T.C.

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÖRGÜ KAVRAMI VE MİNİMUM GEÇİŞLİ 3-ÖRGÜLER

OSMAN KARTAL

HAZİRAN 2007

ÖZET

ÖRGÜ KAVRAMI VE MİNİMUM GEÇİŞLİ 3-ÖRGÜLER

KARTAL, Osman

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Hakan Şimşek

Şubat 2007, 60 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır. İkinci bölümde bazı temel tanımlar ve kavramlar ile örgünün tanımı hakkında kısa bilgi verildi. Artin örgü temsili ve Konfigürasyon uzayına bağlı tanımı verildi. Konfigürasyon uzayı incelendi. Üçüncü bölümde ise, $N = 3$ ifadesine yönelik bir algoritma irdelenecektir. n-bileşenli örgü verildiği zaman minimal uzunluğa sahip, B, Artin örgü temsilini bulan algoritma için bir örnek verildi. Minimal geçişli örgü elde etme problemi notasyon olarak çözümde ve çizimde ekonomik yollar vermektedir. Artin örgü kelimesinin uzunluğu ile bahsedilen kavram örgü diyagramında verilen geçitlerin sayısıdır. Minimum geçit sayısı örgünün kompleksliğiyle ilgili bir ölçüt verir. Fiziksel anlamda ise toplam manyetik alanların büyüklüğünün tahmini için kullanılmaktadır. Dördüncü bölüm ise tartışma ve sonuç için ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Örgü, Düğüm Teorisi, Artin Temsili, Wraplar

ABSTRACT

BRAID CONCEPT AND MINIMUM CROSSING WITH 3-BRAIDS

KARTAL, Osman

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Deparment of Mathematics, M. Sc. Thesis

Supervisor : Asst. Prof. Dr. Hakan Şimşek

February 2007, 60 pages

This work (thesis work) is classified into four sections. The first section is allocated to foreword. In second section some basic definitions and concepts also definition of braid with it are mentioned in brief. Braid description of Artin is introduced and definition of this description in related to configuration space is also made. We researched on that configuration space in this section too. In third section a algorithm based on $N = 3$ valve will be scrutinized. If a braid with component n is given, B braid description of Artin in minimal length sets an example for algorithm. The problem of obtaining minimal crossing braid offers as notation economical ways in solution and diagram. The concept denoted by length of word of Artin braid is the number of crossing in braid diagram. Minimum number of crossing sets a criteria of complexity of braid. It is used in physical sense for estimation purpose of size of complete magnetic surfaces. Last section is allocated to discussion and conclusion.

Key Words: Braid, Knot Theory, Description of Artin, Wraps

TEŞEKKÜR

Hazırlamış olduğum bu tezde bana yol gösteren ve hiçbir yardımını esirgemeyen saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Hakan Şimşek Bey'e, tüm hayatım boyunca bana daima maddi ve manevi destek sağlayan aileme ve bu süreçte bana her konuda yardımcı olan Doç. Dr. Ahmet Kartal ve Levent Kartal'a teşekkürü bir borç bilirim.

ŞEKİL DİZİNİ

ŞEKİL

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Örgüler, insanlığın en eski buluşları arasında yer alır. Onlar pratik amaçlı olarak halat yapımında, saç örgüsünde, desen dokumaların dekorasyonunda hatta kutsal mekanlarda bile kullanılmıştır.

Matematiğe konu olarak girmesi, ilk defa 1891 yılında Hurtwitz'in bir belgesinde üstü kapalı bir fikir olarak yer almıştır. Gerçek anlamda 1925 senesinde bir belgede Alman Matematikçi Emil Artin tarafından gerçekleştirilmiştir. [1930 yılları başında, düğümler çalışması olarak Emil Artin (matematiksel) örgüler kavramını ortaya attığını söyleyenlerde vardı.] Artin, örgüleri düğüm teorisi ve bağıntılarını araştırmak için kullanmıştır. Düğüm teorisindeki önemli problemlerden birisi düğümleri sınıflandırmaktır. En basit düğüm olan yonca düğümü, kendi içine bükülen bir dairedir ve üç geçişi vardır. Matematikçiler düğümleri, geçiş sayılarına -ipi bir yüzeye koyduğunuzda kendi üzerinden geçtiği yerlerin sayısı- göre sınıflandırırlar. Aynı zamanda 13 ya da daha az geçişi olan 13 bin kadar düğüm sınıflandırmışlardır. Eğer her düğüme farklı bir isim eşlenebilseydi, düğümleri birbirinden ayırmak kolay olurdu.

1950 yıllarında örgü kavramı diğer alanlarda kullanılmaya başlanarak örgü çalışmalarına yeni bir ivme kazandırdı. Mesela biyoloji de –DNA çalışmalarında- kullanılmaktadır. DNA sarmalları kopyalanırken ve yeniden birleştirilirken düğümler ve halkalar oluştururlar, daha sonra hücre bölünmesinde düzleşirler.

Düğüm teorisinin en soyut uygulamalarından biri de parçacık fiziği alanındadır. Diğer taraftan üstün bir başarıyla Artin'in orijinal amacını ve örgünün kullanım alanını, teorisini sağlamlaştırmak için V. John uygulamaya koymuştur. 1980'lerin başında, Vaughaan Jones, değişmezlik polinomu denilen düğümleri isimlendirmekte kullanabilen bir çeşit cebir ifadesi ortaya çıkardı. Bu bir polinomun diğerinden farklı olduğunu göstermekteydi, yani bu şekilde matematikçiler bunu farklı düğümleri birbirinden ayırmak için kullandı. Böyle gelişmeler ve daha fazlası 13-26 Temmuz 1986 yılında, Santa Cruz'da gerçekleştirilen Artin'in örgü grupları üzerindeki bir toplantıya konu olmuştur ve konferansta (J.S. Birman ve A. Libgober tarafından düzenlenmiş) AMS Çağdaş Matematik serileri arasında yer alan 78 cilt olarak toplantı tutanakları ortaya çıkmıştır. Günümüzde ise, bazı matematiksel konularda örgülerin kullanılması mevcuttur: Topoloji (düğümler, bağlantılar, sabit nokta teorisi), geometri, dinamik sistemler gibi...

1.1. Kaynak Özetleri

Birinci ve ikinci bölümde temel kavramları verirken Knot theory and its application (K. Murasugi), Braids and Coverings (V. L. Hansen) adlı kitaplardan yararlanılmıştır.

Üçüncü bölümde ise, temel olarak Mimimum crossing numbers for 3-braids (M. Berger, J. Phys) adlı makalesinden ve Theory of braids (E. Martin), The third order braids invariants ve Energy-crossing number relations for magnetic fields (M. Berger), Braids and Coverings (V. L. Hansen), Configuration spaces (E. Fadell ve L. Neuwirth), Braids and links and mapping class groups (J. Birman) adlı kitaplardan yararlanılmıştır.

1.2. Çalışmanın Amacı

Biz burada bir 3-bileşenli bir örgüye yönelik Berger'in ortaya çıkardığı bir algoritmayı araştırdık. Bu algoritma bir 3-örgü verildiğinde bu örgüden, minimal geçişe sahip bir örgüyü elde etme işlemini gerçekleştirmektedir. Aynı zamanda düğümden örgünün elde edilmesi ile konfigürasyon uzayı incelendi. Örgülerin kelime problemi hakkında kısa bilgi verildi.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Temel Tanım ve Kavramlar

Tanım 2.1.1 : Tanım kümesindeki her bir öğeyi değer kümesinde bir tek noktaya götüren kurala fonksiyon ya da dönüşüm denir. $f : A \to B$ bir fonksiyon olsun. Küme olarak bu kural

$$f = \{(x, y) : y = f(x)\}$$

biçiminde verilir.

Tanım 2.1.2 : (X, τ) bir topolojik uzay, $\mathrm{I} = [a,b] \subset R$ birim kapalı aralık öyle ki üzerinde R den indirgenen alışılmış topoloji olsun. $x, y \in X$ olmak üzere $f(a) = x$ ve $f(b) = y$ olacak şekilde I dan X e sürekli bir f fonksiyonu varsa $(f : \mathrm{I} \to X)$, f fonksiyonuna x den y ye bir eğri (veya yol) denir. x noktasına eğrinin başlangıç noktası, y noktasına da eğrinin bitim noktası denir.

Eğer $f(a) = x = f(b) = y$ ise, eğriye kapalı eğri denir. Eğer $f(a) = x = f(b)$ ve f fonksiyonu a, b noktaları hariç birebir (1-1) ise, f ye basit kapalı eğri (Jordan eğrisi) denir.

Tanım 2.1.3 : Permütasyonlar, nesnelerin sıralanışıdır. $r, n \in N$ ve $r \leq n$ olmak üzere, n elemanlı bir A kümesinin birbirinden farklı r elemanlarının her bir sıralanışına (dizilişine) A kümesinin r-li permütasyonu veya herhangi bir A kümesinden A kümesine bire-bir ve örten bir fonksiyona A nın bir permütasyonu denir.

Tanım 2.1.4 : $(G,\circ)$ matematik yapısı aşağıdaki aksiyonları sağlarsa bu matematik yapıya grup denir.

G1) G kümesi "$\circ$" işlemine göre kapalıdır.

$$\forall x, y \in G \Rightarrow x \circ y \in G$$

G2) "$\circ$" işleminin birleşme özeliği vardır.

$$\forall x, y, z \in G \Rightarrow x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$$

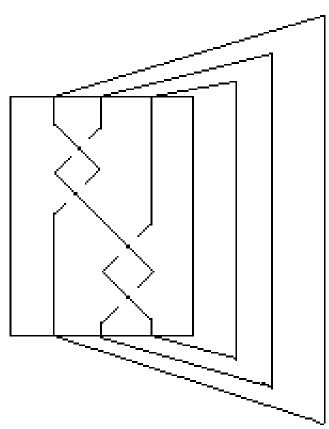
G3) G kümesinin "$\circ$" işlemine göre etkisiz (birim) elemanı vardır.

$$(\forall x \in G \quad ve \quad \exists e \in G) \Rightarrow x \circ e = e \circ x = x$$

G4) G nin her elemanının "$\circ$" işlemine göre bir tersi vardır.

$$(\forall x \in G \quad ve \quad \exists y \in G) \Rightarrow x \circ y = y \circ x = e$$

Tanım 2.1.5 : Bir örgü verildiğinde bu örgüden bir düğüm elde edilebilir. Bir α-örgüsünün bir dikdörtgen şeklindeki diyagramının tepesinde yer alan $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ noktalarını aynı diyagramın tabanında yer alan her biri ayrı ayrı $\mathrm{A}_1^{'}, \mathrm{A}_2^{'}, \ldots, \mathrm{A}_n^{'}$ noktalarına bağlayalım. Bu noktaları kare dışında uzanan eğrilerin grubuyla bağlar isek,



Şekil 2.1 Düğüm Teorisi

bu takdirde doğal yolla bir örgüden düğümü veya düğümün düzenli diyagramını oluştururuz. Bu yolla elde edilmiş bir düğüme, düğümün regüler diyagramı denir.

Tanım 2.1.6 : Bir düğüm, S^1 eğrisinin öklidyen üç uzaya (R^3 veya S^3 yuvarına) gömülmesidir. Daha genel manada S^k nın S^{n+k} ya gömülmesi işlemidir. Bu, yüksek mertebeden düğüm teorisinin çalışma alanıdır.

Genel manada, bir düğüm $i : S^1 \to S^3$ olmak üzere $i(S^1) = k$ dönüşümünün görüntüsüdür. Kısaca, bir düğüm basit kapalı bir eğri ya da bu tipteki eğrilerin sınıfı olarak göz önüne alınır.

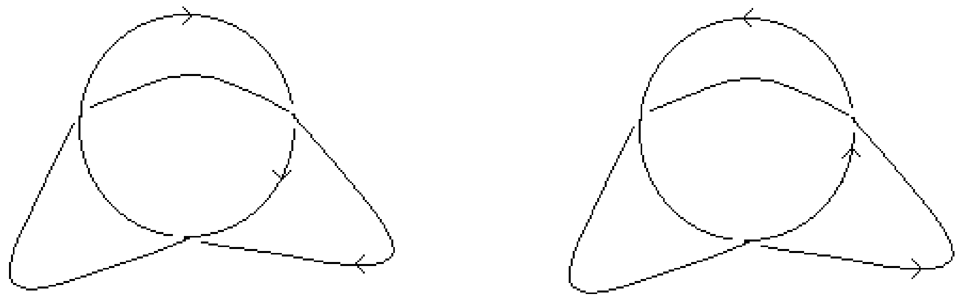
Tanım 2.1.7 : A kümesinde tanımlı bir denklik bağıntısı β (β bağıntısı yansıyan, simetrik ve geçişli) olsun. $(x, y) \in \beta$ ise, y elemanına, β bağıntısı ile x elemanına denk eleman denir. A kümesinde x elemanına denk olan tüm elemanlarının kümesine x in denklik sınıfı denir. x elemanının denklik sınıfı $\bar{x}$ veya $[x]$ biçiminde gösterilir.

$$[x] = \bar{x} = \{ y \mid y \in A \wedge (x, y) \in \beta \}$$

dır.

Tanım 2.1.8 : Bu kapalı eğrilere bir ok işareti ile bir yönlendirme yapılabilir. Bu yönlendirme aşağıdaki örnekteki gibi iki farklı şekilde yapılabilir. Şekil 2.2(a) da sağ el trefoil düğümü ve Şekil 2.2(b) de sol el treofil düğümü (yonca yaprağı) gösterilmiştir.

Tanım 2.1.9 : $p(K) = \widehat{K}$ ya K düğümünün izdüşümü denir. Ayrıca $\widehat{K}$ nın yönü de K ya bağlıdır. Bununla birlikte, $\widehat{K}$, çeşitli kesişim noktalara sahip olduğundan, düzlemde basit kapalı bir eğri olmadığına dikkat etmeliyiz.



(a) (b)

Şekil 2.2

Tanım 2.1.10 : Kabul edelim ki, D, iki bileşenli yönlü bir

$$L = \{K_1, K_2\}$$

halkasının düzenli diyagramı olsun. D nin geçişli noktaları, K_1 ve K_2 nın kesişimlerinin yansımaları olan $c_1, c_2, \ldots, c_m$ dir. Bu durumda,

$$1k(K_1, K_2) = \frac{1}{2}\{sign(c_1) + sign(c_2) + \ldots + sign(c_m)\}$$

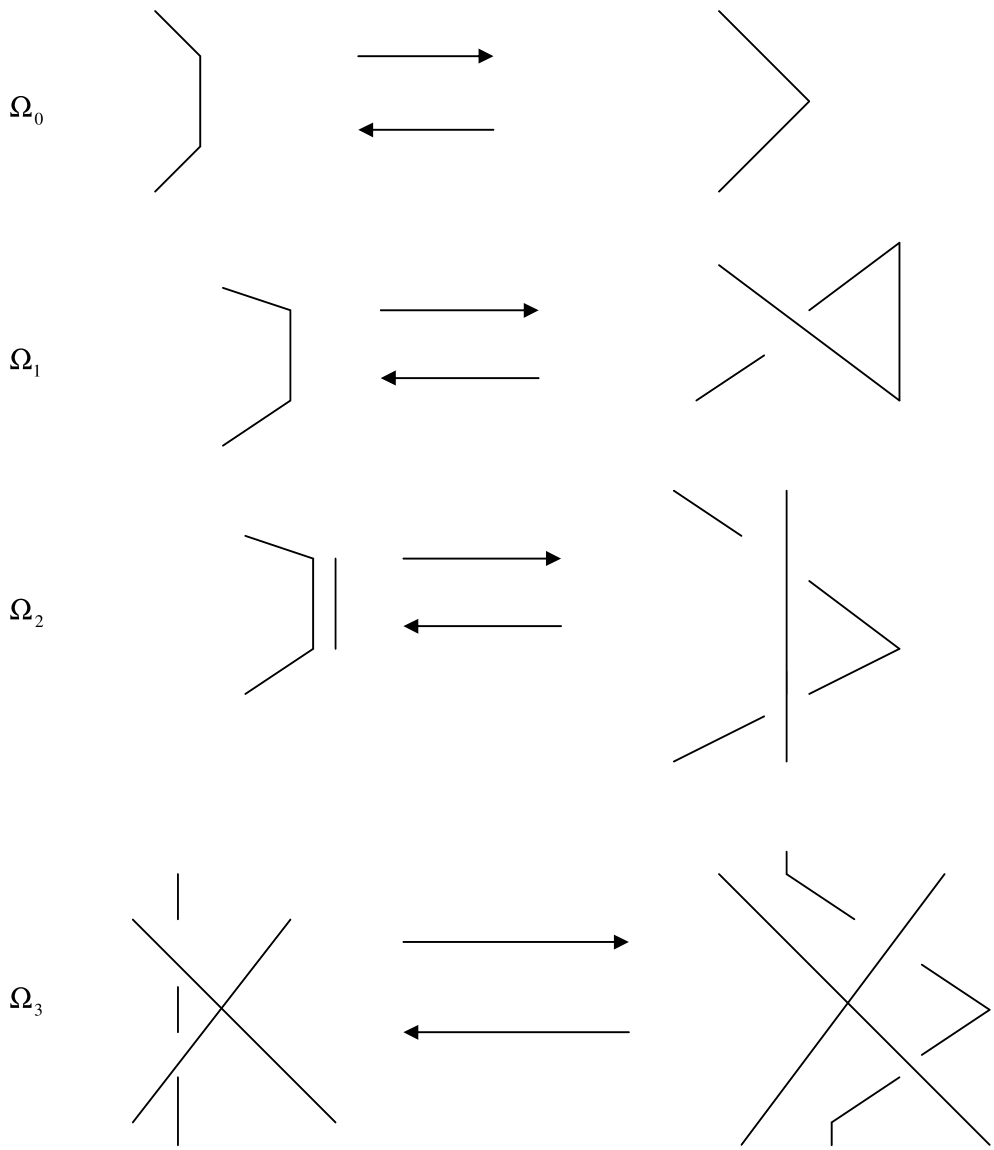
ifadelerine, K_1 ve K_2 nin halkalanma sayısı denir.

