\mathbb{D}=\{z\in \mathbb{C} : |z|<1\}$ birim diskinde $w_{\bar{z}}=0$ denkleminin

$$w=\gamma(z)\,(\partial\,\mathbb{D}\text{ de}),\ z\in\partial\,\mathbb{D},\ \gamma\in C(\partial\,\mathbb{D};\mathbb{C})$$

koşulunu sağlayan çözümünün bulunması problemine “Dirichlet sınır değer problemi” denir.

$$w_{\bar{z}}=0$$

denkleminin çözümleri analitik fonksiyonlardır. Dolayısıyla bu analitik fonksiyonlar için “Dirichlet sınır değer probleminin çözümü analitik bir fonksiyondur.

Teorem 3.2: $\mathbb{D}=\{z\in \mathbb{C} : |z|<1\}$, $\gamma\in C(\partial\,\mathbb{D};\ \mathbb{C})$ olmak üzere $\mathbb{D}$ bölgesinde $w_{\bar{z}}=0$ denkleminin

$$w=\gamma(z)(\partial\,\mathbb{D}\text{ de})$$

koşulunu sağlayan çözümünün mevcut olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\zeta=0 \qquad (3.2)$$

olmasıdır. Bu durumda da problemin tek çözümü

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z} \qquad (3.3)$$

Cauchy integral formülüdür.

Not: Cauchy İntegral formülünün hipotezleri altında $\Phi(z)$ fonksiyonu

$$\Phi^{+}(\tau) = \lim_{\substack{z\to\tau \\ z\in D^{+}}} \Phi(z), \qquad \Phi^{-}(\tau) = \lim_{\substack{z\to\tau \\ z\in D^{-}}} \Phi(z)$$

sınır değerlerine sahiptir. Burada D^{+}, $\partial D^{+} = \gamma$ ile sınırlanmış iç bölge, $\overline{D} = \hat{\mathbb{C}} \setminus (D^{+} \cup \gamma)$ ve $\hat{\mathbb{C}}$ Riemann küresidir. Ayrıca $\tau \in \gamma$ için

$$\Phi^{+}(\tau) = \frac{1}{2}\varphi(\tau) + \Phi(\tau)$$

$$\Phi^{-}(\tau) = -\frac{1}{2}\varphi(\tau) + \Phi(\tau)$$

olup, $\varphi(\tau)$ Cauchy esas değeri anlamındadır. Bu formüller Plemelj - Sokhotzki formülü olarak bilinir.

Plemelj - Sokhotzki formülünden [1, 12, 1] $|\zeta| = 1$ için

$$\lim_{z\to\zeta,\ |z|<1} w(z) - \lim_{z\to\zeta,\ 1<|z|} w\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) = \gamma(\zeta)$$

yazabiliriz.

$|\zeta| = 1$ iken

$$\lim_{z\to\zeta,\ |z|<1} w(z) = \gamma(\zeta)$$

olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{z\to\zeta,\ 1<|z|} w(z) = 0$$

olmasıdır. Ama, Plemelj - Sokhotzki formülünün klasik formülasyonu γ Hölder sürekliyse geçerlidir. Fakat, birim disk için Hölder süreklilik gerekli değildir.

İspat: $(\Rightarrow): w$, Dirichlet probleminin bir çözümü olsun.

Bu taktirde her $|\zeta|=1$ için $w, \mathbb{D}$ de analitik olup böylece

$$\lim_{z \to \zeta} w(z) = \gamma(\zeta) \tag{3.4}$$

sürekli sınır değerlerine sahiptir.

$|z|>1$ için

$$w\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta)\frac{\bar{z}d\zeta}{1-\bar{z}\zeta} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta)\frac{\bar{z}}{\bar{\zeta}-\bar{z}}\frac{d\zeta}{\zeta}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım.

$|z|>1$ iken z ler ζ ya yaklaştırıldığında $|\zeta|=1$ iken $1/\bar{z}$ de ζ ya yaklaşır. $\lim\limits_{z\to\zeta} w(1/\bar{z})$ mevcuttur. Ayrıca, $|z|>1$ için $\lim\limits_{z\to\zeta} w(z)$ limiti mevcuttur.

Diğer yandan,

$$w(z) - w\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta)\left(\frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}-\bar{z}} - 1\right)\frac{d\zeta}{\zeta}$$

olup Poisson çekirdeğinin özelliklerinden $|\zeta|=1$ için

$$\lim_{z\to\zeta,\ |z|<1} w(z) - \lim_{z\to\zeta,\ 1<|z|} w\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \gamma(\zeta) \tag{3.5}$$

elde edilir. (3.4) ile (3.5) karşılaştırılırsa $1<|z|$ için $\lim\limits_{\substack{z\to\zeta \\ |z|>1}} w(z) = 0$ olduğu görülür. $|z|>1$ olduğunda $w(\infty)=0$ ise analitik fonksiyonlar için maksimum prensibinden $\mathbb{C}$ de $w(z)\equiv 0$ olur. Buradan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\zeta = 0$$

bulunur.

$(\Leftarrow)$: (3.2) ve (3.3) taraf tarafa toplanırsa

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\left(\frac{\zeta}{\zeta-z}+\frac{\overline{z}}{\overline{\zeta}-\overline{z}}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\left(\frac{\zeta}{\zeta-z}+\frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}-\overline{z}}-1\right)\frac{d\zeta}{\zeta}$$

bulunur.

Böylece $|\zeta|=1$ için Poisson çekirdeğinin özelliklerinden

$$\lim_{z\to\zeta,\ |z|<1} w(z)=\gamma(\zeta)$$

olduğu görülür.

3.3. Neumann Sınır Değer Problemi

Üçüncü temel sınır değer problemi, regüler bir bölgenin sınırında dış normal doğrultudaki türeve dayanır. $|z-\alpha|=r$ diski üzerinde normal doğrultudaki türev, yarıçap vektörünün yönüdür. $\nu=(z-\alpha)/r$ dış normal vektördür ve bu yöndeki normal türev

$$\partial\nu=\partial r=\frac{z}{r}\partial z+\frac{\overline{z}}{r}\partial\overline{z}$$

ile verilir.

Özellikle $\mathbb{D}$ birim diski için

$$\partial r=z\partial z+\overline{z}\partial\overline{z}$$

dir.

$\mathbb{D}$ birim diskinde $w_{\overline{z}}=0$ denkleminin

$$\gamma\in C(\partial\,\mathbb{D};\mathbb{C}),\ c\in\mathbb{C}$$

olmak üzere

$$\partial_\nu w=\gamma(\partial\,\mathbb{D}\text{ de}),\ w(0)=c$$

koşullarını sağlayan çözümünün bulunması problemi analitik fonksiyonlar için "Neumann sınır değer problemi" olarak isimlendirilir.

Teorem 3.4: Neumann probleminin çözülebilir olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{(1-\bar{z}\zeta)\zeta}=0 \tag{3.6}$$

olmasıdır. Ayrıca bu çözüm

$$w(z)=c-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\log(1-z\bar{\zeta})\frac{d\zeta}{\zeta} \tag{3.7}$$

dir.

İspat: $w_{\bar{z}}=0$ olması nedeniyle sınır koşulu $|z|=1$ için

$$\partial_r w = z w_z + \bar{z} w_{\bar{z}} = z w'(z) = \gamma(z) \qquad |z|=1$$

Dirichlet koşuluna indirgenir. Böylece $zw'(z)$ analitik bir fonksiyon olduğundan önceki sonuçlar nedeniyle

$$zw'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}$$

olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\zeta=0 \tag{3.8}$$

olmasıdır.

$zw'(z)$ fonksiyonu orijinde sıfır olduğundan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}=0 \tag{3.9}$$

yazılabilir.

Bu taktirde

$$w'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{(\zeta-z)z}$$

olur. Gerçekten,

$$w'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{z(\zeta-z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{z(\zeta-z)}-\frac{1}{2\pi iz}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{1}{z}\left(\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta}\right)d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta(\zeta-z)}$$

dir.

Bunun her iki tarafının z ye göre integralini alırsak

$$w(z)=\frac{-1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\log\left(\frac{\zeta-z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}+c$$

ve böylece

$$w(z)=c-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\log\left(\frac{\zeta\overline{\zeta}-z\overline{\zeta}}{\zeta\overline{\zeta}}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}$$

$$=c-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\log\left(1-z\overline{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}$$

bulunur. Bu da istenilen (3.7) bağıntısıdır.

Diğer taraftan (3.8) ve (3.9) bağıntılarını toplarsak

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\left(\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}+\frac{1}{\zeta}\right)d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\gamma(\zeta)}{\zeta(1-\overline{z}\zeta)}d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\gamma(\zeta)\overline{\zeta}d\zeta}{1-\overline{z}\zeta}$$

$$=0$$

elde edilir.

Böylece (3.6) bağıntısı olan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{(1-\bar{z}\zeta)\zeta}=0$$

olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanmış olur.

