

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

WEIBULL DAĞILIMI VE UYGULAMALARI

ÖZKAN ELİTOK

KASIM 2006

Fen Bilimleri Enstitü Müdürünün onayı.

12 Ekim 2006

Doç. Dr. Gülay BAYRAMOĞLU

Enstitü Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans Tezi olarak Matematik Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumuzu ve Yüksek Lisans Tezi olarak bütün gerekliliklerini yerine getirdiğini onaylarız.

Doç. Dr. Hasan ERBAY

Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Kerim KOCA

Doç.Dr. Hasan ERBAY

Yrd.Doç.Dr. Ali ARAL

ÖZET

WEİBULL DAĞILIMI VE UYGULAMALARI

ELİTOK, Özkan

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman : Doç. Dr. Hasan ERBAY

EKİM 2006, 59 SAYFA

Weibull dağılımı bir çok alanda yaygın olarak kullanılmaktadır. Weibull dağılımı kuvvet karakteristiği eğrisinin tüm bölgelerini temsil edebilmektedir. Bu özelliği, güvenilirlik çalışmalarında Weibull dağılımını diğer dağılımlara göre daha kullanışlı kılmaktadır.

Bu tezde, Weibull dağılımının incelenmesi ve uygulama alanlarının gösterilmesini amaç edinilmiştir. Bilimsel literatürün taranması, bu çalışmanın ilk adımını teşkil etmektedir. Ardından verilerin Weibull dağılımına uyumluluğunu test için kullanılan yöntemler, parametre tahmin yöntemleri, parametre ve yüzdelikler için güven aralıkları üreten yöntemler incelenmiştir. Son olarak da Weibull dağılımının uygulanmasını ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: Weibull Dağılımı, Maksimum Benzerlik Yöntemi, En-Küçük Kareler Yöntemleri ve Weibull Dağılımı uygulamalar

ABSTRACT

WEIBULL DISTRIBUTION AND ITS APPLICATIONS

Özkan ELİTOK

Kırıkkale University

Graduate School Of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematic, M. Sc. Thesis

Supervisor : Assoc. Prof.Dr. Hasan ERBAY

OCTOBER 2006, 59 PAGES

Weibull distribution has been used in a lot of field as common. Weibull distribution is able to represent all regions of the bathtub curve. This feature makes Weibull distribution more useful than other distributions in reliability studies.

Our goal in this thesis is to analyze Weibull distribution and show some of its applications. The first step is the survey of the related scientific literature. Then, goodness-of-fit tests for Weibull distribution, parameter estimation methods and confidence interval methods for parameters and percentiles are analyzed.

Finally, it is checked that Reliability analysis, one of applicational fields of Weibull distribution.

Key Words: Maximum Likelihood Method, Least-squares methods and Weibull Distribution Applications

TEŞEKKÜR

Tez konusunu bana öneren ve hazırlanması esnasında büyük bilgi birikimiyle her türlü yardımlarını esirgemeyen danışman hocam sayın Doç. Dr. Hasan ERBAY'a, bugünlere gelmemde katkısı olan bütün hocalarıma ve desteklerinden dolayı aileme teşekkür ederim.

SİMGELER DİZİNİ

X	Rastlantı değişkeni
$F(x)$	Birikimli Dağılım Fonksiyonu
$R(x)$	Güvenilirlik Fonksiyonu
$f(x)$	Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu
$\lambda(x)$	Arıza Hızı Fonksiyonu
n	Örnek Büyüklüğü
η	Ortalama
σ	Standart Sapma
α	Diğer Dağılımlar için Şekil Parametresi
λ	Diğer Olasılık Dağılımları Biçim Parametresi
β	Weibull Ölçek Parametresi
γ	Weibull Şekil Parametresi
\hat{F}	Birikimli Dağılım Fonksiyonu Tahmini
\hat{W}	Ağırlık Faktörü Tahmincisi
M	Mann Test İstatistiği
ν	Serbestlik Derecesi
$L(\theta)$	Maksimum Benzerlik Fonksiyonu
$\hat{\theta}$	Maksimum Benzerlik Tahmincisi
ε	Artık Değeri
p	Hata Olasılığı

$\Gamma(\alpha)$

Gamma Dağılım Fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

ŞEKİL

2.1	Dağılım Fonksiyonu Grafiği	10
2.2	Weibull Dağılımı Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu-Weibull Dağılımı Birikimli Dağılım Fonksiyonu-Weibull Dağılımı Arıza Hızı Fonksiyonu-Weibull Dağılımı Güvenilirlik Fonksiyonu Grafikleri	21
3.1	Weibull Uyum Grafiği	45
3.2	Benzetim Programları Akış Şeması.....	49
3.3	Benzetim Programında Maksimum Benzerlik Yöntem Seçimi... ..	53
3.4	Maksimum Benzerlik Yöntemine Göre Çıktı Sonuçları.....	54
3.5	Benzetim Programı En Küçük Kareler Yöntemi Seçimi	55
3.6	Benzetim Programı En Küçük Kareler Yöntemi Girdi Ekranı	55
3.7	Benzetim Programı En Küçük Kareler Yöntemi Çıktı Ekranı.....	56

ÇİZELGELER DİZİNİ

ÇİZELGE

2.1	Weibull Şekil Parametresinin Farklı Davranışları.....	20
2.2	Parametre Tahmin Yöntemleri	39
3.1	Kopma Mukavemeti Değerleri.....	42
3.2	Verilerin Weibull Grafik Analizi için Hazırlanması	43
3.3	Kopma Mukavemeti Verilerine ait Mann Yöntemi Hesapları.....	47
3.4	Maksimum Benzerlik Yöntemi ile Program Tarafından Yapılan Hesaplamalar.....	50
3.5	Ağırlıklı En Küçük Kareler Yöntemi ile Program Tarafından Yapılan Hesaplamalar.....	52

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER DİZİNİ	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ	vii
İÇİNDEKİLER.....	viii
1. GİRİŞ	1
1.1. Literatürün Gözden Geçirilmesi	2
1.2. Çalışmanın Amaç ve Kapsamı.....	4
2. MATERYAL VE YÖNTEM.....	6
2.1. Temel Olasılık Bilgisi	6
2.1.1. Bernoulli Denemeleri.....	8
2.1.2. Rastlantı Değişkenleri.....	8
2.1.3. Dağılım Fonksiyonu (Birikmiş Yoğunluk Fonksiyonu).....	9
2.1.4. Yoğunluk Fonksiyonu.....	11
2.1.5. Ortalama Değer, Varyans ve Standart Sapma	12
2.1.6. Çeşitli Yoğunluk Fonksiyonları (Örnek Dağılımlar	13
2.2. Weibull Dağılımı	17
2.2.1 Weibull Dağılımı	
İstatistiksel Özellikleri (2-Parametrelili Weibull için).....	18
2.2.2. Weibull Dağılımı İçin Özel Durumlar	19
2.3.Weibull Dağılımı Uyumluluk Testleri	21

2.3.1. Weibull Grafik Yöntemi.....	21
2.3.2. Weibull Dağılımı için Mann Uyumluluk Testi.....	23
2.4. Weibull Parametreleri ve Yüzdelerinin Tahmini	24
2.4.1. Maksimum Benzerlik Yöntemi	25
2.4.1.1. Weibull Parametrelerinin Maksimum Benzerlik Yöntemi ile Tahmini	26
2.4.2. En Küçük Kareler Yöntemi	30
2.4.2.1. Weibull Parametrelerinin En Küçük Kareler Yöntemi ile Tahmini.....	30
2.4.2.2. Weibull Parametrelerinin Ağırlıklı En Küçük Kareler Yöntemi ile Tahmini	32
2.4.3. Weibull Yüzdelerinin Tahmini.....	33
2.5. Weibull Parametreleri ve Yüzdeleri için Güven Aralıkları	35
2.5.1. Weibull Şekil Parametresi için Güven Aralıkları	36
2.5.2. Weibull Ölçek Parametresi için Güven Aralıkları	37
2.5.3. Weibull Yüzdeleri için Güven Aralıkları	40
3 ARAŞTIRMA BULGULARI.....	42
3.1. Testlerin ve Tahmin Yöntemlerinin Uygulanması	43
3.2. Weibull Uyumluluk Testleri.....	43
3.2.1. Verilerin Weibull Uyumluluğunun Grafik Yöntemle Testi	43
3.2.2. Verilerin Weibull Uyumluluğunun Mann Yöntemi ile Testi	45
3.3. Weibull Parametreleri ve Yüzdelerinin Tahmini ve Bunlar için Güven Aralıklarının Oluşturulması.....	48
4. TARTIŞMA VE SONUÇ	57
KAYNAKLAR	59

1.GİRİŞ

Hayatımızda bir çok alanda istatistiksel dağılımlar kullanılır. Örneğin bir bankada herhangi bir işlem yapmak için sırada beklerken yanıp sönen makinelerin işleyiş prensibinde, asansörlerin ortalama bekleme sürelerinin belirlenmesinde veya bir havaalanına gelen ortalama yolcu sayısının belirlenmesi ve bu bilgiye göre uçuş saatlerinin belirlenmesinde olduğu gibi bunları günlük hayatımızda görmemiz mümkündür. Ancak çoğumuz dağılımlar hakkında fazla bir bilgiye sahip olmadığımız için onların gündelik hayatımızda veya bilimsel alanlarda; mühendislik ve tıp gibi, ne kadar önemli bir role sahip olduğundan haberdar değiliz.

İstatistiksel dağılımları anlamak için ilk olarak dağılımın ne ifade ettiğini bilmemiz gerekir. Örneğin bir limana belli bir süre içerisinde yanaşan gemiler, herhangi bir anda bir markette hesap ödemek için bekleyen müşteriler yada belli bir hastalığa yakalanan hastaların iyileşme süreleri birer dağılım oluşturmaktadır.

Dağılımlar veri türlerine göre sürekli veya kesikli olmak üzere ikiye ayrılır. İşte biz sürekli dağılımlardan önemli bir uygulama alanına sahip ve çok yönlü bir dağılım olan Weibull dağılımını inceleyeceğiz.

Weibull dağılımı güvenilirlik çalışmalarında en yaygın kullanım alanına sahip olasılık dağılımıdır. Weibull modeli çok esnek bir güvenilirlik modeli oluşturmamızı sağlar. Sistemlerin, alt sistemlerin, bozulma ve aşınmaya bağlı parçaların hata olasılıklarını modellemek için yaygın olarak kullanılır. Weibull dağılımı son yıllardaki güvenilirlik çalışmalarının temelini oluşturmaktadır. Özellikle, seramiklerin, metallerin,

polimerlerin ve kompozit malzemelerin statik ve dinamik mekanik özelliklerinin modellenmesinde yaygın olarak kullanılmaktadır.

Güvenilirlik analizleri, bir sistem, bir sisteme bağlı alt sistem veya bir sistemin içinde yer alan kritik bir parça veya ürün güvenilirliğinin ölçülmesi, hesaplanması ve değerlendirilmesi işlemidir. İşte Weibull Dağılımı meydana gelen istenmeyen arızaların oluşmasını azaltmak yada önceden belirlemek amacı ile kullanılan Güvenilirlik analizlerinin uygulama alanını oluşturmaktadır.

1.1 Literatürün Gözden Geçirilmesi

D.R. Thoman, v.d, Weibull dağılımı şekil ve ölçek parametrelerinin Maksimum benzerlik yöntemiyle tahmini ve parametreler için güven aralıklarının oluşturulmasını ele alan çalışmalarında bu yöntemle has pivotal istatistikler geliştirmişler ve bu istatistiklerin dağılımının benzetimini yapıp elde ettikleri değerleri tablo yaparak güven aralıklarının nasıl oluşturulacağını göstermişlerdir.

J. Fernandez-Saez, v.d, küçük bir p hata olasılığına karşılık gelen Weibull alt yüzdelerinin maksimum benzerlik ve ağırlıklı en küçük kareler yöntemleriyle tahmin edilmesi ve Weibull alt yüzdeleri için güven aralıkları oluşturulmasını konu aldıkları çalışmalarında, Weibull şekil ve ölçek parametrelerinin tahminlerinden yararlanıp Weibull alt yüzdelerinin maksimum benzerlik ve en küçük kareler yöntemleriyle tahmin edilmesi için uygun eşitlikler geliştirerek tahmin edilmesini sağlamışlar; bu tahmin yöntemlerine özgü pivotal istatistikler geliştirerek, bu istatistiklerin dağılımının benzetimini yapıp sonuçları tablo halinde sunarak Weibull alt yüzdeleri için güven aralığı oluşturmasını göstermişlerdir.

E. Barbero, v.d, Weibull alt yüzdeliklerinin maksimum benzerlik ve ağırlıklı en küçük kareler yöntemlerine göre tahmininde en iyi yöntemin belirlenmesine yönelik yaptıkları çalışmalarında, maksimum benzerlik ve ağırlıklı en küçük kareler tahmin yöntemlerini en küçük standart sapmaya sahip yöntemin en iyi olduğu kriterine göre kıyaslamayı amaçlamışlar ve bunun için bu yöntemlere özgü pivotal istatistiklerin ortalama ve standart sapmalarını bulan bir benzetim çalışması yaparak sonuçları tablo halinde sunmuş ve bu tahmin yöntemlerini örnek büyüklüğüne göre kıyaslamaya imkan vermişlerdir. En iyi yöntemin, küçük örnekler için Ağırlıklı En Küçük Kareler tahmin yöntemi olduğunu, büyük örnekler için de yine aynı yöntemin farklı birikimli dağılım ve ağırlık faktörü tahmincileri ile yapılan tahminler olduğunu ve bu yöntemle elde edilen sonuçların Maksimum Benzerlik yöntemiyle elde edilen sonuçlardan daha iyi olduğunu belirtmişlerdir.

E. Barbero, v.d, çalışmalarında yaptıkları benzetim çalışmasının sonuçlarına bir eğri uydurmuşlar ve bu eğri formülünün %95 güven düzeyinde $p = 0.1$ ve $p = 0.01$ hata olasılıklarına karşılık gelen Weibull yüzdelikleri için güven alt sınır değerlerinin hesaplanmasında kullanılmasını önermişlerdir. Bu alt sınırlara sırasıyla A-temel, B-temel malzeme özellikleri adı verilmektedir.

B. Birgören, M. H. Dirikolu, farklı Weibull yüzdelikleri ve güven düzeyleri için güven alt sınır değerlerini hesaplayan bir benzetim programı geliştirmişlerdir. Maksimum benzerlik tahmin yöntemini kullandıkları çalışmalarında örnek veriler üzerinde programın kullanımını açıklamışlar, ayrıca geliştirdikleri benzetim algoritmasının çok hızlı çalıştığını, dolayısıyla pratik hesaplamalarda kullanılabileceğini ifade etmişlerdir.

1.2 Çalışmanın Amaç ve Kapsamı

Bu tez çalışması, Weibull olasılık dağılımı ve uygulamalarının incelenmesini kapsamaktadır.

Tez çalışmasında, literatürde özellikle son yıllarda geliştirilen parametre ve yüzdellik tahmini ve güven aralıklarının oluşturulmasına yönelik tahmin ve benzetim algoritmaları genel bir çerçevede incelenmiş, geliştirilen bilgisayar programlarına yer verilmiş ve gerçek veriler üzerinde uygulamaları gösterilmiştir.

Weibull dağılım parametreleri, maksimum benzerlik yöntemi için sayısal kök bulma algoritmaları kullanılarak, en küçük kareler ve ağırlıklı en küçük kareler yöntemleri içinse bu yöntemlere ait açık formüller kullanılarak tahmin edilebilir. Elde edilen parametre tahminleri için güven aralıkları oluşturmak amacıyla, bu parametre tahminlerine ait dağılım değerleri üreten benzetim çalışmaları Monte-Carlo tekniği kullanılarak elde edilebilir.

