KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HÖLDER UZAYINDA YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ

BAŞAR YILMAZ

ŞUBAT 2006

ÖZET

HÖLDER UZAYINDA YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ

YILMAZ, Başar

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı,Yüksek Lisans Tezi

Danışman : Yrd.Doç.Dr.Ali OLGUN

Şubat 2006, 75 Sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır. İkinci bölümde temel kavramlar ve yaklaşım teoremleri verilmiştir. Üçüncü bölümde Hölder Uzaylarında, Picard, Poisson-Cauchy ve Gauss Weierstrass singüler integralleri için yaklaşım teoremleri verilmiş ve Genelleştirilmiş Gauss Weierstrass integralleri yardımıyla $Lip\alpha$ ve $Lip\ (\alpha, p)$ sınıflarına ait olan fonksiyon sınıfının yaklaşım hızı belirlenmiştir. Dördüncü bölüm ise tartışma ve sonuç için ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler :Hölder Uzayı, Yaklaşım, Süreklik Modülü, Singüler Integral, Lipschitz sınıfı

ABSTRACT

APPROXIMATION PROPERTIES ON HÖLDER SPACE

YILMAZ, Başar

Kırıkkale University

Graduate School Of Natural And Applied Sciences

Department of Mathematics, M. Sc. Thesis

Supervisor : Asst.Prof.Dr.Ali OLGUN

FEBRUARY 2006, 75 pages

This thesis contains four chapters.First chapter is devoted to introduction. In the second chapter, some fundamental concepts and approxmation theorems are given. In the third chapter approxmation theorem for Picard, Poisson-Cauchy and Gauss Weierstrass singular integrals in Hölder space are discussed, and also the approxmation rate of the class of functions belonging to $Lip\,\alpha$ and $lip(\alpha, p)$ are found by means of the Generalized Gauss Weierstrass Singuler Integrals.

Key Words : Hölder space, Approximations, Modulus of Continuity, Singular Integral, Lipcshitz class

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana vererek, çalışmalarım boyunca yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocalarım Sayın Yrd.Doç.Dr.Ali OLGUN'a ve Sayın Yrd.Doç.Dr.Ali ARAL'a en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca katkılarından dolayı Kırıkkale Üniversitesi Matematik bölümü akademik personeline şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

1.GİRİŞ

Yaklaşımlar teorisi fonksiyonlar teorisinin en önemli alanlarından birisidir. Bu dalda amaç; bir fonksiyon uzayının elemanlarını belirli bir noktada ya da normda, bu uzayın bir alt uzayının veya daha iyi özelliklere sahip bir uzayın elemanlarından oluşturulmuş dizilerin limiti şeklindeki bir gösterimini bulmaktır. Bu şekildeki diziler verilen uzayın elemanlarını yaklaştırır veya bu elemanlarla yaklaşır denir. Fakat bu durumda yaklaşım dizisinin elemanlarının iyi özellikleri olması gerekir. Çünkü amaç, kötü özelliklere sahip elemanları iyi özelliklere sahip elemanlarla yaklaştırmaktır. Bu tür iyi özellikleri olan elemanlara örnek olarak cebirsel polinomları, trigonometrik polinomları, tam fonksiyonları gösterebiliriz. Bu ve benzeri elemanlar yaklaşım probleminin çözümünde yer alabilirler. Fakat genelde fonksiyonları yaklaştıran en basit yapılar lineer pozitif operatörlerin yardımıyla tanımlanabildiğinden son kırk yıldır, yaklaşımlar teorisindeki çalışmalar lineer pozitif operatörler için yoğunlaşmıştır. Bu operatörler pozitif fonksiyonları pozitif fonksiyonlara dönüştürdüklerinden dolayı pozitif operatörler için önemli eşitsizlikler ispatlamaya imkan verir.

1.2 Kaynak özetleri

Bu tez hazırlanırken materyal ve yöntem kısmında H.Hilmi Hacısalihoğlu ve Akif Hacıyev'in "Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı" kitabından ve Akif Hacıyev'in "Deltasal Çekirdekli İntegral Operatör Ailesi ve Yaklaşım Teorisi" adlı lisans üstü ders notlarından yararlanılmıştır. Daha sonra B.Fırlej ve

L.Rempulska'nın "On Same Singular Integrals İn Spaces" adlı makalesinde [3] ve [4] te verilen notasyonları kullanarak Picard, Poisson-Cauchy ve Gauss-Weierstrass singüler integralleri için yakınsama problemleri Genelleştirilmiş Hölder uzayında incelenmiştir.

Son olarak da A Khan ve S.Umar'ın "On The Order Of Appoximation To A Function By Generalized Gauss Weierstrass Singüler Integrals" adlı makalesinden yararlanarak genelleştirilmiş Gauss Weierstrass singüler integralleri yardımıyla Hardy ve Littlewood tarafından tanımlanan Lip(α) ve Lip(α, p) sınıflarına ait olan fonksiyonları içeren bir fonksiyon sınıfının yaklaşım hızı belirlenmiştir

1.3 Çalışmanın Amacı

Lineer Pozitif operatörlerin özel bir hali olan bazı singüler integral operatör ailelerinin farklı normlarda yakınsamaları incelenmiş ve Genelleştirilmiş Gauss Weierstrass integral operatörünün yaklaşım hızı verilmiştir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1 L_p Uzayları

Tanım 2.1.1 : N boş olmayan bir cümle ve R, reel sayılar cismi olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa N ye R üzerinde lineer uzay veya vektör uzayı denir.

(i) $N, +$ işlemine göre değişmeli gruptur. Yani,

A1) Her $x, y \in N$ için $x + y \in N$ dir.

A2) Her $x, y, z \in N$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir.

A3) Her $x \in N$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in N$ vardır.

A4) Her $x \in N$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in N$ vardır.

A5) Her $x, y \in N$ için $x + y = y + x$ dir.

(ii) $x, y \in N$ ve $\alpha, \beta \in R$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

B1) $\alpha x \in N$ dir.

B2) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ dir.

B3) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ dir.

B4) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ dir.

B5) $1x = x$ dir.Burada 1, R nin birim elamanıdır.

Yukarıdaki B3 şartıntaki $+$ sembolü birinci tarafta R deki toplamayı; ikinci tarafta ise N deki toplamayı belirtmektedir. B4 deki çarpma işlemleride aynı anlamdadır.

Tanıma dikkat edilirse lineer uzay, N cümlesi ve sırasıyla (i) ve (ii) şartlarını sağlayan toplama ve skalerle çarpma dönüşümlerinden ibarettir.

Tanım 2.1.2: N, bir lineer uzay olsun. $\| \|: N \to R$ fonksiyonun x deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için

$i) \|x\| \geq 0$

$ii) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$iii) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

$iv) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyorsa $\| \|$ fonksiyonuna N üzerinde norm denir. Eğer bir Lineer uzay üzerinde norm tanımlanmışsa bu uzaya normlu uzay denir.

Tanım 2.1.3: Bir L_p uzayının elemanları olan ölçülebilir fonksiyonların modülleri; $p \geq 1$ olmak üzere $p-$inci mertebeden Lebesque anlamında integrallenebilen fonksiyonlardır. Eğer integrallenme bölgesi bir (a,b) aralığı olursa (tüm reel eksende olabilir) L_p de olan fonksiyonlar için

$$\int_a^b |f(x)|^p \, dx < \infty$$

olur. Bu uzaylarda

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

şeklinde bir norm tanımlarsak L_p normlu uzay olur.

$f, g \in L_p$ için

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

eşitsizliğine Minkowsky Eşitsizliği denir.

D_1 ve D_2 tüm reel eksenler veya onların bir alt kümesi olmak üzere

$$\left(\int_{D_1} \left| \int_{D_2} f(y)K(x,y)dy \right|^p dx \right)^{1/p} \leq \int_{D_2} \left(\int_{D_1} \left| f(y)K(x,y) \right|^p dx \right)^{1/p} dy$$

eşitsizliğine Genelleştirilmiş Minkowsky eşitsizliği denir.

Tanım 2.1.4 : $f \in L_p$ olmak üzere

$$W_{L_p}(\delta, f) = \sup_{|t| \leq \delta} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x+t) - f(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

integraline f in L_p-süreklilik modulü denir.

2.2. Lineer Pozitif Operatörler

X ve Y iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer X den alınan herhangi bir f fonksiyonuna Y de bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı varsa bu durumda X *uzayında bir operatör* tanımlanmış olur ve

$$g(x) = L(f;x)$$

biçiminde gösterilir. X uzayı L operatörünün tanım bölgesidir ve $X = D(L)$ ile gösterilir. Bu durumda $L(f;x) = g(x)$, Y uzayının bir elemanı olur ve bu şekildeki g fonksiyonları kümesine L operatörünün değer kümesi denir. Bu küme de $R(L)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.1: f_1 ve f_2, X uzayında herhangi iki fonksiyon, a ve b keyfi iki reel sayı olmak üzere L operatörü ;

$$L(af_1 + bf_2; x) = aL(f_1; x) + bL(f_2; x)$$

koşulunu gerçekliyorsa L operatörüne *lineer operatör* denir.

Tanım 2.2.2: $X^{+} = \{f \in X : f \geq 0\}$, $Y^{+} = \{g \in Y : g \geq 0\}$ fonksiyon sınıflarını tanımlayalım.Eğer X uzayında tanımlanmış L lineer operatörü X^{+} kümesindeki herhangi bir f fonksiyonunu pozitif fonksiyona dönüştürüyorsa o taktirde bu lineer operatöre *Lineer Pozitif Operatör* denir. $f \geq 0$ olduğunda $L(f;x) \geq 0$ dır. Özel olarak $L(0;x) = 0$ olduğu görülür.

Lemma 2.2.1: Lineer pozitif operatörler monotondur.

İspat: Her x için $g(x) \geq f(x)$ ise $g(x) - f(x) \geq 0$ dır. L lineer pozitif operatör olduğundan

$$L(g - f;x) \geq 0$$

L lineer olduğundan

$$L(g;x) - L(f;x) \geq 0$$

dır. Dolayısıyla

$$L(g;x) \geq L(f;x)$$

dır. Bu eşitsizlikte lineer pozitif L operatörünün monoton olduğunu gösterir. Ayrıca L operatörün monotonluğundan

$$-|f| \leq f \leq |f| \;\Rightarrow\; L(-|f|;x) \leq L(f;x) \leq L(|f|;x)$$

ve L nin lineerliğinden

$$-L(|f|;x) \leq L(f;x) \leq L(|f|;x) \;\Rightarrow\; |L(f;x)| \leq L(|f|;x)$$

yazılabilir.

2.2.1. Deltasal Çekirdekli Konvolüsyon Operatörler

Tanım 2.2.1.1: X, D kümesinde (D tüm reel eksen veya onun bir alt kümesi) tanımlı Lebesque anlamında integrallenebilen fonksiyon uzayı olsun. Bu uzaydaki bir operatör

$$L(x,f)=\int_D f(t)K(x,t)dt \qquad x\in D,$$

şeklinde ifade edilirse bu operatörün yaklaşım özellikleri $D\times D$ 'de tanımlı $K(x,t)$ fonksiyonunun özelliğine bağlıdır. Bu fonksiyona *operatörün çekirdeği* denir. Her $K(x,t)=K(x-t)$ olduğunda

$$\int_D f(t)K(x-t)dt$$

veya f ve K 2π periyotlu ise

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)K(x-t)dt$$

şeklindeki operatöre *konvolüsyon tipli operatör* denir. K çekirdeği integrallenebilir veya türevlenebilir olduğunda

$$\int_D f(t)K(x-t)dt$$

operatörü x in bir fonksiyonu şeklinde düşünülebileceğinden

$$g(x)=\int_D f(t)K(x-t)dt$$

şeklindeki tanımı anlamlıdır. L operatörü λ parametresine bağlanırsa

$$L(x,\lambda,f)=\int_D f(t)K_\lambda(x-t)dt$$

şeklinde gösterilebilir. Eğer yukarıdaki integralin düzgün yakınsaklığı gösterilirse K_λ türevlenebilir olduğunda g_λ fonksiyonu da türevlenebilirdir.

Tanım 2.2.1.2: Λ indis kümesi ve $\lambda \in \Lambda$ olmak üzere, λ_0 bu kümenin yığılma noktası olsun. $K_\lambda(t)$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa K fonksiyonuna *deltasal çekirdek* denir.

a) $K_\lambda(t)$ negatif olmayan çift fonksiyondur. Ayrıca,

$\forall \lambda \in \Lambda$ için $K_\lambda(0)$ sonludur ve $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} K_\lambda(0) = \infty$ dur.

b) $\forall \lambda \in \Lambda$ için $\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_\lambda(t)dt = 1$ dir.

c) Her belirli σ sayısı için

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \left(\sup_{|t| \geq \sigma} K_\lambda(t) \right) = 0 \text{ ve } \lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_\sigma^\infty K_\lambda(t)dt = 0$$

dır.

$K_\lambda(t)$ deltasal çekirdek olmak üzere lineer L integral operatörü

$$L(x, \lambda; f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) K_\lambda(x-t)dt$$

şeklinde tanımlamıştık. O taktirde

$L : f \to L(x, \lambda; f)$ operatörü konvolüsyon operatörüdür.

Eğer yukarıdaki tanımda $K_\lambda(t)$ fonksiyonu 2π periyotlu ise 2π periyotlu deltasal çekirdek denir. Bu fonksiyon (c) şıkkındaki

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_\sigma^\infty K_\lambda(t)dt = 0$$

özelliği hariç diğer tüm özellikleri $[-\pi, \pi]$ aralığında sağlar.

Örnek 2.2.1.1: $P_\varepsilon(f,x)=\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{1}{\varepsilon^2+(t-x)^2}dt$ şeklinde tanımlanan Abel-Poisson integralinin çekirdeği olan $A_\varepsilon(x)=\frac{\varepsilon}{\pi}\frac{1}{\varepsilon^2+x^2}$ ifadesi deltasal çekirdektir.

Gerçekten**,**

(a) $A_\varepsilon(x)$ çekirdeğinin negatif olmayan çift fonksiyon olduğu açıktır.

$A_\varepsilon(0)=\frac{1}{\pi\varepsilon}$ sonlu ve $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi\varepsilon}=\infty$ dır. Ayrıca $x\neq 0$ için $\lim_{\varepsilon\to 0}A_\varepsilon(x)=0$ dır.

(b) $\varepsilon\in\Lambda$ için $\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\varepsilon^2+x^2}dx$ integralinde $x=\varepsilon u$ deşişken değiştirmesi yapılırsa,

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{1+u^2}$$

$$=1$$

olur.

(c) $A_\varepsilon(x)=\frac{\varepsilon}{\pi}\frac{1}{\varepsilon^2+x^2}$ ifadesinin x' e göre türevi negatif olduğundan azalan bir fonksiyondur. O taktirde $x\geq\sigma$ için supremum değerini $x=\sigma$ da alır. Dolayısıyla

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sup_{|x|\geq\sigma}A_\varepsilon(x)\right)=0 \quad \text{olur.}$$

Ayrıca $\sigma>0$ olmak üzere

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\sigma}^{\infty}A_\varepsilon(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{\sigma}^{\infty}\frac{1}{\varepsilon^2+x^2}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\frac{\sigma}{\varepsilon}}^{\infty}\frac{1}{1+u^2}\,du=0$$

Böylece $A_\varepsilon(x)$ nın deltasal çekirdek olduğu görülür.

Lemma 2.2.1.1: $1\leq p<\infty$ olmak üzere L_λ operatörü sürekli olup $L_p(-\infty,\infty)$ den $L_p(-\infty,\infty)$ ye dönüşüm yapan bir operatördür.

İspat: :

$$\left\| L(x,\lambda;f) \right\|_p \le M$$

sınırlılığı gösterilirse operatörün sürekli olduğu söylenebilir. Bunun için

$$\left\| L(x,\lambda;f) \right\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| L(x,\lambda;f) \right|^p dx \right)^{1/p}$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) K_\lambda (x-t) dt \right|^p dx \right)^{1/p}$$

yazılabilir. Genelleştirilmiş Minkowsky eşitsizliğinden

$$\le \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) K_\lambda (x-t) \right|^p dx \right)^{1/p} dt$$

$x - t = u$ denirse

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x-u) \right|^p K_\lambda{}^p (u) du \right)^{1/p} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} K_\lambda (u) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x-u) \right|^p dt \right)^{1/p} du$$

$$\le \left\| f \right\|_p \int_{-\infty}^{\infty} K_\lambda (u) du$$

$$= \left\| f \right\|_p$$

$\left\| L(x,\lambda;f) \right\|_p \le \left\| f \right\|_p < \infty$ olur. $L_p(-\infty,\infty) \to L_p(-\infty,\infty)$

Ve ayrıca

$$\left\| L \right\|_{L_p \to L_p} = \sup_{f \ne 0} \frac{\left\| L(x,\lambda;f) \right\|_{L_p}}{\left\| f \right\|_{L_p}} \le 1$$

olduğundan L operatörü sınırlı ve süreklidir.

Bundan sonraki lemma ispatsız olarak verilebilir.

Lemma 2.2.1.2: $1 \le p < \infty$ olmak üzere 2π periyotlu deltasal çekirdekli konvolüsyon operatörü sürekli olup $L_p[-\pi,\pi]$ uzayından $L_p[-\pi,\pi]$ uzayına dönüşüm yapan bir operatördür.