(3.6) bağıntısı

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}-\bar{z}}=0$$

biçiminde yazılır. Bu son eşitliğin her iki tarafının $\bar{z}$ değişkenine göre integrali alınırsa

$$\int\frac{d\bar{z}}{\bar{\zeta}-\bar{z}}=-\int\frac{-d\bar{z}}{\bar{\zeta}-\bar{z}}=-\log(\bar{\zeta}-\bar{z})+\log\bar{\zeta}=\log\left(\frac{\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}-\bar{z}}\right)=\log\left(\frac{1}{1-\bar{z}\zeta}\right)$$

olacağından

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\log(1-\bar{z}\zeta)d\bar{\zeta}=0$$

elde edilir.

İleride bu bağıntı homogen olmayan Cauchy Riemann denklemi için kullanılacaktır. T operatörü kullanılarak problemler, analitik fonksiyonlar için verilen sınır değer problemine indirgelenebilir. Burada Neumann problemi için bir fark vardır. Sınır üzerindeki normal türev veya sadece fonksiyon üzerindeki $z\partial z$ nin etkisi önceden verilmelidir.

Teorem 3.5: (Homogen Olmayan Cauchy-Riemann Denklemi İçin Schwarz Problemi)

$\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ diskinde $w_{\bar{z}}=f$ homogen olmayan Cauchy Riemann denkleminin

$$\operatorname{Re}w(z)=\gamma(\partial\,\mathbb{D}\text{ de}),\ \operatorname{Im}w(0)=c$$

koşullarını sağlayan çözümü var ve bu çözüm

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}+ic-\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|<1}\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{\overline{f(\zeta)}}{\bar{\zeta}}\frac{1+z\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}}\right]d\xi d\eta \quad (3.10)$$

formülü yardımıyla tek olarak belirlenebilir.

İspat: (3.10) gösterilimi (2.19) den ve $w(z)$ çözümünün var olduğu varsayımından ortaya çıkar. Bu çözümün tek olduğu Teorem 3.1 den de ortaya çıkar.

Teorem 3.6: (Homogen Olmayan Cauchy-Riemann Denklemi İçin Dirichlet Problemi) $\mathbb{D}$ birim diskinde

$$w_{\bar{z}} = f \,, \qquad z \in \mathbb{D} \quad , \qquad f \in L_1(\mathbb{D}; \mathbb{C})$$

$$w(z) = \gamma(\partial \mathbb{D} \text{ de}), \; \gamma \in C(\partial \mathbb{D}; \mathbb{C})$$

olarak tanımlanan homogen olmayan Cauchy - Riemann denklemi için Dirichlet probleminin çözülebilir olması için gerek ve yeter şart $|z|<1$ birim diskinde

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta} d\zeta = \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta} d\xi d\eta \tag{3.11}$$

olmasıdır. Ayrıca bu Dirichlet probleminin tek çözümü

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \tag{3.12}$$

dir.

ispat: Eğer Dirichlet problemi çözülebilirse (3.12) gösterimi (2.12) den hemen elde edilir. Çözümün tekliği ise Teorem 3.2 den ortaya çıkar.

(3.11) koşulu altında (3.12) nin bir çözüm olduğu T operatörünün özellliğinden ve $|z|<1$ için

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \left(\frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} - 1 \right) \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}}{1 - \bar{z}\zeta} \right) d\xi d\eta = \gamma(z)$$

eşitliğinden elde edilir. Gerçekten analitik fonksiyonlar için sınır değer probleminin çözümü

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \left(\frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} - 1 \right) \frac{d\zeta}{\zeta}$$

dir.

Ayrıca disk üzerinden integralde

$$\frac{1}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta} = \frac{1-\bar{z}\zeta + \bar{z}\zeta - z\bar{z}}{(\zeta - z)(1-\bar{z}\zeta)}$$

olup $|z|=1$ için bu ifade sıfırdır. O halde, gereklilik Teorem 3.2 den ortaya çıkar. Çünkü,

$$\frac{\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}-\bar{z}} - 1 = \frac{\bar{z}}{\bar{\zeta}-\bar{z}} = \frac{\bar{z}\zeta}{1-\bar{z}\zeta}$$

olup Teorem 3.2 den

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\zeta = 0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta)\frac{\bar{z}\zeta}{1-\bar{z}\zeta}\frac{d\zeta}{\zeta}$$

bulunur. Böylece

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\left(\frac{\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}-\bar{z}} - 1\right)\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\bar{z}\zeta}{1-\bar{z}\zeta}\frac{d\zeta}{\zeta}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\zeta$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{\bar{z}f(\zeta)}{1-\bar{z}\zeta}d\xi d\eta$$

elde edilir.

(3.2) ile gösterilen $\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\zeta = 0$ koşulunu, $w - Tf$ analitik fonksiyonu için $\mathbb{D}$ deki sınır değer problemine yani $\partial\mathbb{D}$ sınırında $\gamma - Tf$ fonksiyonuna uygularsak (3.11) koşulu ortaya çıkar. Gerçekten (3.2) koşulunda γ yerine $\gamma - Tf$ alınırsa

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}(\gamma - Tf)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}Tf(\zeta)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \left[-\frac{1}{\pi} \int_{|t|<1} \frac{f(t)}{t-\zeta} dt_1 dt_2 \right] \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta} d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta} d\zeta + \frac{1}{\pi} \int_{|t|<1} f(t) \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta} \frac{d\zeta}{t-\zeta} dt_1 dt_2$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta} d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_{|t|<1} f(t) \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta-t} dt_1 dt_2$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta} d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_{|t|<1} f(t) \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}t} dt_1 dt_2$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta} d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta} d\xi d\eta = 0$$

olduğundan böylece

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta} d\zeta = \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta} d\xi d\eta$$

yani (3.11) eşitliği elde edilir. Çünkü,

$$f(\zeta) = \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}$$

dersek $f(\zeta)$, ζ ya göre analitiktir ve

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}}{\zeta - t} d\zeta = \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}t}$$

dir.

Teorem 3.7: (Homogen Olmayan Cauchy-Riemann Denklemi İçin Neumann Problemi) Birim diskte

$$w_{\bar{z}} = f, \qquad z \in \mathbb{D}$$

$$\partial_\nu w = \gamma(\partial\, \mathbb{D} \text{ de}),\ w(0) = c\,,\ f \in C^{\alpha}(\overline{\boldsymbol{D}}; \mathbb{C}),\ 0 < \alpha < 1\,,\ \gamma \in C(\partial\, \mathbb{D}; \mathbb{C}),\ c \in \mathbb{C}$$

şeklinde tanımlanan Neumann probleminin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul $|z|<1$ diskinde

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{(1-\bar{z}\zeta)\zeta}+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}f(\zeta)\frac{d\bar{\zeta}}{1-\bar{z}\zeta}+\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{\bar{z}f(\zeta)}{(1-\bar{z}\zeta)^2}d\xi d\eta=0 \qquad (3.13)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Ayrıca bu tek çözüm

$$w(z)=c-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\left[\gamma(\zeta)-\bar{\zeta}f(\zeta)\right]\log(1-z\bar{\zeta})\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{z}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{f(\zeta)}{\zeta(\zeta-z)}d\xi d\eta \qquad (3.14)$$

dir.

İspat: $\varphi=w-Tf$ fonksiyonu

$$\varphi_{\bar{z}}=0,\quad z\in\mathbb{D};\ \partial_\nu\varphi=[\gamma-(z\Pi f+\bar{z}f)](\partial\mathbb{D}\text{ de});\ \varphi(0)=c-Tf(0)$$

özelliklerini sağlar. Çünkü;

$$\frac{\partial}{\partial\nu}=z\partial z+\bar{z}\partial\bar{z}\quad\text{ve}\quad\partial_\nu w=\gamma(\partial\mathbb{D}\text{ de})$$

dir. Diğer taraftan $f\in C^\alpha(\overline{\boldsymbol{D}};\ \mathbb{C})$ için $\Pi f\in C^\alpha(\mathbb{D};\ \mathbb{C})$ idi. Bu durumda analitik fonksiyonlar için Neumann probleminin çözülebilirliğini ve çözümünü ifade eden Teorem 3.4 den dolayı φ çözümünün

$$\varphi(z)=c-Tf(0)-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\left[\gamma(\zeta)-\zeta\Pi f(\zeta)-\bar{\zeta}f(\zeta)\right]\log(1-z\bar{\zeta})\frac{d\zeta}{\zeta}$$

şeklinde olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\left[\gamma(\zeta)-\zeta\Pi f(\zeta)-\bar{\zeta}f(\zeta)\right]\frac{d\zeta}{(1-\bar{z}\zeta)\zeta}=0$$

olmasıdır. Diğer taraftan,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\zeta\Pi f(\zeta)\log(1-z\bar{\zeta})\frac{d\zeta}{\zeta}=-\frac{1}{\pi}\int_{|t|<1}f(t)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\log(1-z\bar{\zeta})}{(\zeta-t)^2}d\zeta\right]dt_1dt_2;\ t=t_1+t_2$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{|t|<1}f(t)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\log(1-z\bar{\zeta})}{(1-t\bar{\zeta})^2}d\bar{\zeta}\right]dt_1dt_2=0$$

dır.