Bu yüksek lisans tez çalışması üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde öncelikle, Weibull dağılımının tanımı ve önemi açıklandıktan sonra, Weibull dağılımının uygulama alanlarından güvenilirlik analizinden söz edilmiştir.

Çalışmamızın ikinci bölümünde, Weibull dağılımının temelini oluşturan Temel olasılık bilgisi verilmiş; Weibull ihtimal yoğunluk ve dağılım fonksiyonları, güvenilirlik analizinde kullanılan hata ve güvenilirlik fonksiyonları verilmiş ve bunlara ait grafikler çizilmiştir. Ayrıca Weibull dağılımının istatistiksel özellikleri diğer dağılımlarla benzer özellikleri sunulmuş; Weibull dağılımı için uyumluluk testleri değerlendirilmiş ve Weibull parametreleri ve yüzdellikleri için güven aralıkları oluşturulması konusu detaylı şekilde ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde, tamamlanmış istatistiksel veriler üzerinde Weibull dağılımının uygulama çalışmalarından örnekler verilmiştir.

2.MATERYAL VE YÖNTEM

2.1 Temel Olasılık Bilgisi

Olasılık kavramı iki şekilde tanımlanır; Bunlar:

i. Ön savlı tanım: S olaylar uzayının elamanı olan bir A olayının gerçekleşme olasılığı $P(A)$, aşağıdaki koşulları sağlayan bir reel sayı ile gösterilir.

- a) $0 \leq P(A) \leq 1$
- b) $P(S) = 1$
- c) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

ii. Bağlı Frekansa Dayalı Tanım : Daha çok mühendislerce benimsenen bu tanıma göre, n kez yinelenen bir denemede n_A kez gerçekleşen bir A olayının olasılığı

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}$$

olarak verilir. S olaylar uzayının elamanı olan A , B ve C olayları için

- a) $A = B \Leftrightarrow B = A$: Denklik
- b) $A \cup B$: A , B yada her iki olayın olması olayı = Birleşim
- c) $A \cap B$: A ve B olaylarının her ikisinin de olması olayı = Kesişim
- d) $A \cap B = \emptyset$: Ayrık olaylar (Mutually exclusive events)
- e) \bar{A} : Bütünler olay $\Rightarrow A \cup \bar{A} = S$, $A \cap \bar{A} = \emptyset$
- f) $C = A - B = A / B$: Fark olay

tanımları ve

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

özelliği yazılabilir.

Koşullu Olasılık ve Bağımsız Olaylar: S olaylar uzayında, olasılığı sıfır olmayan A ve B gibi iki olaydan; A olayının, B olayının gerçekleşmesi durumundaki olasılığına A 'nın B koşullu olasılığı denir ve

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

olarak hesaplanır. Koşullu olasılık ile ilgili bazı temel özellikler,

$$A \cap B = \emptyset \text{ (Ayrık Olaylar)} \Rightarrow P(A \cap B) = 0 \Rightarrow P(A|B) = P(B|A) = 0$$

$$A \supset B \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \Rightarrow P(A|B) = 1$$

$$[P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow P(B|A) = P(B)] \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

şeklinde verilebilir. Bir A olayının olasılığını; birleşimi olaylar uzayını oluşturan, ayrık B_1, B_2, \dots, B_n olaylarından yararlanarak ifade etmek istersek;

$$B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = S \text{ ve } B_i \cap B_j = \emptyset ; i = j \text{ ve } i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$P(A|B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)} \Rightarrow P(A \cap B_1) = P(A|B_1) \cdot P(B_1)$$

$$P(A|B_2) = \frac{P(A \cap B_2)}{P(B_2)} \Rightarrow P(A \cap B_2) = P(A|B_2) \cdot P(B_2)$$

$$M \quad M \quad M \quad M$$

$$P(A|B_n) = \frac{P(A \cap B_n)}{P(B_n)} \Rightarrow P(A \cap B_n) = P(A|B_n) \cdot P(B_n)$$

Buradan,

$$\sum_{i=1}^n P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i) = P(A)$$

yazılır ki bu olasılıkta çok sık kullanılan bir özelliktir.

2.1.1 Bernoulli Denemeleri

$A \in S$; $P(A) = p$, $P(\bar{A}) = Q(A) = 1 - p = q$ olarak gösterelim. n bağımsız deneme (Bernoulli Denemesi) sonucunda A olayının k kez gerçekleşme olasılığı

$$P_n^k(A) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} \quad , \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

olur.

Örnek: 5 kez atılan bir zarda üst yüze 3 kez 2 gelme olasılığını hesaplayınız.

A: Atılan bir zarda üst yüze 2 gelme olayı ; $p = 1/6$, $q = 5/6$, $n = 5$, $k = 3$

$$P_5^3(A) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^{5-3} = \frac{5!}{3!2!} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0.02697$$

Örnek : 4 kez atılan bir çift zarda, üst yüze gelen sayıların toplamının 7 olmama olasılığını hesaplayınız.

A: Atılan bir çift zarda üst yüze gelen sayıların toplamının 7 olması olayı,

$$p = 6/36 = 1/6 \quad , \quad q = 5/6 \quad , \quad n = 4 \quad , \quad k = 0$$

$$P_4^0(A) = C_4^0 \cdot p^0 \cdot q^{4-0} = \frac{4!}{4!0!} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.482253$$

2.1.2 Rastlantı Değişkenleri

Şuana kadar tanım ve işlemleri deneme ve olay kavramları bazında ele aldık. Oysa mühendislik uygulamalarında deneme sonuçları olaylarla değil reel sayılarla ifade edilir. Örneğin bir elektrik devresindeki gerilimin değeri v.b olayların olasılığı yerine; deneme sonucu sayısal değerlerin olasılıklarını belirtmek için, olaylar uzayındaki her A olayına karşı düşürülen $X(A)$ reel sayısına Rastlantı Değişkeni adı verilir ve her x değeri için $\{ X \leq x \}$ bir olaya karşı düşer. Ayrıca,

$$P\{X = +\infty\} = P\{X = -\infty\} = 0$$

koşulu sağlanır. Ayrık veya sürekli değer alabilen rastlantı değişkenleri çeşitli dağılım ve yoğunluk (olasılık) fonksiyonları ile temsil edilirler. Dağılımların türü fiziksel sisteme bağlıdır. Bu amaçla, bir dizi denemenin sonuçları, kestirim teorisinden yararlanarak, dağılımın ve/veya parametrelerinin belirlenmesinde kullanılır.

2.1.3. Dağılım Fonksiyonu (Birikmiş Yoğunluk Fonksiyonu)

Bir X rastlantı değişkeninin dağılım fonksiyonu ;

$$F_X(x) = F(x) = P\{X \leq x\} \quad , \quad -\infty < x < +\infty$$

şeklinde birikmiş bir olasılık olarak tanımlanır. Rastlantı değişkeninin türüne göre sürekli veya ayrık tipten olabilen dağılım fonksiyonları:

- i. $F(+\infty) = P(X \leq +\infty) = 1$
- ii. $F(-\infty) = P(X \leq -\infty) = 0$
- iii. $x_2 \geq x_1 \Rightarrow F(x_2) \geq F(x_1)$: Azalmayan bir fonksiyondur.
- iv. $F(x^+) = F(x)$: Sağdan süreklidir.

özelliklerini sağlarlar.

Örnek: Bir zar atışı denemesi için; f_i zarın üst yüzeyine gelen sayının i olması olayı olmak üzere, ayrık rastlantı değişkeni X ,

$$x_i = x(f_i) = 10 \cdot i \quad , \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

olarak tanımlanıyor. $F(x)$ dağılım fonksiyonunu oluşturunuz.

$$x = 0 \quad F(0) = P\{X \leq 0\} = 0 \quad (\text{Olası Değil})$$

$$0 \leq x \leq 9 \quad F(x) = P\{X \leq x\} = 0 \quad (\text{Olası Değil})$$

$$x=10 \quad F(10) = P\{X \leq 10\} = P\{f_1\} = 1/6$$

$$11 \leq x \leq 19 \quad F(x) = P\{X \leq x\} = P\{f_1\} = 1/6$$

$$x=20 \quad F(20) = P\{X \leq 20\} = P\{f_1 \cup f_2\} = 2/6$$

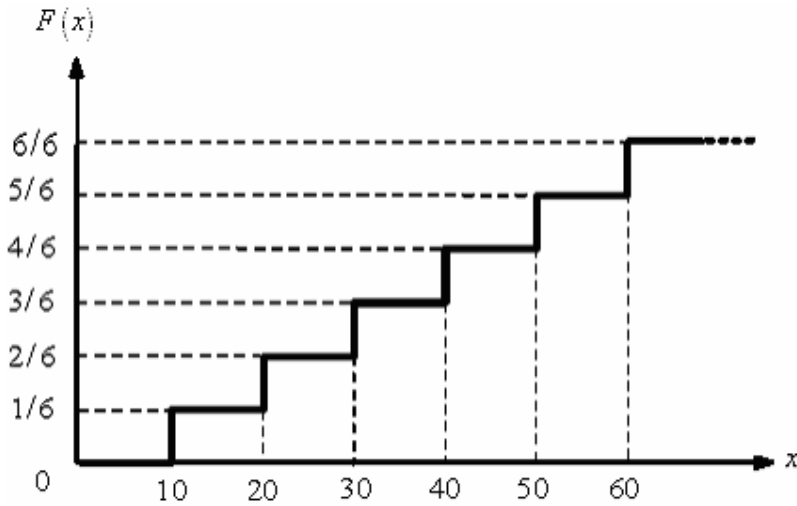
$$21 \leq x \leq 29 \quad F(x) = P\{X \leq x\} = P\{f_1 \cup f_2\} = 2/6$$

$$51 \leq x \leq 59 \quad F(x) = P\{X \leq x\} = P\{f_1 \cup f_2 \cup f_3 \cup f_4 \cup f_5\} = 5/6$$

$$x=60 \quad F(60) = P\{X \leq 60\} = P\{f_1 \cup f_2 \cup f_3 \cup f_4 \cup f_5 \cup f_6\} = 6/6$$

$$61 \leq x \quad F(x) = P\{X \leq x\} = P\{f_1 \cup f_2 \cup f_3 \cup f_4 \cup f_5 \cup f_6\} = 6/6$$

Yukarıda $0 \leq x \leq 60$ aralığındaki x değerlerine karşılık $F(x)$ 'in aldığı ihtimal(olasılık) değerleri hesaplanmıştır. Buradan $F(x)$ dağılım fonksiyonunun grafiği çizilirse;



Şekil 2.1

2.1.4 Yoğunluk Fonksiyonu

Sürekli bir X rastlantı değişkeninin yoğunluk fonksiyonu,

$$f_X(x) = f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad F(x) = \int_{\varepsilon=-\infty}^x f(x) dx$$

eşitliklerini sağlayan $f(x)$ fonksiyonu olarak tanımlanır. Bu tanımın geçerli olabilmesi için $f(x)$ 'in sürekli veya süreksizlik noktalarının sonlu bir fonksiyon olması gerekir.

Ayrıca $f(x)$ azalmayan bir fonksiyon olduğu için,

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \geq 0$$

$$P\{x_1 \leq X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{\varepsilon=x_1}^{x_2} f(x) dx \Rightarrow \frac{dF(x)}{dx}$$

$$P\{x \leq X \leq x + \Delta x\} = \int_{\varepsilon=x}^{x+\Delta x} f(x) dx \cong f(x) \Delta x \Rightarrow P\{X = x\} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x) \Delta x = 0$$

özellikleri de sağlanır. Bu özelliklerden sonucusu sürekli bir rastlantı değişkeninin reel bir sayıya eşit olma olasılığının sıfır olduğunu göstermektedir. Ayrık rastlantı değişkenleri için, dağılım fonksiyonu sıçrama noktalarında sağdan süreklidir ($F(x_i^+) = F(x_i)$). Her bir sıçrama noktasındaki artım ayrık rastlantı değişkeninin o değeri alma olasılığını verir ($P\{x = x_i\} = F(x_i) - F(x_i^-)$).

Daha genel bir tanım ise

$$f(x_i) = \left. \frac{dF(x)}{dx} \right|_{x=x_i} = [f(x_i) - f(x_i^-)] \cdot \delta(x - x_i),$$

burada

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } x = 0 \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } x \neq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

$$f(x_i) = P\{X \leq x_i\} = \sum_{x_k=-\infty}^{x_i} f(x_k) = \sum_{x_k=-\infty}^{x_i} P(x_k)$$

dır. Genellikle sürekli tip rastlantı değişkenleri için $f(x)$ yoğunluk fonksiyonu versiyonu, ayrık tipte rastlantı değişkenleri için ise $P(x_i) = f(x_i)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu notasyonu kullanılır.

2.1.5 Ortalama Değer, Varyans ve Standart Sapma

Yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ olan sürekli tip bir rastlantı değişkeni veya olasılık fonksiyonu $P(x_i)$ olan ayrık tip bir rastlantı değişkeni için ortalama değer;

$$E(X) = \eta = \bar{X} = \int_{x=-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx \quad , \quad E(X) = \sum_{x_i=-\infty}^{+\infty} x_i \cdot P(x_i) = \sum_{x_i=-\infty}^{+\infty} x_i \cdot f(x_k)$$

şeklinde ve her iki tip rastlantı değişkeni için k . mertebeden merkezi moment ise

$$M_k = E[X - E(X)]^k$$

olarak tanımlanır. Olasılıkta diğer momentlere göre daha çok kullanılan ikinci derece merkezi momente varyans, varyansın kareköküne standart sapma adı verilir.

$$\begin{aligned} V(X) &= E[X - E(X)]^2 = M_2 \\ &= E[X^2 - 2X \cdot E(X) + E^2(X)] \\ &= \int_{x=-\infty}^{+\infty} [X^2 - 2X \cdot E(X) + E^2(X)] \cdot f(x) dx \\ &= E(X^2) - 2 \cdot E^2(X) + E^2(X) \end{aligned}$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$\sigma(X) = +\sqrt{V(X)} = \sqrt{E(X^2) - E^2(X)}$$

2.1.6 Çeşitli Yoğunluk Fonksiyonları (Örnek Dağılımlar)

Sürekli ve ayrık tip rastlantı değişkenleri için pek çok yoğunluk/olasılık fonksiyonları vardır. Aşağıda bunlardan tez çalışmamızı oluşturan Weibull Dağılımı için aynı tipte olan ve benzer uygulama alanlarına sahip sürekli tip rastlantı değişkenlerinden bazıları verilecektir.

Üstel Dağılım: Güvenilirlik analizinde en yaygın kullanılan dağılımlardan biri üstel dağılımdır. Üstel dağılım takip eden rassal değişkenler pozitif değer alırlar. Üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \quad , \quad x \geq 0 \quad , \quad \lambda \geq 0$$

olarak yazılır.

Birikimli dağılım fonksiyonu;

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f(x) dx = 1 - e^{-\lambda x}$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca beklenen değeri, varyansı ve standart sapması aşağıda sırasıyla gösterilmiştir.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx = 1/\lambda$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx - (1/\lambda)^2 = 1/\lambda^2$$

$$\sigma(X) = +\sqrt{V(X)} = 1/\lambda$$

Normal Dağılım: Normal dağılım istatistik biliminde en yaygın kullanılan dağılım türüdür. Ekonomi, fizik, biyoloji, finans ve daha birçok alanda karşılaşılan verilerin bir çoğu normal veya normale yakın dağılım gösterir. Bunun yanında ömür verilerinin bazı türleri de normal dağılıma uymaktadır.