Halkalanma sayısı K_1 e K_2 nin sıralamasından bağımsızdır.

$$1k = (K_1, K_2) = 1k(K_2, K_1)$$

Tanım 2.1.11 : K ve $K^{'}$ düğümlerinin düzenli diyagramları sırasıyla D ve $D^{'}$ olsun. Eğer D düzenli diyagramını Şekil 2.3 deki $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ veya onların tersleri olan hareketlerin sonlu kez uygulanması yoluyla $D^{'}$ düzenli diyagramına dönüştürülebilirse, bu durumda D ve $D^{'}$ diyagramlarına denktir denir ve $D \simeq D^{'}$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.12 : B^3 ün yüzeyi olan S^2 de 2n tane nokta alalım. (n,n) Tangles dediğimiz ifade; B^3 de bu 2n noktayı birbirini kesmeyecek şekilde birleştiren n tane eğrinin oluşturduğu yapıdır. (Bakınız Şekil 2.23)



Şekil 2.3

Tanım 2.1.13 : Algoritma, bir işlemin insanlar veya makineler tarafından basamak basamak yapılmasıdır.

Tanım 2.1.14 : X boştan farklı bir küme ve τ , X in kuvvet kümesi olan P(X) in bir altkümesi olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan τ ailesine X üzerinde bir topoloji (veya topolojik yapı) denir.

i) $\varnothing, X \in \tau$,

ii) τ ya ait sonlu sayıdaki elemanların arakesiti yine τ ya aittir; yani

$$\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \ldots, \mathrm{A}_n \in \tau \text{ için } \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i \in \tau,$$

iii) τ ya ait keyfi sayıdaki elemanların birleşimi yine τ ya aittir; yani

$$\forall \{\mathrm{A}_i\}_{i \in I} \subset \tau \text{ için } \bigcup_{i \in I} \mathrm{A}_i \in \tau$$

dır.

Tanım 2.1.15 : M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M bir n-boyutlu topolojik manifold (veya kısaca topolojik n-manifold) dur denir:

(M1) M bir Hausdorff uzayıdır.

(M2) M nin her bir açık alt cümlesi E^n e veya E^n in bir açık alt cümlesine homeomorftur.

(M3) M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir.

Tanım 2.1.16 : M bir topolojik n-manifold olsun. M üzerinde C^k sınıfından bir diferensiyellenebilir yapı tanımlanabilirse M ye C^k sınıfından diferensiyellenebilir manifold denir.

Tanım 2.1.17 : M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. Eğer (M, Z_C) uzayı irtibatlı (bağlantılı) ise M ye bir irtibatlı manifold adı verilir.

Tanım 2.1.18 : X ve Y Hausdorff uzaylar ve $f : X \to f(X)$ bir homeomorfizm ise $f : X \to Y$ dönüşümüne gömülme (embedding) dönüşümü denir.

Tanım 2.1.19 : M bir n-boyutlu topolojik manifold ve U da E^n in bir açık alt kümesi olsun. O zaman Tanım 2.1.3 gereğince U bir ψ homeomorfizmi ile M nin bir W açık alt kümesine eşlenebilir.

$$\psi : U \subset E^n \to W \subset M$$

(ψ, W) ikilisine M de bir harita (veya koordinat komşuluğu) denir. $u \in U$ için $\psi(u) \in M$ dir ve

$$\psi(u) = (x_1(u), x_2(u), \ldots, x_n(u)), \quad x_i(u) \in R, \quad 1 \le i \le n$$

dır. Burada $x_i\,(u)$ reel (gerçel) sayısına $\psi(u) \in M$ noktasının i-yinci koordinatı ve

$$u_i : U \to R$$

fonksiyonuna da u nun i-yinci Öklid koordinat fonksiyonu denir.

$$x_i = u_i \circ \psi^{-1} : W \to R$$

fonksiyonuna W nin i-yinci Öklid koordinat fonksiyonu denir.

Tanım 2.1.20 : X bir topolojik uzay olsun. Bu takdirde eğer

1) $\tilde{x}$ yay bağlantılı (veya irtibatlı) topolojik uzay,

2) $p : \tilde{x} \to x$ sürekli,

3) $\forall x \in X$ için x in bir U_x -komşuluğu vardır.

Şartları sağlanıyorsa $(\tilde{x}, p)$ sıralı ikilisine örtü uzayı denir. p ye örtü dönüşümü adı verilir.

Tanım 2.1.21 : (X, τ_1) ve (Y, τ_2) iki topolojik uzay ve $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa, f fonksiyonuna homeomorfizm (topolojik eş yapı resmi veya topolojik dönüşüm) denir.

i) f fonksiyonu birebir (1-1) ve örtendir.

ii) f ve f^{-1} fonksiyonları süreklidir.

Buna denk olarak eğer $f : X \to Y$ fonksiyonu birebir (1-1) ve örten olup,

$U \subset X$ açıktır $\Leftrightarrow$ $f(U)$, Y de açıktır,

şartını sağlıyorsa, f e bir homeomorfizmdir denir.

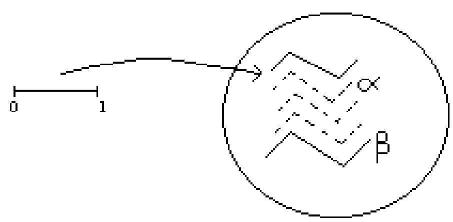
$(f^{-1})^{-1} = f$ olduğundan f^{-1} fonksiyonunun sürekli olması için X in her açık kümesinin resminin Y uzayında açık olması gerekmektedir.

Tanım 2.1.22 : Eğer X ve Y uzayları arasında bir homeomorfizm varsa, X ve Y topolojik uzaylarına homeomorf (topolojik denk) uzaylar denir.

Tanım 2.1.23 : Y bir topolojik uzay olsun. Kabaca Y nin iki alt uzayı homotoptur denir. Şayet; birinden diğerine sürekli bir deformasyonla geçilebiliyorsa, olayı daha kolay anlatabilmek için Y ye ait basit eğrilerin örneğini ele alalım.

$$\mathrm{I} = [0,1] = \{x \in R : 0 \le x \le 1\}$$

kapalı aralığını göstersin. I da ki topoloji bildiğimiz topolojidir. Yani $x, y \in R$ olmak üzere $|x - y| = d(x, y)$ metrik uzayı ile basit eğri diye; $f : \mathrm{I} \to Y$ sürekli fonksiyonlarının Y topolojik uzayındaki görüntüsüne denir.



Şekil 2.4

α ve β iki basit eğri iseler α, β ya homotoptur denir.(Bakınız Şekil 2.4)

Tanım 2.1.24 : $(\mathrm{A}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ ve $(\mathrm{B}, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n)$ aynı türden iki matematik yapı, $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu $\{1,2,3,\ldots,n\}$ kümesinin her i elemanı için α_i bağıntısını β_i bağıntısına dönüştürüyorsa, f fonksiyonuna denk yapı dönüşümü (veya homomorfizm) denir. Birebir (1-1) ve örten bir denk yapı dönüşümüne eş yapı dönüşümü (veya izomorfizm) denir.

2.2. Örgüler

Tanım 2.2.1 : Bir küpün üst yüzeyinde n tane nokta $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ve alt yüzeyindeki n tane noktayı da $A_1^{'}, A_2^{'}, \ldots, A_n^{'}$ ile işaretleyelim. Bu noktalar tamamen keyfi yerleştirilmiş olup bunları özel koordinatlar olarak isimlendireceğiz. R^3 de B nin koordinatları

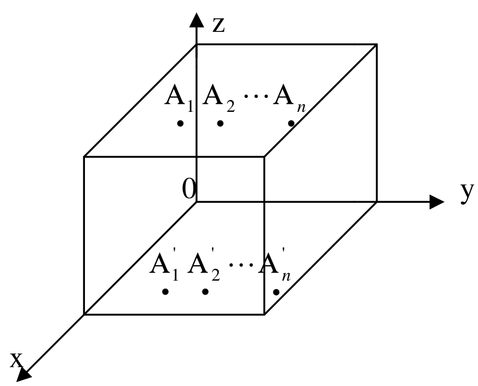
$$B = \{(x, y, z) \mid 0 \le x, y, z \le 1\}$$

şeklindedir. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ve $A_1^{'}, A_2^{'}, \ldots, A_n^{'}$ noktalarını aşağıdaki şekilde seçelim:

$$A_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{n+1}, 1\right), \ldots, A_n = \left(\frac{1}{2}, \frac{n}{n+1}, 1\right)$$

$$A_1^{'} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{n+1}, 0\right), \ldots, A_n^{'} = \left(\frac{1}{2}, \frac{n}{n+1}, 0\right)$$

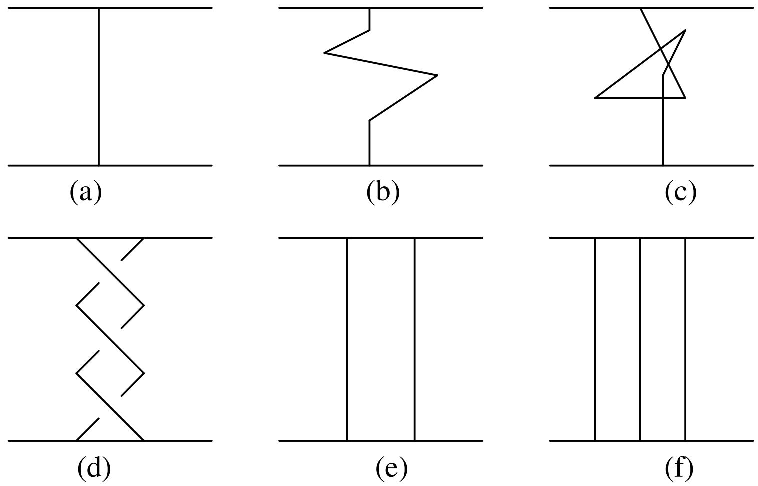
$A_i^{'}$ nin inşasından dolayı A_i nin altında kalır.



Şekil 2.5 B nin şekli

Şimdi de B de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ve $A_1^{'}, A_2^{'}, \ldots, A_n^{'}$ yi n tane eğri (poligonal eğri) yoluyla birleştirelim. Bu n eğri birbirini kesmez. A_i yi $A_i^{'}$ ye birleştirilmesi gerekmez fakat A_i yi A_j ile (i ve j ayrık indislerdir) birleştirmemeliyiz. Bu poligonal eğrileri sicim olarak adlandıracağız. Şimdi B yi ikiye bölen ve B nin tabanına paralel olan keyfi bir E düzlemini düşünelim. Eğer E her bir sicimi en çok bir kez keserse B deki n eğriye n-örgü denir.[3]

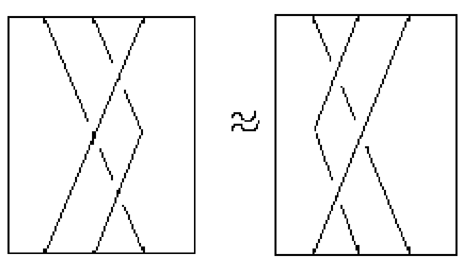
Örnek 2.2.1 : Şekil 2.6(a) ve (b), her ikisi de 1-örgülerinin örnekleri fakat burada c ise 1-örgü değildir. Şekil 2.6(d) ve (e) 2-örgülerinin ayrıca (f) de 3-örgülerinin en tipik örnekleridir.



Şekil 2.6

Eğer, bir küp içerisinde iki tane n-örgüsü verilmişse, bu sicimlerden birisini basit hareketi yoluyla diğerine çevirebiliyor isek, o zaman, bu iki n-örgünün eş değer olduklarını söyleyebiliriz.

Örnek 2.2.2 : Şekil 2.7 de görülen iki örgü eşit değerde olduğunu gösterir.



Şekil 2.7

Bir α n-örgüsünün aşağıdaki gibi bağlanmış iplikçiklerinin var olduğunu kabul edelim: A_1 den A'_{i_1} ye ,..., A_n den A'_{i_n} e iplikçikler bağlanmış olsun. Bu takdirde α ya bir permütasyon tayin edebiliriz.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

Bu permütasyona örgü permütasyonu denir. Örneğin birim örgü, eşitlik permütasyonuna denk gelir.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

Örnek 2.2.3 : Şekil 2.6(d) için örgü permütasyonu

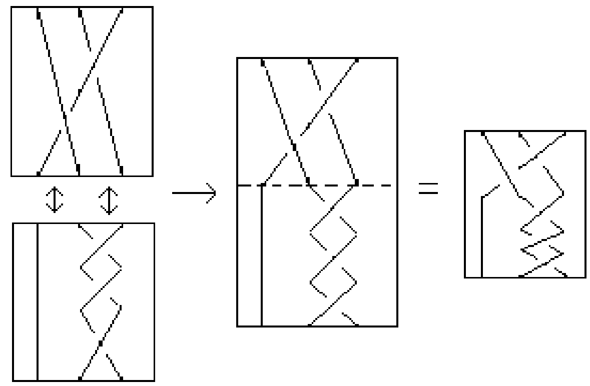
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix},$$

Şekil 2.7 için örgü permütasyonu ise

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

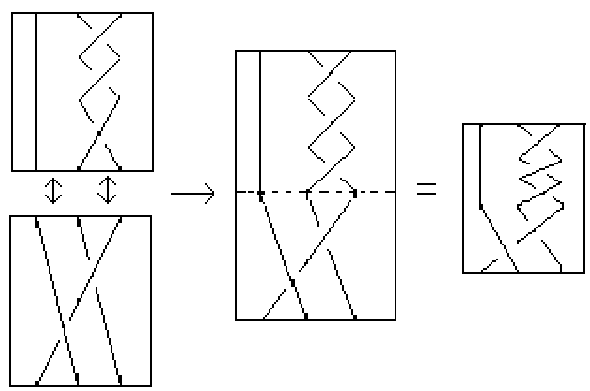
İki örgü aynı değerde ise, yani denk ise onlara karşılık gelen örgü permütasyonları da eşit olur; bu nedenle örgü permütasyonu ise bir örgü invaryantıdır.

Tanım 2.2.2 : Kabul edelim ki B_n tüm n-örgülerin bir sınıfı olsun (tam olarak örgülerin denklik sınıflarının kümesi olsun). B_n nin iki n-örgüsü α ve β olmak üzere α ve β nın çarpımı olan örgü tanımlanabilir. İlk olarak α yı içeren küp β yı içeren küple yapıştırılır. Bu küp α ve β nın dik olarak yapıştırılmasıyla elde edilir. Şekil 2.8 (açık olarak bu karesel katı cismi küp olarak düşünebiliriz)



Şekil 2.8 $\alpha\beta$ Örgünün Çarpımı

Bu örgüye α ve β örgülerinin çarpımı denir ve $\alpha\beta$ olarak ifade edilir. Benzer olarak $\beta\alpha$ çarpımı da tanımlanır. (Bakınız Şekil 2.9). Genel olarak $\alpha\beta = \beta\alpha$ yazılamaz. Yani $\alpha\beta$ ve $\beta\alpha$ nın denk örgüler olması gerekmez. Bu nedenle örgüler grubu değişmeli değildir.



Şekil 2.9 $\beta\alpha$ Örgünün Çarpımı

Tanım 2.2.3 : Kabul edelim ki B_n nin tüm n-örgülerin denklik sınıflarının kümesi olsun. B_n nin iki n-örgüsü α ve β olmak üzere α ve β nın çarpımı olan $\alpha\beta$ yı bir önceki tanımda ifade ettik. Şimdi B_n nin grup olduğunu gösterelim.

(i) Örgülerin kapalı özeliğine sahip olduğu açıktır.

(ii) Örgüler değişmeli olmamasına rağmen birleşme özeliğine sahiptir. Yani

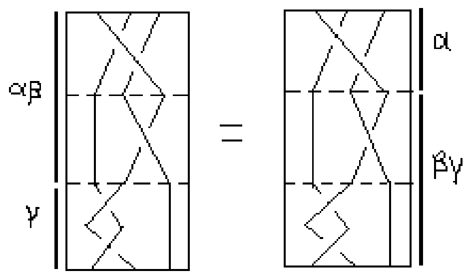
$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$$

olur. (Şekil 2.10)

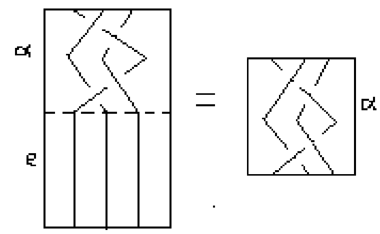
(iii) Birim eleman e basit olarak aşikar örgüye denk gelir ve

$$\alpha e = e\alpha = \alpha$$

dır. (Şekil 2.11)



Şekil 2.10



Şekil 2.11

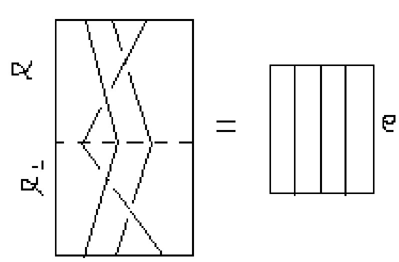
(iv) Şimdi ters elemanı bulalım. Herhangi bir α nın tersini bulmak için α nın ayna görüntüsü olan α^* ya bakalım. Eğer küpün ayna görüntüsünü düşünürsek α nın görüntüsü de ayna görüntüsü olarak bu aynada yansıtılır.

$$\alpha^*\alpha = \alpha\alpha^* = e$$

yazarız. α nın ters elemanı olan α^* yı α^{-1} ile gösteririz. Yani

$$\alpha^{-1}\alpha = \alpha\alpha^{-1} = e$$

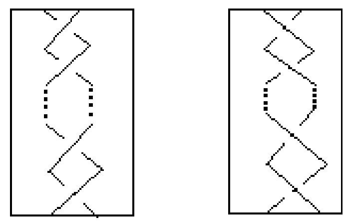
dır. (Şekil 2.12)



Şekil 2.12

Bunların hepsi n-örgülerin grup olması için temel teşkil eder. Bu durumda bu gruba n-örgü grubu denir ve B_n ile gösterilir.