NOT: $d\zeta = \frac{-\zeta}{\overline{\zeta}} d\overline{\zeta} = \frac{-\zeta\overline{\zeta}}{(\overline{\zeta})^2} d\overline{\zeta} = -\frac{d\overline{\zeta}}{(\overline{\zeta})^2}, \frac{d\zeta}{(\zeta - t)^2} = \frac{-d\overline{\zeta}}{(\zeta - t)^2(\overline{\zeta})^2} = \frac{-d\overline{\zeta}}{(1 - t\overline{\zeta})^2}$

olup buradan,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} \Pi f(\zeta)\frac{d\zeta}{1-\overline{z}\zeta} = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|<1} f(t)\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{d\zeta}{(\zeta - t)^2(1-\overline{z}\zeta)}\right]dt_1 dt_2$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|<1} f(t)\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{1-\overline{z}\zeta}\right)\Bigg|_{\zeta=t} dt_1 dt_2$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1} f(\zeta)\frac{\overline{z}}{(1-\overline{z}\zeta)^2} d\xi d\eta$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|<1} f(t)\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}t} dt_1 dt_2$$

yazılabilir. Gerçekten Cauchy türev formülünden

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\frac{1}{1-\overline{z}\zeta}}{(\zeta - t)^2} = \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{1-\overline{z}\zeta}\right)\Bigg|_{\zeta=t} = \frac{\overline{z}}{(1-\overline{z}t)^2}$$

dir. Böylece

$$\varphi(z) = c - Tf(0) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\left[\gamma(\zeta) - \overline{\zeta} f(\zeta)\right]\log(1 - z\overline{\zeta})\frac{d\zeta}{\zeta}$$

olur. Buradan

$$w - Tf = c - Tf(0) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\left[\gamma(\zeta) - \overline{\zeta} f(\zeta)\right]\log(1 - z\overline{\zeta})\frac{d\zeta}{\zeta}$$

bulunur. O halde

$$w = c + Tf + \frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\frac{f(\zeta)}{\zeta} d\xi d\eta - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\left[\gamma(\zeta) - \overline{\zeta} f(\zeta)\right]\log(1 - z\overline{\zeta})\frac{d\zeta}{\zeta}$$

$$= c - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \left[\gamma(\zeta) - \overline{\zeta} f(\zeta)\right] \log(1 - z\overline{\zeta}) \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta + \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\xi d\eta$$

$$= c - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \left[\gamma(\zeta) - \overline{\zeta} f(\zeta)\right] \log(1 - z\overline{\zeta}) \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \left[\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta}\right] d\xi d\eta$$

$$= c - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \left[\gamma(\zeta) - \overline{\zeta} f(\zeta)\right] \log(1 - z\overline{\zeta}) \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \frac{z}{\zeta(\zeta - z)} d\xi d\eta$$

$$= c - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \left[\gamma(\zeta) - \overline{\zeta} f(\zeta)\right] \log(1 - z\overline{\zeta}) \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{z f(\zeta)}{\zeta(\zeta - z)} d\xi d\eta$$

yazılabilir.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \left[\gamma(\zeta) - \zeta \Pi f(\zeta) - \overline{\zeta} f(\zeta)\right] \frac{d\zeta}{(1 - \bar{z}\zeta)\zeta} = 0 \text{ koşulundan}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \left[\gamma(\zeta) - \overline{\zeta} f(\zeta)\right] \frac{d\zeta}{(1 - \bar{z}\zeta)\zeta} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \Pi f(\zeta) \frac{d\zeta}{1 - \bar{z}\zeta} = 0$$

olup son terim

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \Pi f(\zeta) \frac{d\zeta}{1 - \bar{z}\zeta} = -\frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{\bar{z} f(\zeta)}{(1 - \bar{z}\zeta)^2} d\xi d\eta$$

idi. Böylece çözülebilme koşulu

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta(1 - \bar{z}\zeta)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\overline{\zeta} f(\zeta)}{\zeta(1 - \bar{z}\zeta)} d\zeta + \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{\bar{z} f(\zeta)}{(1 - \bar{z}\zeta)^2} d\xi d\eta = 0$$

olur. Diğer taraftan,

$$\frac{\overline{\zeta}}{\zeta} d\zeta = -d\overline{\zeta}$$

olduğundan ve ortadaki terim

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{1 - \bar{z}\zeta} \frac{\overline{\zeta} d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{1 - \bar{z}\zeta} d\overline{\zeta}$$

olarak yazılabildiğinden çözülebilme koşulu

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta(1 - \bar{z}\zeta)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{1 - \bar{z}\zeta} d\overline{\zeta} + \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{\bar{z} f(\zeta)}{(1 - \bar{z}\zeta)^2} d\xi d\eta = 0$$

şekline gelir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.8: $f \in C^{\alpha}(\overline{\boldsymbol{D}};\ \mathbb{C}),\ 0<\alpha<1,\ \ \gamma \in C(\partial\,\mathbb{D};\mathbb{C}),\ c\in\ \mathbb{C}$ olmak üzere

$$w_{\bar{z}} = f\ , \qquad\qquad z\in\mathbb{D}$$

$$zw_z = \gamma(\partial\,\mathbb{D}\text{ de})\ \ w(0)=c$$

probleminin çözülebilir olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{(1-\bar{z}\zeta)\zeta}+\frac{\bar{z}}{\pi}\int_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{(1-\bar{z}\zeta)^2}=0 \tag{3.15}$$

olmasıdır. Bu durumda tek çözüm

$$w(z)=c-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\log(1-z\overline{\zeta})\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{z}{\pi}\int_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta(\zeta-z)}$$

dır.

İspat: $\varphi = w - Tf$ dersek φ fonksiyonu

$$\varphi_{\bar{z}}=0,\quad z\in D$$

$$\left[z\varphi'(z)=\gamma-z\Pi f\right](\partial\,\mathbb{D}\text{ de}),\quad \varphi(0)=c-Tf(0)$$

probleminin çözümü olur. Diğer taraftan,

$$\varphi' = w_z - \Pi f$$

$$z\varphi' = zw_z - z\Pi f$$

dir.

Analitik fonksiyonlar için $\partial\nu$ normal türev operatörü

$$zw'(z)=\gamma(z),\qquad |\,z\,|=1$$

şekline gelmesi nedeniyle Teorem 3.4 deki

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{(1-\bar{z}\zeta)\zeta}=0$$

koşulu altında

$$w(z) = c - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \log(1 - z\overline{\zeta}) \frac{d\zeta}{\zeta}$$

çözümü φ için yapılırsa çözülebilme koşulu

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{(1-\overline{z}\zeta)\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} [\gamma - \zeta \Pi f(\zeta)] \frac{d\zeta}{(1-\overline{z}\zeta)\zeta}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{(1-\overline{z}\zeta)\zeta} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \zeta \Pi f(\zeta) \frac{d\zeta}{(1-\overline{z}\zeta)\zeta}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{(1-\overline{z}\zeta)\zeta} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \Pi f(\zeta) \frac{d\zeta}{(1-\overline{z}\zeta)}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{(1-\overline{z}\zeta)\zeta} + \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{\overline{z} f(\zeta)}{(1-\overline{z}\zeta)^2} d\xi d\eta = 0$$

olur. Böylece çözülebilme koşulu

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{(1-\overline{z}\zeta)\zeta} + \frac{\overline{z}}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{f(\zeta)}{(1-\overline{z}\zeta)^2} d\xi d\eta = 0$$

olarak bulunur.

$$(\partial_\nu \varphi(z) = (z\varphi_z + \overline{z}\varphi_{\overline{z}}) = z\varphi'(z) = \gamma - z\Pi f)\ (\partial\, \mathbb{D} \text{ de})$$

olup Teorem 3.4 den

$$\varphi(z) = c - Tf(0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} [\gamma - \zeta \Pi f(\zeta)] \log(1 - z\overline{\zeta}) \frac{d\zeta}{\zeta}$$

$$= c + \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\xi d\eta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \log(1 - z\overline{\zeta}) \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \Pi f(\zeta) \log(1 - z\overline{\zeta}) d\zeta$$

$$= c - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \log(1 - z\overline{\zeta}) \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\xi d\eta$$

yazılabilir.

$$w(z) = \varphi(z) + Tf(z)$$

olduğundan

$$w(z)=c-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\log(1-z\overline{\zeta})\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{f(\zeta)}{\zeta}d\xi d\eta-\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\xi d\eta$$

$$=c-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\log(1-z\overline{\zeta})\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}f(\zeta)\left[\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta}\right]d\xi d\eta$$

$$=c-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\log(1-z\overline{\zeta})\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{zf(\zeta)}{\zeta(\zeta-z)}d\xi d\eta$$

olup böylece çözüm

$$w(z)=c-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\log(1-z\overline{\zeta})\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{z}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{f(\zeta)}{\zeta(\zeta-z)}d\xi d\eta$$

olarak bulunur.