Eğer μ ortalama ve σ^2 varyansı ile T rassal değişkeni aşağıdaki olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahipse, T 'nin normal dağıldığı söylenir ve $T \sim N(\mu, \sigma^2)$ şeklinde gösterilir. Dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[\frac{-1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right], \quad -\infty < x < \infty$$

şeklindedir. $T \sim N(\mu, \sigma^2)$ ise T 'nin birikimli dağılım fonksiyonu;

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot \exp\left[\frac{-1}{2} \cdot \frac{(t-\mu)^2}{\sigma^2}\right] dt$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca beklenen değeri, varyansı ve standart sapması aşağıda sırasıyla gösterilmiştir.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} x \cdot e^{\left[\frac{-1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right]} \cdot dx = \mu$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx - (\mu)^2 = \sigma^2$$

$$\sigma(X) = +\sqrt{V(X)} = \sigma$$

Rayleigh Dağılımı: Özellikle haberleşme sistemlerinde gürültü analizi için kullanılır. Weibull dağılımına göre üstünlüğü tek parametre ile verilmesidir.

Rayleigh dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x) = \frac{2x}{\alpha^2} \cdot e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}, \quad x \geq 0, \quad \alpha \geq 0$$

Birikimli dağılım fonksiyonu;

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_0^x \frac{2t}{\alpha^2} \cdot e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2} dt = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca beklenen değeri varyansı ve standart sapması aşağıda sırasıyla gösterilmiştir.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{2x}{\alpha^2} \cdot e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2} dx = \frac{\alpha}{2} \sqrt{\pi}$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$= \int_0^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx - \left(\frac{\alpha}{2} \sqrt{\pi}\right)^2$$

$$= \alpha^2 \left(1 - \frac{\pi^2}{4}\right)$$

$$\sigma(X) = +\sqrt{V(X)} = \alpha \sqrt{(1 - \pi^2/4)}$$

Log-normal Dağılım: Log-normal dağılım çok farklı şekiller alabildiğinden, birçok veri türüne uygulanabilen bir modeldir. Bunların başında ekonomide kullanılan üretim verileri gelir. Güvenilirlik analizinde de kullanım alanları mevcuttur. Örneğin korozyon gibi, kimyasal temelli hatalar içeren birimlerin hata dağılımlarının modellenmesinde kullanım alanlarına sahiptir.

Log-normal dağılım yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x) = \frac{1}{2\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad x \geq 0$$

Birikimli dağılım fonksiyonu da;

$$F(x) = P(X \leq x) = P(\ln X \leq \ln x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \phi \cdot \left(\frac{\ln x}{\sigma\mu}\right)$$

ifadeleri ile verilir.

Gamma ve Erlang Dağılımı: Gamma dağılımı, üstel dağılımın genelleştirilmiş halidir ve sürekli dağılımlar içinde özel bir öneme sahiptir. Gamma dağılımı olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \cdot (\lambda x)^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0, \quad \lambda > 0, \quad \alpha > 0$$

Birikimli dağılım fonksiyonu;

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_0^x \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \cdot (\lambda t)^{\alpha-1} e^{-\lambda t} dt$$

ve

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dt = (\alpha-1)!$$

şeklindeki Gamma fonksiyonunu ifade etmektedir.

Burada α biçim parametresinin pozitif birer tamsayı olması halinde Gamma dağılımı, Erlang dağılımı olarak bilinen bir dağılıma dönüşür. Bu durumda α 'nın pozitif tam değerleri için olasılık yoğunluk ve birikimli dağılım fonksiyonu;

$$f(x) = \frac{\lambda}{(\alpha-1)!} (\lambda x)^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$$

$$F(x) = 1 - \sum_{n=0}^{\alpha-1} \frac{\lambda^n x^n}{n!} \cdot e^{-\lambda x}$$

olarak tanımlanır.

Yukarıda genel olarak verdiğimiz temel olasılık bilgisinin ışığı altında olasılıksal olarak dağılımın nasıl ifade edildiğini öğrenmiş olduk. Bu tez çalışması Weibull dağılımı hakkında olduğu için; dağılımın olasılıksal olarak ne ifade ettiğini bilmemiz, weibull dağılımını anlamamız açısından son derece önemlidir.

2.2 Weibull Dağılımı

Weibull dağılımı olasılık dağılımları içinde önemli bir yere sahiptir. Profesör Waloddi Weibull tarafından bulunmuştur. Sürekli bir dağılım olan Weibull dağılımı kuvvet karakteristiği eğrisinin tüm bölgelerini karakterize edebilme yeteneğine sahip olduğundan güvenilirlik analizlerinde en yaygın olarak kullanılan dağılımlardan birisidir. Weibull dağılımı kullanım alanlarına göre iki veya üç parametrelilik üzere uygulanabilen çok yönlü bir dağılımdır.

3-Parametrelilik Weibull Dağılımı: Üç parametrelilik Weibull dağılımı için ihtimal yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$f(x) = \frac{\gamma}{\beta} \left(\frac{x - \omega}{\beta} \right)^{\gamma-1} \cdot \exp \left(- \left(\frac{x - \omega}{\beta} \right)^{\gamma} \right)$$

$$f(x) \geq 0, \quad x \geq 0, \quad \gamma > 0, \quad \beta > 0, \quad \omega \geq 0, \quad \omega \leq x < +\infty$$

γ : şekil parametresi

β : ölçek parametresi

ω : yer parametresi

Bu 3-parametrelilik ihtimal yoğunluk fonksiyonu parametrelerin tahmininde yaşanan zorluklardan dolayı pek fazla tercih edilmez.

2-Parametrelilik Weibull Dağılımı: Weibull dağılımının bu versiyonu özellikle malzeme biliminde yoğun bir şekilde kullanılmaktadır. Ayrıca rüzgar dağılımı ve değişimi ile ilgili bilgilere gerek duyulduğunda yine weibull dağılımının bu versiyonu kullanılır. Bu dağılıma ait olasılık yoğunluk eğrisi simetrik değil çarpıktır ve dağılım şekil ve ölçek değişkenleriyle belirtilir. Bu dağılımın altında kalan alanın toplam olabilirliği '1' dir. İki parametrelilik Weibull dağılımı için İhtimal Yoğunluk

Fonksiyonu, üç parametrelili weibull dağılımı ihtimal yoğunluk fonksiyonunda $\omega \equiv 0$ alınarak elde edilir.

$$f(x) = \frac{\gamma}{\beta} \left(\frac{x}{\beta} \right)^{\gamma-1} \cdot \exp \left(- \left(\frac{x}{\beta} \right)^{\gamma} \right), \quad f(x) \geq 0, \quad x \geq 0, \quad \gamma > 0, \quad \beta > 0$$

2.2.1 2-Parametrelili Weibull Dağılımının İstatistiksel Özellikleri

Weibull Dağılım Fonksiyonu:

Weibull dağılımı için dağılım fonksiyonu aşağıdaki yoğunluk fonksiyonunun integralinin çözümü ile elde edilir.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_0^x \frac{\gamma}{\beta} \left(\frac{t}{\beta} \right)^{\gamma-1} \cdot \exp \left(- \left(\frac{t}{\beta} \right)^{\gamma} \right) dt = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\beta} \right)^{\gamma}}$$

Ortalama Değeri, Varyansı ve Standart Sapması:

Aşağıda Weibull dağılımına ait ortalama değer, varyans ve standart sapma sırasıyla gösterilmiştir.

$$\bar{x} = E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{\gamma}{\beta} \left(\frac{x}{\beta} \right)^{\gamma-1} \cdot \exp \left(- \left(\frac{x}{\beta} \right)^{\gamma} \right) dx = \beta \cdot \Gamma \left(\frac{1}{\gamma} + 1 \right)$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$= \int_0^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx - \left(\beta \cdot \Gamma \left(\frac{1}{\gamma} + 1 \right) \right)^2 = \beta^2 \cdot \left[\Gamma \left(\frac{2}{\gamma} + 1 \right) - \Gamma \left(\frac{1}{\gamma} + 1 \right)^2 \right]$$

$$\sigma_x = +\sqrt{V(X)} = \beta \cdot \sqrt{\Gamma \left(\frac{2}{\gamma} + 1 \right) - \Gamma \left(\frac{1}{\gamma} + 1 \right)^2}$$

Weibull Güvenilirlik Fonksiyonu:

Weibull dağılımına ait güvenilirlik fonksiyonu ; dağılım fonksiyonunun birden çıkarılması ile elde edilmiş olur.

$$R(x) = 1 - F(x) = 1 - \left(1 - e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\gamma} \right) = e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\gamma}$$

Koşullu Güvenilirlik Fonksiyonu ve Hata Oran Fonksiyonu:

Aşağıda $R(x, x)$ Weibull koşullu olasılık fonksiyonunu ve $\lambda(x)$ ise hata oran fonksiyonunu ifade etmektedir.

$$R(x, x) = \frac{R(x+x)}{R(x)} = \frac{e^{-\left(\frac{x+x}{\beta}\right)^\gamma}}{e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\gamma}} \quad \text{veya} \quad R(x, x) = \frac{R(x+x)}{R(x)} = e^{-\left[\left(\frac{x+x}{\beta}\right)^\gamma - \left(\frac{x}{\beta}\right)^\gamma \right]}$$

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{R(x)} = \frac{\gamma}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\gamma-1}$$

2.2.2 Weibull Dağılımı İçin Özel Durumlar

Weibull şekil parametresi γ aldığı farklı değerler ile kuvvet karakteristiği eğrisinin farklı bölge ve davranışlarını karakterize edebilmektedir.

i. $\gamma=1$ olması durumunda Weibull ihtimal yoğunluk fonksiyonu Üstel Dağılım ihtimal yoğunluk fonksiyonuna dönüşür.

$$f(x) = \frac{\gamma}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\gamma-1} \cdot \exp\left(-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\gamma\right) \quad \text{ve } \gamma=1 \text{ iken}$$

$$f(x) = \frac{1}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{1-1} \cdot \exp\left(-\left(\frac{x}{\beta}\right)^1\right) = \frac{1}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^0 \cdot e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)}$$

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)}$$

elde edilir. Buda Üstel Dağılım ihtimal yoğunluk fonksiyonudur.

ii. $\gamma=2$ olması durumunda Weibull ihtimal yoğunluk fonksiyonu Rayleigh Dağılım ihtimal yoğunluk fonksiyonuna dönüşür.

$$f(x) = \frac{\gamma}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\gamma-1} \cdot \exp\left(-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\gamma\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{2-1} \cdot \exp\left(-\left(\frac{x}{\beta}\right)^2\right) = \frac{1}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^1 \cdot e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^2}$$

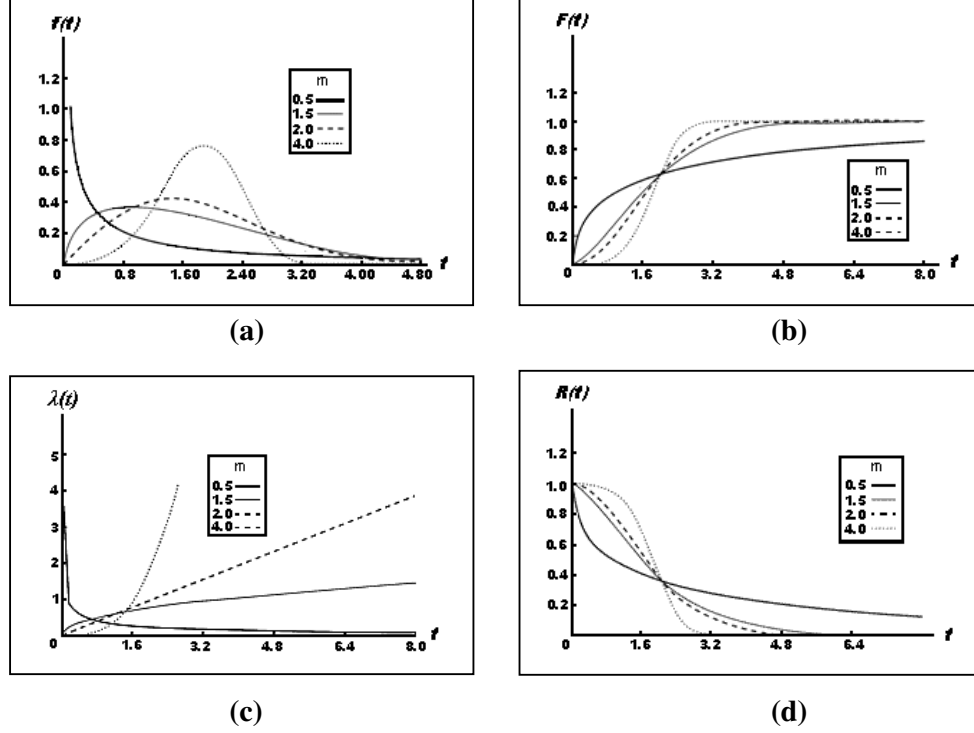
$$f(x) = \frac{x}{\beta^2} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^2}$$

elde edilir. Buda Rayleigh Dağılım ihtimal yoğunluk fonksiyonudur.

iii. Weibull şekil parametresi γ 'nın aldığı farklı değerlere karşılık güvenilirlik analizinde kullanılan Arıza Hızı aşağıdaki özel durumları sağlar.

Çizelge 2.1 Weibull Şekil Parametresinin Farklı Davranışları

Şekil Parametresi (γ)	Arıza Hızı
$0 < \gamma < 1$	<i>Azalan Arıza Hızı</i>
$\gamma = 1$	<i>Sabit Arıza Hızı</i>
$1 < \gamma < 2$	<i>Konkav Artan Arıza Hızı</i>
$\gamma = 2$	<i>Lineer Artan Arıza Hızı</i>
$\gamma > 2$	<i>Konveks Artan Arıza Hızı</i>



Şekil 2.2 (a) Weibull Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu (b) Weibull Birikimli Dağılım Fonksiyonu (c) Weibull Arıza Hızı Fonksiyonu (d) Weibull Güvenilirlik Fonksiyonu

2.3 Weibull Dağılımı Uyumluluk Testleri

Bir veri grubunun Weibull dağılımına sahip olduğunu belirlemek için çeşitli yöntemler bulunmaktadır. Biz bu yöntemlerden Grafik yöntem ve Mann testi olmak üzere iki yöntem üzerinde duracağız. Bu yöntemler aşağıda ayrıntılarıyla gösterilmektedir.

2.3.1 Weibull Grafik Yöntemi

Bir örnekteki verilerin iki parametrelili Weibull dağılımına uyumunun grafiksel olarak test edildiği bir yöntemdir. Weibull grafiğinde; x ve y eksenleri öyle ölçeklendirilmiştir ki çizilen grafik üzerinde veriler Weibull dağılımı takip ediyorsa,

doğrusal veya yaklaşık doğrusal bir yol izlerler. Grafik yöntemde geleneksel olarak Weibull olasılık yoğunluk fonksiyonuna özgü özel olasılık kağıtlarından yararlanılmaktadır. Her örnek noktası için birikimli olasılıklar hesaplanarak bu özel kağıtlara işlenir ve Weibull dağılımına uyumu belirlenir. Ancak günümüz bilgisayar teknolojisi ve programları ile bu işlem bilgisayar ortamında daha doğru ve kolay şekilde yapılabilmektedir. Grafikte x eksen verilerin doğal logaritmik değerleridir. y eksen verilerin birikimli Weibull olasılıklarını ifade eder.