Bu grupların yapısını biraz daha açalım. İlk öncelikle $B_1 = \{e\}$ (1-örgü) grubu, sadece bir eleman içeren aşikar örgüdür. B_2 elemanları Şekil 2.13 de [(a) sol kıvrım, (b) de sağ kıvrım] gösterildiği gibi örgülerin iki türüne eş değerdedir.

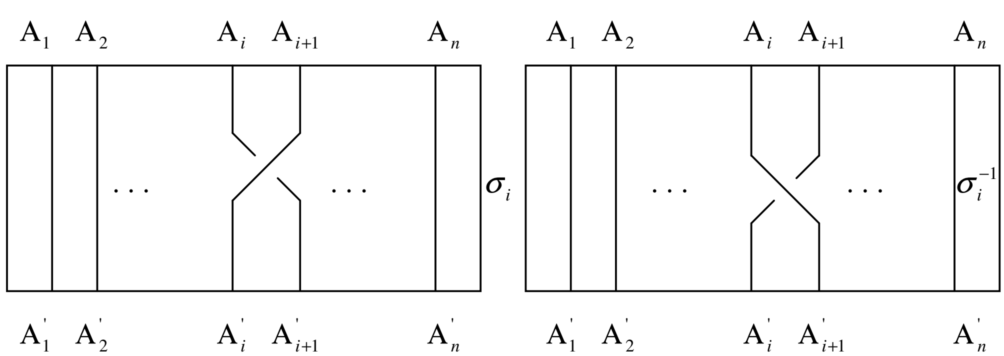


(a) (b)

Şekil 2.13

Önerme 2.2.1 : Eğer iki tane 2-örgü grubunun sicimleri aynı kıvrım sayısına sahip ve aynı yönde kıvrılmışsa bu örgü grupları eş değerdedir (veya denktir).

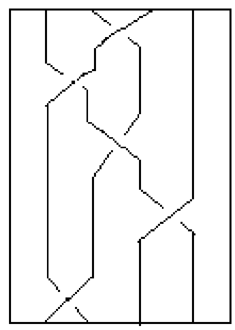
Şimdi n-örgüleri arasında, A_i i A'_{i+1} e ve A_{i+1} i A'_i ye ve geriye kalan A_i ve A_j $(i \neq j, i+1)$ sicimlerini birbirlerine bağlayarak, n-örgüleri oluştururuz. Bakınız Şekil 2.14(a)



(a) (b)

Şekil 2.14

Biz, bu bağlantıları σ_i ile ifade edebiliriz. Bu yolla 1 den n-1 e kadar özel n-örgülerini $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ yardımıyla yazabiliriz. Şekil 2.14(b) de σ_i nin tersini yani n-örgülerin σ_i^{-1} ini çizebiliriz. Şimdi de biz bu örgü grubundan herhangi bir elemanı ifade etmek için, bu temsili kullanabiliriz. Örneğin, Şekil 2.15 de örgü temsilini $\alpha = \sigma_2\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_3\sigma_1$ yazabiliriz.

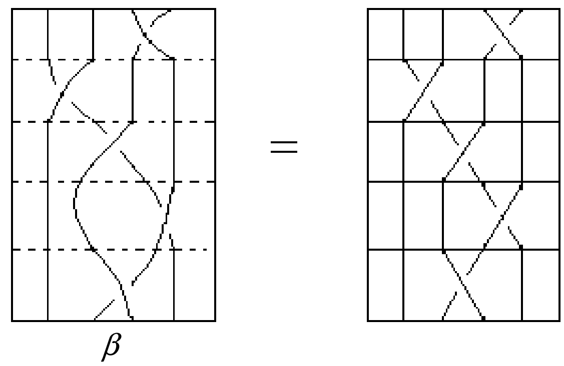


α

Şekil 2.15

$B_n$den σ_i ve σ_i^{-1} lerin halkalanmaları yoluyla bir temsil elde edebiliriz. Bunun için her bir geçiti bir karesel bölge içine almalıyız. Her bir seviyede bir geçit olacak şekilde örgü alt bölgelere bölünür. [Eğer aynı seviyede iki geçit nokta varsa, o zaman birini hafifçe yukarı, diğerini hafifçe aşağı doğru çekerek (yerini değiştirerek), aynı seviyede iki geçit nokta bulunması problemini ortadan kaldırabiliriz.]

Bu dikdörtgenlerin her birinde, yapısal olarak, σ_i veya σ_i^{-1} şeklinde bir bağıntı temsiline sahip oluruz. β örgülerini bu yolla σ_i ve σ_i^{-1} gerenlerine ayrıştırabiliriz. Örnek olarak, Şekil 2.16 deki örgü temsili, $\sigma_3^{-1}\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_2^{-1}$ dir.



Şekil 2.16

Bu yüzden, verilmiş herhangi bir örgüyü, σ_i ve σ_i^{-1} nin sınırlı gerenleri olarak açıklayabiliriz. Bu sebeple, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}$ alt örgü gerenleri B_n grubunu oluşturur. Aynı zamanda bu $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}$ örgülere B_n grubunu oluşturan gerenler denir. Örneğin, herhangi bir 2-örgü, $m \geq 0$ ve

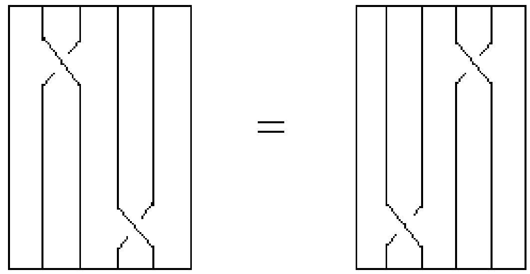
$$\sigma_1^m = \underbrace{\sigma_1 \sigma_1 \sigma_1 \ldots \sigma_1}_{m-\tan e}$$

ve

$$\sigma_1^{-m} = \underbrace{\sigma_1^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_1^{-1} \ldots \sigma_1^{-1}}_{m-\tan e}$$

olan yerde σ_1^m veya σ_1^{-m} olarak yazılır. B_2, bir tek eleman σ_1 tarafından üretilir.

Bu yolla örgü cebirsel olarak ifade edilmiş olur. Üstelik, bu cebirsel ifadeler tek değildir. Örneğin, $\sigma_1 \sigma_3$ ve $\sigma_3 \sigma_1$ iki örgüleri, Şekil 2.17 da 4-örgülerine eş değerdedir.



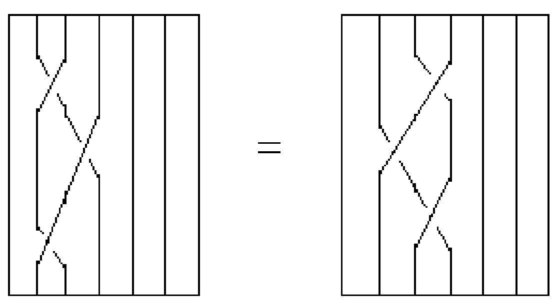
$\sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1$

Şekil 2.17

Bu yüzden, B_4 (4-örgü grupları), $\sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1$ eşitliğini içerir. Bunun yanında, $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$ ve $\sigma_2\sigma_1\sigma_2$ 3-örgülere eşit değerde olduğu için (bakınız Şekil 2.7), aşağıdaki bağıntıya sahiptir.

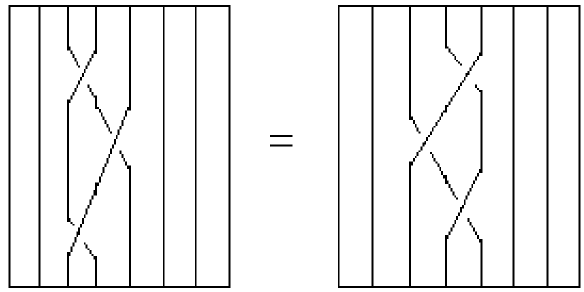
$$\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$$

Bu genel n-örgü $(n \geq 3)$ olduğunda da korunur. Düzenli diyagram birkaç ekstra ilave edilmiş kesişmeyen iplikçiklere de sahip olabilir. Bakınız Şekil 2.18 ve Şekil 2.19.



$\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$

Şekil 2.18



$$\sigma_2\sigma_3\sigma_2 = \sigma_3\sigma_2\sigma_3$$

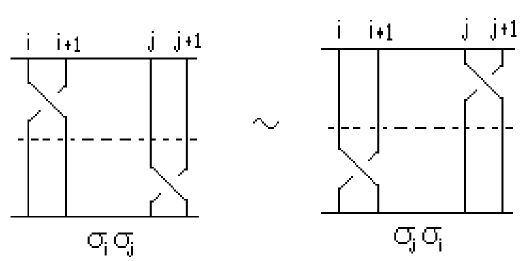
Şekil 2.19

Bu eşitlikler, örgü grubunun (örgü) ilişkileri adı verilir. Gerçekte, eğer iki n-örgüleri eşit değerde olursa, o zaman bu eşitlikler yardımıyla birini diğerine dönüştürebiliriz. Bakınız Örnek, (1) ifadesinde olduğu gibi.

B_n örgü grubunda temel bağıntılar aşağıda verilmiştir.

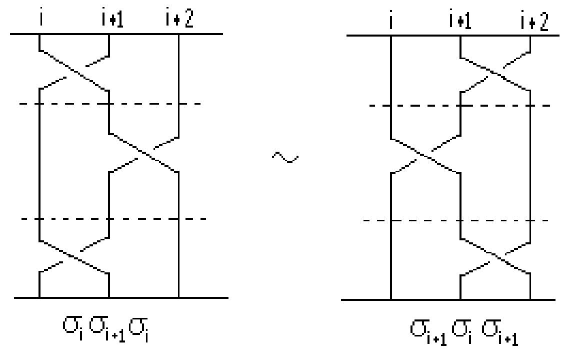
$$\begin{array}{lll} 1) & \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & (|i-j| \geq 2) \\ 2) & \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} & (i = 1,2,3,\ldots,n-2) \end{array} \qquad (1)$$

Yukarıda (1) ifadesinde verdiğimiz $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$ ifadesinin şekli aşağıdadır. (Bakınız Şekil 2.20)



Şekil 2.20

Aynı şekilde (1) ifadesinde verdiğimiz $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ ifadenin şeklide aşağıdaki gibidir. (Bakınız Şekil 2.21)



Şekil 2.21

Örgülerde $\sigma_i\sigma_i^{-1} = e$ gibi, değersiz ilişkilerde mevcuttur ve $\sigma_i\sigma_j = \sigma_i\sigma_j$; bu tip bağıntıları dikkate almayacağız.

Şimdiye kadar tartışma konusu yaptığımız değişik ilişkileri toparlayacak olursak, onun gerenleri olan $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}$ nin terimlerinden B_n ni yazabilir ve bu temel ilişkiler,

$$\mathrm{B}_n = \left(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{cc} \sigma_{ij} = \sigma_{ji} & (|i-j| \geq 2) \\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} & (i = 1,2,\ldots,n-2) \end{array} \right)$$

şeklinde verilebilir. Bu temsile B_n nin Artin temsili denir.[4]

Örneğin,

$\mathrm{B}_1 = (\sigma_1 \mid \_)$,

$\mathrm{B}_2 = (\sigma_1, \sigma_2 \mid \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2)$,

$\mathrm{B}_3 = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \mid \sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1, \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2, \sigma_2\sigma_3\sigma_2 = \sigma_3\sigma_2\sigma_3)$.

Burada, değersiz (birim) ilişkiler $\sigma_1\sigma_1^{-1} = e$ haricinde, B_1 in hiçbir ilişkileri yoktur ve bu ilişki eksikliğini “_” ile ifade ediyoruz.

Şimdi kısaca bir B_4 örgü grubundan da bahsedelim. Artin’in B_4 ün[4] temsili, yukarda verdiğimiz (1) ifadesinde olduğu gibi gerenleri $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ olan ifadeye sahiptir. Bu B_4 4-örgü grubuna band-gerenler temsili adı verilir. Çünkü, 4 disk çiftlerinin bağlantılarını kurma görevini üstlenen 6 band kullanır. B_4 için band gerenler $1 \leq j < i \leq 4$ için, aşağıda verilen ifadelerle tanımlanır:

$$a_{ij} = \sigma_{i-1}\sigma_{i-2} \ldots \sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1} \ldots \sigma_{i-2}^{-1}\sigma_{i-1}^{-1},$$

buradaki ifadeler, i ve j bağlantısını sağlayan yarı-bükümlü band'a benzerlik göstermektedirler.

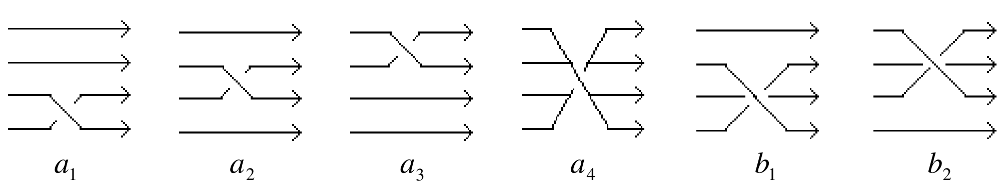
Eğer n-örgü grubu B_n için band gerenleri genelleştirilecek olunursa, bunları çift-indekslenmiş işaretle göstermek daha iyi olur. Biz 6 gerenler için, kolaylık olması için aşağıdaki işaret ifadelerini vereceğiz:

$$\begin{array}{lll} a_{21} = a_1, & a_{32} = a_2, & a_{43} = a_3, \\ a_{41} = a_4, & a_{31} = b_1, & a_{42} = b_2. \end{array}$$

Böylece, B_4 ün 6 band-gerenleri $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2$ olur ve bunlar aşağıda verildiği gibi standart gerenler arasında yer alırlar.

$$\begin{array}{lll} a_1 = \sigma_1, & a_2 = \sigma_2, & a_3 = \sigma_3, \\ a_4 = \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_3\sigma_2\sigma_1, & b_1 = \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1, & b_2 = \sigma_2^{-1}\sigma_3\sigma_2. \end{array} \qquad (2)$$

Bunları grafik olarak şöyle gösterebiliriz. Şekil 2.22.



Şekil 2.22

Teorem 2.2.1 (B_4 için Band-Geren temsili) : B_4 ifadesi, $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2$ gerenlerine sahip olan bir temsiline sahiptir ve bağlantıları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} a_i a_{i+2} &= a_{i+2} a_i & i &= 1,2, \\ a_{i+1} a_i &= a_i b_i = b_i a_{i+1} & 1 &\le i \le 4. \end{aligned} \tag{3}$$

İspat : (1) ifadesindeki gerenleri, (2) de yer alan bağlantıları kullanarak yerlerini değiştirirsek, B_4 ifadesi, $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2$ gerenlerine sahip olan bir temsili olur ve bağlantıları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} a_1 a_3 &= a_3 a_1, & a_1 a_2 a_1 &= a_2 a_1 a_2, & a_2 a_3 a_2 &= a_3 a_2 a_3, \\ a_2 a_1 a_4 &= a_3 a_2 a_1, & a_1 b_1 &= a_2 a_1, & a_2 b_2 &= a_3 a_2. \end{aligned} \tag{4}$$

Aşağıdaki bağıntıları göz önüne alalım:

(i) $a_1 b_1 = a_2 a_1,\ a_1 a_2 a_1 = a_2 a_1 a_2 \quad \Leftrightarrow \quad a_2 a_1 = b_1 a_2,$

(ii) $a_2 b_2 = a_3 a_2,\ a_2 a_3 a_2 = a_3 a_2 a_3 \quad \Leftrightarrow \quad a_3 a_2 = b_2 a_3,$

(iii) $a_2 b_2 = a_3 a_2,\ a_2 a_1 a_4 = a_3 a_2 a_1 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 a_4 = b_2 a_1.$

Bu nedenle (4) deki ifade aşağıdaki ifadelere dönüşür:

$$\begin{aligned} a_1 a_3 &= a_3 a_1, & a_1 b_1 &= b_1 a_2 = a_2 a_1, \\ a_1 a_4 &= b_2 a_1, & a_2 b_2 &= b_2 a_3 = a_3 a_2. \end{aligned} \tag{5}$$

(3) deki diğer bağıntılar, (5) deki bağıntılardan elde edildiği için, ispatımız burada tamamlanmıştır.[10]

Yukarıda verdiğimiz bilgilere dayanarak B_4 ifadesini aşağıda ifade edildiği gibi yazabiliriz.

$$B_4 = \left(a_1, a_2, a_3, a_4 \ \middle|\ \begin{array}{c} a_1 a_3 = a_3 a_1,\ \ a_2 a_4 = a_4 a_2 \\ a_3 a_2 a_1 = a_2 a_1 a_4 = a_1 a_4 a_3 = a_4 a_3 a_2 \\ a_i a_{i+1} a_i = a_{i+1} a_i a_{i+1} \end{array} \right)$$

2.3. Düğümden Örgünün Elde Edilmesi

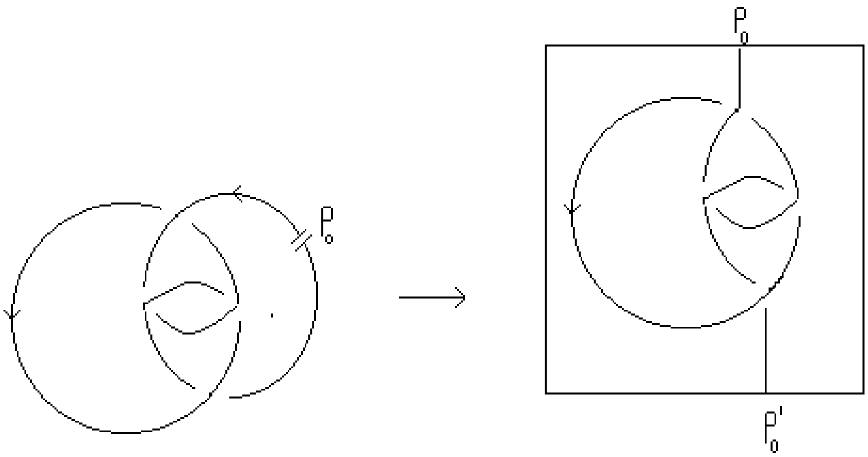
Herhangi bir düğüm verildiğinde bu düğümden bir örgünün nasıl elde edileceğini vereceğiz. Örgüyü bir küp içerisinde verilen iplikçiler olarak düşünelim.