4. q- GAMMA VE q-BETA FONKSİYONLARININ İNTEGRAL GÖSTERİMLERİ

4.1. Giriş

Tezin buraya kadar olan kısmında klasikleşmiş kompleks kısmi türevli denklemler için sınır-değer problemlerinin bazılarını inceledik. İleri bir aşama olarak bu sınır-değer problemlerinin q-analizinde nasıl ortaya konulabileceğini araştırmak istiyoruz. Bunun için önce q-analizinin temel özelliklerini ortaya koymak gerekir.

4.2. Temel Özellikler

1) $a\in\mathbb{R}$ olmak üzere a reel sayısının q-analoğu

$$[a]_q=\frac{1-q^a}{1-q}, \qquad q\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$$

dir.

2) $n\in\mathbb{N}$ için

$$[n]_q!=[1]_q[2]_q...[n]_q$$

$$=\frac{1-q}{1-q}\frac{1-q^2}{1-q}...\frac{1-q^n}{1-q}$$

dir.

3) $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q=\frac{[n]_q!}{[n-k]_q!\,[k]_q!}$

dir.

4) $x, y \in \mathbb{R},\ 0 < q < 1,\ k \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$xq = qx$$
$$yq = qy$$
$$y^k x = q^k x y^k$$

dir.

5) $a \in \mathbb{R},\ 0 < q < 1$ olmak üzere

$$(a, q)_k = (1-a)(1-aq)...(1-aq^{k-1})$$

dir.

Tanım 4.1: Bir f fonksiyonunun $[0, a]$ aralığındaki q integrali

$$\int_0^a f(x) d_q x = (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} f(aq^n)(aq^n)$$

dir.

Tanım 4.2: f fonksiyonunun sınırsız aralıktaki q integrali

$$\int_0^{\infty/A} f(x) d_q x = (1-q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^n}{A} f\left(\frac{q^n}{A}\right)$$

dir.

Teorem 4.1: $|x| < 1,\ |q| < 1,\ (a;q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty} (1-aq^k)$ olmak üzere,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} x^k = \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty} \tag{4.1}$$

dir.

İspat: $f_a(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a;q)_k}{(q;q)_k}x^k$ olsun.

Buradan,

$$f_a(x)-f_a(qx)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a;q)_k}{(q;q)_k}x^k-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a;q)_k}{(q;q)_k}q^k x^k$$

yazılabilir. Son yazılan eşitliğin sağ tarafındaki her iki seri de yakınsak olduğundan böylece

$$f_a(x)-f_a(qx)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a;q)_k}{(q;q)_k}(1-q^k)x^k$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}\frac{f_a(x)-f_a(qx)}{x}&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a;q)_k}{(q;q)_k}(1-q^k)x^{k-1}\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-a)(1-aq)...(1-aq^{k-1})}{(1-q)(1-q^2)...(1-q^k)}(1-q^k)x^{k-1}\\
&=(1-a)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-aq)(1-aq^2)...(1-aq^{k-1})}{(1-q)(1-q^2)...(1-q^k)}(1-q^k)x^{k-1}\\
&=(1-a)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(aq;q)_{k-1}}{(q;q)_{k-1}}\frac{(1-q^k)}{(1-q^k)}x^{k-1}\\
&=(1-a)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(aq;q)_{k-1}}{(q;q)_{k-1}}x^{k-1}\\
&=(1-a)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(aq;q)_k}{(q;q)_k}x^k\\
&=(1-a)f_{aq}(x)\end{aligned}$$

olup buradan

$$f_a(x)-f_a(qx)=(1-a)x\,f_{aq}(x) \tag{4.2}$$

bulunur. Ayrıca

$$f_a(x)-f_{aq}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a;q)_k}{(q;q)_k}x^k-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(aq;q)_k}{(q;q)_k}x^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(q;q)_k}\left[(a;q)_k-(aq;q)_k\right]x^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(q;q)_k}\left[(1-a)(1-aq)...(1-aq^{k-1})-(1-aq)(1-aq^2)...(1-aq^k)\right]x^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(q;q)_k}\left[(1-aq)(1-aq^2)...(1-aq^{k-1})\right]\left[1-a-(1-aq^k)\right]x^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(aq;q)_{k-1}}{(q;q)_k}\left[1-a-1+aq^k\right]x^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(aq;q)_{k-1}}{(q;q)_k}(-a+aq^k)\,x^k$$

$$=-a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(aq;q)_{k-1}}{(q;q)_k}(1-q^k)\,x^k$$

$$=-a\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(aq;q)_{k-1}}{(q;q)_k}(1-q^k)\,x^k$$

$$=-a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(aq;q)_k}{(q;q)_{k+1}}(1-q^{k+1})\,x^{k+1}$$

$$=-ax\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-aq)(1-aq^2)...(1-aq^k)}{(1-q)(1-q^2)...(1-q^{k+1})}(1-q^{k+1})\,x^k$$

$$=-ax\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(aq;q)_k}{(q;q)_k}\,x^k$$

$$=-axf_{aq}(x)$$

olup buradan

$$f_a(x)=(1-ax)f_{aq}(x) \tag{4.3}$$

elde edilir. (4.2) ve (4.3) den

$$f_a(x) = (1-a)xf_{aq}(x) + f_a(qx)$$

$$= (1-a)x\frac{f_a(x)}{1-ax} + f_a(qx)$$

$$= \frac{x-ax}{1-ax} f_a(x) + f_a(qx)$$

olup

$$f_a(x) = \frac{x-ax}{1-ax} f_a(x) + f_a(qx)$$

elde edilir. Buradan

$$f_a(x) = \frac{(1-ax)}{1-x} f_a(qx) \tag{4.4}$$

yazılabilir.

Bu bağıntı ardışık olarak n- defa uygulanırsa

$$f_a(x) = \frac{1-ax}{1-x}\frac{1-aqx}{1-qx} f_a(q^2x)$$

$$= \frac{1-ax}{1-x}\frac{1-aqx}{1-qx}\frac{1-aq^2x}{1-q^2x} f_a(q^3x)$$

$$= \frac{(1-ax)(1-aqx)...(1-aq^{n-1}x)}{(1-x)(1-qx)...(1-q^{n-1}x)} f_a(q^n x)$$

$$= \frac{(ax;q)_n}{(x;q)_n} f_a(q^n x)$$

$$= \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty} f_a(0)$$

$$= \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}$$

olup böylece

$$f_a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} x^k = \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty} \tag{4.5}$$

elde edilir ki, bu da ispatı tamamlar. Binom Teoremi olarak adlandırılan Teorem 4.1 den aşağıdaki sonuçları elde edebiliriz:

Sonuçlar

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(q;q)_n}=\frac{1}{(x;q)_\infty}$ $\qquad |x|<1,\ |q|<1$

dir.

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{\binom{n}{2}}x^n}{(q;q)_n}=(x;q)_\infty$

c) $\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix} N \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^k q^{\binom{k}{2}}x^k=(x;q)_N$

d) $\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix} N+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k=\frac{1}{(x;q)_N},$ $\qquad |x|<1$

dir.

Şimdi ise Gamma ve Beta integralinin $q-$analoğunu bulurken de işimize yarayacak olan

$$(a+b)_q^n=\prod_{j=0}^{n-1}(a+q^j b) \qquad n\in\mathbb{Z}_+ \tag{4.6}$$

$$(1+a)_q^\infty=\prod_{j=0}^{\infty}(1+q^j a) \tag{4.7}$$

$$(1+a)_q^t=\frac{(1+a)_q^\infty}{(1+q^t a)_q^\infty} \quad t\in C \tag{4.8}$$

notasyonlarını dikkate alalım.

4.3. q- Gamma Fonksiyonu

Euler Gamma fonksiyonunun bir q- analoğu

$$\Gamma_q(t)=\frac{(q;q)_\infty}{(q^t;q)_\infty}(1-q)^{1-t} \tag{4.9}$$

şeklinde verilir. Bu ise

$$\Gamma_q(t)=\int_0^{\frac{1}{1-q}} x^{t-1}E_q^{-qx}\,d_qx \tag{4.10}$$

integral gösterilimine denktir.

Gerçekten, q-integral tanımından

$$\int_0^{\frac{1}{1-q}} x^{t-1}E_q^{-qx}\,d_qx=(1-q)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q^j}{1-q}f\left(\frac{q^j}{1-q}\right)$$

$$=(1-q)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q^j}{1-q}\frac{q^{j(t-1)}}{(1-q)^{t-1}}E_q^{-\frac{q^{j+1}}{1-q}}$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q^{jt}}{(1-q)^{t-1}}E_q^{-\frac{q^{j+1}}{1-q}}$$

$$=\frac{1}{(1-q)^{t-1}}\sum_{j=0}^{\infty}q^{jt}E_q-\frac{q^{j+1}}{1-q}$$

$$=\frac{1}{(1-q)^{t-1}}\sum_{j=0}^{\infty}q^{jt}(q^{j+1};q)_\infty \tag{4.11}$$

dir. Diğer yandan,

$$\sum_{j=0}^{\infty}q^{jt}(q^{j+1};q)_\infty=\lim_{n\to\infty}S_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}q^{kt}(q^{k+1};q)_\infty\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{(q;q)_\infty + q^t(q^2;q)_\infty + ... + q^{nt}(q^{n+1};q)_\infty\right\}$$

$$= (q;q)_\infty \lim_{n\to\infty}\left\{1 + \frac{q^t}{1-q} + ... + \frac{q^{nt}}{(1-q)(1-q^2)...(1-q^n)}\right\}$$

$$= (q;q)_\infty \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{q^{kt}}{(q;q)_k}\right\} \tag{4.12}$$

$$= (q;q)_\infty \frac{1}{(q^t;q)_\infty}$$

dir.