2.3 Süreklilik Modülü ve Özellikleri

Tanım 2.3.1: $f(x)$ ve $g(x)$, $[a,b]$ de sürekli iki fonksiyon olsun.

$$d = \max_{a \le x \le b} |f(x) - g(x)|$$

sayısına f ve g fonksiyonları arasındaki uzaklık veya f fonksiyonunun g fonksiyonundan sapması yada sapma miktarı denir.

Tanım 2.3.2: f **,** $[a,b]$ de tanımlı bir fonksiyon olsun. $x, y \in [a,b]$ için $|x-y| \le \delta$ eşitsizliği sağlanacak şekilde $\delta > 0$ sayısı için $|f(x) - f(y)|$ en küçük üst sınırına

$$\sup_{|x-y| \le \delta} |f(x) - f(y)| = W(\delta)$$

dersek, $W(\delta)$ değerine f *in süreklilik modülü* denir. Bazen bu gösterim yerine $W_f(\delta)$ veya $W(\delta; f)$ gösterimleri de kullanılabilir. $W(\delta; f)$; değişkenler farkının en fazla δ olması durumunda iki fonksiyon değerinin en fazla ne kadar fark edeceğini belirler. W, δ'nın bir fonksiyonu durumundadır ve $\delta > 0$ için $W(\delta; f)$ negatif olmayan bir fonksiyondur.

Süreklilik modulü için aşağıdaki lemmalar verilebilir.

Lemma 2.3.1: W fonksiyonu monoton artandır.

İspat: $0 < \delta_1 \le \delta_2$ olsun.Bu durumda $|x-y| \le \delta_2$ koşulunu sağlayan (x,y) sayı çiftlerinin kümesi $|x-y| \le \delta_1$ koşulunu sağlayan sayı çiftlerinin kümesinden daha kapsamlıdır. Kümelerdeki supremum kavramını düşünürsek süreklilik modülünün tanımı gereğince $W(\delta_1; f) \le W(\delta_2; f)$ dır.

Lemma 2.3.2: f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$\lim_{\delta \to 0} W(\delta; f) = 0$$

dır.

İspat : f sürekli ise $\forall \varepsilon > 0$ için bir $\eta > 0$ vardır öyleki $|t-x| < \eta$ olduğunda $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ dır. Süreklilik modülünde $\delta < \eta$ aldığımızda $W(\delta; f) < \varepsilon$ olur. O taktirde $\forall \varepsilon > 0$ için bir $\eta > 0$ bulunur öyleki $\delta < \eta$ olduğunda $W(\delta; f) < \varepsilon$ dır. Yani

$$\lim_{\delta \to 0} W(\delta; f) = 0$$

dır.

Lemma 2.3.3: $m \in N$ için

$$W(m\delta; f) \le mW(\delta; f)$$

dir.

İspat :

$$W(m\delta; f) = \sup_{|x-y| \le m\delta} |f(x) - f(y)|$$

ifadesinde $x = y + mh$ seçilirse

$$W(m\delta; f) = \sup_{|h| \le \delta} |f(y + mh) - f(y)|$$

$$= \sup_{|h|\le\delta} \left| f(y+mh) - f(y+(m-1)h) + f(y+(m-1)h) + ... + f(y+h) - f(y) \right|$$

$$= \sup_{|h|\le\delta} \left| \sum_{k=1}^{m} \left[f(y+kh) - f(y+(k-1)h) \right] \right|$$

$$W(m\delta; f) \le \sum_{k=1}^{m} \sup_{|h|\le\delta} \left| \left[f(y+kh) - f(y+(k-1)h) \right] \right|$$

ve toplamın içindeki ifade süreklilik modülü ve toplananların sayısı m tane olduğu için

$$W(m\delta; f) \le mW(\delta; f)$$

eşitsizliği elde edilir.

Lemma 2.3.4: $\lambda > 0$ reel sayısı için

$$W(\lambda\delta; f) \le (\lambda+1)W(\delta; f)$$

dır.

İspat : m **,** λ nın tam kısmı olsun. O taktirde $m \le \lambda < m+1$ olur. W nin monotonluk özelliğinden ve Lemma 2.2.3 den

$$W(\lambda\delta; f) \le W((m+1)\delta; f)$$

$$W((m+1)\delta; f) \le (m+1)W(\delta; f) \le (\lambda+1)W(\delta; f)$$

olur. Dolayısıyla

$W(\lambda\delta; f) \le (\lambda+1)W(\delta; f)$ olarak elde edilir.

Lemma 2.3.5: δ_n sıfıra yakınsayan bir dizi ve K_f f 'e bağlı bir sabit olmak üzere**,**

$$W(\delta_n; f) \ge K_f \delta_n$$

dır.

İspat : $W(1;f)=W(\frac{1}{\delta_n}\delta_n;f)$ olarak yazılabilir.

Lemma 2.2.4 den

$$W(\frac{1}{\delta_n}\delta_n;f)\le\left(\frac{1}{\delta_n}+1\right)W(\delta_n;f)$$

$$\le\left(\frac{1+\delta_n}{\delta_n}\right)W(\delta_n;f)$$

olur. Ayrıca δ_n yakınsak bir dizi olduğundan $\delta_n+1\le K$ şeklinde bir K sabiti mevcuttur. O taktirde

$$W(1;f)\le\frac{K}{\delta_n}W(\delta_n;f)$$

olur. Eğer $K_f=\frac{W(1;f)}{K}$ seçilirse

$$W(\delta_n;f)\ge K_f\delta_n$$

yazılabilir.

Lemma 2.3.6: f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sınırlı ise, her $x,y\in[a,b]$ için

$$|f(x)-f(y)|\le W(f;|x-y|)$$

dır.

İspat : Tanım 2.3.2 yi göz önüne alırsak

$\sup\limits_{|x-y|\le\delta}|f(x)-f(y)|=W(\delta)$ olduğundan

$$|f(x)-f(y)|\le W(\delta;f)$$

yazılabilir. Lemma 2.3.4 den

$$|f(x)-f(y)|\le W(\frac{|x-y|}{\delta}\delta;f)$$

$$\leq \left(1+\frac{|x-y|}{\delta}\right)W(\delta; f)$$

elde edilir.

2.4. L_p Normunda Yaklaşım

D tüm reel eksen veya onun bir alt kümesi olsun. X ise bu D kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonlardan oluşan bir lineer normlu uzayı göstersin. $Y \subset X$ olacak şekilde X in bir alt uzayı olsun. Her $f \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty}\|f(x)-\phi_n(x)\|_x = 0$$

olacak şekilde $\varphi_n \in Y$ bulunabiliyorsa Y cümlesine X cümlesinin yoğun alt uzayı denir. Yaklaşım teoremlerinde φ_n nin yapısını belirlemek bu teorinin esas amaçlarından biridir.

Yaklaşım teorisinin esas problemlerinden ikincisi ise yaklaşım hızının bulunması problemidir.

$$\|f(x)-\phi_n(x)\|_X = \alpha_n \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$$

ifadeleri $\varphi_n(x)$ nin $f(x)$'e yaklaşım hızını belirtir. Bu hızı bulmak için α_n'i sıfıra giden başka bir dizi ile karşılaştırmak gerekir. Yani $0 \leq \alpha_n \leq \beta_n$ ve $\lim_{n\to\infty}\beta_n = 0$ ise α_n'nin β_n'den daha hızlı sıfıra gittiğini gösterir. Fonksiyon uzaylarında β_n dizisi f fonsiyonunun süreklilik modülü ile bağlantılı olarak incelenebilir. Çünkü f in süreklilik modülü $W(\delta, f)$ ifadesi sıfıra yakınsayan bir fonksiyondur.

Teorem 2.4.1: f , $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli bir fonksiyon olduğunda derecesi n'den büyük olmayan öyle bir $P_n(x)$ polinomlar dizisi vardır ki bu aralığın her noktasında

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x) \equiv \lim_{n\to\infty} \max_{a\le x\le b} \left| P_n(x) - f(x) \right| = 0$$

eşitliğinin sağlanması $P_n(x)$ in $f(x)$ 'e düzgün yakınsaklığını gösterir.

Teorem 2.4.2: (Lusin Teoremi) $f \in L_p(a,b)$, $p \ge 1$ için $[a,b]$ kapalı aralığında öyle bir sürekli φ fonksiyonu bulabiliriz ki ε yeterine küçük bir sayı olmak üzere

$$\| f(x) - \varphi(\mathrm{x}) \|_p < \varepsilon$$

dır.

Bu teoremde L_p 'de olan bir fonksiyonu L_p normunda bir P_n polinomunun limiti şeklinde gösterebiliriz. Yani $f \in L_p$ ise Lusin Teoremi gereğince öyle sürekli bir φ fonksiyonu bulabiliriz ki $\| f - \quad \|_p < \varepsilon$ olur.

Yine $\varphi(x)$, $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli olduğundan bir $P_n(x)$ polinomlar dizisi vardır ki $[a,b]$ kapalı aralığında $\varphi(x)$ 'e düzgün yakınsar. Yani

$$\lim_{n\to\infty} \max_{a\le x\le b} \left| P_n(x) - \varphi(x) \right| = 0$$

dır. Dolayısıyla $P_n(x)$ polinomu $f(x)$ e L_p normunda düzgün yakınsar.

Teorem 2.4.3: Kabul edelim ki $K_\lambda(t)$, $\lambda \in \Lambda$, deltasal çekirdek ve $f \in L_p(-\infty,\infty)$ olsun. Bu durumda,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \| L(x,\lambda;f) - f(x) \|_p = 0$$

dır.

İspat :

$$L(x,\lambda;f)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x+t)K_{\lambda}(t)dt=\int_{-\infty}^{0}f(x+t)K_{\lambda}(t)dt+\int_{0}^{\infty}f(x+t)K_{\lambda}(t)dt$$

toplamındaki ilk integralde $t=-t$ değişken değiştirmesi yapılırsa veK_{λ} nın çift fonksiyon olduğu kullanılırsa,

$$L(x,\lambda;f)=\int_{0}^{\infty}[f(x-t)+f(x+t)]K_{\lambda}(t)dt$$

olur. Diğer taraftan deltasal çekirdek tanımının b) şıkkından

$$\int_{-\infty}^{\infty}K_{\lambda}(t)dt=\int_{-\infty}^{0}K_{\lambda}(t)dt+\int_{0}^{\infty}K_{\lambda}(t)dt=2\int_{0}^{\infty}K_{\lambda}(t)dt=1$$

yazabiliriz. Bu son eşitliğin her iki yanını $f(x)$ ile çarparsak;

$$f(x)=2\int_{0}^{\infty}f(x)K_{\lambda}(t)dt$$

olur. O taktirde

$$L(x,\lambda;f)-f(x)=\int_{0}^{\infty}[f(x+t)+f(x-t)]K_{\lambda}(t)dt-\int_{0}^{\infty}2f(x)K_{\lambda}(t)dt$$

yazabiliriz. Buradan

$$L(x,\lambda;f)-f(x)=\int_{0}^{\infty}[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]K_{\lambda}(t)dt \qquad x\in(-\infty,\infty)$$

olup

$$\|L(x,\lambda;f)-f(x)\|_{p}\le\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty}[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]K_{\lambda}(t)dt\right)^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

yazılabilir. Genelleştirilmiş Minkowsky eşitsizliğinden

$$\|L(x,\lambda;f)-f(x)\|_{p}\le\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}K_{\lambda}(t)dt$$

biçimine dönüşür. Yukarıdaki integralde $[0,\infty]$ aralığı, $[0,\delta]$ ve $[\delta,\infty]$ biçiminde ayrılırsa,

$$\|L(x,\lambda;f)-f(x)\|_p \le \int_0^{\sigma}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} K_\lambda(t)\,dt$$

$$+\int_{\sigma}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} K_\lambda(t)\,dt$$

$$\|L(x,\lambda;f)-f(x)\|_p \le I_1+I_2$$

şeklinde yazılabilir.

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+t)-f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-t)-f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

olduğundan her iki tarafın supremumu alınırsa,

$$\sup_{|t|\le\delta}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \le 2W_{L_p}(\delta,f)$$

yazabilir. Bu eşitsizliği I_1 integralinde kullanırsak

$$I_1 \le 2W_{L_p}(\delta,f)\int_0^{\sigma}K_\lambda(t)dt \le 2W_{L_p}(\delta,f)$$

elde edilir. I_2 de Minkowsky eşitsizliğinden

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+t)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-t)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+2\left(\int_{-\infty}^{\infty}|2f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \le 4\|f\|_p$$

yazılabilir. Buna göre,

$$I_2 \leq 4\|f\|_p \int_\sigma^\infty K_\lambda(t)dt$$

dir. $I_1 \, ve \, I_2$ birleştirilirse

$$\|L(x,\lambda;f) - f(x)\|_p \leq 2W_{L_p}(\delta, f) + 4\|f\|_p \int_\sigma^\infty K_\lambda(t)dt$$

eşitsizliği elde edilir. $K_\lambda(t)$ deltasal çekirdek olduğundan tanım gereğince

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \int_\sigma^\infty K_\lambda(t)dt = 0$$

olduğunu biliyoruz. Her iki tarafın $\lambda \to \lambda_0$ için limiti alınırsa

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \|L(x,\lambda;f) - f(x)\|_p \leq 2W_{L_p}(\delta, f)$$

olur.

$$\lim_{\delta\to 0} W_{L_p}(\delta, f) = 0$$

olduğundan, her iki tarafın $\delta \to 0$ için limiti alındığında

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \|L(x;\lambda;f) - f(x)\|_p = 0$$

olarak elde edilir.

Teorem 2.4.4: Kabul edelim ki $K_\lambda(t)$, $\lambda \in \Lambda$, 2π periyotlu deltasal çekirdek ve $f \in L_p(-\pi,\pi)$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \|L_{2\pi}(x,\lambda;f) - f(x)\|_p = 0$$

dır.

Not : Bu teoremde $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L_p(-\pi,\pi)}$ anlamında kullanılmaktadır.

İspat :

$$|L_{2\pi}(x,\lambda;f) - f(x)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| K_\lambda(t)dt$$

olduğundan

$$\left\| L_{2\pi}(x,\lambda;f) - f(x) \right\|_p \le \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x+t) - f(x) \right| K_\lambda(t) dt \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

olur. Genelleştirilmiş Minkowsky eşitsizliğinden

$$\left\| L_{2\pi}(x,\lambda;f) - f(x) \right\|_p \le \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x+t) - f(x) \right|^p K_\lambda(t) dx \right)^{\frac{1}{p}} dt$$

$$\le \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x+t) - f(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} K_\lambda(t) dt$$

olup Tanım 2.1.4 ve Lemma 2.3.4 den

$$\left\| L_{2\pi}(x,\lambda;f) - f(x) \right\|_p \le \int_{-\pi}^{\pi} W_{L_p}(|t|, f) K_\lambda(t)\, dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} W_{L_p}\left(\frac{|t|}{\delta_\lambda}\delta_\lambda, f\right) K_\lambda(t)\, dt$$

$$\le \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{|t|}{\delta_\lambda} + 1\right) W_{L_p}(\delta_\lambda, f) K_\lambda(t)$$

$$\left\| L_{2\pi}(x,\lambda;f) - f(x) \right\|_p \le W_{Lp}(\delta_\lambda, f) \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|t|}{\delta_\lambda} K_\lambda(t) dt + \int_{-\pi}^{\pi} K_\lambda(t) dt \right)$$

$$= W_{L_p}(\delta_\lambda, f) \left(\frac{1}{\delta_\lambda} \int_{-\pi}^{\pi} |t| K_\lambda(t) dt + 1 \right)$$

olarak elde edilir.

$\delta_\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} |t| K_\lambda(t) dt$ şeklinde seçersek

$$\left\| L_{2\pi}(x,\lambda;f) - f(x) \right\|_p \le 2 W_{Lp}(\delta_\lambda, f)$$

olur.

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \delta_\lambda = \lim_{\lambda\to\lambda_0} \int_{-\pi}^{\pi} |t| K_\lambda(t)dt$$

ifadesi için, $K_\lambda(t)$ çift fonksiyon olduğundan,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \delta_\lambda = \lim_{\lambda\to\lambda_0} 2\int_{0}^{\pi} tK_\lambda(t)dt$$

olur. $\alpha > 0$ keyfi sayısı için,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \delta_\lambda = \lim_{\lambda\to\lambda_0}\left(2\int_0^\alpha tK_\lambda(t)dt + 2\int_\alpha^\pi tK_\lambda(t)dt \right)$$

$$\leq 2\alpha \int_{-\pi}^{\pi} K_\lambda(t)dt + 2 \lim_{\lambda\to\lambda_0} \int_\alpha^\pi t \sup_{t\geq\alpha} K_\lambda(t)dt$$

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \delta_\lambda \leq 2\beta + (2\pi - \alpha) \lim_{\lambda\to\lambda_0}\left(\sup_{t\geq\alpha} K_\lambda(t) \right)$$

olarak yazılabilir. $K_\lambda(t)$ deltasal çekirdek olduğundan

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} (\sup_{t\geq\alpha} K_\lambda(t)) = 0$$

ve α yı istenildiği kadar küçük seçersek

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \delta_\lambda = 0$$

olur ki bu $\delta_\lambda \to 0$ iken $W_{Lp}(\delta_\lambda, f) \to 0$ olduğunu gösterir ki bu da ispatı tamamlar.