Bu iplikçilerin küpün üst yüzeyini kestikleri noktaları $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ve alt yüzeyini kestiği noktaları da $A_1^{'}, A_2^{'}, \ldots, A_n^{'}$ ile gösterelim. Küpün üst yüzeyinde bulunan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ noktalarını paralel yaylarla küpün dışında $A_1^{'}, A_2^{'}, \ldots, A_n^{'}$ noktalarıyla birleştirelim. (Bakınız Şekil 2.1). Bu doğal yolla örgüden bir düğüm veya bir halkanın regüler diyagramını elde ederiz. Bu yolla elde edilen düğüme α örgüsünden elde edilen K düğümü (halkası) denir. Aksine olarak K ya kapalı örgü (α nın kapanışı) denir. Alışılmış olarak her bir iplikçiğin yönlendirilmesini A_i den $A_i^{'}$ ye doğru veririz. Böylece yönlendirilmiş bir düğüm (halka) elde ederiz. Tersine olarak yönlendirilmiş bir düğümden (halkadan da) uygun değişiklikleri yaparak yönlendirilmiş kapalı örgüler elde ederiz. Örnek 2.3.1 de ve onun diyagramında bir düğümden nasıl örgü elde edileceği verilmiştir. Aşağıdaki Alexander Teoremi bununla ilgilidir.

Teorem 2.3.1 (Alexander Teoremi) : Bir yönlendirilmiş düğüm (halka) verildiği zaman, ona yönlendirilmesiyle birlikte denk olan ve bir örgü tarafından oluşturulmuş bir düğüm (halka) vardır.

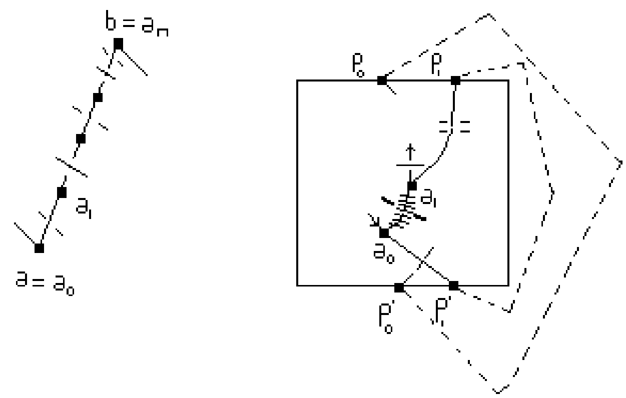
İspat : Kabul edelim ki K düğümünün regüler diyagramı D olsun. İlk olarak düğümü bir geçit noktası olmayan P_0 noktasından keselim. Daha sonra o noktadan asalım. Böylece Şekil 2.23 de gösterilen bir (1,1)-tangles elde etmiş oluruz. Bu tanglesin bir α örgüsü verdiğini göstermek istiyoruz. Daha önce ifade edildiği gibi örgüden elde edilen düğüm K ya denktir.

Eğer T tanglesi m tane lokal maksimuma sahipse m tanede lokal minimuma sahiptir. $m = 0$ olması durumunda T, 1-örgü olup ispata gerek yoktur.



Şekil 2.23 (1,1) Tangles

Kabul edelim ki $m > 0$ olsun. Bu durumda Şekil 2.24(a) da gösterilen T de a lokal minimumunu b lokal maksimumuna götüren bir $\overline{ab}$ yayını düşünelim. Üstelik kabul edelim ki $\overline{ab}$ diğer tanglesleri n tane noktada kessin. $\overline{ab}$ de $n+1$ noktayı $a = a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n = b$ ile gösterelim ve her bir $\overline{a_i a_{i+1}}$ yayı diğer tangleslerin sadece bir noktasını ihtiva etsin Şekil 2.24(a). Daha sonra $\overline{a_0 a_1}$ yayını daha büyük olan $\overline{a_0 P_1' P_1 a_1}$ yayıyla yer değiştirelim. T tanglesi dışında daha büyük $\overline{P_1 P_1'}$ yayı vardır ve $a_0 P_1'$ yayı ve $a_1 P_1$ yayını eğer $\overline{a_0 a_1}$ yayı diğer kısımların üzerinden (veya altından) geçiyorsa bu durumda $a_0 P_1'$ ve $a_1 P_1$ yayları da diğer kısımlarından her birinin üzerinden (veya altından) geçecek şekilde seçelim. Bu işlemin sonucundan (2,2)-tangles elde edilir. Bakınız Şekil 2.24(b).

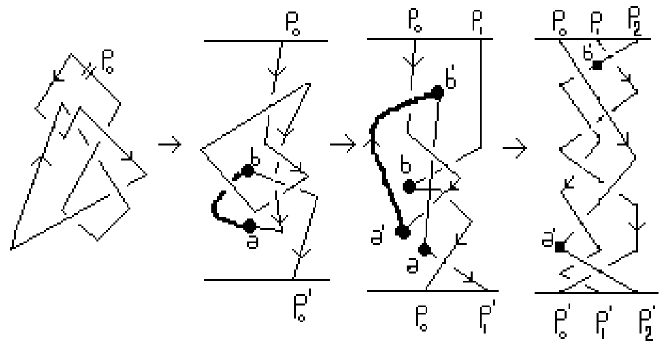


(a) (b)

Şekil 2.24 Geçit Noktalarında Durum

Bu (2,2)-tanglesin dört bitim noktasından eğrilerle birleştirirsek orijinal düğüme denk olan bir düğüm elde ederiz (bu tangle de $a = a_0$ artık bir lokal minimum değildir ve a_1 yeni lokal minimumdur). Benzer olarak $\overline{a_1 a_2}, \overline{a_2 a_3}, \ldots, \overline{a_{n-1} a_n}$ yaylarından hareketle $(n+1, n+1)$-tangles elde edilir ki burada a ve b de lokal maksimum veya lokal minimum yoktur ve en fazla $n-1$ lokal maksimum veya lokal minimum vardır. Bu şekilde devam ederek hiçbir lokal maksimum veya lokal minimumun olmadığı duruma ulaşılır. Bu tangles bizim istediğimiz örgüdür.

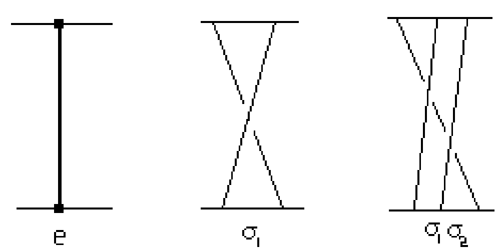
Örnek 2.3.1 : Şekil 2.25(a)-(d) de yukarıdaki ispatın bir düğüm için pratikte işleyişi verilmiştir. Bu örgüden oluşturulan düğüm yukarıdaki düğüme denktir.



(a) (b) (c) (d)

Şekil 2.25 Düğümden Örgü Elde Edilmesi

Şimdi eğer iki örgü denk ise bu durumda onların düğümlerinin de (örgünün kapanışı olan) denk olduğu hemen söylenebilir. Uyarmalıyız ki denk olmayan örgülerin kapanışlarından denk düğümlerde elde etmek mümkündür. Örneğin Şekil 2.26 de verilen denk olmayan düğümlerin kapanışları aşikar düğüme denktir.



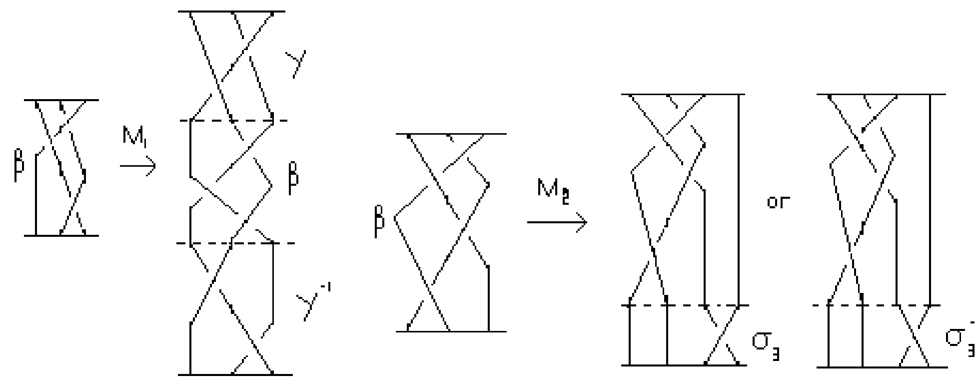
Şekil 2.26 Denk Olmayan Düğümlerin Örgüleri

Ayrıca eğer örgü teorisini düğüm teorisine uygulamak istersek denk düğümleri elde etmek için örgüleri nasıl kısıtlayacağımızı öncelikle açıklamalıyız. Bunun için örgülerin M-denkliği kavramını verelim.

Tanım 2.3.1 : $B_\infty = U_{k\geq 1} B_k$ olsun. Yani B_∞, tüm $B_1, B_2, \ldots B_n$ gruplarının birleşimi olsun. B_∞ da aşağıdaki işlemleri tanımlayalım. Bunlara Markov hareketleri de denir.

(1) Eğer β, B_n grubunun elemanı ise (yani β bir n-örgüyse) M_1 operasyonu β yi $\gamma\beta\gamma^{-1}$ n-örgüsüne dönüştürür. Burada $\gamma\beta\gamma^{-1}$ ye β nin konjugesi denir. γ ise B_n de herhangi bir n-örgüdür. Bakınız Şekil 2.27(a).

(2) M_2 operasyonu β yi ya iki tane $(n+1)$-örgü olan $\beta\sigma_n$ veya $\beta\sigma_n^{-1}$ ye dönüştürür. Burada σ_n, $(n+1)$-örgü olan B_{n+1} in bir gerenidir. Bakınız Şekil 2.27(b).



(a) (b)

Şekil 2.27 Markov Hareketlerinin Etkisi

Örnek 2.3.2 : Şekil 2.27(a) da B_3 ün bir $\beta=\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2$ elemanın M_1 operasyonu altında nasıl değiştiğini göstermektedir. Kısaca, $\beta,\gamma\beta\gamma^{-1}$ olmaktadır. Burada $\gamma=\sigma_2\sigma_1^{-1}$ olmaktadır. Şekil 2.27(b) de B_3 ün bir $\beta=\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}$ elemanın M_2 operasyonu altında nasıl değiştiğini göstermektedir. Yani, B_4 ün $\beta\sigma_3$ veya $\beta\sigma_3^{-1}$ elemanı olmaktadır.

Tanım 2.3.2 : B_∞ in iki elemanı α ve β olsun. Eğer α ya Markov hareketleri M_1 ve M_2 yi ve onların tersleri olan M_1^{-1} ve M_2^{-1} yi sonlu kez uygulayarak α dan β ya dönüştürebiliyorsak bu takdirde α yı β ya Markov denktir (M-denk) deriz ve $\alpha \sim_M \beta$

yazarız. Eğer $\alpha \sim_M \beta$ ise ve $\beta \sim_M \alpha$ ise bu durumda α ve β ya Markov denktir denir.

Aşağıdaki teorem Markov denkliğin Örgü ve Düğüm arasında temel kavram olduğunu gösterir.

Teorem 2.3.2 (Markov Teoremi) : β_1 ve β_2 örgülerinden türeyen iki yönlendirilmiş düğüm K_1, K_2 olsun. Bu takdirde

$$K_1 \equiv K_2 \Leftrightarrow B_1 \sim_M B_1$$

dır.

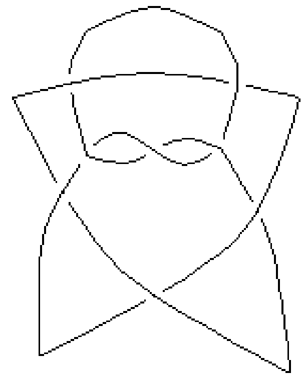
2.4. Örgü İndeksi

Tanım 2.4.1 : Bir K düğümü (halkası) sonsuz sayıda örgüden oluşturulabilir. Böylece örgülerin cümlesinde (K yı oluşturan) en küçük bileşen sayısına sahip α ile gösterilen örgü vardır. Bu α örgüsünde K nın minimum örgüsü (temsili) ve K nın sicimlerinin sayısına K nın örgü indeksi denir ve b(K) ile gösterilir (K nın minimum örgü temsili tek değildir). Örneğin örgü indeksi 1 olan tek düğüm aşikar düğümdür.

Önerme 2.4.1 : K nın örgü indeksi b(K) bir invaryanttır.

Örgü indeksi 2 olan düğümler genelde listelemek zordur. Yani $n \neq 0, \mp 1$ için sadece (n,2) tipindeki tor düğümleridir.

Örgü indeksi 3 olan düğümleri genelde listelemek zordur. (Bakınız Şekil 2.28). Örgü indeksini belirleyen genel bir algoritma şu ana kadar verilmemiştir. Henüz örgü indeksini belirleyen genel bir algoritma yoktur.[3]



Şekil 2.28 Örgü İndeksi 3 Olan Örgü

2.5. Konfigürasyon Uzayları

M boyutu 2 veya daha fazla olan bir bağlantılı manifold olsun. $n \geq 1$ tamsayısı için $F_n(M)$ ile ikişer ikişer ayrık olan n-lileri içeren $M \times M \times \ldots \times M$ çarpımını gösterelim. Yani

$$F_n(M) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M \times M \times \ldots \times M : x_i \neq x_j, i \neq j\}$$

M deki n tane sıralı nokta kümesi üzerinde tanımlı $F_n(M)$ nin konfigürasyon uzayı olduğunu düşünebiliriz. Manifoldların boyutu 2 ya da daha fazla olduğu için $M \times M \times \ldots \times M$ nin herhangi iki koordinatı aynı olan sonlu adetteki alt manifoldlarının ayrılmasıyla oluşan bu yapı bağlantılıdır. $m \geq 0$ bir tamsayı olsun. $Q_m = \{q_1, q_2, \ldots, q_m\}$ ile M nin m tane ayrık çiftlerinden oluşan $(q_i \in M)$ alt kümesini gösterelim. $m = 0$ ise Q_0 boş kümedir.

$$F_{m,n}(M) = F_n(M / Q_m)$$

ile tanımlayalım. $\{1,2,\ldots,n\}$ üzerindeki tüm permütasyonların grubu Σ_n olsun. $F_n(M)$ üzerinde Σ_n nin bir doğal sağ işlemi vardır. Bu işlem,

$$\mu : F_n(M) \times \Sigma_n \rightarrow F_n(M)$$

dönüşümü olup koordinatlarının permütasyonların yoluyla

$$\mu((x_1, x_2, \ldots, x_n)\sigma) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\sigma = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

ile tanımlanır. Standart bağıntı yoluyla

$$C_n(M) = F_n(M)/\Sigma_n$$

ile isimlendirelim. $F_n(M)$ nin μ işlemi altında n-li farklı elemanların $(x_i \in M)$ yörüngeleri permütasyon yoluyla ayrık iseler aynı yörüngededirler. Buradan $C_n(M)$ uzayı M deki sıralanmamış n ayrık noktaların bir uzayıdır. Bu uzay sıralanmamış n tane noktanın konfigürasyon uzayıdır. $F_n(M)$ den $C_n(M)$ ye bir dönüşüm Σ_n ifadesini tanımlar.

$$p_n : F_n(M) \to C_n(M)$$

dönüşümü özel olarak n!-katlı örtü uzayıdır.

Bu yapının E^2 üzerine taşınmasıyla özel olarak aşağıdaki Teorem 2.5.2 yi verebiliriz.

Teorem 2.5.1 : Kabul edelim ki $n \geq 2$ olsun ve $1 \leq r < n$ i ele alalım.

$$\pi : F_{m,n}(M) \to F_{m,r}(M),$$

ile tanımlanan

$$\pi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_r),$$

haritası, o zaman

$$F_{m+r,n-r}(M)$$

nitelik ile yerel bir ağ teşkil eder.

Teorem 2.5.2 : $F_n(E^2)$, E^2 düzleminin n-sıralı noktalarının konfigürasyon uzayı için

$$\pi_i\left(F_n(E^2)\right)=0, \qquad i\geq 2$$

dir. Daha genel olarak, $n\geq 1$, $m\geq 0$ için

$$\pi_i\left(F_{n,m}(E^2)\right)=0, \qquad i\geq 2$$

dir.[7]

E^3 deki bir yayı, $[0,1]$ in $A_i:[0,1]\to E^3$ yoluyla E^3 e gömülmesi olarak düşünebiliriz.

Tanım 2.5.1 : Eğer $A^0=\{A_1^0,A_2^0,\ldots,A_n^0\}$ dan $A^1=\{A_n^1,A_n^1,\ldots,A_n^1\}$ e τ-permütasyona sahip geometrik örgü yoluyla bir homotopi bağıntısı varsa A^0 ve A^1 örgülerine denktir veya homotopiktir deriz. Bir başka ifadeyle, eğer n tane sürekli

$$F_i:[0,1]\times[0,1]\to E^3 \qquad 1\leq i\leq n$$

dönüşümü mevcut ise ve A^0 ve A^1 e homotopiktir denir. Burada fonksiyonlar

$$\left.\begin{aligned} F_i(t,0)&=A_i^0(t)\\ F_i(t,1)&=A_i^1(t)\end{aligned}\right\} \qquad 0\leq t\leq 1,\ \ 1\leq i\leq n$$

$$\left.\begin{aligned} F_i(0,s)&=P_i\\ F_i(1,s)&=P'_{\tau(i)}\end{aligned}\right\} \qquad 0\leq s\leq 1,\ \ 1\leq i\leq n$$

şartını sağlarlar. Eğer $A_i^S:[0,1]\to E^3$ ü $A_i^S(t)=F_i(t,s)$ aracılığıyla tanımlarsak, o zaman $A^S=\{A_1^S,A_2^S,\ldots,A_n^S\}$, her biri $0\leq s\leq 1$ için (τ-permütasyonu ile) bir geometrik n-örgüsüdür.