(4.12), (4.11) de yerine yazılırsa

$$\Gamma_q(t) = \int_0^{\frac{1}{1-q}} x^{t-1} E_q^{-qx}\, d_q x = \frac{(q;q)_\infty}{(q^t;q)_\infty}(1-q)^{1-t}$$

olduğu görülür.

4.4. Beta İntegralinin q- Analoğu

Tanım 4.1:

$$\beta_q(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}\frac{(qx;q)_\infty}{(q^\beta x;q)_\infty}\, d_q x \tag{4.13}$$

ifadesine Beta İntegralinin q-analoğu denir.

Beta integralinin q-analoğunu, gamma fonksiyonlarının analogları cinsinden elde edebiliriz. Gerçekten

$$\beta_q(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}\frac{(qx;q)_\infty}{(q^\beta x;q)_\infty}\, d_q x$$

$$= (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^{n(\alpha-1)}\frac{(q^{n+1};q)_\infty}{(q^{\beta+n};q)_\infty} q^n$$

$$=(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^{n\alpha-n}\frac{(q^{n+1};q)_\infty}{(q^\beta q^n;q)_\infty}q^n$$

olduğundan

$$\beta_q(\alpha,\beta)=(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^{n\alpha-n}\frac{(q^{n+1};q)_\infty}{(q^\beta q^n;q)_\infty}q^n \tag{4.14}$$

yazılabilir. (4.11) de q^α yerine x, q^β yerine a yazarsak;

$$\beta_q(\alpha,\beta)=(1-q)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^{n+1};q)_\infty}{(q^n a;q)_\infty}x^n \tag{4.15}$$

elde edilir. Şimdi $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^{n+1};q)_\infty}{(q^n a;q)_\infty}x^n$ toplamını bulalım:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^{n+1};q)_\infty}{(q^n a;q)_\infty}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-q^{n+1})(1-q^{n+1}q)...(1-q^{n+1}q^{k-1})...}{(1-q^n a)(1-q^n aq)...(1-q^n aq^{k-1})...}x^n$$

$$=\frac{(1-q)(1-q^2)...(1-q^k)...}{(1-a)(1-aq)...(1-aq^{k-1})...}$$

$$+\frac{(1-q^2)(1-q^3)...(1-q^{k+1})...}{(1-qa)(1-q^2a)...(1-q^k a)...}x$$

$$+...+\frac{(1-q^{k+1})(1-q^{k+2})...(1-q^{2k})...}{(1-q^k a)(1-q^{k+1}a)...(1-q^{2k-1}a)...}x^k$$

$$+...$$

$$=\frac{(1-q)(1-q^2)...(1-q^k)...}{(1-a)(1-aq)...(1-aq^k)...}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-a)(1-aq)...(1-aq^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)...(1-q^n)}x^n$$

$$=\frac{(q;q)_\infty}{(a;q)_\infty}\frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}$$

olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(q^{n+1};q)_\infty}{(q^n a;q)_\infty}x^n=\frac{(q;q)_\infty(ax;q)_\infty}{(a;q)_\infty(x;q)_\infty} \tag{4.16}$$

bulunur. (4.16), (4.15) de yerine yazılırsa

$$\beta_q(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}\frac{(qx;q)_\infty}{(q^\beta x;q)_\infty}d_qx=\frac{(1-q)(ax;q)_\infty(q;q)_\infty}{(x;q)_\infty(a;q)_\infty} \tag{4.17}$$

elde edilir. (4.17) de x yerine q^α, a yerine q^β yazılırsa

$$\beta_q(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}\frac{(qx;q)_\infty}{(q^\beta x;q)_\infty}d_qx$$

$$=(1-q)\frac{(q^{\alpha+\beta};q)_\infty(q;q)_\infty}{(q^\beta;q)_\infty(q^\alpha;q)_\infty}$$

$$=\frac{\dfrac{(q;q)_\infty(1-q)^{1-\alpha}}{(q^\alpha;q)_\infty}\;\dfrac{(q;q)_\infty(1-q)^{1-\beta}}{(q^\beta;q)_\infty}}{\dfrac{(q;q)_\infty(1-q)^{1-(\alpha+\beta)}}{(q^{\alpha+\beta};q)_\infty}}$$

$$=\frac{\Gamma q(\alpha)\Gamma q(\beta)}{\Gamma q(\alpha+\beta)}$$

bulunur. O halde,

$$\beta_q(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma q(\alpha).\Gamma q(\beta)}{\Gamma q(\alpha+\beta)} \tag{4.18}$$

dir.

4.5. Üstel Fonksiyonun *q*- Analoğu

Üstel fonksiyonun iki tane q-analoğu vardır ve bunlar

$$E_q^x=\sum_{n=0}^{\infty}q^{n(n-1)/2}\frac{x^n}{[n]!}=(1+(1-q)x)_q^\infty \tag{4.19}$$

$$e_q^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{[n]!}=\frac{1}{(1-(1-q)x)_q^\infty} \tag{4.20}$$

şeklindedir. Şimdi bu eşitlikleri elde etmeye çalışalım:

Sonuç b) de x yerine $-(1-q)x$ yazarsak;

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n-1)/2} \frac{x^n}{\frac{(q;q)_n}{(1-q)^n}} = (-(1-q)x;q)_\infty$$

bulunur. Bu ise (4.19) un doğru olduğunu gösterir.

Sonuç a) da x yerine $(1-q)x$ yazılırsa (4.20) kolayca elde edilir.

Gamma fonksiyonunun sınırlı aralık için $q-$ analog gösterilimini elde ettik. Aralık sınırsız olduğunda Gamma fonksiyonunun $q-$ analoğunu bulmak istiyoruz. Bunun için öncelikle

$$K(x;t) = \frac{x^t}{1+x}\left(1+\frac{1}{x}\right)_q^t (1+x)_q^{1-t} \tag{4.21}$$

çekirdek fonksiyonunu göz önüne almak gerekir.

4.6. *K(x;t)* Fonksiyonunun Özellikleri

1) $K(x;t)$ fonksiyonu x değişkenine göre bir $q-$ sabittir.

2) $K(x;t) = q^{t(t-1)/2}$ dir.

3) $\lim\limits_{q\to 0} K(x;t) = x^{t-1} + x^t$ dır.

İspat: 1) $K(qx;t) = K(x;t)$ olduğunu göstereceğiz.

$$\left(1+\frac{1}{qx}\right)_q^t = \frac{1+\frac{1}{qx}}{1+\frac{q^{t-1}}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)_q^t$$

$$(1+qx)_q^{1-t} = \frac{1+q^{1-t}x}{1+x}(1+x)_q^{1-t}$$

bağıntıları

$$K(qx;t)=\frac{(qx)^t}{1+qx}\left(1+\frac{1}{qx}\right)_q^t(1+qx)_q^{1-t}$$

ifadesinde yerine yazılırsa

$$K(qx;t)=\frac{q^t x^t}{1+qx}\,\frac{1+qx}{qx}\,\frac{x}{x+q^{t-1}}\,\frac{1+q^{1-t}x}{1+x}\left(1+\frac{1}{x}\right)_q^t(1+x)_q^{1-t}$$

$$=\frac{q^{t-1}(1+q^{1-t}x)}{x+q^{t-1}}\,\frac{x^t}{1+x}\left(1+\frac{1}{x}\right)_q^t(1+x)_q^{1-t}$$

$$=\frac{x^t}{1+x}\left(1+\frac{1}{x}\right)_q^t(1+x)_q^{1-t}$$

$$=K(x;t)$$

bulunur.

2) $K(x;t)=\dfrac{x^t}{1+x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)_q^t(1+x)_q^{1-t}$

$$=\frac{x^t}{1+x}\,\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)_q^\infty}{\left(1+\frac{q^t}{x}\right)_q^\infty}\,\frac{(1+x)_q^\infty}{\left(1+q^{1-t}x\right)_q^\infty}$$

$$=\frac{x^t}{1+x}\,\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{q}{x}\right)\ldots\left(1+\frac{q^t}{x}\right)\ldots}{\left(1+\frac{q^t}{x}\right)\left(1+\frac{q^{t+1}}{x}\right)\ldots}\,\frac{(1+x)(1+qx)\ldots}{(1+q^{1-t}x)\,(1+q^{2-t})\ldots(1+x)\ldots}$$

$$=\frac{(x+q)\left(x+q^2\right)\ldots\left(x+q^{t-1}\right)}{\left(1+q^{-1}x\right)\left(1+q^{-2}x\right)\ldots\left(1+q^{1-t}x\right)}$$

$$=q^{1+2+\ldots+t-1}\,\frac{(x+q)\left(x+q^2\right)\ldots\left(x+q^{t-1}\right)}{(x+q)\left(x+q^2\right)\ldots\left(x+q^{t-1}\right)}$$

$$=q^{t(t-1)/2}$$

dir.