2.5 Lipschitz Sınıfından Fonksiyonlar

Tanım 2.5.1: Bir f fonksiyonu bir $< a,b >$ aralığında tanımlı ve $< a,b >$ ifadesi $[a,b]$ veya (a,b) aralıklarını yada daha özel olarak $(a,b]$, $[a,b)$, $(-\infty,\infty)$ aralıklarından biri olarak tanımlansın. Her $x, y \in < a,b >$ için $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere

$|f(y)-f(x)| \leq M|y-x|^{\alpha}$ koşulu sağlanıyorsa, bu durumda f fonksiyonuna α mertebeli M *katsayılı Lipschitz sınıfındandır* denir ve $f \in lip_M^{(\alpha)}$ şeklinde gösterilir.

2.5.1 Lipschitz Sınıfından Fonksiyonların Özellikleri

Lemma 2.5.1.1: $f \in lip_M^{(\alpha)}$ ise $f, < a,b >$ de düzgün süreklidir.

Lemma 2.5.1.2 : $\alpha > 1$ ise f sabittir.

Lemma 2.5.1.3: $< a,b >$ aralığında bir f fonksiyonu için $|f'(x)| \leq M$ olacak şekilde bir $f'(x)$ fonksiyonu varsa o taktirde $f \in lip_M^{(1)}$ sınıfındandır.

Lemma 2.5.1.4: $< a,b >$ aralığı sonlu ise $\alpha < \beta$ için $lip\beta \subset lip\alpha$ dır.

Lemma 2.5.1.5: $f \in lip_M^{(\alpha)}$ ve $W(\delta) \leq M.\delta^{\alpha}$ ifadeleri eşdeğerdir.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. Hölder Uzayında Bazı Singüler İntegraller

C, IR reel eksen üzerinde sınırlı ve düzgün sürekli olan reel değerli fonksiyonların bir uzayı olsun. Bu uzay üzerinde bir norm

$$\|f\|_c = \sup_{x\in R}\left|f(x)\right| \qquad \textbf{(3.1.1)}$$

şeklinde tanımlanabilir. Gerçekten de

(i) $\|f\|_c \geq 0$ dır. Çünkü $|\,.\,| : R \to R$ negatif olmayan fonksiyondur. Dolayısıyla supremumu da negatif olamaz.

(ii) $\|f\|_c = 0 \Leftrightarrow \sup_{x\in R}|f(x)| = 0$

$$\Leftrightarrow \forall x \in R\,,\ |f(x)| = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in R\,,\ f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow f = 0$$

$\|f\|_c = 0 \Leftrightarrow f = 0$ dır.

(iii) $\|\lambda f\|_c = \sup_{x\in R}|(\lambda f)(x)|$

$$= \sup_{x\in R}\big||\lambda| f(x)\big|$$

$$= |\lambda| \sup_{x\in R}|f(x)|$$

$$= |\lambda|\|f\|_c \text{ dır.}$$

Dolayısıyla,

$\|\lambda f\|_c = |\lambda|\|f\|_c$ **,** $\lambda \in R$ eşitliği sağlanır.

(iv) $\|f+g\|_c = \sup_{x\in R} |(f+g)(x)|$

$$= \sup_{x\in R} |f(x)+g(x)|$$

$$\leq \sup_{x\in R} |f(x)| + \sup_{x\in R} |g(x)|$$

$$= \|f\|_c + \|g\|_c$$

$$\|f+g\|_c \leq \|f\|_c + \|g\|_c$$

elde edilirki dolayısıyla norm aksiyomları sağlanır.

Verilen bir $f \in C$ için

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x) \ , \ h \in R \tag{3.1.2}$$

olmak üzere,

$$W(t,f) = \sup_{|h|\leq t} \|\Delta_h f\|_c \ , \ t > 0 \tag{3.1.3}$$

şeklinde tanımlanan $W(t,f)$ fonksiyonuna süreklilik modülü diyoruz. Ω ile süreklilik modülünün sağladığı koşullarla benzerlik gösteren fonksiyonların bir cümlesini gösterelim. Yani Ω, aşağıdaki koşullara uygun tüm w fonksiyonların bir cümlesi olsun.

a) w, $[0,\infty)$ aralığında tanımlı ve sürekli,

b) w, artan ve $w(0)=0$

c) $w(t)t^{-1}$, $t>0$ için azalandır.

Verilen bir $w \in \Omega$ için w ile

$$\|f\|_w = \sup_{h>o} \frac{\|\Delta_h f\|_c}{w(h)} < \infty \tag{3.1.4}$$

şartını sağlayan tüm $f \in C$ fonksiyonların sınıfını H^w ile gösterelim ve H^w'deki normu

$$\|f\|_{H^w} = \|f\|_c + \|f\|_w \tag{3.1.5}$$

ile tanımlayalım.

Ayrıca $\overline{H}^w$ da,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\|\Delta_h f\|_c}{w(h)} = 0 \tag{3.1.6}$$

şartını sağlayan $f \in H^w$ fonksiyonlarının sınıfını göstersin. Bu durumda $\overline{H}^w$ normu da (3.1.5) şeklinde tanımlanır. (3.1.5) normu ile birlikte H^w ve $\overline{H}^w$ ye *genelleştirilmiş Hölder uzayı* denir. Eğer $w, \mu \in \Omega$ ve

$$q(t) = \frac{w(t)}{\mu(t)}, \qquad t > 0 \tag{3.1.7}$$

fonksiyonu azalmayan ise, o taktirde

$$H^w \subseteq H^\mu \qquad \text{ve} \qquad \overline{H}^w \subseteq \overline{H}^\mu \tag{3.1.8}$$

dır. Bunları gösterelim.

İlk olarak $H^w \subseteq H^\mu$ olduğunu gösterelim;

$f \in H^w$ olmak üzere $w, \mu \in [0, a]$ alalım.

$$\|f\|_w = \sup_{h>0} \frac{\|\Delta_h f\|_c}{\mu(h)} \frac{\mu(h)}{w(h)} = \sup_{h>0} \frac{\|\Delta_h f\|_c}{\mu(h)} \sup_{h>0} \frac{1}{q(h)}$$

yazılabilir. Dolayısıyla $h > 0$ için $\frac{1}{q(h)}$ fonksiyonu $[0, a]$aralığında tanımlıdır. w, μ fonksiyonları sürekli olduğundan $\frac{1}{q(h)}$ da süreklidir. $\frac{1}{q(h)} : [0, a] \to R$ sürekli bir fonksiyon olduğu için sınırlıdır. Bu fonksiyon supremumunu $[0, a]$ aralığında alır. Bu da

$$\sup_{h>0}\frac{1}{q(h)}=c$$

gibi bir sabittir. O halde

$$\|f\|_w=\sup_{h>0}\frac{\|\Delta_h f\|_c}{\mu(h)}\sup_{h>0}\frac{1}{q(h)}=\|f\|_\mu\sup_{h>0}\frac{1}{q(h)}$$

eşitliğinde $\|f\|_w$ ve $\sup\limits_{h>0}\frac{1}{q(h)}$ sonlu olduklarından $\sup\limits_{h>0}\frac{\|\Delta_h f\|_c}{\mu(h)}$ da sonludur. Yani $\|f\|_\mu<\infty$ dır. Buradan da $f\in H^\mu$ elde edilir.

Şimdi $\overline{H}^w\subseteq\overline{H}^\mu$ olduğunu gösterelim:

$f\in\overline{H}^w$ ise o halde

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|\Delta_h f\|_c}{w(h)}=0$$

dır.

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\|\Delta_h f\|_c}{\mu(h)}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\|\Delta_h f\|_c}{w(h)}\frac{w(h)}{\mu(h)}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{\|\Delta_h f\|_c}{w(h)}\lim_{h\to 0^+}\frac{w(h)}{\mu(h)}=0.\lim_{h\to 0^+}\frac{w(h)}{\mu(h)}$$

$$=0$$

dır. Burada $f\in\overline{H}^w$ ve $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{w(h)}{\mu(h)}$ ifadesi sonlu olduğundan

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\|\Delta_h f\|_c}{\mu(h)}=0$$

dır. Dolayısıyla $\overline{H}^w\subseteq\overline{H}^\mu$ elde edilir.

Eğer $f\in H^w$ ise

$$W(t,f)\le w(t)\|f\|_w,\qquad t>0 \tag{3.1.9}$$

eşitsizliği sağlanır. Bunu görelim:

$$W(t,f)=\sup_{|h|\le t}\|\Delta_h f\|_c$$

idi. Burada $h \le t$ alalım. w fonksiyonu artan olduğundan $w(h) \le w(t)$ olup $\dfrac{w(t)}{w(h)} \ge 1$

dır. Son eşitsizlik süreklilik modülünde kullanılırsa

$$W(t,f)\le \sup_{h\le t}\|\Delta_h f\|_c \frac{w(t)}{w(h)}$$

$$W(t,f)\le w(t)\frac{\sup\limits_{h>0}\|\Delta_h f\|_c}{w(h)}$$

$$W(t,f)\le w(t)\|f\|_w$$

elde edilir.

Eğer $f \in \overline{H}^w$ ise, o taktirde

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{W(t,f)}{w(t)}=0 \tag{3.1.10}$$

dir. Bunu görmek için;

$W(t,f)=\sup\limits_{|h|\le t}\|\Delta_h f\|_c$ eşitliği

$$W(t,f)=\left(\sup_{|h|\le t}\|\Delta_h f\|_c\right)\frac{w(h)}{w(h)}$$

$$\le w(t)\sup_{|h|\le t}\frac{\|\Delta_h f\|_c}{w(h)}$$

$$0\le \frac{W(t,f)}{w(t)}\le \sup_{|h|\le t}\frac{\|\Delta_h f\|_c}{w(h)}$$

şeklinde yazılabilir. Her iki tarafın $t \to 0^+$ için limiti alınırsa

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{W(t,f)}{w(t)} \le \lim_{t\to 0^+}\left(\sup_{|h|\le t}\frac{\|\Delta_h f\|_c}{w(h)}\right)$$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{W(t,f)}{w(t)} = 0$$

elde edilir. Böylece genelleştirilmiş Hölder uzayının sağladığı bazı özellikler gösterilmiş oldu.

Sırasıyla P,Q,W ile gösterilen Picard, Poission-Cauchy ve Gaus-Weierstrass singuler integralleri aşağıdaki gibi tanımlanırlar.

$$P(x,r;f) = \frac{1}{2r}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)e^{\frac{-|t|}{r}}\,dt \qquad \textbf{(3.1.11)}$$

$$Q(x,r;f) = \frac{r}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x+t)\frac{1}{t^2+r^2}\,dt \qquad \textbf{(3.1.12)}$$

$$W(x,r;f) = \frac{1}{\sqrt{\pi r}}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x+t)e^{\frac{-t^2}{r}}\,dt \qquad \textbf{(3.1.13)}$$

Şimdi bu integrallerin $f \in C,\, x \in R\,, r \in I(0,1]$ ve $r \to 0^+$ iken yakınsaklık durumlarını inceleyelim.

Lemma 3.1.1: Eğer $f \in C$ ise

a) $\|P(.,r;f)\|_c \le \|f\|_c$

b) $\|Q(.,r;f)\|_c \le \|f\|_c$

c) $\|W(.,r;f)\|_c \le \|f\|_c$

dır. Yani, her $r \in I$ sabiti için $f \in C$ olduğunda $P(.,r;f), Q(.,r;f)$ ve $W(.,r;f)$ integralleri de C ye aittir.

İspat :

a) (3.1.1) , (3.1.10) ve

$$\frac{1}{2r}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-|t|}{r}}\,dt = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{r}\int_{0}^{k} e^{\frac{-t}{r}}\,dt = \quad \lim_{k\to\infty} e^{\frac{-t}{r}}\Big|_{k}^{0} = 1$$

eşitliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned}\|P(x,r;f)\|_c &= \sup_{x\in R}\left|\frac{1}{2r}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)e^{\frac{-|t|}{r}}\,dt\right| \\ &\le \sup_{x\in R}\frac{1}{2r}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t)|e^{\frac{-|t|}{r}}\,dt \\ &\le \sup_{x\in R}\left(\sup_{y\in R}|f(y)|\right)\frac{1}{2r}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-|t|}{r}}\,dt \\ &\le \sup_{y\in R}|f(y)| = \|f\|_c\end{aligned}$$

elde edilir.

b) (3.1.1) , (3.1.12) ve

$$\frac{r}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t^2+r^2}\,dt = \frac{2r}{\pi r}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{t^2+r^2}\,dt = \frac{2r}{\pi}\lim_{k\to\infty}\int_{0}^{k}\frac{1}{t^2+r^2}\,dt = \frac{2r}{\pi}\lim_{k\to\infty}\frac{1}{r}\arctan\frac{t}{r}\ \Big|_{0}^{k} = 1$$

eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\|Q(x,r,f)\|_c &= \sup_{x\in R}\left|\frac{r}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x+t)\frac{1}{t^2+r^2}\,dt\right| \\ &\le \sup_{x\in R}\frac{r}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|f(x+t)|\frac{1}{t^2+r^2}\,dt \\ &\le \sup_{x\in R}\left(\sup_{y\in R}|f(y)|\right)\frac{r}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{t^2+r^2}\,dt \\ &\le \sup_{y\in R}|f(y)|\frac{r}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t^2+r^2}dt \\ &\le \sup_{y\in R}|f(y)| = \|f\|_c\end{aligned}$$

elde edilir.

c) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{r}} dt = \sqrt{\pi r}$ olduğunu gösterelim ve (3.1.1), (3.1.13) eşitliklerini

kullanalım.

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{r}} dx \Rightarrow I^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{r}} e^{\frac{-y^2}{r}} dxdy$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x^2+y^2)}{r}} dxdy$$

$x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ dönüşümleri yapılırsa $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = \rho$ den

$dxdy = \rho d\rho d\theta$ olur. Bu durumda

$$I^2 = \int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty} e^{\frac{-\rho^2}{r}} \rho d\rho d\theta$$

$\dfrac{\rho^2}{r} = u$, $2\rho d\rho = rdu$ dönüşümü uygulanırsa

$$I^2 = \pi r \lim_{k\to\infty} \int\limits_{0}^{k} e^{-u} du = -\pi r \lim_{k\to\infty} e^{-u}\Big|_0^k = \pi r$$

$$I^2 = \pi r \Rightarrow I = \sqrt{\pi r}$$

elde edilir. Şimdi (3.1.1) ve (3.1.13) eşitlikleri kullanırsa

$$\|W(x,r,f)\|_c = \sup_{x\in R}\left|\frac{1}{\sqrt{\pi r}}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+r)e^{\frac{-t^2}{r}} dt\right|$$

$$\leq \sup_{x\in R} \frac{1}{\sqrt{\pi r}}\int |f(x+r)| e^{\frac{-t^2}{r}} dt$$

$$\leq \sup_{x\in R} \frac{1}{\sqrt{\pi r}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x+t)| e^{\frac{-t^2}{r}} dt$$

$$\leq \sup_{x\in R}\left(\sup_{y\in R}|f(y)|\right)\frac{1}{\sqrt{\pi r}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{r}}\,dt$$

$$\leq \sup_{y\in R}|f(y)| = \|f\|_c$$

olur.

Lemma 3.1.2:Eğer $f\in H^w$ ise,o taktirde

a) $\|p(.,r;f)\|_w \leq \|f\|_w$

b) $\|Q(.,r;f\ )\|_w \leq \|f\|_w$

c) $\|W(.,r;f)\|_w \leq \|f\|_w$

eşitsizlikleri sağlanır. Yani her $r\in I$ sabiti için $f\in H^w$ iken $P(.,r;f)$, $Q(.,r;f)$ ve $W(.,r;f)$ fonksiyonları da H^w'ya aittir.

İspat : (3.1.3) , (3.1.10) ve (3.1.12) den $x\in IR$, $r\in I$ ve $h\in IR$ için

$$\Delta_h P(x,r;f) = P(x,r;\Delta_h f)$$

$$\Delta_h Q(x,r;f) = Q(x,r,\Delta_h f)$$

$$\Delta_h W(x,r;f) = W(x,r,\Delta_h f)$$

eşitlikleri sağlanır. (3.1.3) den

$$\Delta_h P(x,r;f) = P(x+h,r;f) - P(x,r;f)$$

$$= \frac{1}{2r}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t+h)e^{\frac{-|t|}{r}}\,dt - \frac{1}{2r}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)e^{\frac{-|t|}{r}}\,dt$$

$$= \frac{1}{2r}\int_{-\infty}^{\infty}\big(f(x+t+h) - f(x+t)\big)e^{\frac{-|t|}{r}}\,dt$$

$$= \frac{1}{2r}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta_h f(x+t)e^{\frac{-|t|}{r}}\,dt$$

$$= P(x,r;\Delta_h f)$$

olur. Benzer şekilde

$$\Delta_h Q(x,r;f) = Q(x+h,r;f) - Q(x,r;f)$$

$$= \frac{r}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t+h)\frac{1}{t^2+r^2}\,dt - \frac{r}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{1}{t^2+r^2}\,dt$$

$$= \frac{r}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x+t+h) - f(x+t)\right]\frac{1}{t^2+r^2}\,dt$$

$$= \frac{r}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Delta_h f(x+t)\frac{1}{t^2+r^2}\,dt$$

$$= Q(x,r;\Delta_h f)$$

elde edilir.