Weibull birikimli dağılım fonksiyonu;

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\gamma\right)$$

kullanıldığında

$$1 - F(x) = \exp\left(-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\gamma\right) \Rightarrow \frac{1}{1 - F(x)} = e^{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\gamma}$$

ve logaritma alınır;

$$\ln\left[\frac{1}{1 - F(x)}\right] = \left(\frac{x}{\beta}\right)^\gamma$$

olur. Tekrar logaritma alınır;

$$\ln\left(\ln\left[\frac{1}{1 - F(x)}\right]\right) = \gamma \ln x - \gamma \ln \beta$$

olur.

$$Y = \ln\left(\ln\left[\frac{1}{1 - F(x)}\right]\right) \text{ ve } A = \gamma, \ln x = X, -\gamma \ln \beta = B \text{ alınır; } Y = AX + B$$

biçiminde doğrusal bir denklem elde edilir. Şimdi gözlem verilerine karşılık gelen $F(x)$ değerlerinin hesabı gereklidir. Örnekteki n adet x_i değerini küçükten büyüğe sıralayalım: $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. x_i 'ye karşılık gelen tahmini $F(x_i)$ değerini $\hat{F}(x_i)$ ile

gösterelim. $\hat{F}(x_i)$ 'nin belirlenmesi için en yaygın kullanılan tahmin ediciler şunlardır

$$\hat{F}(x_i) = \frac{(i-0.5)}{n} \quad (2.1)$$

$$\hat{F}(x_i) = \frac{(i-0.3)}{(n+0.4)} \quad (2.2)$$

$$\hat{F}(x_i) = \frac{i}{(n+1)} \quad (2.3)$$

Literatürde yapılan araştırmalara göre en doğru sonuçları üreten ve en yaygın kullanım alanına sahip olan eşitlik 2.2'dir. Böylece grafik noktaları;

$$\left(\ln(x_i), \ln \left(\ln \left(\frac{1}{1 - \hat{F}(x_i)} \right) \right) \right) \quad (2.4)$$

olur. Bu nokta çiftleri bir grafikte yaklaşık doğrusal yol izlerlerse veriler Weibull dağılımı takip ediyor anlamına gelir.

2.3.2 Weibull Dağılımı için Mann Uyumluluk Testi

Mann Uyumluluk Testi, Weibull hata dağılımı için, Mann v.d tarafından geliştirilen özel bir testtir. Gözlenen veriler x_1, x_2, \dots, x_n , ayrıca bunların sıralanmış halleri $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ ile ifade edilsin.

Hipotezler;

H_0 : Hata Zamanları Weibull Dağılımına Uygundur.

H_1 : Hata Zamanları Weibull Dağılımına Uygun Değildir.

Mann Test İstatistiği;

$$M = \frac{k_1 \cdot \sum_{i=k_1+1}^{n-1} \left[(\ln(x_{i+1}) - \ln(x_i)) / M_i \right]}{k_2 \cdot \sum_{i=1}^{k_1} \left[(\ln(x_{i+1}) - \ln(x_i)) / M_i \right]} \quad (2.5)$$

burada

$$k_1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \quad k_2 = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \quad \text{ve} \quad n : \text{örnek adetini gösterir.}$$

$$M_i = Z_{i+1} - Z_i \quad (2.6)$$

$$Z_i = \ln \left[-\ln \left(1 - \left(\frac{i-0.5}{n+0.25} \right) \right) \right] \quad (2.7)$$

ayrıca $\lfloor \cdot \rfloor$ ifadesi x sayısının tam kısmını ifade eder. M istatistiği, v_1, v_2 parametrelerine sahip F dağılımı takip eder. Burada v_1 ve v_2 dağılıma ait serbestlik dereceleri olup, $v_1 = 2k_1$ ve $v_2 = 2k_2$ dir. Eğer $M > F_{v_1, v_2, \alpha}$ ise H_1 hipotezi kabul edilir. v_1 ve v_2 'nin seçilmiş değerlerine karşı gelen birikimli olasılıklar hesaplanarak tablolar düzenlenmiştir. Konu ile ilgili kaynaklarda bu tablolara yer verilir. Bu tablolardan $F_{v_1, v_2, \alpha}$ değeri elde edilebilir.

2.4 Weibull Parametreleri ve Yüzdelerinin Tahmini

Bölüm 2.2.2'de verilerin Weibull dağılımına uyum gösterip göstermediklerinin anlaşılması için iki farklı test yöntemi önerilmiştir. Verilerin, bu testlere göre Weibull dağılımına uygunluklarının sağlanmış olduğunu farz edelim. Bu durumda bu dağılıma ait parametrelerin verilerden tahmin edilmesi önemli bir konudur. Weibull dağılım parametrelerinin tahmini için en yaygın kullanılan tahmin yöntemleri, maksimum

benzerlik, en küçük kareler, ağırlıklı en küçük kareler ve moment yöntemleridir. γ dağılımın şekil parametresi ; β ölçek parametresidir. γ ve β parametreleri gözlemlerden tahmin edilir. Şimdi bu parametrelerin, maksimum benzerlik, en küçük kareler, ağırlıklı en küçük kareler yöntemleri ile tahmin edilmesini inceleyelim.

2.4.1 Maksimum Benzerlik Yöntemi

Bu yöntem Gauss ve daha sonra R.A Fisher tarafından geliştirilmiştir. Yöntemin amacı bilinmeyen kitle parametreleri için tahmin ediciler bulmaktır.

$L(\theta) = L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$, x_1, x_2, \dots, x_n , rassal değişkenleri için benzerlik fonksiyonu olsun. Eğer $\hat{\theta}$, θ 'nın $L(\theta)$ 'yı maksimum yapan değeri ise $\hat{\theta}$ 'ya, θ 'nın maksimum benzerlik tahmincisi denir. Olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x; \theta)$ kullanılarak x_1, x_2, \dots, x_n rassal değişken değerleri için benzerlik fonksiyonu;

$L(\theta) = f(x_1; \theta) \cdot f(x_2; \theta) \dots f(x_n; \theta)$ şeklinde üretilir. Maksimum benzerlik

tahmin değerleri ise; $\frac{dL(\theta)}{d\theta} = 0$ denkleminin çözümü ile bulunur.

Benzerlik fonksiyonunda k tane parametre varsa,

$$L(\theta) = L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$$

olur.

Burada $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ parametrelerinin maksimum benzerlik tahmincileri

$\hat{\theta}_1 = d_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\hat{\theta}_2 = d_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$, \dots , $\hat{\theta}_k = d_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ rassal veya

tesadüfi değişkenleridir. $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_k$; $L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ 'yı maksimum yapan değerlerdir

Maksimum benzerlik şu k adet denklemin ortak çözümüdür.

$$\frac{dL(\theta_1, \theta_2, K, \theta_k)}{d\theta_1} = 0$$

$$\frac{dL(\theta_1, \theta_2, K, \theta_k)}{d\theta_2} = 0$$

M

$$\frac{dL(\theta_1, \theta_2, K, \theta_k)}{d\theta_k} = 0$$

2.4.1.1 Weibull Parametrelerinin Maksimum Benzerlik Yöntemi ile Tahmini

x_1, x_2, K, x_n ; parametreleri γ ve β olan Weibull dağılımına uyumlu n adet rassal(tesadüfi) değişken olsun. Bu değişkenler için maksimum benzerlik fonksiyonu;

$$\begin{aligned} L(\gamma, \beta) &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \gamma; \beta) \\ &= \frac{\gamma}{\beta} \left(\frac{x_1}{\beta}\right)^{\gamma-1} \cdot e^{-\left(\frac{x_1}{\beta}\right)^\gamma} \cdot \frac{\gamma}{\beta} \left(\frac{x_2}{\beta}\right)^{\gamma-1} \cdot e^{-\left(\frac{x_2}{\beta}\right)^\gamma} \dots \frac{\gamma}{\beta} \left(\frac{x_n}{\beta}\right)^{\gamma-1} \cdot e^{-\left(\frac{x_n}{\beta}\right)^\gamma} \\ &= \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^n \cdot \prod_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\gamma-1} \cdot e^{-\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\beta}\right)^\gamma} \\ L(\gamma, \beta) &= \frac{\gamma^n}{\beta^n} \cdot \left(\frac{1}{\beta^n}\right)^{\gamma-1} \cdot \prod_{i=1}^n (x_i)^{\gamma-1} \cdot e^{-\frac{1}{\beta^\gamma} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i)^\gamma} \\ &= \frac{\gamma^n}{\beta^n} \cdot \frac{1}{\beta^{n\gamma-n}} \cdot \prod_{i=1}^n (x_i)^{\gamma-1} \cdot e^{-\frac{1}{\beta^\gamma} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i)^\gamma} \\ &= \frac{\gamma^n}{\beta^{n\gamma}} \cdot \prod_{i=1}^n (x_i)^{\gamma-1} \cdot e^{-\frac{1}{\beta^\gamma} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i)^\gamma} \end{aligned}$$

olur. Şimdi her iki tarafın logaritması alınırsa;

$$\ln L = n \cdot \ln \gamma - n\gamma \cdot \ln \beta + (\gamma - 1) \cdot \ln \left(\prod_{i=1}^n (x_i) \right) - \frac{1}{\beta^\gamma} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i)^\gamma$$

NOT: $\ln \left(\prod_{i=1}^n (x_i) \right) = \ln (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n) = \ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n = \sum_{i=1}^n \ln (x_i)$

olur. Bu ifadeyi yukarıdaki $\ln L$ eşitliğinde yerine koyarsak;

$$\ln L = n \cdot \ln \gamma - n\gamma \cdot \ln \beta + (\gamma - 1) \cdot \sum_{i=1}^n \ln (x_i) - \frac{1}{\beta^\gamma} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i)^\gamma$$

elde etmiş oluruz. $\ln L$ 'nin, β ve γ 'ya göre türevi alınıp sıfıra eşitlenirse;

$$\frac{dL(\gamma, \beta)}{d\beta} = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{dL(\gamma, \beta)}{d\beta} = (\ln L)' = 0 - n\gamma \cdot \left(\frac{1}{\beta} \right) + 0 - \left(\frac{0 \cdot \beta^\gamma - \gamma \cdot \beta^{\gamma-1}}{(\beta^\gamma)^2} \right) \cdot \sum_{i=1}^n (x_i)^\gamma = 0$$

$$\left(\frac{n\gamma}{\beta} \right) + \left(\frac{\gamma}{\beta^{\gamma+1}} \right) \cdot \sum_{i=1}^n (x_i)^\gamma = 0$$

$$\frac{\beta^{\gamma+1}}{\beta} = \frac{\gamma}{n\gamma} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i)^\gamma \quad (2.9)$$

Eşitlik 2.9'da β gördüğümüz yerde $\hat{\beta}$ yazarak Weibull ölçek parametresi

β 'nın tahmin edicisi $\hat{\beta}$ 'ı elde etmiş oluruz ve

$$\hat{\beta} = \left(\sum_{i=1}^n (x_i)^\gamma / n \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (2.10)$$

Şimdi aynı işlemi bu sefer şekil parametresi γ 'nın tahmin edicisi $\hat{\gamma}$ 'ı elde

edebilmek için γ 'a göre türev alarak yaparsak;

$$\frac{dL(\gamma, \beta)}{d\gamma} = 0$$

$$\frac{dL(\gamma, \beta)}{d\gamma} = (\ln L)' \quad (2.11)$$

$$n \cdot \left(\frac{1}{\gamma} \right) - n \cdot (1) \cdot \ln \beta + (1) \cdot \sum_{i=1}^n \ln(x_i) - \left(\frac{1}{\beta^\gamma} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i)^\gamma \right)' = 0 \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\beta^\gamma} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i)^\gamma \right)' &= \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\beta} \right)^\gamma \right)' = \sum_{i=1}^n \left[1 \cdot \left(\frac{x_i}{\beta} \right)^\gamma \cdot \ln \left(\frac{x_i}{\beta} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\beta^\gamma} \cdot \sum_{i=1}^n \left[(x_i)^\gamma \cdot [\ln x_i - \ln \beta] \right] \\ &= \frac{1}{\beta^\gamma} \cdot \left[\sum_{i=1}^n [(x_i)^\gamma \cdot \ln(x_i)] - \sum_{i=1}^n [(x_i)^\gamma \cdot \ln \beta] \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.13'de β^γ yerine 2.10'da elde ettiğimiz $\beta = \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^\gamma}{n} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$ ifadesini koyarsak;

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\beta^\gamma} \sum_{i=1}^n (x_i)^\gamma \right)' &= n \cdot \left[\frac{\sum_{i=1}^n [(x_i)^\gamma \cdot \ln(x_i)]}{\sum_{i=1}^n (x_i)^\gamma} \right] - n \cdot \left[\frac{\sum_{i=1}^n [(x_i)^\gamma \cdot \ln \beta]}{\sum_{i=1}^n (x_i)^\gamma} \right] \\ \left(\frac{1}{\beta^\gamma} \sum_{i=1}^n (x_i)^\gamma \right)' &= n \cdot \left[\frac{\sum_{i=1}^n [(x_i)^\gamma \cdot \ln(x_i)]}{\sum_{i=1}^n (x_i)^\gamma} \right] - n \cdot \ln \beta \end{aligned} \quad (2.14)$$

2.14'de bulduğumuz türevi Eşitlik 2.12 $\frac{dL(\gamma, \beta)}{d\gamma}$, de yerine yazarsak;

$$\frac{dL(\gamma, \beta)}{d\gamma} = n \cdot \left(\frac{1}{\gamma} \right) - n \cdot \ln \beta + \sum_{i=1}^n \ln(x_i) - \left(n \cdot \left[\frac{\sum_{i=1}^n [(x_i)^\gamma \cdot \ln(x_i)]}{\sum_{i=1}^n (x_i)^\gamma} \right] - n \cdot \ln \beta \right) = 0$$

$$\frac{n}{\gamma} - n \cdot \ln \beta + \sum_{i=1}^n \ln(x_i) - n \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (x_i)^\gamma \cdot \ln(x_i)}{\sum_{i=1}^n (x_i)^\gamma} + n \cdot \ln \beta = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \ln(x_i) - n \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i)^\gamma \cdot \ln(x_i)}{\sum_{i=1}^n (x_i)^\gamma} \right) + \frac{n}{\gamma} = 0 \quad (2.15)$$

Eşitlik 2.15’de γ gördüğümüz yerde $\hat{\gamma}$ yazarak Weibull şekil parametresi γ ’nın tahmin edicisi $\hat{\gamma}$ ’ı elde etmiş oluruz.

$$\sum_{i=1}^n \ln(x_i) - n \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i)^{\hat{\gamma}} \cdot \ln(x_i)}{\sum_{i=1}^n (x_i)^{\hat{\gamma}}} \right) + \frac{n}{\hat{\gamma}} = 0 \quad (2.16)$$

Eşitlik 2.16 sayısal kök bulma yöntemlerinden biriyle yaklaşık olarak çözülebilir.

Daha sonra eşitlik 2.10 $\hat{\beta}$ ’ı doğrudan verir. Eşitlik 2.16’nın çözümü için köke en hızlı yaklaşım gösteren sayısal kök bulma yöntemi olan Newton-Raphson yöntemi tercih edilmiştir. Buna göre, Newton-Raphson yinelemeleri için genel döngü denklemi;

$$\hat{\gamma}_{k+1} = \hat{\gamma}_k + \frac{A + (1/\hat{\gamma}_k) - C_k / B_k}{1/\hat{\gamma}_k^2 + (B_k H_k - C_k^2) / B_k^2} \quad (2.17)$$

burada $A = \sum_{i=1}^n \ln(x_i) / n$, $B = \sum_{i=1}^n x_i^{\hat{\gamma}_k}$, $C_k = \sum_{i=1}^n x_i^{\hat{\gamma}_k} \cdot \ln x_i$, $H_k = \sum_{i=1}^n x_i^{\hat{\gamma}_k} \cdot (\ln x_i)^2$ dir.

Yinelemeler için başlangıç noktası olarak;

$$\gamma_0 = \left[6 / (\pi^2 (n-1)) \left(\sum_{i=1}^n (\ln x_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^n (\ln x_i) \right)^2 / n \right) \right]^{-1/2} \quad (2.18)$$

eşitliği kullanılır.

Weibull parametrelerinin, maksimum benzerlik yöntemiyle tahmini üzerine kapsamlı olarak çalışılmıştır. Bu tahminicileri hesaplamak için kesin formüller yoktur ve hesaplamalar sayısal işlemler gerektirir. Bu hesaplamalar günümüz bilgisayar işlemcilerinde bir saniyeden daha kısa sürede icra edilebilmektedir.