M deki örgü uzayının konfigürasyon uzayına bakalım. Bu $M=E^2$ için Artin'in geometrik örgüsüdür. $F_n(M)$ de $\bar{c}_0$ taban noktasını göz önüne alalım. $c_0=p_n(\bar{c}_0)$, $C_n(M)$ de bir taban noktasıdır. $C_n(M)$ nin esas grubunda keyfi bir $\beta\in\pi_1\left(C_n(M),c_0\right)$ eleman olan β yı $f:[0,1]\to C_n(M)$, $f(0)=f(1)=c_0$

ilmeğiyle temsil edelim. $p_n : F_n(M) \to C_n(M)$ örtü dönüşümünde $\overline{f} : [0,1] \to F_n(M)$, $\overline{f}(0) = c_0$ olan f nin bir lifti vardır. $t \in [0,1]$, $i \neq j$ için $\overline{f_i}(t) = \overline{f_j}$ ve M de $1 \leq i \leq n$, için $\overline{f_i} : [0,1] \to M$ şeklinde $\overline{f} = \left(\overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{f_3}, \ldots, \overline{f_n}\right)$ yayını düşünebiliriz. M de $\left(\overline{f_1(0)}, \overline{f_2(0)}, \overline{f_3(0)}, \ldots, \overline{f_n(0)}\right)$ ve $p_n\left(\overline{f(1)}\right) = p_n\left(\overline{f(0)}\right) = c_0$ olduğundan τ pertümasyonu olup $\left(\overline{f_1(0)}, \overline{f_2(0)}, \overline{f_3(0)}, \ldots, \overline{f_n(0)}\right)$ da M dedir.[8]

$\mathrm{A}_i : [0,1] \to M \times [0,1]$ $1 \leq i \leq n$, $\mathrm{A}_i(t) = \left(f_i(t), t\right)$ gömme dönüşümü tanımlayalım. Burada $\mathrm{A} = \sum_{i-1}^{n} \mathrm{A}_i$ ifadesi $M \times [0,1]$ üzerinde n bileşenli olup örgü tanım ve şartlarını sağlar. Özel olarak $M \times [0,1]$ deki A sistemi $M = M \times [0,1]$ in $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ noktalarını $\overline{c}_0 \in F_n(M)$ koordinatları yardımıyla $\overline{f(0)}$ den $\overline{f(1)}$ e olan τ permütasyonu yoluyla $M \times \{1\}$ nin $P_1^{'}, P_2^{'}, P_3^{'}, \ldots, P_n^{'}$ ye götüren özel bir sistemdir.

Bu A sistemini veya daha genel olarak $\beta \in \pi_1\left(C_n(M), c_0\right)$ homotopi sınıfını n bileşen üzerinde M deki τ permütasyonlarının örgüsü olarak adlandırılır.[8] $\pi_1\left(C_n(M), \overline{c}_0\right)$ grubu n bileşenli M üzerinde renklendirilmiş grup olarak adlandırılır.[8]

Teorem 2.5.3 : Artin örgü grubu $B(n)$, $\pi_1\left(C_n(E^2), c_0\right)$ esas grubuyla kanonik özdeşlenebilir.[2]

Özellikle, $B(n)$ nin bir grup olduğuna dair bir ispata sahibiz. Aşağıda $B(n)$ ve $\pi_1\left(C_n(E^2), c_0\right)$ in serbest olarak özdeşlenmesi vardır. Σ_n ifadesi için homotopi dizisi $p_n : F_n(E^2) \to C_n(E^2)$ aşağıdaki temel bağıntıya indirgenir.

$$1 \to \pi_1\left(F_n(E^2), \bar{c}_0\right) \xrightarrow{p_n} \pi_1\left(C_n(E^2), c_0\right) \xrightarrow{\tau_n} \sum_n \to 1$$

Eğer tanımlamayı kullanırsak;

$$B(n) = \pi_1\left(C_n(E^2), c_0\right)$$

ve

$$H(n) = \pi_1\left(F_n(E^2), \bar{c}_0\right)$$

dersek $H(n)$ nin elemanları bileşenlerin permütasyonuyla birlikte n bileşenli örgüdür. Bir önceki paragrafta bu örgüye renklendirilmiş örgü adı verilir.

Teorem 2.5.4 (Artin Temsili) : n bileşenli geometrik örgünün $B(n)$ grubu gerenleri $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}$ olan ve tanımlanan bağıntıları aşağıdaki şekilde verilen bir temsile sahiptir.[4],[9]

$$\tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_j = \tilde{\sigma}_j \tilde{\sigma}_i \qquad |i-j| \geq 2,\ \ 1 \leq i, j \leq n-1$$

$$\tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_{i+1} \tilde{\sigma}_i = \tilde{\sigma}_{i+1} \tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_{i+1} \qquad 1 \leq i \leq n-2.$$

İspat : B_n soyut grubunun gerenleri $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3, \ldots, \tilde{\sigma}_{n-1}$ ve tanımlanan bağıntıları ise

$$(1)\ \ \tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_j = \tilde{\sigma}_j \tilde{\sigma}_i \qquad |i-j| \geq 2,\ \ 1 \leq i, j \leq n-1$$

$$(2)\ \ \tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_{i+1} \tilde{\sigma}_i = \tilde{\sigma}_{i+1} \tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_{i+1} \qquad 1 \leq i \leq n-2$$

ile verilsin. Bu takdirde

$$\iota_n : B_n \to B(n),$$

aşikar homomorfizmi vardır. Bu homomorfizm $\tilde{\sigma}_i$ yi σ_i ye taşır. (1) ve (2) bağıntıları B_n ve B(n) aynı olduğu için iyi tanımlanmıştır. Biz şimdi ι_n nin bir izomorfizm olduğunu kanıtlayalım.

B(n) örgü grubu için

$$1 \to H(n) \xrightarrow{\rho_n} B(n) \xrightarrow{\tau_n} \sum_n \to 1$$

dizisini elde ederiz. Burada

$$H(n) = \pi_1\left(F(E^3), \bar{c}_0\right)$$

ile özdeşlenen renklendirilmiş örgü grubu ve τ_n ise permütasyon homomorfizmidir.

B_n soyut grubu için

$$\tilde{\tau}_n : B_n \to \sum_n$$

şeklinde verilen ve $\tilde{\sigma}_i$ değerini $(i, i+1) \in \sum_n$ transpozisyonu üzerinde i yi i+1 ile yer değiştiren bir permütasyonuna dönüştüren doğal bir 1-1 örten homomorfizmi vardır. İlişkiler (1) ve (2) ye uygun olarak $\sum_n$ deki transpozisyonları (pozisyon değiştirme) aynı için homomorfizm $\tilde{\tau}_n$ iyi tanımlanmıştır. Ayrıca transpozisyonlar $\sum_n$ değerini ürettiği için o da surjektiftir.

$$H_n = \ker \tilde{\tau}_n,$$

$\tilde{\tau}_n$ in çekirdeğini göstersin.

$$\tilde{\rho}_n : H_n \to B_n$$

de doğrulan homomorfizm olsun. B_n soyut grubu için, τ_n

$$1 \to H_n \xrightarrow{\tilde{\rho}_n} B_n \xrightarrow{\tilde{\tau}_n} \sum_n \to 1$$

kısa dizisini elde ederiz. $\tau_n(\sigma_i) = (i, i+1)$, ifadesi $\sum_n$ dedir. Buradan

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & H_n & \xrightarrow{\tilde{\rho}_n} & B_n & \xrightarrow{\tilde{\tau}_n} & \sum_n & \to & 1 \\ & & i_n' \downarrow & & \downarrow \iota_n & & \downarrow 1 & & \\ 1 & \to & H(n) & \xrightarrow[\rho_n]{} & B(n) & \xrightarrow[\tau_n]{} & \sum_n & \to & 1 \end{array}$$

elde ederiz.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. 3-Örgüler İçin Minimum Geçiş Sayıları

B de bir örgü ifadesi, iki paralel yüzey arasında birbirlerini sarmalayan ard arda gelen sicimlerin geçiş yerlerini ortaya koyar. Bu konuyla ilgili 3-örgülere yönelik bir önceki bölümde verdiğimiz Artin temsiliğinden faydalanacağız.

$$\{\sigma_1, \sigma_2 \mid \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2\}$$

Bir ifadenin uzunluğu, basitçe karakterlerin sayısal ifadesidir: Eğer

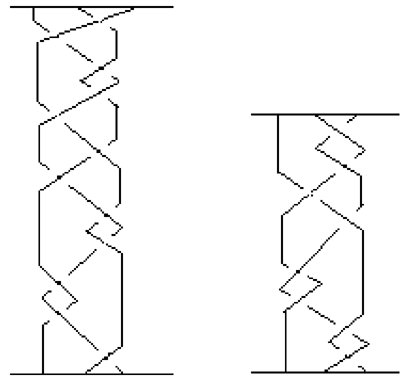
$$\mathrm{B} = \sigma_1^{\alpha_1}\sigma_2^{\beta_1}\sigma_1^{\alpha_2}\sigma_2^{\beta_2}\sigma_1^{\alpha_3}\ldots \tag{6}$$

ise o zaman

$$L(B) = |\alpha_1| + |\beta_1| + |\alpha_2| + |\beta_2| + |\alpha_3| + \ldots$$

dır. Bir çok değişik örgü kelimesi aynı topolojik B örgüsüne denk gelir. Aşağıda Şekil 3.1 de verilen B örgüsü önce $L(\mathrm{B}_0) = 12$ uzunluğunda olup B_0 ifadesi ile gösterildi. Bu örgüden buna denk olan $L(\mathrm{B}_{\min}) = 8$ uzunluğuna sahip olan örgü elde edildi.

Aynı zamanda Şekil 3.1 deki diyagramlar, örgünün bir yüzey (x-z yüzeyi) üzerindeki resmini ifade eder. İplikçiler, yukardan x-eksenine paralel olarak sıralanmış, aşağıya doğru yönlendirilmiş ve y-ekseni yönünde birbirleri etrafında dolaşarak sonlanmıştır. Bununla beraber, başka yansımalarda mümkün olabilir, örneğin bir silindir üzerine yansıma gibi. Minimal kelimeler iplikçilerin başlangıçta verilen her bir geçitte düzgün (veya eşkenar) üçgenlerle bitiminde elde edilmiştir. Bundan başka yani silindirik yansımalardan başka araştırmacılar tarafından bulunmuştur.



B_0 B_{min}

Şekil 3.1

3-örgülerinin minimum edilmesine yönelik algoritma, Artin temsiliğindeki terimlerden açıklanacaktır. Bununla birlikte, algoritma ile ilgili ispatlar geometrik 3-örgülerin yapısal (düzen) alanlarının analizi üzerine dayanacaktır.

3.1.1. Algoritma

Tanım 3.1.1.1 : $\Delta = \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$.

Tanım 3.1.1.2 : Bir A kelimesi verildiğinde bu kelimede σ_1 in σ_2 ile değiştirilmesiyle veya σ_2 nin σ_1 ile değiştirilmesiyle elde edilen örgü $\hat{A}$ olsun. Örneğin,

$$A = \sigma_1\sigma_2^{-3}\sigma_1^{-1} \quad \Rightarrow \quad \hat{A} = \sigma_2\sigma_1^{-3}\sigma_2^{-1}$$

gibi. Δ ifadesi A kelimesi üzerinde 3 iplik için düzgün bir dönüşe karşılık gelir ve diğer tüm örgü elemanlarından korunur.

$$A\Delta = \Delta\hat{A} \qquad ve \qquad A\Delta^{-1} = \Delta^{-1}\hat{A} \tag{7}$$

anlamında elde edilen örgü kelimesi $\hat{A}$ olsun. Δ^2 ifadesi Artin örgüsünün merkezidir ve üç örgüde tam bir dönüşe karşılık gelir. Garsi'de çözümünde de önemli rol oynar.

Tanım 3.1.1.3 : Aşağıdaki dört ifadenin her birisi wrap olarak isimlendirilir.

$$\sigma_1\sigma_2 \qquad \sigma_2\sigma_1 \qquad \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1} \qquad \sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1} \tag{8}$$

Algoritma:

(i) Verilen B_0 örgüsünde Δ ve Δ^{-1} in tüm oluşumları araştırılır. Bu oluşumlar her nerede bulunursa $A\Delta = \Delta\hat{A}$ kullanılarak Δlar sola alınır. Bu işleme $\Delta^n B_1$ formu bulununcaya kadar devam edilir. Örneğin,

$$\sigma_1\Delta^3\sigma_2^{-2}\Delta^{-1} \Rightarrow (\sigma_1\Delta^3)\sigma_2^{-2}\Delta^{-1} \qquad \{\sigma_1\Delta^3 = \Delta^3\sigma_2\}$$

$$\Rightarrow (\Delta^3\sigma_2)\sigma_2^{-2}\Delta^{-1}$$

$$\Rightarrow \Delta^3\sigma_2\sigma_2^{-2}\Delta^{-1}$$

$$\Rightarrow \Delta^3\sigma_2(\sigma_2^{-2})\Delta^{-1} \qquad \{\sigma_2^{-2} = \sigma_2^{(-1)+(-1)} = \sigma_2^{-1}\sigma_2^{-1}\}$$

$$\Rightarrow \Delta^3\sigma_2(\sigma_2^{-1}\sigma_2^{-1})\Delta^{-1}$$

$$\Rightarrow \Delta^3\sigma_2\sigma_2^{-1}\sigma_2^{-1}\Delta^{-1}$$

$$\Rightarrow \Delta^3\underbrace{\sigma_2\sigma_2^{-1}}_{e}\sigma_2^{-1}\Delta^{-1}$$

$$\Rightarrow \Delta^3\sigma_2^{-1}\Delta^{-1}$$

$$\Rightarrow \Delta^3(\sigma_2^{-1}\Delta^{-1}) \qquad \{\sigma_2^{-1}\Delta^{-1} = \Delta^{-1}\sigma_1^{-1}\}$$

$$\Rightarrow \Delta^3(\Delta^{-1}\sigma_1^{-1})$$

$$\Rightarrow \Delta^3\Delta^{-1}\sigma_1^{-1}$$

$$\Rightarrow (\Delta^3)\Delta^{-1}\sigma_1^{-1} \qquad \{\Delta^3 = \Delta^{2+1} = \Delta^2\Delta, \Delta = \Delta^{+1}\}$$

$$\Rightarrow (\Delta^2\Delta)\Delta^{-1}\sigma_1^{-1}$$

$$\Rightarrow \Delta^2\Delta\Delta^{-1}\sigma_1^{-1}$$

$$\Rightarrow \Delta^2\underbrace{\Delta\Delta^{-1}}_{e}\sigma_1^{-1}$$

$$\Rightarrow \Delta^2\sigma_1^{-1}$$

Dikkat etmeliyiz ki $\Delta^n B_1$ de B_1, Δ dan bağımsızdır.

(ii) Şimdi de $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$ temel ilişkisini kullanarak ortadan wraplar kaldırılır.

$$\sigma_1\sigma_2 = \Delta\sigma_1^{-1} \quad \sigma_2\sigma_1 = \Delta\sigma_2^{-1} \quad \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1} = \Delta^{-1}\sigma_1 \quad \sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1} = \Delta^{-1}\sigma_2 \qquad (9)$$

İfadeleri yardımıyla B de bütün wrapları araştıracağız ve onları örneğin, $\sigma_2\sigma_1$ i $\Delta\sigma_2^{-1}$ ile yer değiştirerek kaldıralım. Bu adımda en solda (i) bağıntısında olduğu gibi yeni Δ lar elde edilir. Bu durumda sonuç ya $B = \Delta^P B_2$ ya da $B = \Delta^P \hat{B}_2$ şeklindedir. Burada

$$B_2 = \sigma_1^{q_1}\sigma_2^{-r_1}\sigma_1^{q_2}\sigma_2^{-r_2}\ldots\sigma_1^{q_m}\sigma_2^{-r_m} \qquad (10)$$

dır. Bağıntıdan r,q lar pozitif tamsayılardır $(r, q \in Z^+)$ ve $q = \sum_{i=1}^{m} q_i$, $r = \sum_{i=1}^{m} r_i$ dir.

W(B) ye B ifadesinin writhesi denir ve σ nin üslerinin cebirsel toplamından oluşur.

$$W(B) = 3p + q - r$$

dir.