Son olarak

$$\Delta_h W(x,r;f) = W(x+h,r;f) - W(x,r;f)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi r}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t+h)e^{\frac{-t^2}{r}}\,dt - \frac{1}{\sqrt{\pi r}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)e^{\frac{-t^2}{r}}\,dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi r}}\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x+t+h) - f(x+t)\right)e^{\frac{-t^2}{r}}\,dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi r}}\int_{-\pi}^{\pi} \Delta_h f(x+t)e^{\frac{-t^2}{r}}\,dt$$

$$= W(x,r;\Delta_h f)$$

elde edilirler. Buna göre

Lemma 3.1.1 den $\forall r \in I$ ve $\forall h \in R$ için

$$\left\|\Delta_h P(\cdot,r;f)\right\|_c = \left\|P(\cdot,r;\Delta_h f)\right\|_c \le \left\|\Delta_h f\right\|_c \qquad \textbf{(3.1.14)}$$

$$\left\|\Delta_h Q(\cdot,r;f)\right\|_c \le \left\|\Delta_h f\right\|_c \qquad \textbf{(3.1.15)}$$

$$\|\varDelta_h W(\cdot r;f)\|_c \le \|\varDelta_h f\|_c \tag{3.1.16}$$

olur. Şimdi (3.1.13), (3.1.14) ve (3.1.15)'ü kullanarak, (3.1.4) yardımıyla $\|\cdot\|_w$'yı tanımlayalım.

a) $$\|P(\cdot,r;f)\|_w = \sup_{h>0}\frac{\|\varDelta_h P(\cdot,r;f)\|_c}{w(h)} \le \sup_{h>0}\frac{\|\varDelta_h f\|_c}{w(h)} = \|f\|_w$$

b) $$\|Q(\cdot,r;f)\|_w = \sup_{h>0}\frac{\|\varDelta_h Q(\cdot,r;f)\|_c}{w(h)} \le \sup_{h>0}\frac{\|\varDelta_h f\|_c}{w(h)} = \|f\|_w$$

c) $$\|W(\cdot,r;f)\|_w = \sup_{h>0}\frac{\|\varDelta_h W(\cdot,r;f)\|_c}{w(h)} \le \sup_{h>0}\frac{\|\varDelta_h f\|_c}{w(h)} = \|f\|_w$$

olurlar.

Lemma 3.1.1 ve Lemma 3.1.2, $r \in I$ için $P(\cdot,r;f)$, $Q(\cdot,r;f)$ ve $W(\cdot,r;f)$ fonksiyonlarının H^w'ya ait olduğunu gösterir.

Buna göre aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

Sonuç 3.1.1: Eğer $f \in H^w$ ise

a) $\|P(\cdot,r;f)\|_{H^w} \le \|f\|_{H^w}$

b) $\|Q(\cdot,r;f)\|_{H^w} \leq \|f\|_{H^w}$

c) $\|W(\cdot,r;f)\|_{H^w} \leq \|f\|_{H^w}$

dır.

Lemma 3.1.3: Eğer $f \in \overline{H}^w$ ise $\forall r \in I$ sabiti için $P(\cdot,r;f)$, $Q(\cdot,r;f)$ ve $W(\cdot,r;f)$ fonksiyonları $\overline{H}^w$ ya aittir.

İspat :

a) $P(,r;f)$ için; $h > 0$, $r \in I$ (3.1.14) eşitsizliğinden

$$0 \leq \frac{\|\Delta_h P(\cdot,r;f)\|_c}{w(h)} = \frac{\|P(\cdot,r;\Delta_h f)\|_c}{w(h)} \leq \frac{\|\Delta_h f\|_c}{w(h)}$$

olur. Her iki tarafın $h \to 0^+$ iken limiti alınırsa

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\|\Delta_h P(\cdot,r;f)\|_c}{w(h)} \leq \lim_{h\to 0^+} \frac{\|\Delta_h f\|_c}{w(h)}$$

dır. $f \in \overline{H}^w$ ise

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\|\Delta_h f\|_c}{w(h)} = 0$$

olduğundan

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\|\Delta_h P(\cdot,r;f)\|_c}{w(h)} = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $P(\cdot,r;f) \in \overline{H}^w$ olur.

b) $Q(\cdot,r;f)$ için; (3.1.15) eşitsizliğinden

$$0 \leq \frac{\|\Delta_h Q(\cdot,r;f)\|_c}{w(h)} = \frac{\|Q(\cdot,r;\Delta_h f)\|_c}{w(h)} \leq \frac{\|\Delta_h f\|_c}{w(h)}$$

yazılabilir. Her iki tarafın $h \to 0^+$ iken limiti alınırsa

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\|\Delta_h Q(\cdot,r;f)\|_c}{w(h)} \le \lim_{h\to 0^+}\frac{\|\Delta_h f\|_c}{w(h)}$$

elde edilir. Eğer $f \in \overline{H}^w$ ise

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\|\Delta_h f\|_c}{w(h)} = 0$$

olduğundan

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\|\Delta_h Q(\cdot,r;f)\|_c}{w(h)} = 0$$

olur. Dolayısıyla $Q(\cdot,r;f) \in \overline{H}^w$ olur.

c) $W(\cdot,r;f)$ için; (3.1.16) eşitsizliğinden

$$0 \le \frac{\|\Delta_h W(\cdot,r;f)\|_c}{w(h)} = \frac{\|W(\cdot,r;\Delta_h f)\|_c}{w(h)} \le \frac{\|\Delta_h f\|_c}{w(h)}$$

yazılabilir. Her iki tarafın $h \to 0^+$ iken limiti alınırsa

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\|\Delta_h W(\cdot,r;f)\|_c}{w(h)} \le \lim_{h\to 0^+}\frac{\|\Delta_h f\|_c}{w(h)}$$

olur. $f \in \overline{H}^w$ için

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\|\Delta_h f\|_c}{w(h)} = 0$$

olduğundan

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\|\Delta_h W(\cdot,r;f)\|_c}{w(h)} = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $W(\cdot,r;f) \in \overline{H}^w$ olur.

Şimdi $L_k(x,r;f)$ operatörünü

$$L_k(x,r;f)=\begin{cases} P(x,r;f)-f(x) & , \quad k=1 \\ Q(x,r;f)-f(x) & , \quad k=2 \\ W(x,r;f)-f(x) & , \quad k=3 \end{cases} \tag{3.1.17}$$

şeklinde tanımlayalım ve $\left\|L_k(\cdot,r;f)\right\|_c$ normunu inceleyelim.

Teorem 3.1.1: Eğer $f\in C$ ise, o taktirde

a) $\left\|L_1(\cdot,r;f)\right\|_c \le 2W(r,f)$ **(3.1.18)**

b) $\left\|L_2(\cdot,r;f)\right\|_c \le 2W(r\ln\frac{\pi}{r},f)+2\pi^{-2}\left\|f\right\|_c r$ **(3.1.19)**

c) $\left\|L_3(\cdot,r;f)\right\|_c \le (1+\pi^{\frac{-1}{2}})W(r^{\frac{1}{2}},f)+2\pi^{\frac{-1}{2}}\left\|f\right\|_c r^{\frac{1}{2}}$ **(3.1.20)**

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat :

a) (3.1.17), (3.1.11) ve (3.1.2) tanımları ve $\frac{1}{2r}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-|t|}{r}}\,dt=1$ eşitliği kullanılırsa

$$L_1(x,r;f)=P(x,r;f)-f(x)$$

$$=\frac{1}{2r}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)e^{\frac{-|t|}{r}}\,dt-f(x)\frac{1}{2r}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-|t|}{r}}\,dt$$

$$=\frac{1}{2r}\int_{-\infty}^{\infty} \Delta_t f(x)e^{\frac{-|t|}{r}}\,dt$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\left\|L_1(x,r;f)\right\|_c=\sup_{x\in R}\left|\frac{1}{2r}\int_{-\infty}^{\infty}\Delta_t f(x)e^{\frac{-|t|}{r}}\,dt\right|$$

$$\le \sup_{x\in R}\frac{1}{2r}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\Delta_t f(x)\right|e^{\frac{-|t|}{r}}\,dt$$

$$= \frac{1}{2r} \int_{-\infty}^{\infty} \|\Delta_t f\|_c \, e^{\frac{-|t|}{r}} \, dt$$

$$\le \frac{1}{2r} \int_{-\infty}^{\infty} \sup_{|t| \le |t|} \|\Delta_t f\|_c \, e^{\frac{-|t|}{r}} \, dt$$

$$= \frac{1}{2r} \int_{-\infty}^{\infty} W(|t|, f) e^{\frac{-|t|}{r}} \, dt$$

$$= \frac{1}{r} \int_{0}^{\infty} W(t, f) e^{\frac{-t}{r}} \, dt$$

olur.

$\lambda > 0$ olmak üzere $\lambda = \frac{t}{r}$ seçilip $W(\lambda r, f) \le (1+\lambda) W(r, f)$ özelliği kullanılırsa

$$\|L_1(x, r; f)\|_c = W(r; f) \int_{0}^{\infty} (1 + \frac{t}{r}) e^{\frac{-t}{r}} \, dt$$

yazılabilir. Son integralde $\frac{t}{r} = u$ denirse $dt = r du$ olup,

$$\|L_1(x, r; f)\|_c = W(r; f) \int_{0}^{\infty} (1+u) e^{-u} \, du$$

$$= W(r; f) \left(\int_{0}^{\infty} e^{-u} du + \int_{0}^{\infty} u e^{-u} du \right)$$

$$= W(r; f) \, (1+1)$$

$$= 2W(r; f)$$

olarak elde edilir. Böylece (a) gerçeklendiğini görülür.

b) (3.1.17), (3.1.12), (3.1.3) ifadeleri ve $\frac{r}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2 + r^2} dt = 1$ eşitliği kullanılırsa

$$L_2(x,r;f)=\frac{r}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{1}{t^2+r^2}\,dt-f(x)$$

$$=\frac{r}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{1}{t^2+r^2}\,dt-f(x)\frac{r}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t^2+r^2}dt$$

$$=\frac{r}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{1}{t^2+r^2}\,dt$$
$$-f(x)\left(\frac{r}{\pi}\int_{-\infty}^{-\pi}\frac{1}{t^2+r^2}dt+\frac{r}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{t^2+r^2}dt+\frac{r}{\pi}\int_{\pi}^{\infty}\frac{1}{t^2+r^2}dt\right)$$

yazılabilir.

$\frac{r}{\pi}\int_{-\infty}^{-\pi}\frac{1}{t^2+r^2}dt$ integralinde $t=-t$ alınırsa

$$=\frac{r}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varDelta_t f(x)\frac{1}{t^2+r^2}dt-f(x)\frac{2r}{\pi}\int_{\pi}^{\infty}\frac{1}{t^2+r^2}\,dt$$

olur. $L_2(x,r;f)=A(x,r;f)-B(x,r;f)$ şeklinde düşünelim ve

$r^*=r\ln(\frac{\pi}{r})$ biçiminde bir sabit seçelim. Bu durumda

$$\|A(x,r;f)\|_c=\sup_{x\in R}\left|\frac{r}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varDelta_t f(x)(t^2+r^2)^{-1}dt\right|$$

$$\le\sup_{x\in R}\frac{r}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\varDelta_t f(x)|(t^2+r^2)^{-1}\,dt$$

$$=\frac{r}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sup_{x\in R}|\varDelta_t f(x)|(t^2+r^2)^{-1}\,dt$$

$$=\frac{r}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\|\varDelta_t f\|_c(t^2+r^2)^{-1}\,dt$$

$$\le\frac{r}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sup_{|t|\le|t|}\|\varDelta_t f\|_c(t^2+r^2)^{-1}\,dt$$

$$= \frac{r}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(|t|, f)(t^2 + r^2)^{-1} dt$$

olur. Burada $\lambda = \frac{t}{r^*}$ seçilirse

$$\|A(., r; f)\|_c \leq \frac{2r}{\pi} W(r^*, f) \int_0^{\pi} (1 + \frac{t}{r^*})(t^2 + r^2)^{-1} dt$$

olur.

$\int_0^{\pi} \frac{t}{(t^2 + r^2)} dt \leq \frac{3}{2} \ln(\frac{\pi}{r})$ eşitsizliği kullanılırsa

$$\|A(., r; f)\|_c \leq \frac{2r}{\pi} W(r^*, f) \left(\int_0^{\pi} (t^2 + r^2)^{-1} dt + \int_0^{\pi} \frac{t}{r \ln(\frac{\pi}{r})} (t^2 + r^2)^{-1} dt \right)$$

$$\leq \frac{2r}{\pi} W(r^*, f) \left(\frac{\pi}{2r} + \frac{3}{2r \ln(\frac{\pi}{r})} \ln(\frac{\pi}{r}) \right)$$

$$= W(r^*, f)(1 + \frac{3}{\pi})$$

$$\leq 2W(r^*, f)$$

olur. Yukarıdaki eşitsizlik

$$\int_0^{\pi} \frac{t}{(t^2 + r^2)} dt = \frac{1}{2} \ln(t^2 + r^2) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\pi^2 + r^2}{r^2} \right) \leq \frac{1}{2} \ln(\frac{\pi^3}{r^3}) = \frac{3}{2} \ln(\frac{\pi}{r})$$

şeklinde elde edilir.

Diğer taraftan $\int_{\pi}^{\infty} \frac{1}{t^2 + r^2} dt \leq \int_{\pi}^{\infty} \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{\pi}$ eşitsizliği kullanılırsa

$$\|B(., r; f)\|_c = \sup_{x \in R} \left| \frac{2r}{\pi} f(x) \int_{\pi}^{\infty} (t^2 + r^2) dt \right|$$

$$\leq \frac{2r}{\pi}\|f\|_c \frac{1}{\pi}$$

$$= 2r\pi^{-2}\|f\|_c$$

bulunur. Minkowsky eşitsizliğinden

$$\|L_2(x,r;f)\|_c \leq \|A(x,r;f)\|_c + \|B(x,r;f)\|_c$$

$$\|L_2(x,r;f)\|_c \leq 2W(r^*,f) + 2r\pi^{-2}\|f\|_c$$

elde edilir.

c), (3.1.17), (3.1.13), (3.1.3) ifadeleri ve $\frac{1}{\sqrt{\pi r}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{r}}\,dt = 1$ eşitliği kullanılırsa

$$L_3(x,r;f) = W(x,r;f) - f(x)$$

$$L_3(x,r;f) = \frac{1}{\sqrt{\pi r}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)e^{\frac{-t^2}{r}}\,dt - f(x)\frac{1}{\sqrt{\pi r}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{r}}\,dt$$

yazılabilir.

(b) deki işlemler benzer şekilde kullanılırsa

$$L_3(x,r;f) = \frac{1}{\sqrt{\pi r}}\int_{-\pi}^{\pi} \Delta_t f(x)e^{\frac{-t^2}{r}}\,dt - \frac{2f(x)}{\sqrt{\pi r}}\int_{\pi}^{\infty} e^{\frac{-t}{r}}\,dt$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\|L_3(x,r;f)\|_c = \sup_{x\in R}\left|\frac{1}{\sqrt{\pi r}}\int_{-\pi}^{\pi} \Delta_t f(x)e^{\frac{-t^2}{r}}\,dt - \frac{2f(x)}{\sqrt{\pi r}}\int_{\pi}^{\infty} e^{\frac{-t}{r}}\,dt\right|$$

$$\leq \sup_{x\in R}\left|\frac{1}{\sqrt{\pi r}}\int_{-\pi}^{\pi} \Delta_t f(x)e^{\frac{-t^2}{r}}\,dt\right| + \sup_{x\in R}\left|\frac{2f(x)}{\sqrt{\pi r}}\int_{\pi}^{\infty} e^{\frac{-t}{r}}\,dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{\pi r}}\int_{-\pi}^{\pi} \sup_{x\in R}|\Delta_t f|e^{\frac{-t^2}{r}}\,dt + \sup_{x\in R}\frac{2|f(x)|}{\sqrt{\pi r}}\int_{\pi}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{r}}\,dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi r}} \int_{-\pi}^{\pi} \|\Delta_t f\|_c e^{\frac{-t^2}{r}} dt + \frac{2}{\sqrt{\pi r}} \|f\|_c \int_{\pi}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{r}} dt$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{\pi r}} \int_{-\pi}^{\pi} \sup_{|t|\leq|t|} \|\Delta_t f\|_c e^{\frac{-t^2}{r}} dt + \frac{2}{\sqrt{\pi r}} \|f\|_c \int_{\pi}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{r}} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi r}} \int_{-\pi}^{\pi} W(|t|, f) e^{\frac{-t^2}{r}} dt + \frac{2}{\sqrt{\pi r}} \|f\|_c \int_{\pi}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{r}} dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi r}} \int_{0}^{\pi} W(t, f) e^{\frac{-t^2}{r}} dt + \frac{2}{\sqrt{\pi r}} \|f\|_c \int_{\pi}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{r}} dt$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$\lambda = \frac{t}{\sqrt{r}}$ seçilirse

$$\|L_3(.,r;f)\|_c \leq \frac{2}{\sqrt{\pi r}} W(\sqrt{r}, f) \int_{0}^{\pi} e^{\frac{-t^2}{r}} dt + \frac{2}{\sqrt{\pi r}} W(\sqrt{r}, f) \int_{0}^{\pi} t e^{\frac{-t^2}{r}} dt$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{\pi r}} \|f\|_c \int_{\pi}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{r}} dt$$

olur.