3) $\lim\limits_{q\to 0} K(x;t) = \lim\limits_{q\to 0} \dfrac{x^t}{1+x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)_q^t (1+x)_q^{1-t}$

$$= \lim_{q\to 0} \frac{x^t}{1+x} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)_q^\infty}{\left(1+\frac{q^t}{x}\right)_q^\infty} \frac{(1+x)_q^\infty}{(1+q^{1-t}x)_q^\infty}$$

$$= \frac{x^t}{1+x} \lim_{q\to 0} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)_q^\infty (1+x)_q^\infty}{\left(1+\frac{q^t}{x}\right)_q^\infty (1+q^{1-t}x)_q^\infty}$$

$$= \frac{x^t}{1+x} \frac{\lim\limits_{q\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)_q^\infty (1+x)_q^\infty}{\lim\limits_{q\to 0}\left(1+\frac{q^t}{x}\right)_q^\infty (1+q^{1-t}x)_q^\infty}$$

$$= \frac{x^t}{1+x}\left(1+\frac{1}{x}\right)(1+x)$$

$$= x^{t-1} + x^t$$

dir.

Sınırsız aralıkta Gamma fonksiyonunun $q-$integrali

$$\Gamma_q(t) = K(A,t) \int_0^{\infty/A(1-q)} x^{t-1} e_q^{-x} d_q x \tag{4.22}$$

biçimindedir. Şimdi bunu görelim:

f fonksiyonunun $q-$integrali tanımında

$$f(x) = x^{t-1} e_q^{-x}$$

alınırsa;

$$K(A;t)\int_0^{\infty/A(1-q)} x^{t-1}e_q^{-x}d_qx = K(A;t)(1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{q^n}{A(1-q)}\frac{q^{n(t-1)}e_q^{\frac{-q^n}{A(1-q)}}}{A^{t-1}(1-q)^{t-1}}$$

$$=\frac{K(A;t)}{A^t(1-q)^{t-1}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{nt}e_q^{\frac{-q^n}{A(1-q)}}$$

$$=\frac{q^{t(t-1)/2}}{A^t(1-q)^{t-1}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{q^{nt}}{\left(1+\frac{q^n}{A}\right)_q^{\infty}}$$

$$=\frac{q^{t(t-1)/2}}{A^t(1-q)^{t-1}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{q^{nt}}{\left(-\frac{q^n}{A};q\right)_\infty} \tag{4.23}$$

elde edilir. Şimdi

$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{q^{nt}}{\left(-\frac{q^n}{A};q\right)_\infty}$ toplamını hesaplayalım. Bunun için

Ramanujan özdeşliğinden yararlanacağız.

Ramanujan özdeşliğinin

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(bq^n;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty}x^n=\frac{(ax;q)_\infty(q/ax;q)_\infty(q;q)_\infty(b/a;q)_\infty}{(a;q)_\infty(q/a;q)_\infty(x;q)_\infty(b/ax;q)_\infty}$$

olduğunu biliyoruz. Burada $x=q^t$, $b=0$, $a=-\frac{1}{A}$ alırsak;

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{q^{nt}}{(-\frac{q^n}{A};q)_\infty}=\frac{\left(-\frac{q^t}{A};q\right)_\infty(-Aq^{1-t};q)_\infty(q;q)_\infty}{\left(-\frac{1}{A};q\right)_\infty(-Aq;q)_\infty(q^t;q)_\infty}$$

$$=\frac{(1+A_q{}^{1-t})(1+Aq^{2-t})...(1+A)\,(q;q)_\infty}{\left(1+\frac{1}{A}\right)(1+\frac{q}{A})...\left(1+\frac{q^{t-1}}{A}\right)(q^t;q)_\infty}$$

$$=\frac{A^t(1+Aq^{1-t})(1+Aq^{2-t})...(1+A)\,(q;q)_\infty}{(A+1)(A+q)...(A+q^{t-1})(q^t;q)_\infty}$$

$$=\frac{A^t q^{t-1}(1+Aq^{1-t})q^{t-2}(1+Aq^{2-t})...q(1+Aq^{-1})(A+1)(q;q)_\infty}{q^{t(t-1)/2}(A+q^{t-1})(A+q^{t-2})...(A+1)(q^t;q)_\infty}$$

$$=\frac{A^t\;(q;q)_\infty}{q^{t(t-1)/2}(q^t;q)_\infty}$$

bulunur. Bu bulunan değer (4.23) de yerine yazılırsa

$$K(A,t)\int_0^{\infty/A(1-q)} x^{t-1}e_q^{-x}d_qx=\frac{(q;q)_\infty}{(q^t;q)_\infty}(1-q)^{1-t}=\Gamma_q(t)$$

elde edilir.

4.7. Sınırsız Aralıkta Beta İntegralinin q- Analoğu

Sınırsız aralıkta Beta integralinin $q-$analoğu

$$\beta_q(t,s)=K(A,t)\int_0^{\infty/A}\frac{x^{t-1}}{(1+x)_q^{t+s}}d_qx \tag{4.24}$$

biçimindedir. Bunu görmek için yine $q-$integralinin tanımından ve Ramanujan özdeşliğinden yararlanacağız.

O halde, $\dfrac{x^{t-1}}{(1+x)_q^{t+s}}$ fonksiyonunun $(0,\infty/A)$ aralığındaki $q-$integralinin tanımından

$$K(A,t)\int_0^{\infty/A}\frac{x^{t-1}}{(1+x)_q^{t+s}}d_qx=K(A,t)\,(1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{q^n}{A}\frac{q^{n(t-1)}}{A^{t-1}\left(1+\frac{q^n}{A}\right)_q^{t+s}}$$

$$= K(A,t)\frac{(1-q)}{A^t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{q^{nt}\left(-\frac{q^{n+t+s}}{A};q\right)_\infty}{\left(-\frac{q^n}{A};q\right)_\infty} \tag{4.25}$$

yazılabilir. Ramanujan özdeşliğinde

$$x = q^t,\ a = -\frac{1}{A},\ b = -\frac{q^{t+s}}{A}$$

alırsak;

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{q^{nt}\left(-\frac{q^{n+t+s}}{A};q\right)_\infty}{\left(-\frac{q^n}{A};q\right)_\infty} = \frac{\left(-\frac{q^t}{A};q\right)_\infty (-A_q{}^{1-t};q)_\infty (q;q_\infty)(q^{t+s};q_\infty)}{\left(-\frac{1}{A};q\right)_\infty (-Aq;q)_\infty (q^t;q)_\infty (q^s;q)_\infty}$$

$$= \frac{A^t\ (q;q)_\infty\ (q^{t+s};q)_\infty}{q^{t(t-1)/2}\ (q^t;q)_\infty\ (q^s;q)_\infty}$$

bulunur. Bu son bulunan toplam değeri (4.25) de yerine yazılırsa

$$K(A,t)\int_0^{\infty/A}\frac{x^{t-1}}{(1+x)_q^{t+s}}d_qx = \frac{q^{t(t-1)/2)}(1-q)\,A^t(q;q)_\infty(q^{t+s};q)_\infty}{A^t\ q^{t(t-1)/2}\ (q^t;q)_\infty(q^s;q)_\infty}$$

$$= \frac{(1-q)\,(q;q)_\infty(q^{s+t};q)_\infty}{(q^t;q)_\infty(q^s;q)_\infty}$$

$$= \frac{\frac{(q;q)_\infty}{(q^t;q)_\infty}(1-q)^{1-t}\ \frac{(q;q)_\infty}{(q^s;q)_\infty}(1-q)^{1-s}}{\frac{(q;q)_\infty}{(q^{s+t};q)_\infty}(1-q)^{-t-s}}$$

$$= \frac{\Gamma_q(t)\Gamma_q(s)}{\Gamma_q(t+s)}$$

$$= \beta_q(t,s)$$

elde edilir.