2.4.2 En Küçük Kareler Yöntemi

Bağımlı ve bağımsız değişkenler Y ile X arasındaki bağıntının $Y = f(X) + \varepsilon$ olduğunu kabul edelim. x_1, x_2, \dots, x_n 'lere karşılık değerlerin y_1, y_2, \dots, y_n olması durumunda $y_i = f(x_i) + \varepsilon_i$ olacaktır. Burada ε_i , i gözlemi için artık (residual) değeridir. (x_i, y_i) nokta çiftlerinin en yakınından geçen regresyon doğrusunun bulunması için, artık kareleri toplamı en küçüklenir; bu yönteme en küçük kareler yöntemi adı verilir. Dolayısıyla;

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i)]^2$$

en küçüklenecektir.

Weibull parametreleri, Weibull dağılım fonksiyonu doğrusallaştırılarak en küçük kareler yöntemi ile tahmin edilebilir.

2.4.2.1 Weibull Parametrelerinin En Küçük Kareler Yöntemi ile Tahmini

x_1, x_2, \dots, x_n Weibull dağılımına sahip n büyüklüğünde bir örnek ve $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ bu örneğin sıra istatistiklerine ait gözlem değerleri olsun. $F(x) = 1 - \exp\left[-(x/\beta)^\gamma\right]$ iki parametrelili Weibull dağılım fonksiyonu olmak üzere üstel ifade sağ tarafta yalnız bırakılır ve sonra her iki tarafın logaritması alınır;

$$\ln\left[\frac{1}{(1-F(x))}\right] = \left(\frac{x}{\beta}\right)^\gamma$$

olur. Ardından bir kez daha logaritma alınır;

$$\ln \left\{ \ln \left[\frac{1}{(1-F(x))} \right] \right\} = \gamma \ln x - \gamma \ln \beta \quad (2.19)$$

olur.

Daha önce Bölüm 2.3.1’de detaylı ele alınan bu denklem, doğrusal bir regresyon denklemidir ve $F(x)$ için en yaygın tahminçiler şunlardır.

$$\hat{F}(x_{(i)}) = (i - 0.5) / n \quad (2.20)$$

$$\hat{F}(x_{(i)}) = (i - 0.3) / (n + 0.4) \quad (2.21)$$

$$\hat{F}(x_{(i)}) = i / (n + 1) \quad (2.22)$$

$$Y = \ln \left(\ln \left[\frac{1}{1 - F(x_{(i)})} \right] \right), A = \gamma, \ln x = X, -\gamma \ln \beta = B \text{ alınırsa, eşitlik 2.19}$$

un $Y = AX + B$ biçiminde bir regresyon denklemi olduğu görülür. Bu denklemde $F(x_{(i)})$ tahminçilerinden biri, yani eşitlik 2.20, 2.21 ve 2.22’den biri kullanıldığında Weibull parametreleri γ ve β ’nın tahmini en küçük kareler yöntemiyle şöyle hesaplanır:

$$z_{(i)} = \ln x_{(i)} \text{ ve } y_{(i)} = \ln \left[\ln \left(\frac{1}{1 - \hat{F}(x_{(i)})} \right) \right]$$

olmak üzere;

$$\hat{\gamma} = \frac{(\sum z_{(i)} y_{(i)}) - (\sum z_{(i)}) (\sum y_{(i)})}{(\sum z_{(i)}^2) - (\sum z_{(i)})^2} \quad (2.23)$$

ve

$$\hat{\beta} = \exp(-t / \hat{\gamma}) \quad (2.24)$$

olur. Burada

$$t = \left(\sum y_{(i)} - \hat{\gamma} \cdot \sum z_{(i)} \right)$$

dır.

Dolayısıyla tahmin edilen regresyon denklemi:

$$\ln \left\{ \ln \left[\frac{1}{1 - \hat{F}(x_{(i)})} \right] \right\} = \hat{\gamma} \cdot \ln x - \gamma \cdot \ln \hat{\beta} + \varepsilon_i \quad (2.25)$$

olur.

2.4.2.2 Weibull Parametrelerinin Ağırlıklı En Küçük Kareler Yöntemi ile Tahmini

Bazı araştırmacılar, doğrusal regresyonun oluşturulmasında ağırlık faktörlerinin kullanılmasının uygunluğuna değinmişlerdir. Çünkü en küçük kareler yöntemi artıkların (ε_i) aynı varyansa sahip olduğu varsayımına dayalıdır, ancak Eşitlik 2.25 için bu varsayım geçersizdir. Ağırlıklı en küçük kareler yöntemi uygun ağırlık faktörlerinin seçimiyle varyansları eşitleyerek bu problemi ortadan kaldırır ve daha iyi tahmin değerleri üretir.

Bergman tarafından hesaplanan ağırlık faktörleri;

$$W(x_{(i)}) = \left[\left(1 - F(x_{(i)}) \right) \ln \left(1 - F(x_{(i)}) \right) \right]^2 \quad (2.26)$$

Faucher ve Tyson tarafından önerilen ağırlık faktörleri;

$$W(x_{(i)}) = 3.3 F(x_{(i)}) - 27.5 \left[1 - \left(1 - F(x_{(i)}) \right)^{0.025} \right] \quad (2.27)$$

Hung tarafından geliştirilen ağırlık faktörleri;

$$W(x_{(i)}) = \frac{\left[\left(1 - F(x_{(i)}) \right) \ln \left(1 - F(x_{(i)}) \right) \right]^2}{\sum \left[\left(1 - F(x_{(i)}) \right) \ln \left(1 - F(x_{(i)}) \right) \right]^2} \quad (2.28)$$

şeklindedir.

Ağırlıklı en küçük kareler yöntemi ile Weibull parametrelerinin tahmincileri şu şekilde elde edilebilir:

$$\hat{\gamma} = \frac{\left(\sum W(x_{(i)})\right)\left(\sum W(x_{(i)})z_{(i)}y_{(i)}\right) - \left(\sum W(x_{(i)})z_{(i)}\right)\left(\sum W(x_{(i)})y_{(i)}\right)}{\left(\sum W(x_{(i)})\right)\left(\sum W(x_{(i)})z_{(i)}^2\right) - \left(\sum W(x_{(i)})z_{(i)}\right)^2} \quad (2.29)$$

ve

$$\hat{\beta} = \exp(-t / \hat{\gamma}) \quad (2.30)$$

dır. Burada;

$$t = \left(\sum W(x_{(i)})y_{(i)} - \hat{\gamma} \cdot \sum W(x_{(i)})z_{(i)}\right) / \sum W(x_{(i)}) \quad (2.31)$$

$$z_{(i)} = \ln x_{(i)} \quad , \quad y_{(i)} = \ln \left[\ln \left(\frac{1}{1 - \hat{F}(x_{(i)})} \right) \right] \quad (2.32)$$

Weibull parametre tahminleri $\hat{\gamma}$ ve $\hat{\beta}$ değerleri, seçilen $F(x_{(i)})$ ve $W(x_{(i)})$ tanımlarına göre çeşitlilik gösterirler. $W(x_{(i)})=1$ olması durumunda, normal en küçük kareler denklemlerine yani Eşitlik 2.23 ve Eşitlik 2.24'e dönüşür.

2.4.3 Weibull Yüzdelliklerinin Tahmini

Yapısal ve mekanik parçaların tasarımında küçük bir p hata olasılığına karşılık gelen x_p değerlerinin belirlenmesi mühendislik çalışmaları açısından çok önemlidir. Bu hata olasılığı önceden belirlenmek üzere;

$$P(x \leq x_p) \quad (2.33)$$

ifadesi; örneğin bir malzemenin kopma mukavemeti değerinin, x_p ' ye eşit veya altında

olma olasılığı p 'dir şeklinde yorumlanır ve Weibull dağılım fonksiyonuna göre de;

$$F(x_p) = P(x \leq x_p) = p \quad (2.34)$$

olur. Bu eşitliği çözersek;

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\gamma}$$

2-parametrelili weibull dağılım fonksiyonu olmak üzere;

$$F(x_p) = 1 - e^{-\left(\frac{x_p}{\beta}\right)^\gamma} \quad (2.35)$$

olarak elde edilmiş olur. Eşitlik 2.35'de elde ettiğimiz ifadeye 2.34'deki eşitliği kullanırsak,

$$p = 1 - e^{-\left(\frac{x_p}{\beta}\right)^\gamma} \Rightarrow 1 - p = e^{-\left(\frac{x_p}{\beta}\right)^\gamma} \Rightarrow \left(\frac{1}{1-p}\right) = e^{\left(\frac{x_p}{\beta}\right)^\gamma}$$

olur. Şimdi logaritma alınırsa;

$$\ln\left(\frac{1}{1-p}\right) = \left(\frac{x_p}{\beta}\right)^\gamma \Rightarrow \left[\ln\left(\frac{1}{1-p}\right)\right]^{\frac{1}{\gamma}} = \left(\frac{x_p}{\beta}\right)$$

$$x_p = \beta \cdot \left[\ln\left(\frac{1}{1-p}\right)\right]^{\frac{1}{\gamma}} \quad (2.36)$$

elde edilir. Weibull parametreleri γ ve β yerine, bunların tahminleri olan $\hat{\gamma}$ ve $\hat{\beta}$ kullanılarak, \hat{x}_p tahmini şu şekilde üretilir:

$$\hat{x}_p = \hat{\beta} \cdot \left[\ln\left(\frac{1}{1-p}\right)\right]^{\frac{1}{\hat{\gamma}}} \quad (2.37)$$

Eşitlik 2.37 de Maksimum Benzerlik, En Küçük Kareler ya da Ağırlıklı En Küçük Kareler yöntemlerinden elde edilen $\hat{\gamma}$ ve $\hat{\beta}$ değerleri kullanılabilir.

Tüm bu parametre tahmin yöntemlerini gördükten sonra akla gelecek soru: hangi tahmin yönteminin daha iyi olduğudur. Literatürde Weibull parametre tahmin yöntemlerinden en iyisinin belirlenmesine yönelik çalışmalar mevcuttur. E. Barbero v.d, tahmin yöntemlerinin kıyaslanmasında genel bir ölçü olan; en küçük standart sapmaya sahip olan yöntemin en iyi olduğu kriterine göre yaptıkları çalışmalarında; Maksimum Benzerlik, En Küçük Kareler ve Ağırlıklı En Küçük Kareler tahmin yöntemlerini bu ölçüte göre kıyaslayarak; örnek büyüklüğü n 'in 7'den küçük olduğu durumlarda en iyi tahminin, Ağırlıklı En Küçük Kareler yönteminin 2.22 ve 2.27 eşitlikleri kullanılarak yapılan tahmin olduğunu, örnek büyüklüğü n 'in 7'den büyük olduğu durumlarda ise yine Ağırlıklı En Küçük Kareler yönteminin 2.22 ve 2.26 eşitlikleri kullanılarak yapılan tahmin olduğunu belirtmişlerdir. Buna karşılık B. Birgören, tek yönlü güven aralıkları oluşturulmasında en iyi yöntemin, en küçük yanlış kapsama olasılığına (False Coverage Probability) sahip olan tahmin yöntemi olduğunu belirtmiş ve Maksimum Benzerlik, En Küçük Kareler Yöntemi ve Ağırlıklı En küçük Kareler tahmin yöntemlerini, bu doğrultuda yapmış olduğu benzetim çalışması ile kıyaslayarak en iyi yöntemin Maksimum Benzerlik yöntemi olduğunu ispat etmiştir.

2.5 Weibull Parametreleri ve Yüzdeleri için Güven Aralıkları

Weibull parametreleri ve yüzdeleri için güven aralıkları konusuna başlamadan önce pivotal istatistik özelliğinden bahsetmek gerekir. Eğer $Q(X, \theta)$ dağılımı bütün parametrelerinden bağımsız dağılıyorsa, $Q(X, \theta) = Q(X_1, K, X_n, \theta)$ rassal değişkeni pivotal istatistik özelliği gösterir denir.

Weibull parametrelerinin tahmini için literatürde birçok yöntem vardır. Bunların en önemlileri; bir önceki bölümde ayrıntılı olarak anlatılan maksimum benzerlik, en

küçük kareler ve ağırlıklı en küçük kareler yöntemleridir.

Maksimum benzerlik yöntemi kullanıldığı zaman $\hat{\gamma}/\gamma$ ve $\hat{\gamma} \cdot \ln(\hat{\beta}/\beta)$ değişkenleri γ ve β dan bağımsız olarak dağılırlar. Dolayısıyla $\gamma=1$ ve $\beta=1$ durumunda $\hat{\gamma}$ ve $\hat{\gamma} \cdot \ln(\hat{\beta})$ dağılımlarına sahip olurlar.

E. Barbero v.d, bu pivotal istatistik özelliğinin en küçük kareler ve ağırlıklı en küçük kareler yöntemleri için de geçerli olduğunu, ancak bu pivotal istatistik özelliğinin moment yönteminden elde edilen tahminler için geçerli olmadığını göstermişlerdir.

2.5.1 Weibull Şekil Parametresi için Güven Aralıkları

Pivotal istatistik özelliğinden dolayı $\hat{\gamma}/\gamma$ değişkeni γ ve β dan bağımsız olarak dağılmaktadır, bu yüzden $\gamma=1$ alınırsa; $\hat{\gamma}/\gamma$, γ ile aynı dağılıma sahip olur. Thoman v.d, yaptığı çalışmalarında, Monte-Carlo benzetim prosedürünü takip ederek, maksimum benzerlik yöntemiyle $\hat{\gamma}$ dağılımının yüzde noktalarını gösteren bir tablo elde etmişlerdir. Daha sonra da bu tablo ile γ için güven aralıkları oluşturmuşlardır. Güven aralıklarını $(\hat{\gamma}/t_{\alpha/2}, \hat{\gamma}/t_{1-\alpha/2})$ olarak hesaplamışlardır. Burada $t_{\alpha/2}$ ve $t_{1-\alpha/2}$ benzetim sonucunda elde edilen tablo değerleridir:

Pivotal istatistik $\hat{\gamma}/\gamma$ ile $\hat{\gamma}$ aynı dağılıma sahip olduğuna göre,

$$P(t_{1-\alpha/2} < \frac{\hat{\gamma}}{\gamma} < t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

eşitliğinde $\hat{\gamma}/\gamma$ yerine $\hat{\gamma}$ kullanılabilir ve dolayısıyla alt ve üst sınırlar, $t_{1-\alpha/2}$ ve $t_{\alpha/2}$, $\hat{\gamma}$ nin benzetimiyle elde edilebilir. Eşitsizliğin her tarafı $1/\hat{\gamma}$ ile çarpılarak

$$P\left(\frac{t_{1-\alpha/2}}{\hat{\gamma}} < \frac{1}{\gamma} < \frac{t_{\alpha/2}}{\hat{\gamma}}\right) = 1 - \alpha$$

bulunur; ters alma işlemiyle de;

$$P\left(\frac{\hat{\gamma}}{t_{\alpha/2}} < \gamma < \frac{\hat{\gamma}}{t_{1-\alpha/2}}\right) = 1 - \alpha$$

haline gelir. Dolayısıyla Weibull şekil parametresi γ için $(1 - \alpha)$ güven düzeyinde güven aralığı;

$$\left[\frac{\hat{\gamma}}{t_{\alpha/2}}, \frac{\hat{\gamma}}{t_{1-\alpha/2}} \right] \quad (2.38)$$

şeklinde ifade edilir.

2.5.2 Weibull Ölçek Parametresi için Güven Aralıkları

Yine pivotal istatistik özelliğinden bilindiği üzere, $\hat{\gamma} \cdot \ln(\hat{\beta} / \beta)$ değişkeni γ ve β dan bağımsız dağılmaktadır. Bu değişken $\gamma = 1$ ve $\beta = 1$ durumunda da $\hat{\gamma} \cdot \ln(\hat{\beta})$ ile aynı dağılıma sahip olmaktadır.