$\frac{1}{\sqrt{\pi r}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{r}} dt = 1$ olduğundan basit bir kıyaslama ile $\frac{2}{\sqrt{\pi r}} \int_{0}^{\pi} e^{\frac{-t^2}{r}} dt \leq 1$

yazılabilir.

$\int_{0}^{\pi} t e^{\frac{-t^2}{r}} dt$ integralinde $\frac{-t^2}{r} = u$ denirse

$$\int_{0}^{\pi} t e^{\frac{-t^2}{r}} dt = -\frac{r}{2} \int_{0}^{\frac{-\pi^2}{r}} e^u du = -\frac{r}{2} e^u \Big|_{0}^{\frac{-\pi^2}{r}} = \frac{r}{2}(1 - e^{\frac{-\pi^2}{r}}) \leq \frac{r}{2}$$

elde edilir.

$\int_{\pi}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{r}} dt$ integralinde $\frac{t}{r} = u$ denirse

$$\int_{\pi}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{r}} dt \le \int_{\pi}^{\infty} e^{\frac{-t}{r}} dt = r \lim_{k\to\infty} \int_{\frac{\pi}{r}}^{k} e^{-u} du = -r \lim_{k\to\infty} e^{-u} \Big|_{\frac{\pi}{r}}^{k} = re^{\frac{-\pi}{r}} < r$$

elde edilir.

Buna göre,

$$\|L_3(\cdot,r;f)\|_c \le W(r^{\frac{1}{2}},f)(1+\pi^{-\frac{1}{2}}) + 2\pi^{-\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}} \|f\|_c$$

olarak bulunur.

Sonuç 3.1.2: Eğer $f \in H^w$ ise, o takdirde

(a) $\|L_1(.,r;f)\|_c \le 2\|f\|_{H^w} w(r)$ **(3.1.21)**

(b) $\|L_2(.,r;f)\|_c \le \left[2 + 2(\pi^2 w(1))^{-1}\right]\|f\|_{H^w} w(r \ln(\frac{\pi}{r}))$ **(3.1.22)**

(c) $\|L_3(.,r;f)\|_c \le \left[1 + (1 + \frac{2}{w(1)})\pi^{-\frac{1}{2}}\right]\|f\|_{H^w} w(r^{\frac{1}{2}})$ **(3.1.23)**

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat :

a) (3.1.5),(3.1.9) ve (3.1.18) ifadeleri kullanılırsa

$$\|L_1(.r;f)\|_c \le 2W(r,f)$$
$$\le 2\,w(r)\|f\|_w$$
$$\le 2w(r)\|f\|_{H^w}$$

olur.

b) (3.1.5) , (3.1.9) ve (3.1.19) ifadeleri kullanılırsa

$$\|L_2(\cdot,r;f)\|_c \le 2W(r\ln\frac{\pi}{r},f) + 2\pi^{-2}\|f\|_c\, r$$

$$\le 2w(r\ln(\frac{\pi}{r}))\|f\|_{H^w} + 2\pi^{-2}\|f\|_{H^w}\, r\frac{w(r\ln(\frac{\pi}{r}))}{w(r\ln(\frac{\pi}{r}))}$$

$$= w(r\ln(\frac{\pi}{r}))\|f\|_{H^w}\left(2 + \frac{2r}{\pi^2 w(r\ln(\frac{\pi}{r}))}\right)$$

yazılabilir.

Parantez içindeki ifade için $\dfrac{2r}{\pi^2 w(r\ln(\frac{\pi}{r}))} \le \dfrac{2}{\pi^2 w(1)}$ olduğunu gösterirsek

ispat tamamlanır.

$r \in (0,1]$ için $r\ln(\frac{\pi}{r})$ artandır. Artan olduğu için maksimum değerini $r = 1$ de

alır. Dolayısıyla

$0 < r\ln(\frac{\pi}{r}) \le \ln\pi$ yazılabilir. Ayrıca $t > 0$ için $\dfrac{t}{w(t)}$ artan olduğundan

$$\frac{r\ln(\frac{\pi}{r})}{w(r\ln(\frac{\pi}{r}))} \le \frac{\ln\pi}{w(\ln\pi)} \qquad \text{(I)}$$

dır. Diğer taraftan $\pi \le \frac{\pi}{r}$ ise $r\ln\pi \le r\ln\frac{\pi}{r}$ dır. Buna göre

$$\frac{r\ln\pi}{w(r\ln\pi)} \le \frac{r\ln(\frac{\pi}{r})}{w(r\ln(\frac{\pi}{r}))} \qquad \text{(II)}$$

yazılabilir. (I) ve (II) den

$$\frac{r\ln\pi}{w(r\ln\pi)} \le \frac{r\ln(\frac{\pi}{r})}{w(r\ln(\frac{\pi}{r}))} \le \frac{\ln\pi}{w(\ln\pi)} \qquad \text{(III)}$$

elde edilir. Ayrıca $1 < \ln\pi$ ve w artan olduğundan $\frac{1}{w(1)} > \frac{1}{w(\ln\pi)}$ dır.

$$\frac{\ln(\frac{\pi}{r})}{w(\ln\pi)} < \frac{\ln(\frac{\pi}{r})}{w(1)} \quad \text{ve} \quad \text{(III)} \quad \text{kullanılırsa}$$

$$\frac{r\ln\pi}{w(r\ln\pi)} \le \frac{r\ln(\frac{\pi}{r})}{w(r\ln(\frac{\pi}{r}))} \le \frac{\ln\pi}{w(\ln\pi)} \le \frac{\ln(\frac{\pi}{r})}{w(\ln\pi)} < \frac{\ln(\frac{\pi}{r})}{w(1)} \quad \text{olup}$$

$$\frac{r}{w(r\ln(\frac{\pi}{r}))} \le \frac{1}{w(1)}$$

elde edilir. Böylece

$$\|L_2(.,r;f)\|_c \le \left[2 + 2(\pi^2 w(1))^{-1}\right]\|f\|_{H^w}\, w(r\ln(\frac{\pi}{r}))$$

olur.

c) (3.1.5) , (3.1.9) ve (3.1.20) ifadeleri kullanırsa

$$\|L_3(.,r;f)\|_c \le (1+\pi^{-\frac{1}{2}})W(r^{\frac{1}{2}},f) + 2\pi^{\frac{-1}{2}}\|f\|_c\, r^{\frac{1}{2}}$$

$$\le W(r^{\frac{1}{2}},f) + \pi^{\frac{-1}{2}}W(r^{\frac{1}{2}},f) + 2\pi^{\frac{-1}{2}}\|f\|_{H^w}\, r^{\frac{1}{2}}$$

$$\le w(r^{\frac{1}{2}})\|f\|_{H^w} + \pi^{\frac{-1}{2}}w(r^{\frac{1}{2}})\|f\|_{H^w} + 2\pi^{\frac{-1}{2}}\|f\|_{H^w}\, r^{\frac{1}{2}}\,\frac{w(r^{\frac{1}{2}})}{w(r^{\frac{1}{2}})}$$

$$= w(r^{\frac{1}{2}})\|f\|_{H^w}\left[1+\pi^{\frac{-1}{2}}(1+\frac{2r^{\frac{1}{2}}}{w(r^{\frac{1}{2}})})\right]$$

olur.

Parantez içindeki ifade $\dfrac{2r^{\frac{1}{2}}}{w(r^{\frac{1}{2}})} \le \dfrac{2}{w(1)}$ şeklinde yazılabilir. Çünkü $r \in (0,1]$ içi $\dfrac{r^{\frac{1}{2}}}{w(r^{\frac{1}{2}})}$ ifadesi artan olduğundan maksimum değerini $r = 1$ için alır. Böylece

$$\|L_3(.,r;f)\|_c \le \|f\|_{H^w} w(r^{\frac{1}{2}})\left[1 + \pi^{\frac{-1}{2}}(1 + \frac{2}{w(1)})\right]$$

olarak elde edilir.

Özel olarak $f \in H^w$, $w(t) = t^\alpha$ $0 < \alpha \le 1$ için

a) $\|L_1(.,r;f)\|_c \le 2\|f\|_{H^w} r^\alpha$

b) $\|L_2(.,r;f)\|_c \le 2\|f\|_{H^w}\left[1 + \dfrac{1}{\pi^2 w(1)}\right](r\ln(\dfrac{\pi}{r}))^\alpha$

c) $\|L_3(.,r;f)\|_c \le \|f\|_{H^w}\left[1 + (1 + \dfrac{2}{w(1)})\pi^{\frac{-1}{2}}\right]r^{\frac{\alpha}{2}}$

eşitlikleri geçerlidir.

Sonuç 3.1.3: Eğer $f \in \overline{H}^w$ ise, o takdirde

(a) $\lim\limits_{r\to 0^+} \dfrac{\|L_1(.,r;f)\|_c}{w(r)} = 0$ **(3.1.24)**

(b) $\lim\limits_{r\to 0^+} \dfrac{\|L_2(.,r;f)\|_c}{w(r\ln(\frac{\pi}{r}))} = 0$ **(3.1.25)**

(c) $\lim\limits_{r\to 0^+} \dfrac{\|L_3(.,r;f)\|_c}{w(r^{\frac{1}{2}})} = 0$ **(3.1.26)**

olur.

İspat:

a) (3.1.10) ve (3.1.18) ifadeleri kullanılırsa

$$\frac{\|L_1(\cdot,r;f)\|_c}{w(r)} \leq \frac{2W(r,f)}{w(r)}$$

$$0 \leq \lim_{r\to 0^+} \frac{\|L_1(\cdot,r;f)\|_c}{w(r)} \leq \lim_{r\to 0^+} \frac{2W(r,f)}{w(r)}$$

yazılabilir.

$f \in \overline{H}^w$ olduğundan eşitsizliğin sağ tarafı sıfıra eşit olur. Sıkıştırma teoreminden

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\|L_1(\cdot,r;f)\|_c}{w(r)} = 0$$

olarak elde edilir.

(b) (3.1.10) ve (3.1.19) ifadelerinden

$$\frac{\|L_2(\cdot,r;f)\|_c}{w(r\ln(\frac{\pi}{r}))} \leq \frac{2W(r\ln\frac{\pi}{r},f)}{w(r\ln(\frac{\pi}{r}))} + \frac{2\pi^{-2}\|f\|_c r}{w(r\ln(\frac{\pi}{r}))}$$

$$\frac{\|L_2(\cdot,r;f)\|_c}{w(r\ln(\frac{\pi}{r}))} \leq \frac{2W(r\ln\frac{\pi}{r},f)}{w(r\ln(\frac{\pi}{r}))} + \frac{2\pi^{-2}\|f\|_c r\ln(\frac{\pi}{r})}{w(r\ln(\frac{\pi}{r}))\ln(\frac{\pi}{r})}$$

yazılabilir.

$\dfrac{r\ln(\frac{\pi}{r})}{w(r\ln(\frac{\pi}{r}))}$ ifadesi artan olduğundan $r \in (0,1]$ için maksimum değerini $r = 1$ de alır. Bu durumda

$$\frac{\left\|L_2(\cdot,r;f)\right\|_c}{w(r\ln(\frac{\pi}{r}))} \le \frac{2W(r\ln\frac{\pi}{r},f)}{w(r\ln(\frac{\pi}{r}))} + \frac{2\pi^{-2}\left\|f\right\|_c \ln\pi}{w(\ln\pi)\ln(\frac{\pi}{r})}$$

$$0 \le \lim_{r\to 0^+}\frac{\left\|L_2(\cdot,r;f)\right\|_c}{w(r\ln(\frac{\pi}{r}))} \le \lim_{r\to 0^+}\frac{2W(r\ln\frac{\pi}{r},f)}{w(r\ln(\frac{\pi}{r}))} + \frac{2\pi^{-2}\left\|f\right\|_c \ln\pi}{w(\ln\pi)}\lim_{r\to 0^+}\frac{1}{\ln(\frac{\pi}{r})}$$

yazılabilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafı sıfıra eşit olacağından sıkıştırma teoremi gereğince

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{\left\|L_2(\cdot,r;f)\right\|_c}{w(r\ln(\frac{\pi}{r}))} = 0$$

olur.

(c) (3.1.10) ve (3.1.20) ifadelerinden benzer şekilde

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{\left\|L_3(\cdot,r;f)\right\|_c}{w(r^{\frac{1}{2}})} = 0$$

eşitliği elde edilebilir.

Teorem 3.1.2: $w,\mu \in \Omega$ ve (3.1.7) ifadesi ile tanımlanan q azalmayan bir fonksiyon olsun. Bu taktirde $f \in H^w$ ise

(a) $\left\|L_1(.,r;f)\right\|_{H^{\mu w}} \le \left[2+6\mu(1)\right]\left\|f\right\|_{H^w} q(r)$ **(3.1.27)**

(b) $\left\|L_2(.,r;f)\right\|_{H^{\mu}} \le \left\{6+\left[2\mu(\ln\pi)(1+(\pi^2 w(1))^{-1}\right]+4\left(\pi^2 w(1)\right)^{-1}\right\}\left\|f\right\|_{H^w} q\left(r\ln(\frac{\pi}{r})\right)$

(3.1.28)

(c) $\left\|L_3(.,r;f)\right\|_{H^{\mu}} \le \left[4+\mu(1)+\pi^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{2}{w(1)}\right)\left(2+\mu(1)\right)^{-1}\right]\left\|f\right\|_{H^w} q(r^{\frac{1}{2}})$ **(3.1.29)**

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat: İspat için (3.1.1)-(3.1.5) ifadelerini kullanalım. $H^w \subseteq H^{\mu}$ olduğundan dolayı

$$\left\|L_k(.,r;f)\right\|_{H^{\mu}} = \left\|L_k(.,r;f)\right\|_c + \left\|L_k(.,r;f)\right\|_{\mu}$$

olduğunu biliyoruz. Kabul edelim ki

$$\left\|L_k(.,r;f)\right\|_{\mu} \le S_k(r;f) + T_k(r;f) \qquad \textbf{(3.1.30)}$$

şeklinde tanımlansın. Burada

$$S_1(r;f) = \sup_{0<h\le r} \frac{\left\|\Delta_h L_1(.,r;f)\right\|_c}{\mu(h)} \qquad \text{ve} \qquad T_1(r;f) = \sup_{h>r} \frac{\left\|\Delta_h L_1(.,r;f)\right\|_c}{\mu(h)}$$

dır. Buna göre

(a) (3.1.21) eşitsizliğinden

$$\left\|L_1(.,r;f)\right\|_c \le 2\left\|f\right\|_{H^w} w(r)$$

yazılabilir.

$0 < r \le 1$ ve μ artan olduğundan

$$1 \le \frac{\mu(1)}{\mu(r)} \Leftrightarrow w(r) \le q(r)\mu(1)$$

olur. Dolayısıyla

$$\left\|L_1(.,r;f)\right\|_c \le 2\left\|f\right\|_{H^w} q(r)\mu(1) \qquad \textbf{(3.1.31)}$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$\left\|\Delta_h f\right\|_c \le 2\left\|f\right\|_c \qquad \textbf{(3.1.32)}$$

eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} T_1(r;f) &\le \sup_{h>r} \frac{2\left\|L_1(.,r;f)\right\|_c}{\mu(h)} \\ &\le \frac{2\left\|L_1(.,r;f)\right\|_c}{\mu(r)} \end{aligned} \qquad \textbf{(3.1.33)}$$

olur. Burada (3.1.9) ve (3.1.18) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$T_1(r;f) \leq 4\|f\|_{H^w}\, q(r) \qquad \textbf{(3.1.34)}$$

elde edilir. Daha sonra (3.1.2), (3.1.14) ve $\|\Delta_h f\|_c \leq 2\|f\|_c$ eşitsizliği kullanılırsa

$$\|\Delta_h L_1(x,r;f)\|_c = \|P(x,r;\Delta_h f) - \Delta_h f\|_c \leq 2\|\Delta_h f\|_c \qquad \textbf{(3.1.35)}$$

bulunur. (3.1.34) den ise

$$S_1(r;f) = \sup_{0<h\leq r} \frac{\|\Delta_h L_1(.,r;f)\|_c\, w(h)}{\mu(h) w(h)}$$

$$\leq \sup_{0<h\leq r} \frac{2q(h)\|\Delta_h f\|_c}{w(h)}$$

$$\leq 2\|f\|_w\, q(r) \qquad \textbf{(3.1.36)}$$

olur. Son olarak

(3.1.30) , (3.1.31) , (3.1.34) ve (3.1.36) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\|L_1(.,r;f)\|_{H^w} \leq [6 + 2\mu(1)]\|f\|_{H^w}\, q(r)$$

elde edilir.