Ayrıca $\Gamma_q(t)$ için (4.10) formülü, genelleştirilmiş integral aracılığıyla

$$\Gamma_q(t) = \int_0^{\infty/1-q} x^{t-1} E_q^{-qx} d_q x$$

$$= (1-q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^n}{1-q} \frac{q^{n(t-1)}}{(1-q)^{t-1}} E_q^{\frac{-q^{n+1}}{1-q}}$$

$$= (1-q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{nt}}{(1-q)^t} E_q^{\frac{-q^{n+1}}{1-q}}$$

$$= \frac{1}{(1-q)^{t-1}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{nt} E_q^{\frac{-q^{n+1}}{1-q}}$$

$$= \frac{1}{(1-q)^{t-1}} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{nt} E_q^{\frac{-q^{n+1}}{1-q}} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{nt} E_q^{\frac{-q^{n+1}}{1-q}} \right\}$$

$$= \frac{1}{(1-q)^{t-1}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{nt} E_q^{\frac{-q^{n+1}}{1-q}}$$

biçiminde yazılabilir. Çünkü, $n < 0$ için

$$E_q^{\frac{-q^{n+1}}{1-q}} = (1-q^{n+1})_q^{\infty} = 0$$

dır.

$$\Gamma_q(t) = \int_0^{\infty/1-q} x^{t-1} E_q^{-qx} d_q x$$

gösteriliminde $\infty/1-q$ yerine ∞ alınırsa ıraksak bir seri elde edilir. Yani f fonksiyonunun sınırsız aralıktaki q integrali

$$\int_0^{\infty} f(x) d_q x = (1-q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(q^n) q^n$$

biçiminde alınırsa yukarıdaki seri ıraksak çıkar. Gerçekten, $f(x) = x^{t-1}\ E_q^{-qx}$ alarak bunu görelim:

$$\int_0^{\infty} x^{t-1} E_q^{-qx} d_q x = (1-q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n(t-1)} E_q^{-q^{n+1}} q^n$$

$$= (1-q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{nt} E_q^{-q^{n+1}}$$

$$= (1-q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{nt} (1-(1-q)q^{n+1})_q^{\infty}$$

dir. Diğer yandan Raabe Testinden, pozitif terimli bir $\sum a_k$ serisi verildiğinde

$$\lim_{k\to\infty} k\left(\frac{a_{k+1}}{a_k} - 1\right) = s$$

olmak üzere

i) $s < -1$ iken $\sum a_k < \infty$,

ii) $s > -1$ iken $\sum a_k$ serisi ıraksaktır

yazabiliriz.

$\sum_{n=0}^{\infty} q^{nt} (1-(1-q)q^{n+1})_q^{\infty}$ pozitif terimleri serisine Raabe Testini uygularsak

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{q^{(n+1)t}\ (1-(1-q)q^{n+2})_q^{\infty}}{q^{nt}\ (1-(1-q)q^{n+1})_q^{\infty}} - 1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{q^t}{(1-(1-q)q^{n+1})_q^{\infty}} - 1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n(q^t - 1)$$

$$= \infty$$

bulunur. Bu ise $\sum_{n=0}^{\infty} q^{nt} (1-(1-q)q^{n+1})_q^{\infty}$ serisinin ıraksak olduğunu gösterir.

Dolayısıyla $\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{nt} (1-(1-q)q^{n+1})_q^{\infty}$ serisi de ıraksaktır.

Şimdi f fonksiyonunun $q-$integralinin hangi koşullar altında mevcut olduğunu araştıralım.

Not: f fonksiyonunun sınırlı aralıktaki $q-$ integralinin

$$\int_0^a f(x)d_qx=(1-q)\sum_{n=0}^{\infty}q^n af(q^n a)$$

olduğunu biliyoruz. Buradaki serinin yakınsak olması için $x=0$ ın sağ komşuluğunda $c>0,\ \alpha>-1$ için

$$|f(x)|<cx^{\alpha}$$

olmalıdır. f fonksiyonunun sınırsız aralıktaki integralinin

$$\int_0^{\infty/A} f(x)d_qx=(1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{q^n}{A}f\left(\frac{q^n}{A}\right)$$

olduğunu biliyoruz. Bu serinin yakınsak olması için

$\forall x\in[0,\varepsilon),\ c>0,\ \alpha>-1,\ \varepsilon>0$ iken

$$|f(x)|<cx^{\alpha}$$

ve

$D>0\quad \beta<-1\quad N>0\quad \forall x\in[N,\infty)$ iken

$$|f(x)|<Dx^{\beta}$$

olması yeterlidir.

Teorem 4.2: $q-$integrallenebilir bir f fonkisyonunun $q-$integrali için

a) $\displaystyle\int_0^A f(x)d_qx=\int_{q/A}^{\infty/A}\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)d_qx$

b) $\displaystyle\int_0^{\infty/A} f(x)d_qx=\int_0^{\infty.A}\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)d_qx$

özellikleri geçerlidir.

İspat: a) $$\int_{q/A}^{\infty/A}\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)d_qx=\int_0^{\infty/A}\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)d_qx-\int_0^{q/A}\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)d_qx$$

$$=(1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{q^n}{A}\frac{A^2}{q^{2n}}f\left(\frac{A}{q^n}\right)-\int_0^{A^{-1}/q^{-1}}\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)d_qx$$

$$=(1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{A}{q^n}f\left(\frac{A}{q^n}\right)-(1-q)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^{-1}q^n}{A^{-2}q^{2n}}f\left(\frac{A}{q^n}\right)$$

$$=(1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{A}{q^n}f\left(\frac{A}{q^n}\right)-(1-q)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A}{q^n}f\left(\frac{A}{q^n}\right)$$

$$=(1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{A}{q^n}f\left(\frac{A}{q^n}\right)$$

$$=(1-q)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A}{q^{-n}}f\left(\frac{A}{q^{-n}}\right)$$

$$=(1-q)\sum_{n=0}^{\infty}Aq^nf(Aq^n)$$

$$=\int_0^A f(x)d_qx$$

dır.

b) $\int_0^{\infty/A}f(x)d_qx=(1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{q^n}{A}f\left(\frac{q^n}{A}\right)$ olduğundan

$$\int_0^{\infty.A}f(x)d_qx=(1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^nAf(q^nA)$$

dir. O halde,

$$\int_0^{\infty.A}\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)d_qx=(1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{q^nA}{q^{2n}A^2}f\left(\frac{1}{q^nA}\right)$$

$$= (1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{q^n A} f\left(\frac{1}{q^n A}\right)$$

$$= (1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{q^{-n} A} f\left(\frac{1}{q^{-n} A}\right)$$

$$= (1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^n}{A} f\left(\frac{q^n}{A}\right)$$

$$= \int_0^{\infty/A} f(x)d_q x$$

dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım 4.3: f verilmiş bir fonksiyon olmak üzere

$$\frac{f(qx)-f(x)}{qx-x}$$

oranına f in $q-$türevi denir ve

$$D_q f(x) = \frac{f(qx)-f(x)}{qx-x}$$

şeklinde gösterilir.

Teorem 4.3: $n \in \mathbb{Z}_+$ ve $t, s, a, b, A, B \in \mathbb{R}$ olsun. Bu taktirde,

1) $D_q x^t = [t]x^{t-1}$,

2) $D_q (Ax+b)_q^n = [n]A(Ax+b)_q^{n-1}$,

3) $D_q (a+Bx)_q^n = [n]B(a+Bqx)_q^{n-1}$,

4) $D_q (1+Bx)_q^t = [t]B(1+Bqx)_q^{t-1}$,

5) $D_q \dfrac{Ax^s}{(1+Bx)_q^t} = [s]\dfrac{Ax^{s-1}}{(1+Bx)_q^{t+1}} - B([t]-[s])\dfrac{Ax^s}{(1+Bx)_q^{t+1}}$

dir.

İspat: Tanım 4.3 den hareketle (4.6), (4.7) ve (4.8) eşitliklerinin göz önüne alınmasıyla

$$1)\ D_q x^t = \frac{q^t x^t - x^t}{x(q-1)} = \frac{x^t(q^t-1)}{x(q-1)} = x^{t-1}\frac{(1-q^t)}{1-q} = [t]x^{t-1}$$

olur.

$$2)\ D_q(Ax+b)_q^n = \frac{(Aqx+b)_q^n - (Ax+b)_q^n}{x(q-1)}$$

yazabiliriz. Diğer yandan,

$$(Aqx+b)_q^n = (Aqx+b)(Aqx+qb)...(Aqx+q^{n-1}b)$$

$$= (Aqx+b)q(Ax+b)...q(Ax+q^{n-2}b)$$

$$= q^{n-1}(Aqx+b)(Ax+b)...(Ax+q^{n-2}b)$$

$$(Ax+b)_q^n = (Ax+b)(Ax+qb)...(Ax+q^{n-1}b)$$

dır. Buradan da

$$(Aqx+b)_q^n - (Ax+b)_q^n = (Ax+b)(Ax+qb)...(Ax+q^{n-2}b)\left[q^{n-1}(Aqx+b) - (Ax+q^{n-1}b)\right]$$

$$= (Ax+b)(Ax+qb)...(Ax+q^{n-2}b)\left[Aq^n x + bq^{n-1} - Ax - q^{n-1}b\right]$$

$$= (Ax+b)_q^{n-1}\quad Ax(q^n-1)$$

olup bulunan bu değer $q-$türev tanımında yazılırsa

$$D_q(Ax+b)_q^n = \frac{(Ax+b)_q^{n-1}Ax(q^n-1)}{x(q-1)}$$

$$= (Ax+b)_q^{n-1}A\frac{(1-q^n)}{1-q}$$

$$= (Ax+b)_q^{n-1}A[n]$$

elde edilir.