Thoman v.d, $\hat{\gamma} \cdot \ln(\hat{\beta} / \beta)$ dağılımının, Monte-Carlo benzetim tekniği ile benzetim programını oluşturmuş ve dağılımının yüzde noktalarını gösteren bir tablo hazırlamıştır. Bu tablo ile β için güven aralıkları oluşturmuştur. Güven aralıkları; $(\hat{\beta} \cdot \exp(-s_{\alpha/2} / \hat{\gamma}), \hat{\beta} \cdot \exp(-s_{1-\alpha/2} / \hat{\gamma}))$ biçimindedir. Buradaki $s_{\alpha/2}$ ve $s_{1-\alpha/2}$ tablo değerleridir.

Pivotal istatistik $\hat{\gamma} \cdot \ln(\hat{\beta} / \beta)$ ile $\hat{\gamma} \cdot \ln(\hat{\beta})$ aynı dağılıma sahip olduğuna göre,

$$P\left[S_{1-\alpha/2} < \hat{\gamma} \cdot \ln(\hat{\beta} / \beta) < S_{\alpha/2}\right] = 1 - \alpha$$

eşitliğinde alt ve üst sınırlar, $s_{1-\alpha/2}$ ve $s_{\alpha/2}$, $\hat{\gamma} \cdot \ln(\hat{\beta})$ 'nine benzetimiyle elde edilir.

Eşitsizlik $\hat{\gamma}$ ile bölünürse;

$$P\left[\frac{S_{1-\alpha/2}}{\hat{\gamma}} < \ln\left(\frac{\hat{\beta}}{\beta}\right) < \frac{S_{\alpha/2}}{\hat{\gamma}}\right] = 1 - \alpha$$

haline gelir. β 'ı yalnız bırakmak için işlemlere devam edilirse;

$$P\left[\frac{e^{s_{1-\alpha/2}/\hat{\gamma}}}{\hat{\beta}} < \frac{1}{\beta} < \frac{e^{s_{\alpha/2}/\hat{\gamma}}}{\hat{\beta}}\right] = 1 - \alpha$$

elde edilir. Buradan ölçek parametresi β için güven aralığı formülü;

$$P\left[\hat{\beta} \cdot e^{-(s_{1-\alpha/2}/\hat{\gamma})} > \beta > \hat{\beta} \cdot e^{-(s_{\alpha/2}/\hat{\gamma})}\right] = 1 - \alpha$$

olur. Buradan ölçek parametresi β için $(1 - \alpha)$ güven düzeyinde güven aralığı;

$$\beta \text{ için güven aralığı: } \left[\hat{\beta} \cdot e^{-(s_{\alpha/2}/\hat{\gamma})}, \hat{\beta} \cdot e^{-(s_{1-\alpha/2}/\hat{\gamma})}\right] \quad (2.39)$$

elde edilir.

Weibull ölçek parametresi β için oluşturulan $(1 - \alpha)$ güven düzeyinde güven aralığı, Eşitlik 2.39'da ifade edildiği gibi, ölçek parametresi γ 'nın tahmin değerini içermektedir. Bu nedenle oluşturulan güven aralığı kesin değildir. Yani Weibull ölçek parametresi için elde edilen güven aralığı γ 'nın tahmin değerini içermesinden dolayı tam olarak $(1 - \alpha)$ olasılığına karşılık gelmeyebilir.

Diğer taraftan Weibull ölçek parametresi γ için oluşturulan güven aralığı Eşitlik 2.38'de görüldüğü gibi tahmin değeri içermemektedir. Bu nedenle γ için oluşturulan güven aralığı kesindir.

Maksimum Benzerlik Yöntemi, $\hat{\gamma}$ ve $\hat{\beta}$ 'ı Newton-Raphson yöntemiyle Eşitlik 2.17'ye göre tahmin etmektedir. Newton-Raphson yinelemeleri için başlangıç noktası olarak Eşitlik 2.18'deki γ_0 alınmaktadır. En Küçük Kareler yöntemi ile $\hat{\gamma}$ ve $\hat{\beta}$ tahminleri, Eşitlik 2.23 ve Eşitlik 2.24'e göre yapılmaktadır ve farklı F_i ve W_i seçimlerine karşılık gelen 12 farklı kombinasyon içermektedir.

Çizelge 2.2 Parametre Tahmin Yöntemleri

Yöntem	Yöntem Tipi	F_i için Eşitlik No	W_i için Eşitlik No
1	En Küçük Kareler	1.20	$W_i=1$
2	Ağırlıklı En Küçük Kareler	1.20	1.26
3	Ağırlıklı En Küçük Kareler	1.20	1.27
4	Ağırlıklı En Küçük Kareler	1.20	1.28
5	Maksimum Benzerlik	-	-
6	En Küçük Kareler	1.21	$W_i=1$
7	Ağırlıklı En Küçük Kareler	1.21	1.26
8	Ağırlıklı En Küçük Kareler	1.21	1.27
9	Ağırlıklı En Küçük Kareler	1.21	1.28
10	En Küçük Kareler	1.22	$W_i=1$
11	Ağırlıklı En Küçük Kareler	1.22	1.26
12	Ağırlıklı En Küçük Kareler	1.22	1.27
13	Ağırlıklı En Küçük Kareler	1.22	1.28

Böylece γ için güven aralığı oluşturmak amacıyla $\hat{\gamma}$; ve $\hat{\beta}$ için güven aralığı oluşturmak amacıyla $\hat{\gamma} \cdot \ln(\hat{\beta})$ tahmin değerleri elde edilmiş olmaktadır. R defa bu işlemler tekrarlanarak bu değişkenlerin R benzetim değerleri ayrı ayrı hesaplanarak, küçükten büyüğe sıralanmaktadır. $[(R+1) \cdot (1-\alpha)]$ 'inci değerleri t_α ve S_α değerlerinin elde edilmesini sağlamaktadır. Benzer şekilde $[(R+1) \cdot \alpha]$ 'inci değerleri $t_{1-\alpha}$ ve $S_{1-\alpha}$ değerlerini vermektedir.

Bir data dosyasında, her satırda bir veri olacak şekilde depolanan veriler kullanılarak $\hat{\gamma}$ ve $\hat{\beta}$ parametre tahminleri, seçilen yönteme göre hesaplandıktan sonra, verilere ait tahmin değerleri, γ için güven aralığı oluşturmak amacıyla Eşitlik 2.38'de; β için güven aralığı oluşturmak için Eşitlik 2.39'da yerlerine konarak γ ve β için α güven düzeyinde güven aralıkları oluşturulmaktadır.

2.5.3 Weibull Yüzdeleri için Güven Aralıkları

$\hat{\gamma}/\gamma$ ve $\hat{\gamma} \cdot \ln(\hat{\beta}/\beta)$ değişkenlerinin γ ve β 'ya bağımlı olmadıkları ve $\gamma=1$ ve $\beta=1$ durumu ile de $\hat{\gamma}$ ve $\hat{\gamma} \cdot \ln(\hat{\beta})$ dağılımlarına sahip oldukları Bölüm 2.4'de anlatılmıştı.

Eşitlik 2.36'da verilen alt yüzdeler formülü ve eşitlik 2.37'de verilen alt yüzdeler tahmin formülü birleştirilerek;

$$\hat{\gamma} \cdot \ln(\hat{x}_p / x_p) = \hat{\gamma} \cdot \ln(\hat{\beta} / \beta) + (1 - \hat{\gamma} / \gamma) \cdot \ln(\ln(1 / (1 - p))) \quad (2.40)$$

elde edilir.

$\hat{\gamma} \cdot \ln(\hat{\beta} / \beta)$ değişkeni de Eşitlik 2.40'a göre pivotal istatistik özelliğiyle γ ve β dan bağımsız olarak dağılmaktadır. Dolayısıyla $\hat{\gamma} \cdot \ln(\hat{\beta} / \beta)$ değişkeni benzetilirken $\gamma=1$ ve $\beta=1$ alınabilir. $\hat{\gamma} \cdot \ln(\hat{\beta} / \beta)$ değişkeninin yüzde noktalarını bulmak için bir benzetim programı gerekir. $\hat{\gamma}$ ve $\hat{\beta}$ Weibull parametre tahminleri hesaplandıktan sonra, Eşitlik 1.40'dan $\hat{\gamma} \cdot \ln(\hat{\beta} / \beta)$ hesaplanabilir.

Bu prosedürün sürekli tekrarı, $\hat{\gamma} \cdot \ln(\hat{\beta} / \beta)$ değişkeni için benzetim değerleri

elde edilmesini sağlar ve bu değerler kullanılarak Weibull alt yüzdellikleri için güven aralığı oluşturulabilir.

$\hat{\gamma} \cdot \ln(\hat{\beta} / \beta)$ için güven aralıkları şu şekilde oluşturulabilir.

$$P\left[C_{1-\alpha/2} \leq \hat{\beta} \cdot \ln(\hat{x}_p / x_p) \leq C_{\alpha/2}\right] = 1 - \alpha$$

ardından eşitsizlik $\hat{\gamma}$ ile bölünerek;

$$P\left[\frac{C_{1-\alpha/2}}{\hat{\gamma}} \leq \ln\left(\frac{\hat{x}_p}{x_p}\right) \leq \frac{C_{\alpha/2}}{\hat{\gamma}}\right] = 1 - \alpha$$

elde edilir. x_p 'yi yalnız bırakmak için işlemlere devam edilirse;

$$P\left[\frac{e^{C_{1-\alpha/2}/\hat{\gamma}}}{\hat{\gamma}} \leq e^{\left(\frac{\hat{x}_p}{x_p}\right)} \leq \frac{e^{C_{\alpha/2}/\hat{\gamma}}}{\hat{\gamma}}\right] = 1 - \alpha$$

denklemini elde edilir. Buradan

$$P\left[\hat{x}_p \cdot e^{-(C_{1-\alpha/2}/\hat{\gamma})} \geq x_p \geq \hat{x}_p \cdot e^{-(C_{\alpha/2}/\hat{\gamma})}\right] = 1 - \alpha$$

elde edilir. Dolayısıyla x_p için $(1 - \alpha)$ güven düzeyinde güven aralığı

$$\left[\hat{x}_p \cdot e^{-(C_{\alpha/2}/\hat{\gamma})}, \hat{x}_p \cdot e^{-(C_{1-\alpha/2}/\hat{\gamma})}\right] = 1 - \alpha \quad (2.41)$$

olur.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1 Testlerin ve Tahmin Yöntemlerinin Uygulanması

Bu bölümde, ikinci bölümde teorik olarak anlatılan Weibull uyumluluk testleri, Weibull parametrelerinin ve Weibull yüzdelerinin Maksimum Benzerlik, En Küçük Kareler ve Ağırlıklı En Küçük Kareler yöntemleriyle tahmin edilmesi ve güven aralıklarının oluşturulması gerçek veriler üzerinde izah edilecektir.

Yapılan çalışmada daha önceden gerçekleştirilmiş bir kopma mukavemeti deneyinin verileri değerlendirilmiştir. 19 özdeş kompozit malzeme Instron 8516+ universal test makinesinde gerilme deneyine tabi tutularak kopma mukavemetleri kaydedilmiştir. Malzemelerin hepsinde kopma mukavemeti ölçüldüğü için yani kopmanın gerçekleştiği basınç değerine kadar ölçülmeye devam edildiği için veriler tamamlanmış verilerdir. Ayrıca bu uygulamada σ_i :Kopma mukavemeti m :Weibull şekil parametresi σ_0 :Weibull ölçek parametresi olarak ifade edilmektedir.

Çizelge 3.1 Kopma Mukavemeti Değerleri

Test No	1	2	3	4	5	6	7
Kopma Mukavemeti [MPa]	532.7	502.5	442	473	519	502.7	477
Test No	8	9	10	11	12	13	14
Kopma Mukavemeti [MPa]	510	522	522	522	439	513.6	497.5
Test No	15	16	17	18	19		
Kopma Mukavemeti [MPa]	521.6	450.9	476.5	507.3	463.5		

3.2 Weibull Uyumluluk Testleri

3.2.1 Verilerin Weibull Uyumluluğunun Grafik Yöntemle Testi

Çizelge 3.1’de verilen, kompozit malzemelere ait kopma mukavemeti değerlerinin Weibull dağılımına uyumluluğunun grafik yöntemle test edilmesi MS EXCEL programı kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Verilerin grafik yöntemle Weibull uyumluluk testlerinin yapılması teorik olarak Bölüm 2.3.1’de ayrıntılarıyla ele alınmıştır.

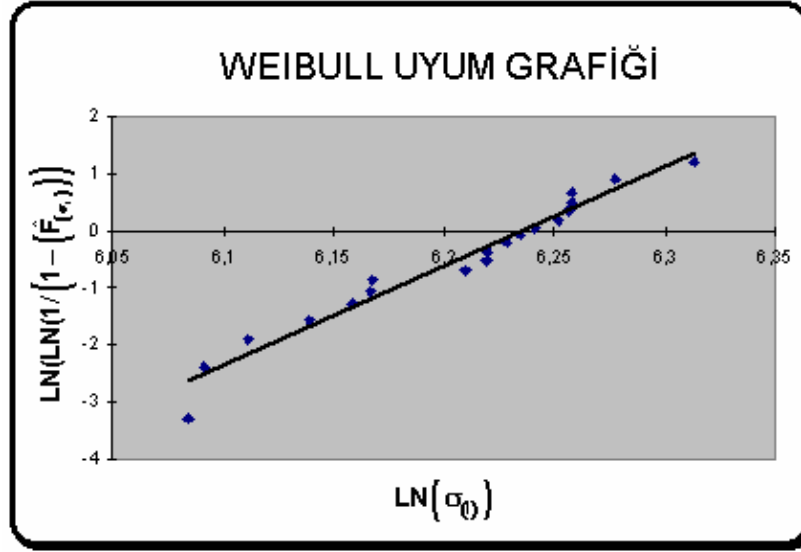
Bu bölümde, Çizelge 3.1’de verilen kompozit malzemeye ait kopma mukavemeti verilerinin grafik yöntemle uyumluluk testinin MS Excel programı tarafından yapılması adım adım anlatılacaktır.