(b) (3.1.22) eşitsizliğinden

$$\|L_2(.,r;f)\|_c \leq \left[2 + 2(\pi^{-2} w(1))^{-1}\right]\|f\|_{H^w}\, w\left(r \ln(\frac{\pi}{r})\right)$$

yazılabilir. $r \in (0,1]$ için $r \ln\frac{\pi}{r} \leq \ln\pi$ dir. μ artan olduğundan

$$1 \leq \frac{\mu(\ln\pi)}{\mu(r \ln(\frac{\pi}{r}))} \Leftrightarrow w(r \ln(\frac{\pi}{r})) \leq q(r \ln(\frac{\pi}{r}))\mu(\ln\pi)$$

olur. Bu durumda

$$\|L_2(.,r;f)\|_c \leq \left[2 + 2\left(\pi^2 w(1)\right)^{-1}\right]\|f\|_{H^w}\, q\left(r \ln(\frac{\pi}{r})\right)\mu(\ln\pi) \qquad (3.1.37)$$

yazılabilir. Diğer taraftan $\|\Delta_h f\|_c \leq 2\|f\|_c$ eşitsizliği kullanılarak

$$T_2(r;f) \le \sup_{h > r\ln\frac{\pi}{r}} \frac{2\|L_2(.,r;f)\|_c}{\mu(h)}$$

$$\le \frac{2\|L_2(.,r;f)\|_c}{\mu\left(r\ln(\frac{\pi}{r})\right)} \qquad \textbf{(3.1.38)}$$

elde edilir. Burada da (3.1.9) ve (3.1.20) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$T_2(r;f) \le 2\left[2 + 2\left(\pi^2 w(1)\right)^{-1}\right]\|f\|_{H^w}\, q\left(r\ln(\frac{\pi}{r})\right) \qquad \textbf{(3.1.39)}$$

bulunur. Şimdi (3.1.35) olduğu gibi

$\|\Delta_h L_2(x,r;f)\|_c \le 2\|\Delta_h f\|_c$ eşitsizliğini elde edip (3.1.32) eşitsizliği kullanılırsa

$$S_2(r;f) = \sup_{0<h\le r\ln\frac{\pi}{r}} \frac{\|\Delta_h L_2(.,r;f)\|_c\, w(h)}{\mu(h)w(h)}$$

$$\le \sup_{0<h\le r\ln\frac{\pi}{r}} \frac{2q(h)\|\Delta_h f\|_c}{w(h)}$$

$$\le 2q(r\ln\frac{\pi}{r})\|f\|_w \qquad \textbf{(3.1.40)}$$

elde edilir. Son olarak (3.1.30) , (3.1.37) , (3.1.39) ve (3.1.40) eşitsizlikleri kullanıldığında

$$\|L_2(.,r;f)\|_{H^w} \le \left\{6 + \left[2\mu(\ln\pi)(1+(\pi^2 w(1))^{-1}\right] + 4\left(\pi^2 w(1)\right)^{-1}\right\}\|f\|_{H^w}\, q\left(r\ln(\frac{\pi}{r})\right)$$

bulunur.

(c) (3.1.23) eşitsizliğinden

$$\|L_3(.,r;f)\|_c \le \left[1 + (1+\frac{2}{w(1)})\pi^{-\frac{1}{2}}\right]\|f\|_{H^w}\, w(r^{\frac{1}{2}})$$

yazılabilir. $r \in (0,1]$ için $r^{\frac{1}{2}} \leq 1$ ve μ artan olduğundan

$$1 \leq \frac{\mu(1)}{\mu(r^{\frac{1}{2}})} \Leftrightarrow w(r^{\frac{1}{2}}) \leq q(r^{\frac{1}{2}})\mu(1)$$

olup, buradan

$$\left\| L_3(.,r;f) \right\|_c \leq \left[1 + (1 + \frac{2}{w(1)})\pi^{-\frac{1}{2}} \right] \left\| f \right\|_{H^w} q(r^{\frac{1}{2}})\mu(1) \tag{3.1.41}$$

yazılır. Diğer taraftan (3.1.31) eşitsizliği kullanılırsa

$$T_3(r;f) \leq \sup_{h > r^{\frac{1}{2}}} \frac{2\left\| L_2(.,r;f) \right\|_c}{\mu(h)}$$

$$\leq \frac{2\left\| L_3(.,r;f) \right\|_c}{\mu(r^{\frac{1}{2}})} \tag{3.1.42}$$

elde edilir. Burada da (3.1.9) ve (3.1.20) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$T_3(r,f) \leq 2\left[1 + (1 + \frac{2}{w(1)})\pi^{\frac{-1}{2}} \right] \left\| f \right\|_{H^w} q(r^{\frac{1}{2}}) \tag{3.1.43}$$

bulunur. (3.1.35) de olduğu gibi

$\left\| \Delta_h L_3(x,r;f) \right\|_c \leq 2\left\| \Delta_h f \right\|_c$ eşitsizliğini elde edip (3.1.31) eşitsizliği

kullanılırsa

$$S_3(r;f) = \sup_{0 < h \leq r^{\frac{1}{2}}} \frac{\left\| \Delta_h L_3(.,r;f) \right\|_c w(h)}{\mu(h) w(h)}$$

$$\leq \sup_{0 < h \leq r^{\frac{1}{2}}} \frac{2q(h)\left\| \Delta_h f \right\|_c}{w(h)}$$

$$\leq 2q(r^{\frac{1}{2}})\left\| f \right\|_w \tag{3.1.44}$$

olarak bulunur. Son olarak (3.1.30) , (3.1.41) , (3.1.43) ve (3.1.44) eşitsizlikleri kullanılarak,

$$\|L_3(.,r;f)\|_{H^w} \leq \left[4+\mu(1)+\pi^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{2}{w(1)}\right)\left(2+\mu(1)\right)^{-1}\right]\|f\|_{H^w}\, q(r^{\frac{1}{2}})$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.1.3: $w,\mu \in \Omega$ ve q azalmayan fonksiyon olsun. Eğer $f \in \overline{H}^w$ ise, o takdirde

(a) $$\lim_{r\to 0^+} \frac{\|L_1(.,r;f)\|_{\overline{H}^\mu}}{q(r)} = 0$$

(b) $$\lim_{r\to 0^+} \frac{\|L_2(.,r;f)\|_{\overline{H}^\mu}}{q(r\ln(\frac{\pi}{r}))} = 0$$

(c) $$\lim_{r\to 0^+} \frac{\|L_3(.,r;f)\|_{\overline{H}^\mu}}{q(r^{\frac{1}{2}})} = 0$$

olur.

İspat:

a) (3.1.5) , (3.1.6) , (3.1.7) , (3.1.10) ve (3.1.18) eşitsizlikleri kullanılarak

$$\|L_1(.,r;f)\|_{\overline{H}^\mu} = \|L_1(.,r;f)\|_c + \|L_1(.,r;f)\|_\mu$$

$$= (i) + (ii)$$

yazılabilir. Şimdi (i) ve (ii) yi ayrı ayrı inceleyelim.

(i) $$\frac{\|L_1(.,r;f)\|_c}{q(r)} \leq \frac{2W(r,f)}{q(r)}$$ olduğundan

$$0 \leq \lim_{r\to 0^+} \frac{\|L_1(.,r;f)\|_c}{q(r)} \leq \lim_{r\to 0^+} \frac{2W(r,f)}{q(r)}$$

yazılabilir. $f \in \overline{H}^w$ olduğundan eşitsizliğin sağ tarafı sıfıra eşittir. Dolayısıyla

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\|L_1(.,r;f)\|_c}{q(r)} = 0$$

olur.

(ii) (3.1.30), (3.1.33), ve (3.1.35) ifadeleri

$$\|L_1(.,r;f)\|_\mu \leq \sup_{0<h<r} \frac{\|\Delta_h L_1(.,r;f)\|_c}{\mu(h)} + \sup_{h>r} \frac{\|\Delta_h L_1(.,r;f)\|_c}{\mu(h)}$$

$$\leq \sup_{0<h<r} \frac{\|\Delta_h L_1(.,r;f)\|_c\, w(h)}{\mu(h)w(h)} + \frac{2\|L_1(.,r;f)\|_c}{\mu(r)}$$

$$\leq \sup_{0<h<r} \frac{q(r)\|\Delta_h L_1(.,r;f)\|_c}{\mu(h)} + \frac{2\|L_1(.,r;f)\|_c}{\mu(r)}$$

eşitsizliğini verir. Bu durumda

$$\frac{\|L_1(.,r;f)\|_\mu}{q(r)} \leq \sup_{0<h<r} \frac{q(r)\|\Delta_h L_1(.,r;f)\|_c}{q(r)\mu(h)} + \frac{2\|L_1(.,r;f)\|_c}{q(r)\mu(r)}$$

$$\frac{\|L_1(.,r;f)\|_\mu}{q(r)} \leq \sup_{0<h<r} \frac{2\|\Delta_h f\|_c}{w(h)} + \frac{2\|L_1(.,r;f)\|_c}{w(r)}$$

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\|L_1(.,r;f)\|_\mu}{q(r)} \leq \lim_{r\to 0^+} \sup_{0<h<r} \frac{2\|\Delta_h f\|_c}{w(h)} + \lim_{r\to 0^+} \frac{2\|L_1(.,r;f)\|_c}{w(r)}$$

yazılabilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafı $f \in \overline{H}^w$ ve Sonuç 3.1.3 den dolayı sıfıra eşit olacağından sıkıştırma teoremi gereğince

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\|L_1(.,r;f)\|_\mu}{q(r)} = 0 \text{ elde edilir.}$$

Şimdi *(i)* ve *(ii)* yi birleştirirsek

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\|L_1(.,r;f)\|_{\overline{H}^\mu}}{q(r)} = \lim_{r\to 0^+} \frac{\|L_1(.,r;f)\|_c}{q(r)} + \lim_{r\to 0^+} \frac{\|L_1(.,r;f)\|_\mu}{q(r)}$$

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\|L_1(.,r;f)\|_{\overline{H}^\mu}}{q(r)} = 0 \text{ olur.}$$

b) (3.1.5) , (3.1.6) , (3.1.7) , (3.1.10) ve (3.1.19) ifadeleri kullanılırsa

$$\|L_2(.,r;f)\|_{\overline{H}^{\mu}} = \|L_2(.,r;f)\|_c + \|L_2(.,r;f)\|_{\mu}$$

$$= (i) + (ii)$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi *(i)* ve *(ii)* yi ayrı ayrı inceleyelim.

(i) $$\frac{\|L_2(.,r;f)\|_c}{q\left(r\ln(\frac{\pi}{r})\right)} \le \frac{2W\left(r\ln(\frac{\pi}{r}),f\right)\mu\left(r\ln(\frac{\pi}{r})\right)}{w\left(r\ln(\frac{\pi}{r})\right)} + \frac{2\pi^{-2}\|f\|_c\,\mu\left(r\ln(\frac{\pi}{r})\right)r\ln(\frac{\pi}{r})}{w\left(r\ln(\frac{\pi}{r})\right)\ln(\frac{\pi}{r})}$$

eşitsizliği yazılabilir

$\dfrac{t}{w(t)}$ ve $\mu(t)$ $t>0$ fonksiyonları artan olduklarından $r\to 0^+$ için limite geçilirse

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{\|L_2(.,r;f)\|}{q(r\ln(\frac{\pi}{r}))} \le \lim_{r\to 0^+}\frac{2W\left(r\ln(\frac{\pi}{r}),f\right)}{w\left(r\ln(\frac{\pi}{r})\right)}\mu\left(r\ln(\frac{\pi}{r})\right) + \frac{2\pi^{-2}\|f\|_c\,\mu(\ln\pi)\ln\pi}{w(\ln\pi)}\lim_{r\to 0^+}\frac{1}{\ln(\frac{\pi}{r})}$$

bulunur. $f\in\overline{H}^{w}$ olduğundan eşitsizliğin sağ tarafı sıfıra eşittir. Dolayısıyla

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{\|L_2(.,r;f)\|_c}{q(r\ln(\frac{\pi}{r}))} = 0$$

olarak elde edilir.

(*ii*) (3.1.30) ve (3.1.38) ifadelerini göz önüne alırsak,

$$\|L_2(.,r;f)\|_{\mu} \le \sup_{0<h<r\ln(\frac{\pi}{r})}\frac{\|\Delta_h L_2(.,r;f)\|_c}{\mu(h)} + \sup_{h>r\ln(\frac{\pi}{r})}\frac{\|\Delta_h L_2(.,r;f)\|_c}{\mu(h)}$$

$$\le \sup_{0<h<r\ln(\frac{\pi}{r})}\frac{\|\Delta_h L_2(.,r;f)\|_c\,w(h)}{\mu(h)w(h)} + \frac{2\|L_2(.,r;f)\|_c}{\mu(r\ln(\frac{\pi}{r}))}$$

$$\le \sup_{0<h<r\ln(\frac{\pi}{r})}\frac{q(r\ln(\frac{\pi}{r}))\|\Delta_h L_2(.,r;f)\|_c}{q(r\ln(\frac{\pi}{r}))w(h)} + \frac{2\|L_2(.,r;f)\|_c}{\mu(r\ln(\frac{\pi}{r}))q(r\ln(\frac{\pi}{r}))}$$

bulunur. Buradan

$$\frac{\|L_2(.,r;f)\|_\mu}{q(r\ln(\frac{\pi}{r}))} \leq \sup_{0<h<r\ln(\frac{\pi}{r})} \frac{2\|\Delta_h f\|_c}{w(h)} + \frac{2\|L_2(.,r;f)\|_c}{w(r\ln(\frac{\pi}{r}))}$$

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\|L_2(.,r;f)\|_\mu}{q(r\ln(\frac{\pi}{r}))} \leq \lim_{r\to 0^+} \sup_{0<h<r\ln(\frac{\pi}{r})} \frac{2\|\Delta_h f\|_c}{w(h)} + \lim_{r\to 0^+} \frac{2\|L_2(.,r;f)\|_c}{w(r\ln(\frac{\pi}{r}))}$$

yazılabilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafı $f \in \overline{H}^w$ ve Sonuç 3.1.3 den dolayı sıfıra eşit olacağından sıkıştırma teoremi gereğince

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\|L_2(.,r;f)\|_\mu}{q(r\ln(\frac{\pi}{r}))} = 0 \text{ olur.}$$

Bu durumda $(i)\, ve\, (ii)$ yi birleştirirsek

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\|L_2(.,r;f)\|_{\overline{H}^\mu}}{q(r\ln(\frac{\pi}{r}))} = \lim_{r\to 0^+} \frac{\|L_2(.,r;f)\|_c}{q(r\ln(\frac{\pi}{r}))} + \lim_{r\to 0^+} \frac{\|L_2(.,r;f)\|_\mu}{q(r\ln(\frac{\pi}{r}))}$$

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\|L_1(.,r;f)\|_{\overline{H}^\mu}}{q(r\ln(\frac{\pi}{r}))} = 0$$

olarak elde edilir.

c) (3.1.5), (3.1.6), (3.1.7), (3.1.10) ve (3.1.20) ifadeleri kullanılırsa

$$\|L_3(.,r;f)\|_{\overline{H}^\mu} = \|L_3(.,r;f)\|_c + \|L_3(.,r;f)\|_\mu$$

$$= (i) + (ii)$$

yazılabilir.Bu eşitlik ayrı ayrı incelendiğinde $i)$ için a) ve b) dekine benzer şekilde

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\|L_3(\cdot,r;f)\|_c}{q(r^{\frac{1}{2}})} = 0$$

olarak elde edilebilir.

(ii) içinse (3.1.30) ve (3.1.42) den

$$\|L_3(.,r;f)\|_\mu \le \sup_{0<h<r^{\frac{1}{2}}} \frac{\|\Delta_h L_3(.,r;f)\|_c}{\mu(h)} + \sup_{h>r^{\frac{1}{2}}} \frac{\|\Delta_h L_3(.,r;f)\|_c}{\mu(h)}$$

$$\|L_3(.,r;f)\|_\mu \le \sup_{0<h<r^{\frac{1}{2}}} \frac{\|\Delta_h L_3(.,r;f)\|_c}{\mu(h)} + \sup_{h>r^{\frac{1}{2}}} \frac{\|\Delta_h L_3(.,r;f)\|_c}{\mu(h)}$$

$$\le \sup_{0<h<r^{\frac{1}{2}}} \frac{\|\Delta_h L_3(.,r;f)\|_c\, w(h)}{\mu(h)w(h)} + \frac{2\|L_3(.,r;f)\|_c}{\mu(r^{\frac{1}{2}})}$$

$$\le \sup_{0<h<r^{\frac{1}{2}}} \frac{q(r)\|\Delta_h L_3(.,r;f)\|_c}{q(r^{\frac{1}{2}})w(h)} + \frac{2\|L_3(.,r;f)\|_c\, \mu(r^{\frac{1}{2}})}{\mu(r^{\frac{1}{2}})w(r^{\frac{1}{2}})}$$

bulunur.Buradan

$$\frac{\|L_3(.,r;f)\|_\mu}{q(r^{\frac{1}{2}})} \le \sup_{0<h<r^{\frac{1}{2}}} \frac{2\|\Delta_h f\|_c}{w(h)} + \frac{2\|L_3(.,r;f)\|_c}{w(r^{\frac{1}{2}})}$$

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\|L_3(.,r;f)\|_\mu}{q(r^{\frac{1}{2}})} \le \lim_{r\to 0^+} \sup_{0<h<r^{\frac{1}{2}}} \frac{2\|\Delta_h f\|_c}{w(h)} + \lim_{r\to 0^+} \frac{2\|L_3(.,r;f)\|_c}{w(r^{\frac{1}{2}})}$$

yazılabilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafı $f \in \overline{H}^w$ ve Sonuç 3.1.3 den dolayı sıfıra eşit olacağından sıkıştırma teoremi gereğince

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\|L_3(.,r;f)\|_\mu}{q(r^{\frac{1}{2}})} = 0$$

olarak elde edilir. Şimdi *i)* ve *ii)* yi birleştirirsek

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\|L_3(.,r;f)\|_{\overline{H}^\mu}}{q(r^{\frac{1}{2}})} = \lim_{r\to 0^+} \frac{\|L_3(.,r;f)\|_c}{q(r^{\frac{1}{2}})} + \lim_{r\to 0^+} \frac{\|L_3(.,r;f)\|_\mu}{q(r^{\frac{1}{2}})}$$

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\|L_3(.,r;f)\|_{\overline{H}^\mu}}{q(r^{\frac{1}{2}})} = 0$$

olur.