(iii) Bu bağıntı (ii) bağıntısının kısmen tersidir. Kesinliğini sağlamak için $p > 0$ ve $B = \Delta^P B_2$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda Δ nın sağda olduğu herhangi bir zamanda ondan $\sigma_2\sigma_1$ wrapını bulmak için kelimeden geriye kalan ilk σ_2^{-1} ile birleştirelim. Bu durum her zaman yapıldığında uzunluk, (7) de verilen bağıntılar yoluyla indirgenir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
B &= \Delta^P \sigma_1^{q_1}\sigma_2^{-r_1}\ldots\sigma_1^{q_m}\sigma_2^{-r_m} \\
&= \Delta^P \sigma_1^{q_1}\left(\Delta^{-1}\Delta\right)\sigma_2^{-r_1}\ldots\sigma_1^{q_m}\sigma_2^{-r_m} \qquad \left\{\Delta^{-1}\Delta = e\right\} \\
&= \Delta^P \sigma_1^{q_1}\Delta^{-1}\Delta\sigma_2^{-r_1}\ldots\sigma_1^{q_m}\sigma_2^{-r_m} \\
&= \Delta^P \left(\sigma_1^{q_1}\Delta^{-1}\right)\Delta\sigma_2^{-r_1}\ldots\sigma_1^{q_m}\sigma_2^{-r_m} \qquad \left\{\sigma_1^{q_1}\Delta^{-1} = \Delta^{-1}\sigma_2^{q_1}\right\} \\
&= \Delta^P \left(\Delta^{-1}\sigma_2^{q_1}\right)\Delta\sigma_2^{-r_1}\ldots\sigma_1^{q_m}\sigma_2^{-r_m}
\end{aligned}$$

$$= \Delta^{P}\Delta^{-1}\sigma_2^{q_1}\Delta\sigma_2^{-r_1}\ldots\sigma_1^{q_m}\sigma_2^{-r_m}$$

$$= \left(\Delta^{P}\Delta^{-1}\right)\sigma_2^{q_1}\Delta\sigma_2^{-r_1}\ldots\sigma_1^{q_m}\sigma_2^{-r_m} \qquad \left\{\Delta^{P}\Delta^{-1} = \Delta^{P+(-1)} = \Delta^{P-1}\right\}$$

$$= \left(\Delta^{P-1}\right)\sigma_2^{q_1}\Delta\sigma_2^{-r_1}\ldots\sigma_1^{q_m}\sigma_2^{-r_m}$$

$$= \Delta^{P-1}\sigma_2^{q_1}\Delta\sigma_2^{-r_1}\ldots\sigma_1^{q_m}\sigma_2^{-r_m}$$

$$= \Delta^{P-1}\sigma_2^{q_1}\Delta\underbrace{\sigma_2^{-1}\sigma_2}_{e}\sigma_2^{-r_1}\ldots\sigma_1^{q_m}\sigma_2^{-r_m}$$

$$= \Delta^{P-1}\sigma_2^{q_1}\Delta\sigma_2^{-1}\sigma_2\sigma_2^{-r_1}\ldots\sigma_1^{q_m}\sigma_2^{-r_m}$$

$$= \Delta^{P-1}\sigma_2^{q_1}\Delta\sigma_2^{-1}\left(\sigma_2\sigma_2^{-r_1}\right)\ldots\sigma_1^{q_m}\sigma_2^{-r_m} \qquad \left\{\sigma_2 = \sigma_2^{+1}, \sigma_2\sigma_2^{-r_1} = \sigma_2^{-r_1+1}\right\}$$

$$= \Delta^{P-1}\sigma_2^{q_1}\Delta\sigma_2^{-1}\left(\sigma_2^{-r_1+1}\right)\ldots\sigma_1^{q_m}\sigma_2^{-r_m}$$

$$= \Delta^{P-1}\sigma_2^{q_1}\Delta\sigma_2^{-1}\sigma_2^{-r_1+1}\ldots\sigma_1^{q_m}\sigma_2^{-r_m}$$

$$= \Delta^{P-1}\sigma_2^{q_1}\left(\Delta\sigma_2^{-1}\right)\sigma_2^{-r_1+1}\ldots\sigma_1^{q_m}\sigma_2^{-r_m} \qquad \left\{\Delta\sigma_2^{-1} = \sigma_2\sigma_1\right\}$$

$$= \Delta^{P-1}\sigma_2^{q_1}\left(\sigma_2\sigma_1\right)\sigma_2^{-r_1+1}\ldots\sigma_1^{q_m}\sigma_2^{-r_m}$$

$$= \Delta^{P-1}\sigma_2^{q_1}\sigma_2\sigma_1\sigma_2^{-r_1+1}\ldots\sigma_1^{q_m}\sigma_2^{-r_m}$$

olur. Bu işleme hiç Δ kalmayınca ya $(p \leq r)$ kadar veya hiç σ_2^{-1} kalmayınca ya $(p \geq r)$ kadar devam edilir. Sonuç olarak ortaya çıkan ifadeye $\mathrm{B}_{\min}$ olarak isimlendirilir.

Teorem 3.1.1.1 : Herhangi bir B örgüsü verilsin. Bu durumda $\Delta^{P}\mathrm{B}_2$ bir tektir. Buna ilave olarak herhangi bir B örgüsünün $\mathrm{B}_{\min}$ kelimesi minimum L uzunluğuna sahip olanıdır ve bu kelime tek bir şekilde oluşturulmuştur.

İspat : 3.1.3 bölümde bu teoremin ispatı verilecektir.

Şimdi burada örnek (Şekil 3.1) ve algoritmanın kısa bir açıklamasını yapalım; (i) bağıntısında uzunluk L olsun. L, her defasında (7) den dolayı 6 kez azaltılmıştır. Yani Δ ve Δ^{-1} arasında bir yok etme söz konusudur. (i) bağıntısı için örnekte diğer başka yok etme söz konusu olabilir. (ii) bağıntısında ise L iki wrapına almasıyla (7) den artırılır. Fakat $\Delta\Delta^{-1}$ nin iptaliyle daha fazla yok etme de söz konusu olabilir. Böylece, ifadenin bir yerinde $\sigma_1\sigma_2$ açılımı yapılmışsa ve diğer bir yerinde $\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}$ açılımı yapılmışsa daha sonra yok etme sonunda net uzunluk 2 kez azalır. Eğer (ii) bağıntısından sonra hala Δ ifadesi kalmışsa, o zaman onları (iii) bağıntısında olduğu gibi wrap içine koymak en faydalı yol olur. Şekil 3.1 bize aşağıdaki örneği verir; burada

$$\mathrm{B}_0 = \sigma_2\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-2}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{2}\sigma_1\sigma_2$$

dır. Biz burada $\mathrm{B}_{\min}$ değerini bulalım.

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}_0 &= \sigma_2\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-2}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{2}\sigma_1\sigma_2 \\
&= \sigma_2\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-2}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\left(\sigma_2^{2}\right)\sigma_1\sigma_2 && \left\{\sigma_2^2 = \sigma_2^{1+1} = \sigma_2\sigma_2 , \sigma_2^1 = \sigma_2\right\} \\
&= \sigma_2\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-2}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\left(\sigma_2\sigma_2\right)\sigma_1\sigma_2 \\
&= \sigma_2\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-2}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2\sigma_2\sigma_1\sigma_2 \\
&= \sigma_2\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-2}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2\left(\sigma_2\sigma_1\sigma_2\right) && \left\{\sigma_2\sigma_1\sigma_2 = \Delta\right\} \\
&= \sigma_2\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-2}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2\left(\Delta\right) \\
&= \sigma_2\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-2}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2\Delta \\
&= \sigma_2\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-2}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\left(\sigma_2\Delta\right) && \left\{\sigma_2\Delta = \Delta\sigma_1\right\} \\
&= \sigma_2\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-2}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\left(\Delta\sigma_1\right) \\
&= \sigma_2\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-2}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\Delta\sigma_1 \\
&= \sigma_2\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-2}\sigma_1\sigma_2^{-1}\left(\sigma_1\Delta\right)\sigma_1 && \left\{\sigma_1\Delta = \Delta\sigma_2\right\} \\
&= \sigma_2\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-2}\sigma_1\sigma_2^{-1}\left(\Delta\sigma_2\right)\sigma_1 \\
&= \sigma_2\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-2}\sigma_1\sigma_2^{-1}\Delta\sigma_2\sigma_1
\end{aligned}$$

$$= \sigma_2\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-2}\sigma_1\left(\sigma_2^{-1}\Delta\right)\sigma_2\sigma_1 \qquad \left\{\sigma_2^{-1}\Delta = \Delta\sigma_1^{-1}\right\}$$

$$= \sigma_2\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-2}\sigma_1\left(\Delta\sigma_1^{-1}\right)\sigma_2\sigma_1$$

$$= \sigma_2\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-2}\sigma_1\Delta\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1$$

$$= \sigma_2\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-2}\left(\sigma_1\Delta\right)\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1 \qquad \left\{\sigma_1\Delta = \Delta\sigma_2\right\}$$

$$= \sigma_2\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-2}\left(\Delta\sigma_2\right)\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1$$

$$= \sigma_2\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-2}\Delta\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1$$

$$= \sigma_2\sigma_1^{-2}\left(\sigma_2^{-2}\Delta\right)\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1 \qquad \left\{\sigma_2^{-2}\Delta = \Delta\sigma_1^{-2}\right\}$$

$$= \sigma_2\sigma_1^{-2}\left(\Delta\sigma_1^{-2}\right)\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1$$

$$= \sigma_2\sigma_1^{-2}\Delta\sigma_1^{-2}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1$$

$$= \sigma_2\left(\sigma_1^{-2}\Delta\right)\sigma_1^{-2}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1 \qquad \left\{\sigma_1^{-2}\Delta = \Delta\sigma_2^{-2}\right\}$$

$$= \sigma_2\left(\Delta\sigma_2^{-2}\right)\sigma_1^{-2}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1$$

$$= \sigma_2\Delta\sigma_2^{-2}\sigma_1^{-2}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1$$

$$= \left(\sigma_2\Delta\right)\sigma_2^{-2}\sigma_1^{-2}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1 \qquad \left\{\sigma_2\Delta = \Delta\sigma_1\right\}$$

$$= \left(\Delta\sigma_1\right)\sigma_2^{-2}\sigma_1^{-2}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1$$

$$= \Delta\sigma_1\sigma_2^{-2}\sigma_1^{-2}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1 \quad = \Delta\mathrm{B}_1$$

$$= \Delta\sigma_1\left(\sigma_2^{-2}\right)\left(\sigma_1^{-2}\right)\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1 \qquad \left\{\sigma_2^{-2} = \sigma_2^{-1}\sigma_2^{-1}, \sigma_1^{-2} = \sigma_1^{-1}\sigma_1^{-1}\right\}$$

$$= \Delta\sigma_1\left(\sigma_2^{-1}\sigma_2^{-1}\right)\left(\sigma_1^{-1}\sigma_1^{-1}\right)\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1$$

$$= \Delta\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1$$

$$= \Delta\sigma_1\sigma_2^{-1}\left(\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\right)\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1 \qquad \left\{\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1} = \Delta^{-1}\sigma_2\right\}$$

$$= \Delta\sigma_1\sigma_2^{-1}\left(\Delta^{-1}\sigma_2\right)\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1$$

$$= \Delta\sigma_1\sigma_2^{-1}\Delta^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1$$

$$= \Delta\sigma_1\sigma_2^{-1}\Delta^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\left(\sigma_2\sigma_1\right) \qquad \left\{\sigma_2\sigma_1 = \Delta\sigma_2^{-1}\right\}$$

$$= \Delta\sigma_1\sigma_2^{-1}\Delta^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\left(\Delta\sigma_2^{-1}\right)$$

$$= \Delta\sigma_1\sigma_2^{-1}\Delta^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\Delta\sigma_2^{-1}$$

$$= \Delta\sigma_1\sigma_2^{-1}\Delta^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\left(\sigma_1^{-1}\Delta\right)\sigma_2^{-1} \qquad \left\{\sigma_1^{-1}\Delta = \Delta\sigma_2^{-1}\right\}$$

$$= \Delta\sigma_1\sigma_2^{-1}\Delta^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\left(\Delta\sigma_2^{-1}\right)\sigma_2^{-1}$$

$$= \Delta\sigma_1\sigma_2^{-1}\Delta^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\Delta\sigma_2^{-1}\sigma_2^{-1}$$

$$= \Delta\sigma_1\sigma_2^{-1}\Delta^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\left(\sigma_2\Delta\right)\sigma_2^{-1}\sigma_2^{-1} \qquad \left\{\sigma_2\Delta = \Delta\sigma_1\right\}$$

$$= \Delta\sigma_1\sigma_2^{-1}\Delta^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\left(\Delta\sigma_1\right)\sigma_2^{-1}\sigma_2^{-1}$$

$$= \Delta\sigma_1\sigma_2^{-1}\Delta^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\Delta\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_2^{-1}$$

$$= \Delta\sigma_1\sigma_2^{-1}\Delta^{-1}\sigma_2\left(\sigma_1^{-1}\Delta\right)\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_2^{-1} \qquad \left\{\sigma_1^{-1}\Delta = \Delta\sigma_2^{-1}\right\}$$

$$= \Delta\sigma_1\sigma_2^{-1}\Delta^{-1}\sigma_2\left(\Delta\sigma_2^{-1}\right)\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_2^{-1}$$

$$= \Delta\sigma_1\sigma_2^{-1}\Delta^{-1}\sigma_2\Delta\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_2^{-1}$$

$$= \Delta\sigma_1\sigma_2^{-1}\Delta^{-1}\left(\sigma_2\Delta\right)\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_2^{-1} \qquad \left\{\sigma_2\Delta = \Delta\sigma_1\right\}$$

$$= \Delta\sigma_1\sigma_2^{-1}\Delta^{-1}\left(\Delta\sigma_1\right)\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_2^{-1}$$

$$= \Delta\sigma_1\sigma_2^{-1}\Delta^{-1}\Delta\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_2^{-1}$$

$$= \Delta\sigma_1\sigma_2^{-1}\underbrace{\Delta^{-1}\Delta}_{e}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_2^{-1}$$

$$= \Delta\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_2^{-1}$$

$$= \Delta\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\left(\sigma_2^{-1}\sigma_2^{-1}\right) \qquad \left\{\sigma_2^{-1}\sigma_2^{-1} = \sigma_2^{(-1)+(-1)} = \sigma_2^{-2}\right\}$$

$$= \Delta\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\left(\sigma_2^{-2}\right)$$

$$= \Delta\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-2} \quad = \Delta\mathrm{B}_2$$

$$= \left(\Delta\sigma_1\right)\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-2} \qquad \left\{\Delta\sigma_1 = \sigma_2\Delta\right\}$$

$$= \left(\sigma_2\Delta\right)\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-2}$$

$$= \sigma_2 \Delta \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-2}$$

$$= \sigma_2 \left(\Delta \sigma_2^{-1}\right) \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-2} \qquad \left\{\Delta \sigma_2^{-1} = \sigma_2 \sigma_1\right\}$$

$$= \sigma_2 \left(\sigma_2 \sigma_1\right) \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-2}$$

$$= \sigma_2 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-2}$$

$$= \left(\sigma_2 \sigma_2\right)\left(\sigma_1 \sigma_1\right) \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-2} \qquad \left\{\sigma = \sigma^1, \sigma_2 \sigma_2 = \sigma_2^2, \sigma_1 \sigma_1 = \sigma_1^2\right\}$$

$$= \left(\sigma_2^2\right)\left(\sigma_1^2\right) \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-2}$$

$$= \sigma_2^2 \sigma_1^2 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-2} \quad = \mathrm{B}_{\min}$$

İfade etmeliyiz ki açık 3-örgüler bu yolla minimum uzunluklu hale getirilebilir. Açık örgüler için örgünün üst ve alt düzlemleri özdeşleştirir. Bu takdirde örgüyü ikiye bölebiliriz ve bu iki parçanın pozisyonlarını alt ve üst edebiliriz: Eğer $\mathrm{B} = \mathrm{B}_a \mathrm{B}_b$ ise bu takdirde B_b üst parçayı alt B_a ile yer değiştirebilir ve $\mathrm{B} = \mathrm{B}_b \mathrm{B}_a$ elde ederiz. Kabul edelim ki (ii) de $\mathrm{B} = \Delta^{\mathrm{P}} \mathrm{B}_2$ den örgüyü minimize ederiz. B_2 ifadesi (10) da verilmiştir. p nin çift olduğunu varsayalım. (iii) adımının uygulanmasıyla $\mathrm{B}_{\min}$ elde edilir. Buna alternatif olarak örgünün en üstten en alta doğru bir kısmını alt üst edebiliriz. Örneğin $r_m \neq 0$ ise

$$\mathrm{B} = \Delta^{\mathrm{P}} \sigma_1^{q_1} \sigma_1^{q_2} \ldots \sigma_1^{q_m} \sigma_2^{-r_m}$$

$$= \Delta^{\mathrm{P}} \sigma_1^{q_1} \sigma_1^{q_2} \ldots \sigma_1^{q_m} \sigma_2^{-r_m} \ \{\text{eşitliğin sağdan } \sigma_2^{r_m} \text{ ,soldan } \sigma_2^{-r_m} \text{ işleme konur}\}$$

$$= \left(\sigma_2^{-r_m}\right) \Delta^{\mathrm{P}} \sigma_1^{q_1} \sigma_1^{q_2} \ldots \sigma_1^{q_m} \sigma_2^{-r_m} \left(\sigma_2^{r_m}\right)$$

$$= \sigma_2^{-r_m} \Delta^{\mathrm{P}} \sigma_1^{q_1} \sigma_1^{q_2} \ldots \sigma_1^{q_m} \sigma_2^{-r_m} \sigma_2^{r_m}$$

$$= \sigma_2^{-r_m} \Delta^{\mathrm{P}} \sigma_1^{q_1} \sigma_1^{q_2} \ldots \sigma_1^{q_m} \left(\sigma_2^{-r_m} \sigma_2^{r_m}\right) \qquad \left\{\sigma_2^{-r_m} \sigma_2^{r_m} = e\right\}$$

$$= \sigma_2^{-r_m} \Delta^{\mathrm{P}} \sigma_1^{q_1} \sigma_1^{q_2} \ldots \sigma_1^{q_m}$$

$$= \sigma_2^{-r_m} \Delta^{\mathrm{P}} \sigma_1^{q_1} \sigma_1^{q_2} \ldots \sigma_1^{q_m}$$

$$= \left(\sigma_2^{-r_m}\Delta^{P}\right)\sigma_1^{q_1}\sigma_1^{q_2}\ldots\sigma_1^{q_m} \qquad \left\{\sigma_2^{-r_m}\Delta^{P} = \Delta^{P}\sigma_2^{-r_m}\right\}$$

$$= \left(\Delta^{P}\sigma_2^{-r_m}\right)\sigma_1^{q_1}\sigma_1^{q_2}\ldots\sigma_1^{q_m}$$

$$= \Delta^{P}\sigma_2^{-r_m}\sigma_1^{q_1}\sigma_1^{q_2}\ldots\sigma_1^{q_m}$$

Bu durumda normal form değişmiş olmasına rağmen uzunluk değişmez. (iii) nin uygulaması olarak $B_{\min}$ ile aynı uzunlukta fakat başka bir sonuç elde edilir.