3) Benzer şekilde $q-$ türev tanımından

$$D_q(a+Bx)_q^n = \frac{(a+Bqx)_q - (a+Bx)_q^n}{x(q-1)}$$

yazılabilir. Diğer yandan,

$$(a+Bqx)_q^n = (a+Bqx)(a+Bq^2x)...(a+Bq^nx)$$

$$(a+Bx)_q^n = (a+Bx)(a+Bqx)...(a+Bq^{n-1}x)$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$(a+Bqx)_q^n - (a+Bx)_q^n = (a+Bqx)(a+Bq^2x)...(a+Bq^{n-1}x)\big[(a+Bq^nx)-(a+Bx)\big]$$

$$= (a+Bqx)_q^{n-1}B(q^n-1)$$

elde edilir. Bu değer $q-$ türev tanımında yerine yazılırsa

$$D_q(a+Bx)_q^n = \frac{(a+Bqx)_q^{n-1}Bx(q^n-1)}{x(q-1)}$$

$$= B(a+Bqx)_q^{n-1}\frac{(1-q^n)}{1-q}$$

$$= [n]B(a+Bqx)_q^{n-1}$$

bulunur.

4) $q-$ türev tanımından

$$D_q(1+Bx)_q^t = \frac{(1+Bqx)_q^t - (1+Bx)_q^t}{x(q-1)}$$

dır. Ayrıca,

$$(1+Bqx)_q^t = \frac{(1+Bqx)_q^\infty}{(1+Bq^{t+1}x)_q^\infty} = \frac{(1+Bqx)(1+Bq^2x)...(1+Bq^tx)(1+Bq^{t+t}x)...}{(1+Bq^{t+1}x)(1+Bq^{t+2}x)...}$$

$$= (1+Bqx)(1+Bq^2x)...(1+Bq^tx)$$

$$(1+Bqx)_q^t = \frac{(1+Bx)_q^\infty}{(1+Bq^t x)_q^\infty} = \frac{(1+Bx)(1+Bqx)...(1+Bq^{t-1}x)(1+Bq^t x)...}{(1+Bq^t x)(1+Bq^{t+1}x)...}$$

$$= (1+Bx)(1+Bqx)...(1+Bq^{t-1}x)$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$(1+Bqx)_q^t - (1+Bx)_q^t = (1+Bqx)(1+Bq^2x)...(1+Bq^{t-1}x)\left[(1+Bq^t x) - (1+Bx)\right]$$

$$= (1+Bqx)_q^{t-1} Bx(q^t - 1)$$

olup bu son bulunan değer $q-$ türev tanımında yazılırsa,

$$D_q(1+Bx)_q^t = \frac{Bx(1+Bqx)_q^{t-1}(q^t - 1)}{x(q-1)}$$

$$= B(1+Bqx)_q^{t-1}\frac{(1-q^t)}{1-q}$$

$$= B(1+Bqx)_q^{t-1}[t]$$

bulunur.

5) $q-$ türev tanımından

$$D_q \frac{Ax^s}{(1+Bx)_q^t} = \frac{\dfrac{A^s x^s}{(1+Bqx)_q^t} - \dfrac{Ax^s}{(1+Bx)_q^t}}{x(q-1)}$$

yazılabilir. Diğer yandan,

$$\frac{Aq^s x^s}{(1+Bqx)_q^t} = \frac{A^s x^s}{\dfrac{(1+Bqx)_q^\infty}{(1+Bq^{t+1}x)_q^\infty}} = Aq^s x^s \frac{(1+Bq^{t+1}x)_q^\infty}{(1+Bqx)_q^\infty}$$

$$= Aq^s x^s \frac{(1+Bq^{t+1}x)(1+Bq^{t+2}x)...}{(1+Bqx)(1+Bq^2x)...(1+Bq^t x)(1+Bq^{t+1}x)...}$$

$$= \frac{Aq^s x^s}{(1+Bqx)(1+Bq^2x)...(1+Bq^t x)}$$

$$\frac{Ax^s}{(1+Bx)_q^t} = \frac{Ax^s}{\dfrac{(1+Bx)_q^\infty}{(1+Bq^t x)_q^\infty}} = Ax^s \frac{(1+Bq^t x)_q^\infty}{(1+Bx)_q^\infty}$$

$$= Ax^s \frac{(1+Bq^t x)(1+Bq^{t+1}x)...}{(1+Bx)(1+Bqx)...(1+Bq^{t-1}x)(1+Bq^t x)...}$$

$$= \frac{Ax^s}{(1+Bx)(1+Bqx)...(1+Bq^{t-1}x)}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$\frac{Aq^s x^s}{(1+Bqx)_q^t} - \frac{Ax^s}{(1+Bx)_q^t} = \frac{Ax^s}{(1+Bqx)(1+Bq^2x)...(1+Bq^{t-1}x)}\left[\frac{q^s}{1+Bq^t x} - \frac{1}{1+Bx}\right]$$

olup bu son bulunan değer $q-$ türev tanımında yerine yazılırsa

$$D_q \frac{Ax^s}{(1+Bx)_q^t} = \frac{Ax^s}{(1+Bx)(1+Bqx)...(1+Bq^t x)}\left[\frac{(q^s-1)+Bx(q^s-q^t)}{x(q-1)}\right]$$

$$= \frac{Ax^{s-1}}{(1+Bx)(1+Bqx)...(1+Bq^t x)}\left[\frac{1-q^s}{1-q} + Bx\frac{q^s-1-q^t+1}{q-1}\right]$$

$$= \frac{Ax^{s-1}}{(1+Bx)q^{t+1}}[s] + \frac{BAx^s}{(1+Bx)q^{t+1}}\left[\frac{1-q^s}{1-q} - \frac{1-q^t}{1-q}\right]$$

$$= \frac{[s]Ax^{s-1}}{(1+Bx)q^{t+1}} - B\big([t]-[s]\big)\frac{Ax^s}{(1+Bx)q^{t+1}}$$

elde edilir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde önce kompleks analizdeki temel Türev Operatörleri ortaya konmuş ve daha sonra bu operatörler yardımıyla yazılabilen homogen ve homogen olmayan Cauchy-Riemann denklemleri için Dirichlet, Schwarz ve Neumann sınır değer problemleri incelenmiştir. Bu problemlerin en temeli yani hareket noktası $w_{\bar{z}} = 0$ homogen Cauchy-Riemann denklemi için incelenen sınır değer problemidir. Diğer problemler buna dayanarak incelenir. Bu problemler klasik anlamda Cauchy-İntegral formülü ve bunun değişik versiyonları yardımıyla çözülmektedir. Diğer taraftan kompleks eğrisel integraller, bir aralıkta tanımlanan Riemann İntegraline dönüştürülerek hesaplanmaktadır. Bilindiği gibi bir $f(x)$ fonksiyonunun $q-$integrali de bir aralıkta Riemann İntegraline benzer bir tanımla verilmektedir.

Bu tezde verilen ve klasik anlamda eğrisel integrallerle incelenen problemlerin $q-$analizinde incelenmesi henüz yapılmamıştır. İleri bir aşama ve araştırma konusu olarak Homogen Cauchy-Riemann denklemi için sınır-değer problemi $q-$analizi metotları ile incelenebilir. Bunun için önce Cacuhy-İntegral formülünün $q-$analizindeki karşılığını belirlemek gerekir.

KAYNAKLAR

1. H.A. Schwarz, Zur Integration der partiellen Differentialgleichung $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = 0$. J.reine angew. Math. **74** (1872), 218-253.
2. A. Calderon and A. Zygmund, On the Existence of Certain Singular Integrals, Acta Math. **88**, 85-139, 1952.
3. I.N. Vekua, Generalized Analytic Functions, Pergamon Press, Oxford, 1962.
4. F.D. Gakhov, Boundary Value Problems, Pergamon Press, Oxford, 1966.
5. W. Tutschke, Lösung nichtlinearer parteller Differentialgleichungssysteme erster Ordnung in der Ebene durch Verwendung einer komplexen Normalform, Math. Nachr., **75**, 283-298, 1976.
6. W. Tutschke, Partielle komplexe Differentialgleichungen in einer und mehreren komplexe Variablen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1977.
7. W. Tutschke, Partielle Differentialgleichungen, klassische, Funktionalanalytische und komplexe Methoden, TEUBNER-TEXTE zur Mathematik, Bond **27**, 1983.
8. N.J. Muskhelishvili, Singular Integral Equations. Dover, New York, 1992.
9. H. Begehr, Complex Analytic Methods for Partial Differential Equations, World Scientific, Singapore. New Jersey, London, Hong Kong, 1994.
10. H. Begehr, A Hierarchy of Integral Operators, Rocky Mountain J. Math, **27**, 669-706, 1997.

11. H. Begehr and G.N. Hile, Higher Order Cacuhy-Pompeiu Operator Theory for Complex and Hypercomplex Analysis, Eds. E. Ramirez de Arellano et ol. Contemp. Math, **212**, 41-49, 1998.
12. G. Andrews, R. Askey, R. Roy, Special Functions, volume **71**, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
13. W. Tutschke, Funktionentheorie 2, TU Graz, 2000.
14. H. Begehr and C.J. Vanegas, Neumann Problem in complex analysis, Proc. **11**, 2003
15. H. Begehr, Boundary Value Problems in Complex Analysis I, II, Boletin de la Asociacion Matematica Venezolana, Vol. **XII**, No:1, 2005.