Sonuç 3.1.4: $w(t)=t^{\alpha}$, $\mu(t)=t^{\beta}$, $0<\beta\le\alpha\le 1$ $t\ge 0$ olmak üzere eğer $f\in H$ ise, o taktirde

(a) $\|L_1(.,r;f)\|_{H^{\mu}} \le 8\|f\|_{H^{w}}\, r^{\alpha-\beta}$

(b) $\|L_2(.,r;f)\|_{H^{\mu}} \le \left[\frac{13}{2}+(2+\frac{2}{\pi^2})(\ln\pi)^{\beta}\right]\|f\|_{H^{w}}\,(r\ln(\frac{\pi}{r}))^{\alpha-\beta}$

(c) $\|L_3(.,r;f)\|_{H^{\mu}} \le (5+9\pi^{-\frac{1}{2}})\|f\|_{H^{w}}\, r^{\frac{\alpha-\beta}{2}}$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Sonuç 3.1.5: $w(t)=t^{\alpha}$, $\mu(t)=t^{\beta}$, $0<\beta\le\alpha\le 1$ $t\ge 0$ olmak üzere, $f\in \overline{H}^{w}$ ise o taktirde

(a) $\lim\limits_{r\to 0^+}\frac{\|L_1(.,r;f)\|_{\overline{H}^{\mu}}}{r^{\alpha-\beta}}=0$

(b) $\lim\limits_{r\to 0^+}\frac{\|L_2(.,r;f)\|_{\overline{H}^{\mu}}}{\left(r\ln(\frac{\pi}{r})\right)^{\alpha-\beta}}=0$

(c) $\lim\limits_{r\to 0^+}\frac{\|L_3(.,r;f)\|_{\overline{H}^{\mu}}}{r^{\frac{\alpha-\beta}{2}}}=0$

eşitlikleri geçerlidir.

3.2. Bir Fonksiyona Genelleştirilmiş Gauss Weierstrass Singüler İntegrali İle Yaklaşım Hızı

$f(x)$, $L_1(-\infty,\infty)$ uzayına ait integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki gibi tanımlanan $f(x)$'in genelleştirilmiş Gauss Weierstrass tek katlı integralinin yaklaşım hızını belirleyelim.

$s>0$ için

$$L(x,\xi;s)=\frac{s}{2\Gamma(\frac{1}{s})\xi^{\frac{1}{s}}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}\,dt \quad , \quad \xi^+\to 0 \qquad \textbf{(3.2.1)}$$

$$\varphi_x(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x) \qquad \textbf{(3.2.2)}$$

ve

$$\Phi(t)=\int_0^t \varphi_x(v)\,dv \qquad \textbf{(3.2.3)}$$

olsun.

Tanım 3.2.1: İntegrallenebilir bir f fonksiyonunun, $k(t)$ pozitif artan ve $\frac{k(t)}{t}$ azalan olmak üzere $k(t)$ sınıfına ait olabilmesi için aşağıdaki şartları sağlaması gerekir.

(a) $k(xy)=k(x)k(y)$

(b) $|f(x+t)-f(x)|=O(k(t))$

Eğer,

(i) $k(t)=t^{\alpha}$ $\quad 0<\alpha<1$ ise sınıfımız $lip\,\alpha$'ya indirgenir.

(ii) $k(t)=t^{\alpha-\frac{1}{p}}$ ve $f(x)\in L_p$ $\quad (p>1)$ ise sınıfımız $lip(\alpha,p)$'ya indirgenir.

(iii) $k(t)=\psi(t)t^{-\frac{1}{p}}$, ψ pozitif artan fonksiyon ve $f(x)\in L^p$ ise sınıfımız $(\psi(t),p)$ sınıfına indirgenir.

Buradaki amacımız, daha genel sınıftan olan $k(t)$'yi dikkate alarak $f(x)$'in genelleştirilmiş Gauss Weierstrass tek katlı integrallerinin yaklaşım hızını belirlemektir. Şimdi aşağıdaki teoremleri ispatlayalım.

Teorem 3.2.1 : $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$ olsun. $u\to 0$ için

$$\int_0^u [f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]dt = O\left(u^2k(u)\right)$$

ve $k(t)$

$$\left(\frac{t_0}{\xi^{\frac{1}{s}}}\right)^2 \frac{k(t_0)}{k(\xi^{\frac{1}{s}})} e^{-\left(\frac{|t_0|}{\xi^{\frac{1}{s}}}\right)^s} = o(1) \quad \text{ve} \quad \frac{d}{dt}(t^2k(t)) = O(tk(t)) \qquad \textbf{(3.2.4)}$$

özelliklerini sağlasın. O taktirde $(0,\infty)$ aralığı $(0,t_0)$ ve (t_0,∞) olarak ayrılırsa

$$\left|L(x;\xi;s)-f(x)\right| = O(\xi^{\frac{1}{s}}k(\xi^{\frac{1}{s}}))\ ,\ \xi\to 0^+$$

olur.

İspat $\frac{s}{2\Gamma(\frac{1}{s})\xi^{\frac{1}{s}}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|t|^s}{\xi}}dt = 1$ dir. Gerçekten bu integralde

$\frac{t^s}{\xi}=u \ \Rightarrow\ t=(\xi u)^{\frac{1}{s}} \ \Rightarrow\ dt=\xi^{\frac{1}{s}}\frac{1}{s}u^{\frac{1}{s}-1}du$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{s})}\int_0^{\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{s}-1}du = 1$ elde edilir.

Şimdi $L(x;\xi;s)-f(x)$ farkını hesaplayalım.

$$L(x;\xi;s)-f(x)=\frac{s}{2\Gamma(\frac{1}{s})\xi^{\frac{1}{s}}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x+t)e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}dt-f(x)\frac{s}{2\Gamma(\frac{1}{s})\xi^{\frac{1}{s}}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}dt$$

$$=\frac{s}{2\Gamma(\frac{1}{s})\xi^{\frac{1}{s}}}\left[\int_{-\infty}^{0}f(x+t)e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}dt+\int_{0}^{\infty}f(x+t)e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}dt-2f(x)\int_{0}^{\infty}e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}dt\right]$$

yazabiliriz. Bu eşitlikteki $\int_{-\infty}^{0}f(x+t)e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}dt$ integralinde $t=-t$ değişken değiştirmesi

ve (3.2.2) den gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$L(x;\xi;s)-f(x)=\frac{s}{2\Gamma(\frac{1}{s})\xi^{\frac{1}{s}}}\int_{0}^{\infty}\varphi_x(t)e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}dt \qquad \textbf{(3.2.5)}$$

bulunur. Daha sonra her iki taraf $\xi^{\frac{1}{s}}k(\xi^{\frac{1}{s}})$ ile bölündüğünde

$$\frac{|L(x,\xi;s)-f(x)|}{\xi^{\frac{1}{s}}k(\xi^{\frac{1}{s}})}=\frac{s}{2\Gamma(\frac{1}{s})\xi^{\frac{2}{s}}k(\xi^{\frac{1}{s}})}\left[\int_{0}^{t_0}\varphi_x(t)e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}dt+\int_{t_0}^{\infty}\varphi_x(t)e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}dt\right]$$

ve (3.2.3) ifadesinden gelen $d(\Phi(t))=\varphi_x(t)\,dt$ eşitliğinden dolayı ise

$$=\frac{s}{2\Gamma(\frac{1}{s})\xi^{\frac{2}{s}}k(\xi^{\frac{1}{s}})}\left[\int_{0}^{t_0}e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}d(\Phi(t))+\int_{t_0}^{\infty}f(x+t)e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}dt\right.$$

$$\left.+\int_{t_0}^{\infty}f(x-t)e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}dt-2f(x)\int_{t_0}^{\infty}e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}dt\right]$$

$$\frac{|L(x,\xi;s)-f(x)|}{\xi^{\frac{1}{s}}k(\xi^{\frac{1}{s}})}=I_1+I_2+I_3+I_4$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi I_1 inceleyelim.

$$I_1=\frac{s}{2\Gamma(\frac{1}{s})\xi^{\frac{2}{s}}k(\xi^{\frac{1}{s}})}\int_0^{t_0} e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}\,d(\Phi(t))$$

integralinde

$$e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}=u \qquad d(e^{\frac{-|t|^s}{\xi}})=du$$

$$d(\Phi(t))=dv \quad \Phi(t)=v$$

dönüşümleri yapılırsa

$$I_1=\frac{s}{2\Gamma(\frac{1}{s})\xi^{\frac{2}{s}}k(\xi^{\frac{1}{s}})}\left[e^{\frac{-|t_0|^s}{\xi}}\Phi(t_0)-\int_0^{t_0}\Phi(t)d(e^{\frac{-|t_0|^s}{\xi}})\right]$$

$$=I'_1+I''_1$$

bulunur. (3.2.4) ifadesinden

$$I_1^{'}=\frac{s}{2\Gamma(\frac{1}{s})}\left(\frac{t_0}{\xi^{\frac{1}{s}}}\right)^2\frac{k(t_0)}{k(\xi^{\frac{1}{s}})}e^{-\left(\frac{|t_0|}{\xi^{\frac{1}{s}}}\right)^s}\frac{\Phi(t_0)}{t_0^{\,2}k(t_0)}=o(1) \text{ olduğu görülür.}$$

Daha sonra $\Phi(t)=O\left(t^2k(t)\right)$ olduğundan dolayı

$$I_1^{''}\le-\frac{s}{2\Gamma(\frac{1}{s})\xi^{\frac{2}{s}}k(\xi^{\frac{1}{s}})}\int_0^{t_0}t^2k(t)d(e^{\frac{-|t|^s}{\xi}})$$

integralinde kısmi integrasyon kuralı uygulanırsa

$$t^2k(t)=u \qquad d(t^2k(t))=du$$

$$d(e^{\frac{-|t|^s}{\xi}})=dv \quad e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}=v \quad \text{olup}$$

$$I_1^{''}\le-\frac{s}{2\Gamma(\frac{1}{s})}\left(\frac{t_0}{\xi^{\frac{1}{s}}}\right)^2\frac{k(t_0)}{k(\xi^{\frac{1}{s}})}e^{-\left(\frac{|t_0|}{\xi^{\frac{1}{s}}}\right)^s}+\int_0^{t_0}e^{-\frac{|t|^s}{\xi}}d(t^2k(t))$$

olur. (3.2.4) den

$$I_1^{"} \le o(1) + \frac{s}{2\Gamma(\frac{1}{s})}\int_0^{t_0} \frac{e^{-\frac{|t|^s}{\xi}} tk(t)}{\xi^{\frac{1}{s}} k(\xi^{\frac{1}{s}})} d(\frac{t}{\xi^{\frac{1}{s}}})$$

şeklinde yazılabilir. Eğer yukarıdaki integralin yakınsak olduğu gösterilirse sınırlı olduğu gösterilmiş olur. Şimdi bu integralin yakınsak olduğunu gösterelim.

$$A = \frac{s}{2\Gamma(\frac{1}{s})}\int_0^{t_0} \frac{e^{-\frac{|t|^s}{\xi}} tk(t)}{\xi^{\frac{1}{s}} k(\xi^{\frac{1}{s}})} d(\frac{t}{\xi^{\frac{1}{s}}}) \quad \text{integralinde}$$

$$\frac{t}{\xi^{\frac{1}{s}}} = \sigma \text{ denirse } \quad dt = \xi^{\frac{1}{s}} d\sigma$$

$$A = \int_0^{\frac{t_0}{\xi^{\frac{1}{s}}}} \sigma k(\sigma) e^{-\sigma^s} d\sigma \qquad \xi \to 0^+$$

olur. $\xi \to 0^+$ için

$$\int_0^\infty \sigma k(\sigma) e^{-\sigma^s} d\sigma = \int_0^1 \sigma k(\sigma) e^{-\sigma^s} d\sigma + \int_1^\infty \sigma k(\sigma) e^{-\sigma^s} d\sigma$$

yazabiliriz. $k(\sigma)$ pozitif artan, $\frac{k(\sigma)}{\sigma}$ azalan olduğundan

$$\int_1^\infty \sigma k(\sigma) e^{-\sigma^s} d\sigma$$

integrali σ ile çarpıp bölünürse

$$\int_0^\infty \sigma k(\sigma) e^{-\sigma^s} d\sigma = k(1)\int_0^1 \sigma e^{-\sigma^s} d\sigma + k(1)\int_1^\infty \sigma^2 e^{-\sigma^s} d\sigma$$

şeklinde yazılabilir.

Toplamdaki birinci integral Reimann anlamında integrallenebilirdir. Dolayısıyla yakınsaktır. İkinci integralde karşılaştırma testinin limit formu kullanılırsa

$$\lim_{\sigma \to \infty} \frac{\sigma^4}{e^{\sigma}} = 0\,,\ p = 2 > 1$$

olduğundan yakınsak olduğu görülür. O taktirde

$$\int_0^{\infty} \sigma k(\sigma) e^{-\sigma^s} d\sigma$$

integrali de yakınsaktır. Dolayısıyla sınırlı olduğundan

$$\int_0^{\infty} \sigma k(\sigma) e^{-\sigma^s} d\sigma = O(1) \qquad \textbf{(3.2.6)}$$

şeklinde yazılabilir. O taktirde $I^{''}$ de

$$I^{''}{}_1 = o(1) + O(1)$$

$$I^{''}{}_1 = O(1)$$

şeklinde yazılabilir.

$$I_1 = I^{'}{}_1 + I_1^{''} \text{ olduğundan}$$

$$= o(1) + O(1)$$

$$= O(1) \quad , \quad \xi \to 0^+$$

olur. Şimdi I_2 yi inceleyelim.

$$I_2 = \frac{s}{2\Gamma(\frac{1}{s})\xi^{\frac{2}{s}} k(\xi^{\frac{1}{s}})} \int_{t_o}^{\infty} f(x+t) e^{\frac{-|t|^s}{\xi}} dt$$

Her iki tarafın mutlak değeri alınırsa

$$|I_2| \le \frac{s}{2\Gamma(\frac{1}{s})\xi^{\frac{2}{s}}k(\xi^{\frac{1}{s}})} e^{\frac{-|t_0|^s}{\xi}} \int_{t_0}^{\infty} |f(x+t)|dt$$

$$|I_2| \le \frac{sM}{2\Gamma(\frac{1}{s})} \left(\frac{t_0}{\xi^{\frac{1}{s}}} \right)^2 \frac{k(t_0)}{k(\xi^{\frac{1}{s}})\, t_0{}^2 k(t_0)} e^{-\left(\frac{|t_0|}{\xi^{\frac{1}{s}}}\right)^s} = o(1) \ , \ \xi \to 0^+$$

elde edilir. $I_3 = o(1)$ ispatı da I_2 daki gibi gösterilebilir.

Son olarak I_4 inceleyelim.

$$I_4 = \frac{s}{\Gamma(\frac{1}{s})\xi^{\frac{2}{s}}k(\xi^{\frac{1}{s}})} f(x) \int_{t_o}^{\infty} e^{\frac{-|t|^s}{\xi}} dt$$

ise

$$|I_4| \le \frac{s}{\Gamma(\frac{1}{s})\xi^{\frac{2}{s}}k(\xi^{\frac{1}{s}})} |f(x)| \int_{t_o}^{\infty} e^{\frac{-|t|^s}{\xi}} dt$$

$$\le \frac{s}{\Gamma(\frac{1}{s})t_0 k(t_0)} |f(x)| \int_{t_o}^{\infty} \frac{tk(t)e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}}{\xi^{\frac{2}{s}}k(\xi^{\frac{1}{s}})} dt$$

yazılabilir. Daha sonra bu integralde

$$\frac{t^s}{\xi} = v^s \ \Rightarrow . \ dt = \xi^{\frac{1}{s}} dv$$

değişken değiştirmesi yapılırsa

$$= \frac{s}{\Gamma(\frac{1}{s})t_0 k(t_0)} |f(x)| \int_{\frac{t_0}{\xi^{\frac{1}{s}}}}^{\infty} vk(v)e^{-v^s} dv$$

elde edilir. $\xi \to 0^+$ için

$\int_0^\infty vk(v)e^{-v^s}dv < \infty$ olduğu (3.2.6) da gösterilmişti. Dolayısıyla

$$I_4 = \frac{s}{\Gamma(\frac{1}{s})t_0 k(t_0)}|f(x)|\int_{\frac{t_0}{\xi^{\frac{1}{s}}}}^{\infty} vk(v)e^{-v^s}dv = o(1) \qquad .\xi \to 0^+$$

elde edilir. I_1, I_2, I_3 ve I_4 ü birleştirirsek

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = O(1) + o(1) + o(1) + o(1)$$

$$= O(1) \ , \ \xi \to 0^+$$

elde edilir. Böylece

$$|L(x;\xi;s) - f(x)| = O(\xi^{\frac{1}{s}}k(\xi^{\frac{1}{s}})) \ , \ \xi \to 0^+$$

gerçekleşir.