İkinci durumda p tek ise bu durumda da indirgeme söz konusu olup örgünün ilk ve son harflerine bakılır. Farklı ise yok edilir. Örneğin $r_m \neq 0$ ise

$$B = \Delta^{P}\sigma_1^{q_1}\sigma_2^{-r_1}\ldots\sigma_1^{q_m}\sigma_2^{-r_m}$$

$$= \Delta^{P}\sigma_1^{q_1}\sigma_2^{-r_1}\ldots\sigma_1^{q_m}\sigma_2^{-r_m} \; \{\text{eşitliğin sağdan } \sigma_2^{+1}, \text{soldan } \sigma_2^{-1} \text{ işleme konur}\}$$

$$= \left(\sigma_2^{-1}\right)\Delta^{P}\sigma_1^{q_1}\sigma_2^{-r_1}\ldots\sigma_1^{q_m}\sigma_2^{-r_m}\left(\sigma_2^{+1}\right)$$

$$= \sigma_2^{-1}\Delta^{P}\sigma_1^{q_1}\sigma_2^{-r_1}\ldots\sigma_1^{q_m}\sigma_2^{-r_m}\sigma_2^{+1}$$

$$= \left(\sigma_2^{-1}\Delta^{P}\right)\sigma_1^{q_1}\sigma_2^{-r_1}\ldots\sigma_1^{q_m}\left(\sigma_2^{-r_m}\sigma_2^{+1}\right) \; \left\{\sigma_2^{-1}\Delta^{P} = \Delta^{P}\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-r_m}\sigma_2^{+1} = \sigma_2^{-r_m+1}\right\}$$

$$= \left(\Delta^{P}\sigma_1^{-1}\right)\sigma_1^{q_1}\sigma_2^{-r_1}\ldots\sigma_1^{q_m}\left(\sigma_2^{-r_m+1}\right)$$

$$= \Delta^{P}\sigma_1^{-1}\sigma_1^{q_1}\sigma_2^{-r_1}\ldots\sigma_1^{q_m}\sigma_2^{-r_m+1}$$

Eğer örgünün ilk ve son harfleri aynı iseler sonuncusu ile wrap oluşturulur. Örneğin,

$$B = \Delta^{P}\sigma_1^{q_1}\sigma_1^{q_2}\ldots\sigma_1^{q_m}$$

$$= \Delta^{P}\sigma_1^{q_1}\sigma_1^{q_2}\ldots\sigma_1^{q_m} \; \{\text{eşitliğin sağdan } \sigma_1^{-1}, \text{soldan } \sigma_1^{+1} \text{ işleme konur}\}$$

$$= \left(\sigma_1\right)\Delta^{P}\sigma_1^{q_1}\sigma_1^{q_2}\ldots\sigma_1^{q_m}\left(\sigma_1^{-1}\right) \qquad \left\{\sigma_1^{+1} = \sigma_1^{1} = \sigma_1\right\}$$

$$= \sigma_1\Delta^{P}\sigma_1^{q_1}\sigma_1^{q_2}\ldots\sigma_1^{q_m}\sigma_1^{-1}$$

$$= \left(\sigma_1\Delta^{P}\right)\sigma_1^{q_1}\sigma_1^{q_2}\ldots\left(\sigma_1^{q_m}\sigma_1^{-1}\right) \qquad \left\{\sigma_1\Delta^{P} = \Delta^{P}\sigma_2, \sigma_1^{q_m}\sigma_1^{-1} = \sigma_1^{q_m-1}\right\}$$

$$= \left(\Delta^{P}\sigma_2\right)\sigma_1^{q_1}\sigma_1^{q_2}\ldots\left(\sigma_1^{q_m-1}\right)$$

$$= \Delta^{P}\sigma_2\sigma_1^{q_1}\sigma_1^{q_2}\ldots\sigma_1^{q_m-1}$$

$$= \Delta^{\mathrm{P}} \sigma_2 \underbrace{\sigma_1 \sigma_1^{-1}}_{e} \sigma_1^{q_1} \sigma_1^{q_2} \ldots \sigma_1^{q_m - 1}$$

$$= \Delta^{\mathrm{P}} \sigma_2 \sigma_1 \sigma_1^{-1} \sigma_1^{q_1} \sigma_1^{q_2} \ldots \sigma_1^{q_m - 1}$$

$$= \Delta^{\mathrm{P}} (\sigma_2 \sigma_1)(\sigma_1^{-1} \sigma_1^{q_1}) \sigma_1^{q_2} \ldots \sigma_1^{q_m - 1} \qquad \{\sigma_2 \sigma_1 = \Delta \sigma_2^{-1}, \sigma_1^{-1} \sigma_1^{q_1} = \sigma_1^{q_1 - 1}\}$$

$$= \Delta^{\mathrm{P}} (\Delta \sigma_2^{-1})(\sigma_1^{q_1 - 1}) \sigma_1^{q_2} \ldots \sigma_1^{q_m - 1}$$

$$= \Delta^{\mathrm{P}} \Delta \sigma_2^{-1} \sigma_1^{q_1 - 1} \sigma_1^{q_2} \ldots \sigma_1^{q_m - 1}$$

$$= (\Delta^{\mathrm{P}} \Delta) \sigma_2^{-1} \sigma_1^{q_1 - 1} \sigma_1^{q_2} \ldots \sigma_1^{q_m - 1} \qquad \{\Delta^1 = \Delta, \Delta^{\mathrm{P}} \Delta = \Delta^{\mathrm{P}+1}\}$$

$$= (\Delta^{\mathrm{P}+1}) \sigma_2^{-1} \sigma_1^{q_1 - 1} \sigma_1^{q_2} \ldots \sigma_1^{q_m - 1}$$

$$= \Delta^{\mathrm{P}+1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^{q_1 - 1} \sigma_1^{q_2} \ldots \sigma_1^{q_m - 1}$$

Bu şekilde Δ çift üstlü hale getirilir ve (iii) bağıntısı uygulanarak indirgenir.

3.1.2. 3-Örgülerin Minimum Geçişli Hale Getirilmesi

Tanım 3.1.2.1 : $F_{0,3}\mathbb{C} = \{(a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbb{C}, a \neq b, b \neq c, c \neq a\}$ olsun. (11)

Tanım 3.1.2.2 : Bir geometrik örgü $\gamma : [0,1] \to F_{0,3}\mathbb{C}$ eğrisidir. γ eğrisinin, $t = 0$, $t = 1$ anında $\gamma(a), \gamma(b)$ ve $\gamma(c)$ gibi üç noktanın da içinde olduğu hareketin eğrisi olarak düşünebiliriz. İki geometrik γ_1 ve γ_2 örgülerinin denk olması için gerek ve yeter şart $\mathbb{C} \times \{0\}$ ve $\mathbb{C} \times \{1\}$ de özdeşlenen ve γ_1 i γ_2 ye dönüştüren izotopik deformasyonun mevcut olmasıdır. a, b, c nin başlangıç pozisyonu olarak aşağıdaki seçimi yapmamız uygundur.

$$\gamma(0) = (a,b,c)(0) = (0,1,2). \qquad (12)$$

Aynı zamanda $\gamma(1)$ değeri de 0,1,2 noktalarının permütasyonundan ibarettir.

Tanım 3.1.2.3 : $\omega_{ab}, \omega_{bc}, \omega_{ca}$ bir formlarını ve onların integralleri $\lambda_{ab}, \lambda_{bc}, \lambda_{ca}$ değerlerini aşağıdaki gibi tanımlarız.

$$\omega_{ab} = \frac{1}{2i\pi}\frac{db-da}{b-a} \tag{13}$$

ve

$$\lambda_{ab}\left(\gamma(t)\right) = \int_{\gamma(0)}^{\gamma(1)} \omega_{ab} \tag{14}$$

Buradan,

$$\lambda_{ab}\left(\gamma(t)\right) = \lambda_{ba}\left(\gamma(t)\right) = \frac{1}{2i\pi}\log\frac{b(t)-a(t)}{b(0)-a(0)} \tag{15}$$

yazarız. Yani λ_{ab} değeri kompleks düzlem üzerindeki Riemann yüzeyinde değer alır.

Tanım 3.1.2.4 : ψ_{ab}, ψ_{bc} ve ψ_{ca} ile gösterilen winding sayıları aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\psi_{ab} = \mathrm{Re}\,\lambda_{ab}\left(\gamma(t)\right) = \mathrm{Im}\frac{1}{2\pi}\log\frac{b(t)-a(t)}{b(0)-a(0)} \tag{16}$$

Bu ölçü 0 ve t zaman aralığında a ve b iplikçikleri arasındaki birim tam dönüşün sayısıdır. Aynı zamanda toplam winding sayısı ise,

$$W(t) = \psi_{ab}(t) + \psi_{bc}(t) + \psi_{ca}(t) \tag{17}$$

ile tanımlanır.

Tanım 3.1.2.5 : $\tau_3 \subset R_3$ kümesi tüm admissible üçlülerin sınıfı $(\psi_{ab}, \psi_{bc}, \psi_{ca})$ olsun. Admissible nin anlamı; kompleks (ya da Euclid) uzayda bu winding sayılarına sahip olan üçgen olmasıdır.

Sağ el yönlenmiş ve bozulmamış üçgen için $(\psi_{ab}, \psi_{bc}, \psi_{ca})$ admissible üçlüsü şu şartları sağlar:

$$0 < (\psi_{ca} - \psi_{ab}) \bmod 1 < \frac{1}{2}$$

$$0 < (\psi_{bc} - \psi_{ca}) \bmod 1 < \frac{1}{2} \qquad (18)$$

$$0 < -(\psi_{ab} - \psi_{bc}) \bmod 1 < \frac{1}{2}$$

sol el yönlenmiş üçgenler için ise,

$$0 < (\psi_{ab} - \psi_{ca}) \bmod 1 < \frac{1}{2}$$

$$0 < (\psi_{ca} - \psi_{bc}) \bmod 1 < \frac{1}{2} \qquad (19)$$

$$0 < -(\psi_{bc} - \psi_{ab}) \bmod 1 < \frac{1}{2}$$

şartları sağlar.

Tanım 3.1.2.6 :

$$0 < (\psi_{ca} - \psi_{ab}) \bmod 1 < \frac{1}{2}$$

$$0 < (\psi_{bc} - \psi_{ca}) \bmod 1 < \frac{1}{2}$$

$$0 < -(\psi_{ab} - \psi_{bc}) \bmod 1 < \frac{1}{2}$$

şartını sağlayan τ_3 de bağlantılı bölgeye sağ el yönlenmiş prizma denir. Benzer şekilde

$$0 < (\psi_{ab} - \psi_{ca}) \bmod 1 < \frac{1}{2}$$

$$0 < (\psi_{ca} - \psi_{bc}) \bmod 1 < \frac{1}{2}$$

$$0 < -(\psi_{bc} - \psi_{ab}) \bmod 1 < \frac{1}{2}$$

şartını sağlayan τ_3 de bağlantılı bölgeye sol el yönlenmiş prizma adı verilir.

Eğer $(\psi_{ab},\psi_{bc},\psi_{ca})$ admissible üçlüsü uyumlu ise, o zaman

$$(\psi_{ab}+x,\psi_{bc}+x,\psi_{ca}+x)$$

bu sayılarda uyumludur ve burada x herhangi bir reel sayıdır. Böylece, τ_3 geometrisi aşikar olmayan sadece (1,1,1) yönüne dik bir yüzeydir. Böyle bir yüzey, $\omega=0$ yüzeyidir.

Tanım 3.1.2.7 : $\mathrm{P}_3 \subset \tau,$ düzlemi aşağıdaki gibi olsun.

$$\mathrm{P}_3=\{(\psi_{ab},\psi_{bc},\psi_{ca}) \mid \psi_{ab}+\psi_{bc}+\psi_{ca}=0\} \tag{20}$$

Bu durumda tüm üçgensel bölgeler prizmanın dilimlenmesine karşılık gelir. Bu bölgelerin kenarları (yani prizmanın yüzleri) yasaklanmıştır. Köşeleri (a, b ve c) ise (prizmanın kenarları) bozulmuş üçgensel alanlardır. P_3 de a, b ve c ye karşılık gelen üçgensel bölge eşkenar üçgeni oluşturur. Koordinatları,

$$\phi_{ij}=6\psi_{ij}-2W$$

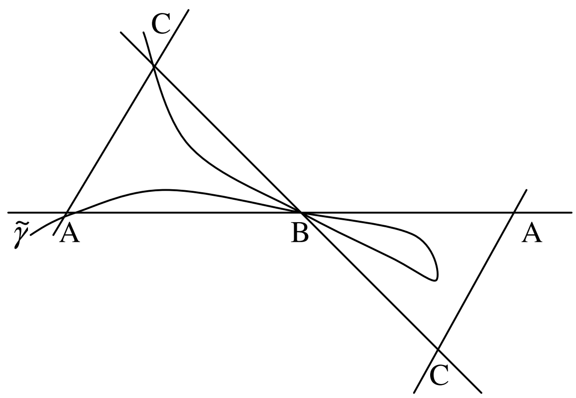
yoluyla $\phi_{ab},\phi_{bc},\phi_{ca}$ olarak belirleyelim. ϕ_{ij} -köşelerinde tamsayı 6 nın çarpanıdır. Bu durumda τ_3 den P_3 üzerine dönüşüm,

$$(\psi_{ab},\psi_{bc},\psi_{ca}) \to (\phi_{ab},\phi_{bc},\phi_{ca}) = 6(\psi_{ab},\psi_{bc},\psi_{ca})-2(W,W,W) \tag{21}$$

ile verilir. Toplam winding sayıları $\psi_{ij}=\psi_{ij}(1)$, izotop deformasyon altında invaryanttır. Yani eğer γ_1 ve γ_2 denk ise bu takdirde $\psi_{1ab}=\psi_{2ab}$ dir. Bunu görmek için, ψ ifadesi, ω_{ab} ifade şeklinin integrasyonu aracılığıyla elde edilir. ω_{ab} kapalı olup bu integral γ_1 ve γ_2 eğrilerin homotopik olmaları nedeniyle aynıdır. Örgülere yönelik yüksek mertebeden kanatlanma sayıları benzer biçimde tanımlanabilir. Örneğin, üçüncü mertebeden invaryant;

$$\psi_{abc}=\int_{\gamma(0)}^{\gamma(1)}(\lambda_{ab}\omega_{bc}+\lambda_{bc}\omega_{ca}+\lambda_{ca}\omega_{ab}-\lambda_{ab}\omega_{ca}-\lambda_{bc}\omega_{ab}-\lambda_{ca}\omega_{bc}). \tag{22}$$

$\gamma \in \mathcal{C}$ eğrisi a, b ve c aralarındaki açıdan doğan ve faz eğrisi olarak isimlendirilen birer $\bar{\gamma} \in \tau_3$ ve $\tilde{\gamma} \in P_3$ eğrilerini doğurur. Biraz önceki ifadeye benzer olarak $\bar{\gamma}_1 \sim \bar{\gamma}_2$ olması için gerek ve yeter şart eğrilerden birisinden izotopik deformasyon altında diğeri elde edilebiliyor olmasıdır. Burada $\bar{\gamma}_1 = (\psi_{ab}, \psi_{bc}, \psi_{ca})$ değeri izotopik deformasyon altında invaryanttır. Başlangıç noktaları da $\bar{\gamma}(0) = (0,0,0)$ olarak alınmıştır.



Şekil 3.2

Teorem 3.1.2.1 : İki geometrik örgünün, yani $\gamma_1 \sim \gamma_2$ için denk olması için gerek ve yeter şart $\bar{\gamma}_1 \sim \bar{\gamma}_2$ olmasıdır.

İspat : Kabul edelim ki $\gamma_1 \sim \gamma_2$ olsun. Bu durumda sabit bir s_0 için ve $\Gamma(t,0) = \gamma_1(t)$, $\Gamma(t,1) = \gamma_2(t)$ ifadelerini sağlayan bir $\Gamma(t,s)$ bir homotopisi vardır. Ayrıca $\Gamma(t,s_0)$ bir geometrik örgüdür. Benzer şekilde $\bar{\gamma}_1 \sim \bar{\gamma}_2$ olduğundan $\overline{\Gamma}(t,s_0)$ nin varlığı ve τ_3 ifadesi üzerinde bir yol olduğunu ve $\overline{\Gamma}(t,0) = \bar{\gamma}_1(t)$, $\overline{\Gamma}(t,1) = \bar{\gamma}_2(t)$ ifadelerinde sağlanacağını ifade etmektedir.

$$G : F_{0,3}\mathcal{C} \to \tau_3$$

eğrisi verilsin. Burada $\gamma(t)$, $\bar{\gamma}(t) = G(\gamma(t))$ eğrileri (13), (14) ve (16) şartları tarafından verilmiştir. $\gamma_1 \sim \gamma_2$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde herhangi bir sabit s için $\overline{\Gamma}(t,s) = G(\Gamma(t,s))$ olur. Bu ise $\bar{\gamma}_1 \sim \bar{\gamma}_2$ ifadesini sağlanmasıdır. $\bar{\gamma}_1 \sim \bar{\gamma}_2$ olsun. O zaman

$$\overline{\Gamma}(t,s) = (\psi_{ab}, \psi_{bc}, \psi_{ca})(t,s)$$

homotopisi mevcuttur. $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$ aşağıdaki şekilde tanımlansın ve

$$\Gamma(t,s) = (a,b,c)(t,s)$$

şeklinde bir homotopi oluşturalım.

$$a(t,s) = (1-s)a_1(t) + sa_2(t) \tag{23}$$

ve ikinci olarak,

$$r_{ab}(t,s) = (1-s)\left|b_1(t) - a_1(t)\right| + s\left|b_2(t) - a_2(t)\right| \tag{24}$$

olsun. Bu takdirde,

$$b(t,s) = a(t,s) + r_{ab}(t,s)e^{i\psi_{ab}(t,s)} \tag{25}$$

ve sonuç olarak

$$c(t,s) = a(t,s) + r_{ca}(t,s)e^{i\psi_{ca}(t,s)} \tag{26}$$

dir. ($Sin(\psi_{ab}(t,s) - \psi_{bc}(t,s)) \neq 0$) Bu ifadede

$$\frac{r_{ca}(t,s)}{Sin(\psi_{ab}(t,s) - \psi_{bc}(t,s))} = \frac{r_{ab}(t,s)}{Sin(\psi_{ab}(t,s) - \psi_{bc}(t,s))} \tag{27}$$

dir. (t,s) nin soyutlanmış değerleri için, bozulma olduğunu bir ifade eder. Süreklilikten $Sin(\psi_{ab}(t,s) - \psi_{bc}(t,s)) = 0$, $r_{ca}(t,s)$ ifadesini seçebiliriz. $\overline{\Gamma}(t,s)$ ifadesini gerekirse $\overline{\Gamma}(t,s)$ nin bozulma yapısından çıkarabiliriz.