Çizelge 3.2 Verilerin Weibull Grafik Analizi için Hazırlanması

Microsoft Excel - Verilerin Weibull Uyumluluk Grafiği için Hazırlanması					
	A	B	C	D	E
1	i	σ_{0i}	$\hat{F}(\sigma_{0i})$	$\text{LN}(\text{LN}(1/1-\hat{F}(\sigma_{0i})))$	$\text{LN}(\sigma_{0i})$
2	1	439	0,036082474	-3,30362951	6,084499413
3	2	442	0,087628866	-2,389141012	6,091309882
4	3	450,9	0,139175258	-1,89802475	6,111245585
5	4	463,5	0,190721649	-1,552999198	6,138806385
6	5	473	0,242268041	-1,28220259	6,159095388
7	6	476,5	0,293814433	-1,05590564	6,166467723
8	7	477	0,345360825	-0,858797897	6,167516491
9	8	497,5	0,396907216	-0,681842867	6,209595557
10	9	502,5	0,448453608	-0,51914459	6,21959564
11	10	502,7	0,5	-0,366512921	6,219993571
12	11	507,3	0,551546392	-0,220708967	6,229102545
13	12	510	0,603092784	-0,078986134	6,234410726
14	13	513,6	0,654639175	0,061250816	6,241444752
15	14	519	0,706185567	0,202783192	6,251903883
16	15	521,6	0,757731959	0,349043287	6,256901011
17	16	522	0,809278351	0,504972676	6,257667588
18	17	522	0,860824742	0,679059054	6,257667588
19	18	532,7	0,912371134	0,889800879	6,277958414
20	19	552	0,963917526	1,200551361	6,313548046

Kompozit malzeme kopma mukavemeti verilerine ait uyumluluk grafiğinin çizilmesi için ilk adım, verilerin bu analize hazırlanması için gerekli hesaplamaların yapılmasıdır. Çizelge 3.2'deki Excel tablosunda Weibull grafik analizi için gerekli hesaplamaların yapılması görülmektedir. Şimdi bu hesaplama tablosunun nasıl oluşturulduğunu inceleyelim:

Öncelikle 19 adet özdeş kompozit malzemeye ait kopma mukavemeti değerleri küçükten büyüğe doğru sıralanarak Çizelge 3.2'de görülen Excel tablosunda B sütununa sıralı şekilde yerleştirilmiştir. C sütunu ise Eşitlik 2.10'a göre, sıralanmış verilere ait $F(\sigma_i)$ değerlerini göstermektedir. Eşitlik 2.10'da yer alan n ; örnek büyüklüğünü göstermekte olup gerilme deneyine tabi tutulan kompozit malzeme sayısına eşittir ve 19'dur. D sütunu, grafiğin y eksenini ölçeklendirmesini sağlayan değerleri içermektedir ve Eşitlik 2.4'e göre hesaplanmaktadır. Çizelgenin E sütununda ise, grafiğin x eksenini ölçeğini oluşturan $\ln(\sigma_{(i)})$ işleminin, her veri için hesaplanan değerleri görülmektedir. Grafiğin çizilmesini sağlayan x ve y eksenlerinin ölçeklendirilme işlemi Excel programı ile yapıldıktan sonra, bu ölçeklere göre Weibull uyum grafiği çizilebilir. Şekil 3.1'de Weibull uyum grafiği görülmektedir.



Şekil 3.1 Verilere İlişkin Weibull Uyumluluk Grafiği

Şekil 3.1’de çizilen grafikte de görüldüğü gibi, kompozit malzemeye ait kopma mukavemeti verileri, grafik üzerinde yaklaşık doğrusal bir yol izlemektedir; yani hayali bir doğrunun etrafına yayılmış durumdadır. Bu durum bize kompozit malzemelere ait kopma mukavemeti değerlerinin Weibull dağılımına uyumunu göstermektedir.

Bir başka ifadeyle, özdeş 19 adet kompozit malzemeye ait kopma mukavemeti değerleri, Weibull grafik yöntemi uyumluluk testi sonuçlarına göre Weibull dağılımı takip etmektedir.

3.2.2 Verilerin Weibull Uyumluluğunun Mann Yöntemi ile Testi

Ayrıntıları bölüm 2.3.2’de anlatılan ve Weibull dağılımı için özel olarak geliştirilmiş olan Mann test istatistiği ile, Çizelge 3.1’de verilen kopma mukavemeti verilerine ait Weibull uyumluluk testi istatistiksel olarak yapılabilmektedir.

Yöntemin ayrıntıları teorik olarak Bölüm 2.3.2’de anlatılmıştır. Bu bölümde Çizelge 3.1’de verilen kompozit malzemeye ait kopma mukavemeti değerlerinin, Weibull uyumluluk testinin Mann yöntemiyle yapılması anlatılacaktır. Hem sayısal hesaplama yoluyla hem de benzetim programıyla elde edilen sonuçlar gösterilecektir.

Sıfır ve Alternatif hipotezler şöyledir:

H_0 : Kopma Mukavemeti değerleri Weibull Dağılımına Uygundur.

H_1 : Kopma Mukavemeti değerleri Weibull Dağılımına Uygun Değildir.

Eğer test istatistiği $M < F_{v_1, v_2, \alpha}$ ise H_0 hipotezi kabul edilecektir. Yani verilerin Weibull dağılımına uygunluğu belirlenmiş olacaktır. Buradaki v_1 ve v_2 dağılımın serbestlik dereceleri olup, $v_1 = 2k_1$ ve $v_2 = 2k_2$ dir. α ise güven düzeyini göstermektedir. Verilere ait Mann testinin sayısal hesaplama yoluyla yapılması Ms Excel programı yardımıyla gerçekleştirilmektedir. Çizelge 3.3’de verilere ait Mann istatistiğinin Excel programıyla hesaplanması gösterilmektedir. On dokuz adet özdeş kompozit malzemeye ait kopma mukavemeti değerleri, küçükten büyüğe doğru sıralanarak Çizelge 3.3’de görülen B sütununa sıralı şekilde yerleştirilmişlerdir. C sütununda ise verilerin doğal logaritmik değerleri hesaplanmıştır. D sütunu Eşitlik 2.7’ya göre hesaplanan Z_i değerlerini içermektedir. Eşitlik 2.5’de verilen Mann istatistik formülünde yer alan M_i değerlerinin hesabı, Eşitlik 2.6’ya göre yapılmış ve değerler E sütununa yerleştirilmiştir. F sütununda, Eşitlik 2.5’de verilen Mann istatistik formülünde yer alan $\ln(\sigma_{(i+1)}) - \ln(\sigma_{(i)})$ değerlerinin hesaplanması yapılmıştır. Son olarak G sütunu ise, Eşitlik 2.5’deki Mann istatistiğinin hesaplanması için pay ve payda toplamlarını göstermektedir.

Çizelge 3.3 Kopma Mukavemeti Verilerine ait Mann Yöntemi Hesapları

Microsoft Excel - MANN TEST							
	A	B	C	D	E	F	G
1	i	σ_i	$LN(\sigma_i)$	Z_i	M_i	$\ln(\sigma_{i+1})-\ln(\sigma_i)$	$(\ln(\sigma_{i+1})-\ln(\sigma_i))/M_i$
2	1	439	6,08449941	-3,63753	1,125771	0,006810469	0,006049604
3	2	442	6,09130988	-2,51176	0,539287	0,019935703	0,036966762
4	3	450,9	6,11124559	-1,97247	0,36638	0,0275608	0,075224608
5	4	463,5	6,13880639	-1,60609	0,282838	0,020289003	0,071733654
6	5	473	6,15909539	-1,32325	0,234012	0,007372335	0,031504034
7	6	476,5	6,16646772	-1,08924	0,202459	0,001048768	0,005180158
8	7	477	6,16751649	-0,88678	0,180868	0,042079066	0,232650292
9	8	497,5	6,20959556	-0,70591	0,165667	0,010000083	0,060362428
10	9	502,5	6,21959564	-0,54025	0,154941	0,000397931	0,002568268
11	10	502,7	6,21999357	-0,3853	0,147627	0,009108974	0,061702586
12	11	507,3	6,22910254	-0,23768	0,143166	0,005308181	0,03707698
13	12	510	6,23441073	-0,09451	0,141364	0,007034027	0,049758245
14	13	513,6	6,24144475	0,046854	0,14237	0,010459131	0,073464375
15	14	519	6,25190388	0,189224	0,146796	0,004997127	0,034041327
16	15	521,6	6,25690101	0,33602	0,156085	0,000766577	0,00491128
17	16	522	6,25766759	0,492105	0,173625	0	0
18	17	522	6,25766759	0,66573	0,208862	0,020290826	0,097149637
19	18	532,7	6,27795841	0,874591	0,302583	0,035589632	0,117619217
20	19	552	6,31354805	1,177175			
21							
22	PAY TOPLAM			0,4757			
23							
24	PAYDA TOPLAM			0,5222			
25							
26	Mann İstatistik Değeri (M)			0,9109			
27							

Eşitlik 2.5’de verilen M test istatistiğini hesaplamak için çizelge 3.3’de

gerekli hesaplamalar yapılmıştır. Burada $k_1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ve $k_2 = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ dir. Elimizdeki

verilere göre; $k_1 = \left\lfloor \frac{19}{2} \right\rfloor = 9$ ve $k_2 = \left\lfloor \frac{19-1}{2} \right\rfloor = 9$ olarak bulunur. Buna göre M

istatistiğini çizelge 3.3’de yaptığımız hesaplamalara göre bulabiliriz. M istatistiği için; Pay Toplamı: 0,475723648 ve değeri Çizelge 3.3’den G10:G19 toplamıdır.

Payda Toplamı: 0,522239808 dir ve çizelge 3.3’den G2:G9 toplamıdır. Buna göre

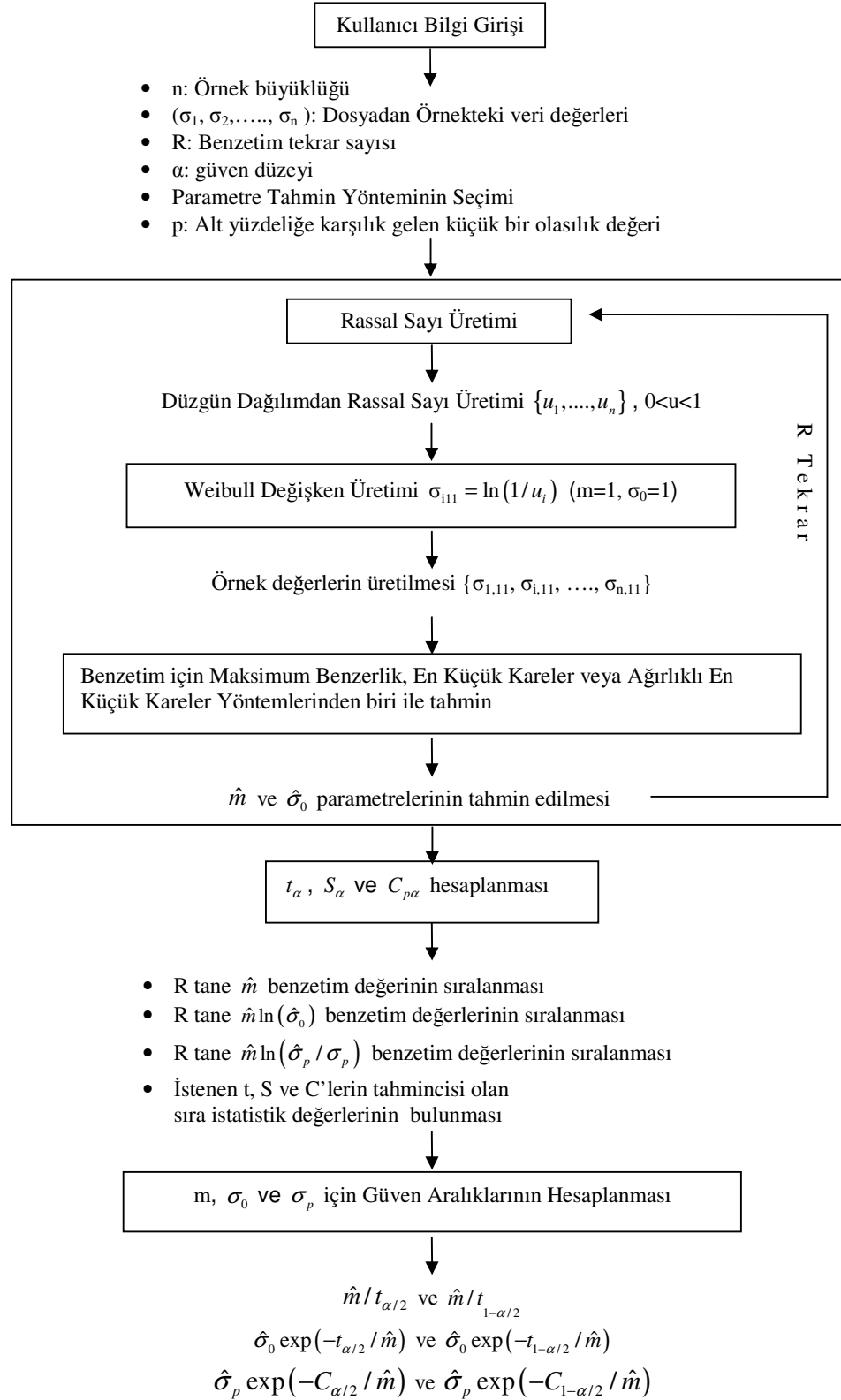
$M = 0,910929502$ olarak hesaplanır. $F_{v_1, v_2, \alpha}$ değeri ise $1-\alpha = 0.95$ güven

düzeyinde $v_1 = 2k_1$ ve $v_2 = 2k_2$ serbestlik derecesinde F dağılım tablo değeridir.

Buna göre $F_{18,18,0.05} = 2.22659$ olarak F dağılım tablosundan elde edilebilir. Bu durumda $M = 0.91093 < F_{18,18,0.05}$ şartı gerçekleştiği için H_0 hipotezi kabul edilir. Yani kopma mukavemetine ait verilerin Mann uyumluluk yöntemine göre de Weibull dağılımı takip ettikleri görülmektedir.

3.3 Weibull Parametreleri ve Yüzdelerinin Tahmini ve Bunlar için Güven Aralıklarının Oluşturulması

Bu çalışmada standart C++ programlama dilinde, Weibull parametrelerinin ve yüzdelerinin tahmin edilmesi, güven aralıklarının ve güven alt sınır değerlerinin bulunması için bir benzetim programı geliştirilmiştir. Parametre tahmin yöntemi olarak maksimum benzerlik, en küçük kareler veya ağırlıklı en küçük kareler yöntemleri kullanılmış ve bu kullanıcının seçimine bırakılmıştır. Şekil 3.2 de programın akış şeması gösterilmektedir.



Şekil 3.2 Benzetim Programı Akış Şeması

Bu çalışmada benzetim tekrar sayısı $R = 99.999$ olarak belirtilmiştir. Bu seçimle, $(1-\alpha)=0.95$, 0.99 veya 0.999 gibi güven seviyeleri için sıra istatistiklerine karşılık gelen değerler elde edilebilir. Örneğin $(1-\alpha)=0.95$ için $[(99.999+1) \cdot (1-\alpha)]$ 'inci değer = 95.000 'inci sıra istatistiğine karşılık gelir. Örnek büyüklüğü; kompozit malzemeler için yapılan deney sonuçlarından elde edilen kopma mukavemeti değerlerinin sayısı olup $n = 19$ 'dur. Örnek grubuna ait veriler, bir data dosyasına her satırda bir veri olacak şekilde girilmelidir. Program sonucunda farklı parametre tahmin yöntemlerine göre elde edilen sonuçlar çizelge 3.4'de ve çizelge 3.5'de gösterilmiştir.

Çizelge 3.4 Maksimum Benzerlik Yöntemi ile Program Tarafından Yapılan Hesaplamalar

Tahmin Yöntemi	$1-\alpha$	\hat{m}	$\hat{\sigma}_0$	m için G.A	σ_0 için G.A	p	$\hat{\sigma}_p$	σ_p Güven Alt Sınırı	
MAKSİMUM BENZERLİK	0.95	18.8625	510.179	11.9655	496.124	0.10	452.803	423.349	Temel B
				-	-				
	0.99	18.8625	510.179	11.9282	496.097	0.01	399.767	353.191	Temel A
				-	-				
0.95	18.8625	510.179	510.179	10.3592	490.657	0.10	452.803	408.732	
				-	-				
0.99	18.8625	510.179	510.179	10.313	490.743	0.01	399.767	331.729	
				-	-				
				27.6657	529.959				

Çizelge 3.4'de Maksimum Benzerlik tahmin yöntemine göre elde edilen sonuçlar gösterilmektedir. p ve α değerleri çeşitlendirilerek çizelge 3.4'deki sonuçlar benzetim programından elde edilmiştir.

Malzeme biliminde, $\alpha = 0.05$ ve $p = 0.05$ için güven alt sınırına A-Temel malzeme özelliği; $\alpha = 0.05$ ve $p = 0.1$ için güven alt sınırına da B-Temel malzeme özelliği adı verilmektedir.