Teorem 3.2.2: $f(x) \in L_1(-\infty,\infty)$ olsun. $u \to 0^+$ için

$$\int_0^u \lambda(t)dt = O(u^2 k(u)) \ \text{ ve } \ \lambda(t) = \int_{-\infty}^{\infty}|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|dx$$

ise $k(t)$'nin (3.2.4) şartlarını sağlaması durumunda

$$\int_{-\infty}^{\infty}|L(x;\xi;s) - f(x)|dx = O(\xi^{\frac{1}{s}}k(\xi^{\frac{1}{s}})) \ , \ \xi \to 0^+$$

olur.

İspat (3.2.5) ifadesinden dolayı

$$|L(x;\xi;s) - f(x)| \le \frac{s}{2\Gamma(\frac{1}{s})\xi^{\frac{1}{s}}}\int_0^\infty |\varphi_x(t)|e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}dt$$

yazılabilir. Daha sonra her iki taraf $\xi^{\frac{1}{s}}k(\xi^{\frac{1}{s}})$ ile bölünürse

$$\frac{1}{\xi^{\frac{1}{s}}k(\xi^{\frac{1}{s}})}\int_{-\infty}^{\infty}|L(x;\xi;s)-f(x)|dx \le \frac{s}{2\Gamma(\frac{1}{s})\xi^{\frac{2}{s}}k(\xi^{\frac{1}{s}})}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}|\varphi_x(t)|e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}dtdx$$

$$=\frac{s}{2\Gamma(\frac{1}{s})\xi^{\frac{2}{s}}k(\xi^{\frac{1}{s}})}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}|\varphi_x(t)|e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}dxdt$$

$$=\frac{s}{2\Gamma(\frac{1}{s})\xi^{\frac{2}{s}}k(\xi^{\frac{1}{s}})}\int_{0}^{\infty}e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}dt\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi_x(t)|e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}dx$$

$$=\frac{s}{2\Gamma(\frac{1}{s})\xi^{\frac{2}{s}}k(\xi^{\frac{1}{s}})}\int_{0}^{\infty}e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}\lambda(t)\,dt$$

elde edilir. Teorem 3.2.1 ispatındaki gibi

$\int_0^t \lambda(s)ds = \Phi(t)$ denirse $\Phi(t) = O(t^2k(t))$ olur. O taktirde

$$\frac{s}{2\Gamma(\frac{1}{s})\xi^{\frac{2}{s}}k(\xi^{\frac{1}{s}})}\int_{0}^{\infty}e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}\lambda(t)\,dt = \frac{s}{2\Gamma(\frac{1}{s})\xi^{\frac{2}{s}}k(\xi^{\frac{1}{s}})}\left[\int_{0}^{t_0}e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}d(\Phi(t))+\int_{t_0}^{\infty}\lambda(t)e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}dt\right]$$

$$=I_1+I_2$$

şeklinde yazılabilir.

I_1 için

$$I_1=\frac{s}{2\Gamma(\frac{1}{s})\xi^{\frac{2}{s}}k(\xi^{\frac{1}{s}})}\int_{0}^{t_0}e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}d(\Phi(t))$$

olup,

$$I_1 = O(1) \quad , \quad \xi \to 0^+$$

olduğu önceki teoremden görülebilir. I_2 ise

$$I_2 = \frac{s}{2\Gamma(\frac{1}{s})\xi^{\frac{2}{s}} k(\xi^{\frac{1}{s}})} \int_{t_0}^{\infty} \lambda(t) e^{\frac{-|t|^s}{\xi}} dt$$

$$\leq \frac{sM}{2\Gamma(\frac{1}{s}) t_0 k(t_0)} \int_{t_0}^{\infty} \frac{tk(t)}{\xi^{\frac{2}{s}}} \frac{e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}}{k(\xi^{\frac{1}{s}})} dt$$

$$\frac{t}{\xi^{\frac{1}{s}}} = \sigma \Rightarrow dt = \xi^{\frac{1}{s}} d\sigma$$

$$I_2 \leq \frac{sM}{2\Gamma(\frac{1}{s}) t_0 k(t_0)} \int_{\frac{t_0}{\xi^{\frac{1}{s}}}}^{\infty} \sigma e^{-\sigma^s} k(\sigma) d\sigma = o(1) \qquad \xi \to 0^+$$

olur. I_1 ve I_2 yi birleştirirsek

$$I_1 + I_2 = O(1) + o(1)$$

$$= O(1) \qquad \xi \to 0^+$$

elde edilir. Böylece

$$\int_{-\infty}^{\infty} |L(x;\xi;s) - f(x)| dx = O(\xi^{\frac{1}{s}} k(\xi)) \quad , \qquad \xi \to 0^+$$

eşitliği gerçeklenmiş olur.

Teorem 3.2.3 : $f(x) \in L_1(-\infty,\infty)$ $\quad u \to 0$ için

$$\int_0^u [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)] dt = O(uk(u))$$

$k(t)$ ise

$$\left(\frac{t_0}{\xi^{\frac{1}{s}}}\right) \frac{k(t_0)}{k(\xi^{\frac{1}{s}})} e^{-\left(\frac{|t_0|}{\xi^{\frac{1}{s}}}\right)^s} = o(1) \quad \text{ve} \quad \frac{d}{dt}(tk(t)) = O(k(t)) \qquad \textbf{(3.2.7)}$$

özelliklerini sağlasın. O taktirde $(0,\infty)$ aralığını $(0,t_0)$ ve (t_0,∞) olarak ayırdığımızda

$$\left|L(x;\xi;s)-f(x)\right| = O(k(\xi^{\frac{1}{s}})) \quad , \quad \xi \to 0^+$$

olur.

İspat : (3.2.5) ifadesinden aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$L(x;\xi;s)-f(x) = \frac{s}{2\Gamma(\frac{1}{s})\xi^{\frac{1}{s}}}\int_0^\infty \varphi_x(t)e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}dt$$

Her iki taraf $k(\xi^{\frac{1}{s}})$ ile bölünürse

$$\frac{\left|L(x;\xi;s)-f(x)\right|}{k(\xi^{\frac{1}{s}})} = \frac{s}{2\Gamma(\frac{1}{s})\xi^{\frac{1}{s}}k(\xi^{\frac{1}{s}})}\left[\int_0^{t_0}\varphi_x(t)e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}dt + \int_{t_0}^\infty \varphi_x(t)e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}dt\right]$$

$$= \frac{s}{2\Gamma(\frac{1}{s})\xi^{\frac{1}{s}}k(\xi^{\frac{1}{s}})}\left[\int_0^{t_0} e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}d(\Phi(t)) + \int_{t_0}^\infty f(x+t)e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}dt\right.$$

$$\left.+\int_{t_0}^\infty f(x-t)e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}dt - 2f(x)\int_{t_0}^\infty e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}dt\right]$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

şeklinde yazılabilir. I_1 için

$$I_1 = \frac{s}{2\Gamma(\frac{1}{s})\xi^{\frac{1}{s}}k(\xi^{\frac{1}{s}})}\int_0^{t_0} e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}d(\Phi(t))$$

integralinde

$$e^{\frac{-|t|^s}{\xi}} = u \qquad d(e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}) = du$$

$$d(\Phi(t)) = dv \qquad\qquad \Phi(t) = v$$

dönüşümleri yapılırsa

$$I_1 = \frac{s}{2\Gamma(\frac{1}{s})\xi^{\frac{1}{s}}k(\xi^{\frac{1}{s}})}\left[e^{\frac{-|t_0|^s}{\xi}}\Phi(t_0) - \int_0^{t_0}\Phi(t)d(e^{\frac{-|t_0|^s}{\xi}})\right]$$

$$= I'_1 + I''_1$$

elde edilir.

$$I_1^{'} = \frac{s}{2\Gamma(\frac{1}{s})}\left(\frac{t_0}{\xi^{\frac{1}{s}}}\right)\frac{k(t_0)}{k(\xi^{\frac{1}{s}})}e^{-\left(\frac{|t_0|}{\xi^{\frac{1}{s}}}\right)^s}\frac{\Phi(t_0)}{t_0 k(t_0)} = o(1)$$ olduğu (3.2.7) ifadesinden

görülür. Daha sonra $\Phi(t) = O\big(tk(t)\big)$ olduğu için

$$I_1^{''} \le -\frac{s}{2\Gamma(\frac{1}{s})\xi^{\frac{1}{s}}k(\xi^{\frac{1}{s}})}\int_0^{t_0} tk(t)d(e^{\frac{-|t|^s}{\xi}})$$

integralinde

$$tk(t) = u \qquad d(tk(t)) = du$$

$$d(e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}) = dv \quad e^{\frac{-|t|^s}{\xi}} = v$$

dönüşümleri yapılırsa

$$I_1^{''} \le -\frac{s}{2\Gamma(\frac{1}{s})}\left(\frac{t_0}{\xi^{\frac{1}{s}}}\right)\frac{k(t_0)}{k(\xi^{\frac{1}{s}})}e^{-\left(\frac{|t_0|}{\xi^{\frac{1}{s}}}\right)^s} + \int_0^{t_0} e^{-\frac{|t|^s}{\xi}}d(tk(t))$$

olur. (3.2.7) den

$$I_1^{''} \le o(1) + \frac{s}{2\Gamma(\frac{1}{s})}\int_0^{t_0}\frac{e^{-\frac{|t|^s}{\xi}}k(t)}{\xi^{\frac{1}{s}}k(\xi^{\frac{1}{s}})}d(t) \qquad , \qquad \xi \to 0^+$$

bulunur. Eğer yukarıdaki integralin yakınsak olduğu gösterilirse sınırlı olduğu gösterilmiş olur. Şimdi bu integralin yakınsak olduğunu gösterelim.

$B = \dfrac{s}{2\Gamma(\frac{1}{s})} \displaystyle\int_0^{t_0} \frac{e^{-\frac{|t|^s}{\xi}} k(t)}{\xi^{\frac{1}{s}} k(\xi^{\frac{1}{s}})} d(t)$ integralinde $\dfrac{t}{\xi^{\frac{1}{s}}} = \sigma$ değişken değiştirmesi

yapılırsa,

$$B = \int_0^{\frac{t_0}{\xi^{\frac{1}{s}}}} k(\sigma) e^{-\sigma^s} d\sigma$$

elde edilir. $\xi \to 0^+$ için

$$\int_0^{\infty} k(\sigma) e^{-\sigma^s} d\sigma = \int_0^{1} k(\sigma) e^{-\sigma^s} d\sigma + \int_1^{\infty} k(\sigma) e^{-\sigma^s} d\sigma$$

şeklinde yazabiliriz. $k(\sigma)$ pozitif artan, $\dfrac{k(\sigma)}{\sigma}$ azalan olduğundan eşitliğin sağındaki

$$\int_1^{\infty} k(\sigma) e^{-\sigma^s} d\sigma$$

integrali σ ile çarpılıp bölünürse

$$\int_0^{\infty} k(\sigma) e^{-\sigma^s} d\sigma = k(1)\int_0^{1} e^{-\sigma^s} d\sigma + k(1)\int_1^{\infty} \sigma e^{-\sigma^s} d\sigma$$

şeklinde yazılabilir.

Birinci integral Reimann anlamında integrallenebilirdir. Dolayısıyla yakınsaktır. İkinci integralde karşılaştırma testinin limit formu kullanılırsa

$$\lim_{\sigma \to \infty} \frac{\sigma^3}{e^{\sigma}} = 0, \; p = 2 > 1$$

olduğundan yakınsak olduğu görülür. O taktirde

$$\int_0^{\infty} k(\sigma) e^{-\sigma^s} d\sigma$$

integrali de yakınsaktır. Dolayısıyla sınırlıdır. Buna göre

$$I''_1 = o(1) + O(1)$$

$$I''_1 = O(1).$$

olur. $I_1\, ve\, I_2$ yi birleştirirsek

$$I_1 = I'_1 + I''_1$$

$$= o(1) + O(1)$$

$$= O(1) \quad , \quad \xi \to 0^+$$

elde edilir. I_2 ise

$$I_2 = \frac{s}{2\Gamma(\frac{1}{s})\xi^{\frac{1}{s}}k(\xi^{\frac{1}{s}})}\int_{t_o}^{\infty} f(x+t)e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}dt$$

$$|I_2| \le \frac{s}{2\Gamma(\frac{1}{s})\xi^{\frac{1}{s}}k(\xi^{\frac{1}{s}})}e^{\frac{-|t_0|^s}{\xi}}\int_{t_0}^{\infty}|f(x+t)|dt \le \frac{sM}{2\Gamma(\frac{1}{s})}\left(\frac{t_0}{\xi^{\frac{1}{s}}}\right)\frac{k(t_0)}{k(\xi^{\frac{1}{s}})}e^{-\left(\frac{|t_0|}{\xi^{\frac{1}{s}}}\right)^s} = o(1)$$

$\xi \to 0^+$ için

olur. $I_3 = o(1)$ olduğuda I_2 daki gibi gösterilebilir. Şimdi I_4'ü inceleyelim.

$$I_4 = \frac{s}{\Gamma(\frac{1}{s})\xi^{\frac{1}{s}}k(\xi^{\frac{1}{s}})}f(x)\int_{t_o}^{\infty} e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}dt$$

$$|I_4| \le \frac{s}{\Gamma(\frac{1}{s})\xi^{\frac{1}{s}}k(\xi^{\frac{1}{s}})}|f(x)|\int_{t_o}^{\infty} e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}dt \le \frac{s}{\Gamma(\frac{1}{s})t_0k(t_0)}|f(x)|\int_{t_o}^{\infty}\frac{tk(t)e^{\frac{-|t|^s}{\xi}}}{\xi^{\frac{1}{s}}k(\xi^{\frac{1}{s}})}dt$$

$\frac{t^s}{\xi} = v^s \Rightarrow .\ dt = \xi^{\frac{1}{s}}dv$ değişken değiştirmesi yapılırsa

(3.2.6) ifadesinden

$$= \frac{s}{\Gamma(\frac{1}{s}) t_0 k(t_0)} |f(x)| \int_{\frac{t_0}{\xi^{\frac{1}{s}}}}^{\infty} k(v) e^{-v^s} dv = o(1)$$

olduğu görülür. Sonuç olarak

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = O(1) + o(1) + o(1) + o(1)$$

$$= O(1) \qquad \xi \to 0^+$$

elde edilir. Böylece

$$|L(x;\xi;s) - f(x)| = O(k(\xi^{\frac{1}{s}})) \qquad \xi \to 0^+$$

gerçeklenir.

Teorem 3.2.4 : $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, $u \to 0$ için $\int_0^u \lambda(t)dt = O(uk(u))$ ve

$\lambda(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| dx$ ise $k(t)$ 'nin (3.2.4) şartlarını sağlaması

durumunda $\int_{-\infty}^{\infty} |L(x;\xi;s) - f(x)| dx = O(k(\xi)) \quad \xi \to 0^+$ dır.

İspat : $\varphi_x(t)$ üzerine $O(tk(t)$ koşulunu uygulayarak teorem (3.2.2) deki ispat gösterilebilir.

Sonuç: $k(t)$ ye farklı değerler verilerek aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir.

(i) $k(t) = t^{\alpha}$ ise o taktirde

$$|L(x;\xi;s) - f(x)| = O(\xi^{\frac{1+\alpha}{s}})$$

elde edilir.

(ii) $k(t) = t^{\alpha - \frac{1}{p}}$ ise o taktirde

$$|L(x;\xi;s) - f(x)| = O(\xi^{\frac{1}{s} + \frac{\alpha}{s} - \frac{1}{sp}})$$

elde edilir.

$(iii)\ k(t)=\psi(t)t^{-\frac{1}{p}}$ ise o taktirde $\left|L(x;\xi;s)-f(x)\right|=O(\xi^{\frac{1}{s}-\frac{1}{sp}}\psi(\xi^{\frac{1}{s}}))$ elde edilir.

4.TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada önce L_p uzayında Deltasal Çekirdekli lineer integral operatörünün yaklaşım özellikleri verilmiştir. Daha sonra normlu uzaylarda Picard, Poisson-Cauchy ve Gauss-Weierstrass singüler integralleri için yakınsama problemleri farklı normlarda incelenmiş ve Genelleştirilmiş Gauss-Weierstrass singüler integralinin yaklaşım hızı belirlenmiştir..

KAYNAKLAR

1. P. L. Butzer, R. J. Nessel, Fourier Analysis and Appoximation Volume 1, Technological University of Aachen, Newyork and London 1971

2. R. N. Mohapatra, R. S. Rodrigues, On the Rate of Convergence of Singular Integrals for Hölder continuous Functions, Math. Nachr.,**149**,117 (1990)

3. A. Khan, S.Umar, On the Order Of Approximation To A Function By Generalized Gauss Weierstrass Singular Integrals, **30,** 55, (1981)

4. J. Prestin, S. Prössdorf, Error Estimates in Generalized Trigonometric Hölder-Zygmund Norms, Z. Anal. und Anwend.,**9**,343 (1990)

5. B. Fırlej and L. Rempulska, On some Singülar İntegrals in Hölder spaces, Math. Nachr., **170,** 100, (1994)

6. H. H. Hacısalihoğlu, A. D. Hacıyev, Lineer Pozitif Operatörler Dizilerin Yakınsaklığı, Ankara 1995

7. A. D. Hacıyev, Deltasal Çekirdekli İntegral Operatörler Ailesi ve Yaklaşım Teorisi, Lisans üstü ders notları, Ankara Üniversitesi, Ankara 1999