Teorem 3.1.2.2 : Geometrik örgülerin sınıfı tamamen ve tek bir şekilde (i), (ii) ve (iii) ile belirlenir.

(i) $W = 2W(1) = 2(\psi_{ab} + \psi_{bc} + \psi_{ca})$

(ii) P kelimesi, peş peşe gelen harfleri özdeş olmayacak şekilde A, B ve C gibi üç harften oluşan bir kelimedir.

(iii) Bir s nin işareti $s \in \{-1,1\}$ dir.

İspat : (i) $\bar{\gamma}$ faz eğrisi, artan bir W değerinin (1,1,1) yönünde engel olmaksızın da deforme olabildiği için, her zaman şunu yazabiliriz.

$$W(t)= tW(1) \qquad (28)$$

Bu durumda, (28) i sağlayan iki denk geometrik örgüler sadece P_3 deki $\tilde{\gamma}$ işlevlerinde farklılaşacaktır. Diğer taraftan (17) den biliyoruz ki,

$$W(t) = \psi_{ab}(t) + \psi_{bc}(t) + \psi_{ca}(t)$$

dir. (17) ve (28) şartları birlikte düşünürsek yani,

$$tW(1) = W(t) = \psi_{ab}(t) + \psi_{bc}(t) + \psi_{ca}(t) \qquad (29)$$

olur. Burada $\psi_{ij} = \psi_{ij}(1)$ ifadeyi dikkate alarak $t = 1$ için

$$1W(1) = W(1) = \psi_{ab}(1) + \psi_{bc}(1) + \psi_{ca}(1)$$

$$= \psi_{ab} + \psi_{bc} + \psi_{ca}$$

yazabiliriz. Bu ifadesinin aynısı ile taraf tarafa toplarsak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz. Yani

$$2W(1) = 2(\psi_{ab} + \psi_{bc} + \psi_{ca})$$

olur.

(ii) $\tilde{\gamma}$ eğrisi doğruların kesişme noktasından geçtiği zaman a, b ve c noktaları aynı doğru üzerindedir. Eğer a noktası ortadaysa bir A kesişme noktasını, eğer b noktası da ortadaysa bir B kesişme noktası ve c noktası ortadaysa C kesişme noktası olur. $t = 0$ dan başlayarak, başlangıç noktası için B yazalım. [$(a,b,c) = (0,1,2)$ olması, tanımı sağlamak için seçildi] ve $\tilde{\gamma}$ kesişme noktasını direkt geçtiği zaman bir işaretten bahsedilir.

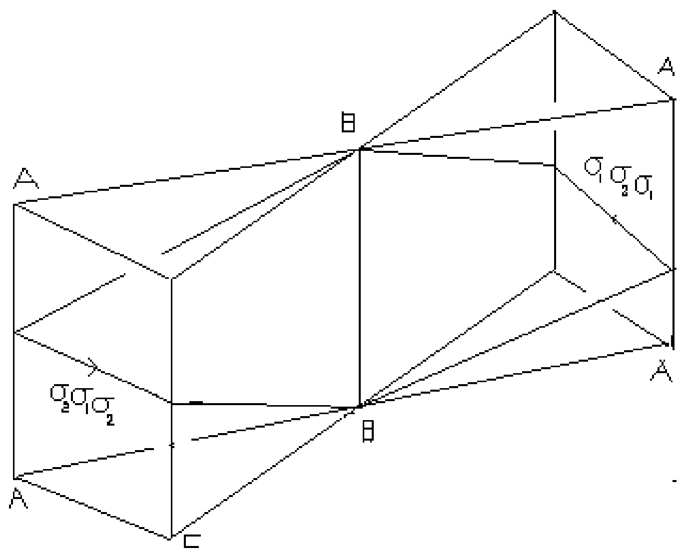
$\tilde{\gamma}$ eğrisinin deformasyonu sadece Şekil 3.2 de görüldüğü gibi kesişme noktasından ilmiklenmişse kelimede değişebilir. Böylece kelime sadece tekrar edilmiş harflerin (veya değerlerin) silinmesi ve ilavesi aracılığıyla değişebilir. Aksine olarak eğer kelime tekrar edilmiş harfleri içerirse, o zaman bunlar izotopik deformasyon tarafından yok edilebilir. Bu işleme başka bir yinelenen harfler kalmayana kadar devam edilir. Örneğin,

$$\mathrm{BA}C\mathrm{A}\underbrace{\mathrm{BB}}\mathrm{AB}C \Rightarrow \mathrm{BA}C\underbrace{\mathrm{AA}}\mathrm{B}C \Rightarrow \mathrm{BA}C\mathrm{B}C$$

(iii) $\tilde{\gamma}$ eğrisi alterne olarak sol yönlenmiş ve sağ yönlenmiş taraf prizmaya geçer. s işareti $\tilde{\gamma}$ in eğrisinin geçtiği ilk prizmanın işaretini açıkça ifade eder. Örneğin; $\mathrm{P} = \mathrm{BA}C\mathrm{B}C$ ise, o zaman bu kesişme noktası için iki seçenek vardır. Bunlardan biri sol yönlenmiş prizmadan geçen σ_1 ve ($s = -1$), diğeri ise σ_1^{-1} sağ yönlenmiş prizmadan geçen ve ($s = 1$) dır. Buna göre $s \in \{-1,1\}$ dir.

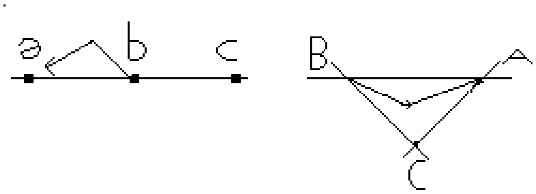
3.1.3. Artin Örgüsünün Faz Eğrileri

σ_1 ve σ_2 den elde edilen artin örgüsü, $\bar{\gamma}$ veya $\tilde{\gamma}$ şeklinde resmedildiğinde neye benzer? Artin Örgüsünde her bir σ örgünün geçişlerine karşılık gelen a, b ve c den başlayıp reel eksende sona eren sıralaması permütasyonla belirlenen geometrik bir örgüdür. σ ya karşılık gelen $\bar{\gamma}$ faz eğrisi prizmanın yüzünde başlayan ve prizmanın kenarında sona eren eğridir. Benzer olarak $\tilde{\gamma}$ eğrisi P_3 ün bir köşesinden başlayan ve bir üçgensel bölgeyi boydan boya geçen ve yeni bir köşede sona eren eğridir. Aynı zamanda her bir σ, W de $\pm 1/2$ kadar değişir. $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$ özelliği Şekil 3.3 de gösterilmiştir. Bu kelimelerin her birisi Δ nın yarı dönüşümüne karşılık gelir. Onların faz eğrileri olan $\bar{\gamma}$ (prizma kenarında) dikey yay olup W nin artma yönünde iken $\tilde{\gamma}$ projeksiyonu bir noktada kalır.

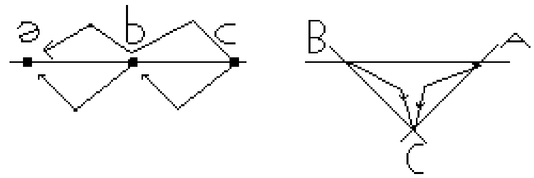


Şekil 3.3

Şekil 3.4 $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$ veya $\sigma_2\sigma_1\sigma_2$ örgülerine karşılık gelen $\bar{\gamma}$ faz eğrisini Şekil 3.4 ve Şekil 3.5 ise $(0,1,2)$ den başlayan ve σ_1 ve $\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}$ wraplarını gösterir. Her ikisi de B köşesinden A köşesine geçişi gösterir. Herhangi bir köşeden başlandığında, 4 tane komşu nokta vardır. Bunlara direkt olarak 4 hareket $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}$ yoluyla ya da Δ nın kuvvetlerinin wrap formuna ilavesiyle ulaşılır. $\bar{\gamma}$ faz eğrisi grubunun merkezine bir çarpan bulunması faydalıdır.



Şekil 3.4



Şekil 3.5

Tanım 3.1.3.1 : Eğer $\tilde{\gamma}_1 \sim \tilde{\gamma}_2$ ($\tilde{\gamma}_1$ eğrisi $\tilde{\gamma}_2$ ye dönüşürse) ise, bunlara karşılık gelen faz eğrileri $\bar{\gamma}_1$ ve $\bar{\gamma}_2$ olmak üzere $\bar{\gamma}_1 \simeq \bar{\gamma}_2$ olur. Çünkü Şekil 3.4 ve 3.5 de görüleceği üzere (9) şartından $\bar{\gamma}(\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}) \simeq \bar{\gamma}(\sigma_1)$ aracılığıyla $\Delta \simeq 0$ (tek bir nokta içeren eğri) olur.

Şimdi 3.1.1 bölümünde verdiğimiz teoremi ifade edip ispatlayalım.

Teorem 3.1.1.1 : Herhangi bir B örgüsü verilsin. Bu durumda $\Delta^{\mathrm{P}}\mathrm{B}_2$ bir tektir. Buna ilave olarak herhangi bir B örgüsünün $\mathrm{B}_{\min}$ kelimesi minimum L uzunluğuna sahip olanıdır ve bu kelime tek bir şekilde oluşturulmuştur.

İspat : $\bar{\gamma}$ faz eğrisine sahip olan bir B örgüsü olsun. Ayrıca $[\bar{\gamma}]$ onun $\cong$ ye göre denklik sınıfı olsun. $[\bar{\gamma}]$ nin her bir elemanı aynı minimum köşe nokta dizisi P ye sahip olur. A geçişi P deki yüzler arasındaki geçiş 1,2,4,5,7,8,... gibi aynı kelime uzunluğuna sahiptir. (Buna göre $\sigma_1, \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}, \Delta\sigma_1, \Delta^{-1}\sigma_1^{-1}, \ldots$) Her bir geçiş verildiğinde tek bir σ kullanımıyla tam olarak bir yol vardır. Bu takdirde B_2 Artin örgü kelimesinde sadece bir σ kullanılmasıyla her bir geçişi sağlayan $\bar{\gamma}_2$ eğrisi vardır. L(P) = (P deki harf sayısı)-1 olsun. Bu takdirde $L(\mathrm{B}_2) = L(\mathrm{P})$ dir. Eğer $\bar{\gamma} \not\simeq \bar{\gamma}_2$ ise $\bar{\gamma}$ ve $\bar{\gamma}_2$ ifadesi Δ nın p inci kuvvetine göre farklıdır. Writhe bir invaryant olduğundan $p = (W(\bar{\gamma}) - W(\bar{\gamma}_2))/3$ yazarız. Kelimenin uzunluğu Δ ların nerde olduğuna göre değişim gösterebilir veya $\bar{\gamma}$ nin $\bar{\gamma}_2$ nin üst veya altına tırmanmasıyla değişebilir. $\Delta^P B_2$ nin tam uzunluğu, Δ ve σ^{-1} lerden wrapların oluşmasıyla veya Δ^{-1} ve σ ların wrap oluşturmasıyla azalır. Şu halde eğer p pozitif $(p \geq 0)$ ise Δ ile σ^{-1} ler arasında dağılır. Eğer $p > r$ ise p!/r!(p-r)! yolla bu gerçekleşir. Bir tek dağılım ilk $p\sigma^{-1}$ nin wrapa dönüşümü yoluyla belirlenir.

Bu $N > 3$ için N-örgülerin konfigürasyon uzayında minimalleştirilmesi problemini sonuçlandırır. N-örgüleri için konfigürasyon uzayının boyutu aşağıdaki yolla hesaplanabilir: Her t değeri için örgüyü ilk iplikçiği $(x, y) = (0,0)$ da kalan örgüye dönüştürürüz. Bu ise 2(N-1) boyutta olmasıdır. Geçitleri döndürmek ve ölçmek 2 den büyük boyutlar için zordur. Bu nedenle uzayın boyutu P_3 e benzemelidir. [2(N-2)]

3.2. Kelime Problemi

Bir β n-örgüsü verildiğinde buna denk olan bir başka $\beta^{'}$ n-örgüsü olması için $\Leftrightarrow$ bu örgülere karşılık gelen B_n örgüsünün elemanlarının eşit olmasıdır. Notasyonları azaltalım ve β ve $\beta^{'}$ ile örgüleri işaret edelim. Buradan β ve $\beta^{'}$ nin $(\beta = \beta^{'})$ eşit olup olmadığına dair pratik bir metodun gerekliliği araştırılmalıdır. Bu problemin çözümü cebir açısından kelime problemi olarak adlandırılır.

Örgüler için kelime problemi: "Herhangi iki β_1 ve β_2 örgüleri verildiğinde $\beta_1 = \beta_2$ olup olmadığını ifade eden bir algoritma var mıdır?" ile açıklanır. Bu soruyu biraz değiştirsek " β_1 $(\beta_1 = \beta_2 \Rightarrow \beta_1\beta_2^{-1} = 1)$ ifadesini sağlayan örgü algoritması nedir?" şeklinde de yazabiliriz.

Böyle bir metod mevcut olup, bu algoritmayı hazırlamak için gerekli aşamaları aşağıda vereceğiz.

1. Adım: Bu soruda verilen örgünün saf örgü olup olmadığıdır. Bu soruyu sormaktaki amacımız 1 in (aşikar örgü) saf örgü olduğundan, β örgüsü verildiğinde bu örgü saf örgü değilse hemen β nın 1 olmadığını söyleriz ve algoritma sonlanır.

β örgüsünün saf örgü olup olmadığını belirlemek kolaydır. β nin permütasyonunu göz önüne alalım. $\pi(\beta)=(1)$ ise β aşikar (saf) örgüdür.

2. Adım: β saf örgü ise tanımdan biliyoruz ki

$$\pi(\beta)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

dir. Bu takdirde örgü

$$\beta=\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{n-1}$$

şekline dönüştürülür.

3. Adım: $\beta=\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{n-1}$

örgüsünde her bir α_i nin aşikar olup olmadığının araştırılması.

Bu aşamalardan sonra kelime probleminin çözüme sahip olduğu söylenebilir. Ayrıca biliyoruz ki kelime problemi serbest grup yapısında çözülmektedir. Bu işlem burada sözü edilen 3 aşama ve daha fazlasını gerektirmektedir. Kelime problemi B_n de çözme girişimi, yukarda verilen 3 adımdan sonra ortaya çıkan örgü yapısının serbest grubun elemanları olmasından faydalanarak yapılır. Buna bağlı olarak B_n de çözüme ulaşılır.

Bu problem çok daha detaylı araştırmalar gerektirmektedir.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Örgü ve örgülerin düğüm teorisi hakkında bilgi verildi. Ayrıca herhangi bir düğüm verildiğinde bu düğümden bir örgünün nasıl elde edildiğini örnekle açıkladık. Diğer taraftan konfigürasyon uzayları hakkında bilgi verdik.

Verilen bir $n = 3$-bileşenli örgü için (minimal uzunluğuna sahip) Berger'in ortaya attığı algoritmayı inceledik. Bu algoritma bir $n = 3$-bileşenli örgü verildiğinde bundan minimal geçişe sahip bir örgü elde etme işlemini yapmaktadır. Minimal geçişli örgü elde etme problemi notasyon olarak çözümde ve çizimde ekonomik yollar vermektedir. Bu algoritma Şimşek ve arkadaşları tarafından bilgisayar programı haline de dönüştürülmüştür. Aynı zamanda minimum geçit sayısı (örgünün kompleksliğiyle ilgili bir ölçüt) fiziksel anlamda ise toplam manyetik alanların büyüklüğünün tahmini için kullanılmaktadır. Freedman ve He 1991 tüplerde toplam enerji miktarının büyüklüğünü minimal geçişli örgüye bağlı ifade etmişlerdir. Böylesi hesaplamalar güneşin atmosferdeki manyetik alanlarının örgüsü çalışmalarında önemlidir.

KAYNAKLAR

1. M. Berger, Minimum Crossing Numbers for 3-braids, J. Phys: Math. Gen. 27, 6205-6213(1994).

2. V. L. Hansen, Braids and Coverings: Selected Topics, Cambridge U. Press., 1989.

3. K. Murasugi, Knot Theory and Its Application, Birkhauser, Translated by Bohdan Kurpita, 1996.

4. E. Artin, Theory of Braids, Ann. Math. (2) 48, 101-126(1947).

5. M. Berger, The Third Order Braids Invariants, J. Phys. A: Math. Gen. 24, 4027-4036(1991).

6. M. Berger, Energy-Crossing Number Relations for Magnetic Fields. Phys. Rev Lett. 70, 705-708(1993).

7. E. Fadell, L. Neuwirth, Configuration Spaces, Math. Scand. 10, 111-118(1962).

8. R. H. Fox, L. Neuwirth, The Braids Groups, Math. Scand. 10, 119-126(1962).

9. J. Birman, Braids and Links and Mapping Class Groups. Princeton Un. Press, New Jersey, 1975.

10. M.,H.,Freedman, Z.,X.,He, Divergence-free fields: energy and asymtotic crossing number, Annals of Math.134,1,189-229, (1991).

11. H. Şimşek, M. Bayram, İ. Can, Automatic Calculation of Minimum Crossing Numbers of 3-Braids, App. Math. and Comp. 144, 507-516 (2003).