Çizelge 3.4'ü incelediğimizde; örnek olarak, Weibull şekil parametresi m için $p = 0.01$ ve $(1-\alpha)=0.95$ güven düzeyinde oluşturulan güven aralığı 11.9282 ile 25.0709 arasında olduğu görülmektedir. Yani şekil parametresi m , %95 olasılıkla bu aralıktadır denir. Aynı şekilde ölçek parametresi σ_0 için oluşan güven aralığı ise, ölçek parametresi σ_0 %95 olasılıkla 496.097 ile 524.645 değerleri arasındadır şeklinde yorumlanır. Güven düzeyi $(1-\alpha)$ 'nın artırılması ile oluşturulan güven aralıklarının daha geniş aralıkları kapsadıkları görülebilir. $(1-\alpha)=0.95$ olduğu zaman, Weibull yüzdellik tahmini $\hat{\sigma}_p$ 'nın $p = 0.1$ hata olasılığı ile 452.803 MPa ve $p = 0.01$ hata olasılığı ile de 399.767 MPa olduğu görülmektedir. Örneğin $\hat{\sigma}_p = 452.803$ MPa olması demek, 452.803 MPa'dan küçük gerilmelerde, malzemenin kırılma olasılığı 0.1'dir şeklinde yorumlanır. Diğer taraftan gerçek σ_p değeri bu tahmin değerinden çok farklı olabilir, yani gerçek olasılık değeri 0.1'den daha yüksek olabilir. Bu durum belirli bir risk oranını beraberinde getirir. Güven alt sınırları bu risk oranı ile düşük olasılık değerini ilişkilendirerek bir çözüm sağlar. Örneğin 423.349 MPa B-Temel malzeme özelliği, $P(\sigma_{0.1} \leq 423.349) = 0.05$ durumuna işaret eder. Başka bir ifadeyle, %95 güvenle $\sigma_{0.1}$, 423.349'dan büyüktür şeklinde yorumlanır. Güven düzeyi artırılarak güven alt sınırlarının düşürülmesi sağlanabilir. Kritik parça uygulamalarında bu seviye %99'a çıkarılabilir. Örneğimiz üzerinde bu durumu incelersek, güven düzeyinin %99'a çıkarılmasıyla güven alt sınır değeri 408.732'e düşer.

Program farklı tahmin yöntemleri için, farklı α ve p değerlerine göre de çeşitli sonuçlar üretecektir. Elde edilen sonuçlara göre yukarıdaki benzer yorumlar yapılabilir.

Çizelge 3.5 Ağırlıklı En Küçük Kareler Yöntemi ile Program Tarafından Yapılan Hesaplamalar

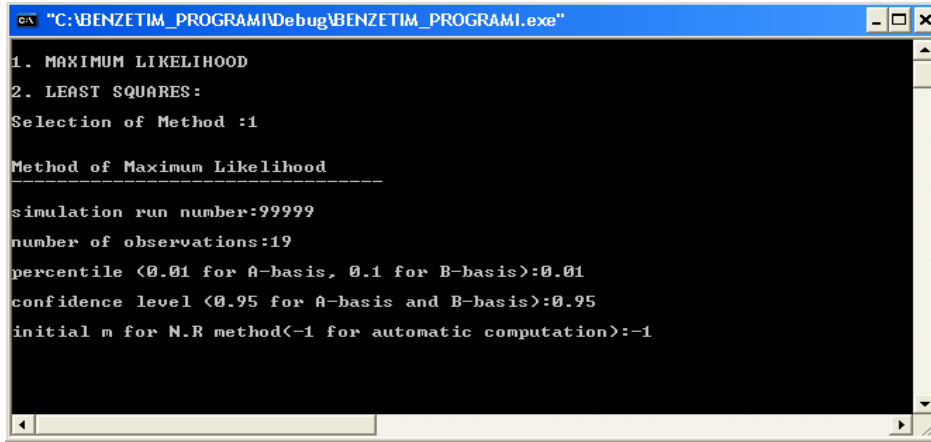
Tahmin Yöntemi	1- α	\hat{m}	$\hat{\sigma}_0$	m için G.A	σ_0 için G.A	p	$\hat{\sigma}_p$	σ_p Güven Alt Sınırı	
AĞIRLIKLI EN KÜÇÜK KARELER	0.95	16.0341	510.827	12.126 - 26.2057	496.317 - 524.504	0.10	443.937	424.826	Temel B
		16.0341	510.827	12.1002 - 26.1972	496.118 - 524.527	0.01	383.421	354.905	Temel A
	0.99	16.0341	510.827	10.4864 - 29.181	490.938 - 529.775	0.10	443.937	410.151	
		16.0341	510.827	10.5098 - 29.1224	490.793 - 529.95	0.01	383.421	333.22	

Tahmin yöntemi olarak en küçük kareler veya ağırlıklı en küçük kareler yönteminin seçilmesi durumunda, program sonuçları Çizelge 3.5’de gösterilmektedir. Bu yöntemde farklı $\hat{F}(\sigma_{(i)})$ ve $W_{(i)}$ seçimlerine göre farklı sonuçlar elde edilebilir. Çizelge 3.5, $\hat{F}(\sigma_{(i)})$ tahmini için Eşitlik 2.10 ve $W_{(i)}$ ağırlık faktörü içinde Eşitlik 2.17’ye göre yapılan benzetim sonuçlarını içermektedir. $W_{(i)} = 1$ seçilmesi durumunda klasik en küçük kareler metoduna göre hesaplama yapılacaktır. Elde edilen sonuçlara göre yorumlamalar çizelge 3.4’de yapıldığı gibi burada da yapılabilir.

Aşağıdaki şekillerde, programın, her tahmin yöntemine ait girdi ve çıktı ekranları gösterilmektedir. Program kullanıcının gireceği değerlere göre sonuçlar üretmektedir. Program başlangıçta kullanıcıdan; parametre tahmini için bir yöntemin belirlenmesini istemektedir ve ardından seçilen yöntemle has girdilerin kullanıcıdan girilmesi istenmektedir. Orijinal veriler bir data dosyasında her satırda bir veri olacak şekilde

yerleştirilmiştir. Seçilen yönteme göre bu girdi ekranları aşağıdaki şekillerde detaylı olarak anlatılmıştır.

Şekil 3.5’de Maksimum Benzerlik tahmin yönteminin seçimine göre, kullanıcı bilgi giriş ekranı görülmektedir. Bu yöntemin seçimiyle, bu yöntemle ilgili girdiler kullanıcıdan istenmektedir. p hata olasılığı, α güven düzeyi, R benzetim tekrar sayısı, Newton-Raphson yöntemi için başlangıç değeri m ve n örnek büyüklüğünün kullanıcıdan girilmesi istenmektedir. Şekil 3.3’de kompozit malzemeye ait veriler için program girdileri, Şekil 3.4’de ise bu girdilere göre program çıktıları görülmektedir.



```
gn "C:\BENZETIM_PROGRAMI\Debug\BENZETIM_PROGRAMI.exe"
1. MAXIMUM LIKELIHOOD
2. LEAST SQUARES:
Selection of Method :1

Method of Maximun Likelihood
-----
simulation run number:99999
number of observations:19
percentile <0.01 for A-basis, 0.1 for B-basis>:0.01
confidence level <0.95 for A-basis and B-basis>:0.95
initial n for N.R method<-1 for automatic computation>:-1
```

Şekil 3.3 Benzetim Programında Maksimum Benzerlik Yöntem Seçimi


```
"C:\BENZETIM_PROGRAMI\Debug\BENZETIM_PROGRAMI.exe"
simulation run number:99999
number of observations:19
percentile (0.01 for A-basis, 0.1 for B-basis):0.01
confidence level (0.95 for A-basis and B-basis):0.95
initial m for N.R method(-1 for automatic computation):-1
1.METHOD OF MAXIMUM LIKELIHOOD
-----
mhat:18.8625
sigma0hat:510.179
sigmaphat:399.767
lower conf.bound:353.74
%95 Confidence Interval for m : 11.9534 - 25.1409
%95 Confidence Interval for s0: 496.126 - 524.55
Press any key to continue.
```

Şekil 3.4 Maksimum Benzerlik Yöntemine Göre Çıktı Sonuçları

Şekil 3.5’de parametre tahmin yöntemi olarak En Küçük Kareler ve Ağırlıklı En Küçük Kareler tahmin yönteminin seçilmesi durumunda girdi ekranı görülmektedir. Kullanıcıdan $\hat{F}(\sigma_{(i)})$ tahmin değeri ve $W_{(i)}$ ağırlık faktörü eşitlikleri için seçim yapmasını istemektedir. Toplam 12 farklı kombinasyondan biri seçilerek hesaplamalar bu kombinasyona göre yapılabilmektedir. Şekil 3.5’de örnek olarak $\hat{F}(\sigma_{(i)})$ tahmin değeri olarak girdi ekranında görülen 1 numaralı eşitlik, $W_{(i)}$ ağırlık faktörü içinde 2 numaralı eşitlik seçilmiştir. Parametre tahminleri ve güven aralıkları hesaplamaları seçilen bu eşitliklere göre yapılacaktır. Ardından kullanıcıdan R benzetim tekrar sayısı, n örnek boyutu, p hata olasılığı ve α güven düzeyinin belirlenmesi istenmektedir (Şekil 3.6). Ardından bu girdilere göre program benzetim sonuçlarını bulmaktadır. Program çıktı ekranı Şekil 3.7’de gösterilmektedir.

```

"C:\BENZETIM_PROGRAMI\Debug\BENZETIM_PROGRAMI.exe"
1. MAXIMUM LIKELIHOOD
2. LEAST SQUARES:
Selection of Method :2

Method of Least Squares
-----
ESTIMATING Fi          ESTIMATING Wi
-----
Fi                      Wi
-----
1  i/(n+1)              1  [(1-Fi)*ln(1-Fi)]^2
2  (i-0.3)/(n+0.4)     2  3.3*Fi-27.5*[1-(1-Fi)^0.025]
3  (i-0.5)/n           3  Wi=1 (Linear Regression)
-                               4  Wi=[(1-Fi)*ln(1-Fi)]^2/sum[(1-Fi)*ln(1-Fi)]^2

Choose the formula for Fi :1
Choose the formula for Wi :2_

```

Şekil 3.5 Benzetim Programı En Küçük Kareler Yöntemi Seçimi

```

"C:\BENZETIM_PROGRAMI\Debug\BENZETIM_PROGRAMI.exe"
Choose the formula for Fi :1
Choose the formula for Wi :2

simulation run number:99999
number of observations:19
percentile (0.01 for A-basis, 0.1 for B-basis):0.01
confidence level (0.95 for A-basis and B-basis):0.95
Press any key to continue

```

Şekil 3.6 Benzetim Programı En Küçük Kareler Yöntemi Girdi Ekranı

```
"C:\BENZETIM_PROGRAMI\Debug\BENZETIM_PROGRAMI.exe"
2.METHOD OF LEAST SQUARES
-----
mhat:16.0341
sigma0hat:510.827
sigmaphat:383.421
lower conf.bound:355.086
%95 Confidence Interval for m : 12.1076 - 26.1818
%95 Confidence Interval for s0: 496.263 - 524.494
Press any key to continue_
```

Şekil 3.7 Benzetim Programı En Küçük Kareler Yöntemi Çıktı Ekranı

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada güvenilirlik analizi uygulamalarında çok yaygın bir kullanım alanına sahip olan Weibull olasılık dağılımı ele alınmıştır. Weibull dağılımı ile benzerlik gösteren ve benzer alanlarda kullanılan dağılımların incelenmesi, Weibull uyumluluk testlerinin yapılması, Weibull parametrelerinin ve yüzdelerinin maksimum benzerlik, en küçük kareler ve ağırlıklı en küçük kareler yöntemleri ile tahmin edilmesi, parametre ve yüzdelerine ait güven aralıklarının oluşturulması ele alınmış ve uygulama alanları incelenmiştir.

Bu çalışmada Weibull parametre tahmin yöntemlerinin, dağılımın belirlenmesinde kullanılan uyumluluk testlerinin, parametreler için güven aralıklarının ve yüzdelerinin tahmin yöntemlerinin ayrıntılı bir şekilde anlatılarak ve uygulanarak literatüre anlamlı ve açıklayıcı bir kaynak kazandırmaya çalışılmıştır.

Bilimsel literatürde, Weibull parametrelerinin ve alt yüzdelerinin tahmini ve parametre ve alt yüzdeler için güven aralıklarının oluşturulması konusunda yapılmış parça parça çalışmalar mevcuttur. Bu çalışmaların ışığı altında Weibull dağılımı incelenmiş olup ayrıntılı olarak bu yöntemlerin anlaşılabilmesi için bir olanak sağlanmıştır.

KAYNAKLAR

1. C. E. Ebeling, Reliability and Maintainability Engineering, McGraw-Hill International Editions, 1997
2. Ş.Demirci, Reliability And Maintainability Analysis With An Application To Aircraft Maintenance, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul, 1998
3. A. Şentürk, Ömür Verileri Analizi ve Bir Uygumla, Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi, Bursa, 1998
4. D. R. Thoman, L. J. Bain, C. E. Antle, "Inferences on the Parameters of the Weibull Distribution", Technometrics, 11, 445 (1969)
5. J.Fernandez-Saez, J. Chao, J. Duran, J. M. Amo, "Estimating Lower-Bound Fracture Parameters for Brittle Materials", Journal of Materials Science Letters, 12, 1493 (1993)
6. E. Barbero, J. Fernandez-Saez, C. Navarro, "On the Estimation of Percentiles of the Weibull Distribution", Journal of Materials Science Letters, 18, 1441 (1999)
7. E. Barbero, J. Fernandez-Saez, C. Navarro, "Statistical Analysis of the Mechanical Properties of Composite Materials", Composites, 31, 375 (2000)
8. B. Birgören, M.H.Dirikolu, "A Computer Simulation for Estimating Lower-Bound Fracture Strength of Composites Using Weibull Distribution", Composites Part B: Engineering, 35,263 (2004)
9. B. Birgören, "Estimating Confidence Lower-Bounds for Weibull Percentiles", Journal of Materials Science Letters, 22, 1121 (2003)
10. F. Akdeniz, Olasılık ve İstatistik, Baki Kitabevi, Adana, 2002

11. W.J. Kolarik, *Creating Quality: Concepts, Systems Strategies and Tools*, McGraw-Hill, NewYork, 1995
12. M. H. Dirikolu, A. Aktaş, B. Birgören, “Statistical Analysis of Fracture Strength of Composite Materials Using Weibull Distribution”, *Turkish J. Eng. Env. Sci.*, 26 (2002)
13. Wasserman GS, “Easy ML Estimation of Normal and Weibull Metrics”, *Quality Engineering*, 12(4), 569, (2000)
14. Mann, N.R., R.E. Schafer, N.D. Singpurwalla, *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data*, John Wiley & Sons, New York 1974
15. A. M. Law, W. D. Kelton, *Simulation Modeling & Analysis*, McGraw-Hill, Inc. 1991
16. B. Rüzgar, *Sürekli Yapıda İki Parametrelili Bir Model ve Uygulaması*, Doktora Tezi, Marmara Üniversitesi, İstanbul, 1992
17. Meyer, *Introduction Probability And Statistical Applications*, Addison Wesley, Washington, 1970
18. B. Bergman, “Estimation of Weibull Parameters Using a Weight Function” *Journal of Materials Science Letters*, 5, 611, (1986)
19. B. Faucher, W.R.Tyson, “On the Determination of Weibull Parameter”, *Journal of Materials Science Letters*, 7, 1199, (1988)
20. W.L. Hung, “Short Communication Weighted Least-Squares Estimation of the Shape Parameter of the Weibull Distribution”, *Quality and Reliability Engineering International*, 17, 467, (2001)
21. Mehmet Akif Danacı “Güvenilirlik Analizinde Tamamlanmış Veriler İçin Weibull dağılımının Kullanılması”, Yüksek Lisans Tezi, Kırıkkale Üniversitesi, Kırıkkale, 2005