KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ ANALİTİK FONKSİYONLAR İÇİN CAUCHY TİPİ İNTEGRALLER

BELGİN KARA AYTEKİN

HAZİRAN 2005

Fen Bilimleri Enstitü Müdürünün onayı

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak Matematik Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Bu tezi okuduğumuzu ve Yüksek Lisans tezi olarak bütün gerekliliklerini yerine getirdiğini onaylarız.

Jüri Üyeleri

Prof. Dr.Kerim KOCA

Yrd.Doç.Dr.Ali ARAL

Yrd.Doç.Dr.Ali OLGUN

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ ANALİTİK FONKSİYONLAR İÇİN CAUCHY TİPİ İNTEGRALLER

KARA AYTEKİN, Belgin

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman : Prof. Dr. Kerim KOCA

Haziran 2005, 65 Sayfa

Bu tez dört temel bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm Giriş ve Temel Kavramlardan oluşmaktadır. İkinci bölüm ise ‘’ Materyal ve Yöntemler ‘’ adı altında kompleks kısmi türev operatörlerinin elde edilişi ve düzlemde Gauss-Ostrogradski integral gösterimleri ortaya konmuştur . Üçüncü bölümde Genelleştirilmiş Analitik Fonksiyonlar İçin Cauchy Tipi İntegraller ele alınmıştır. Dördüncü bölümde Kompleks singüler integral operatörlerinin normları ve bu normlara göre çeşitli varlık ve yakınsaklıkları ile ilgili teoremler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Genelleştirilmiş analitik fonksiyonlar, Cauchy tipi integraller , Gauss-Ostrogradskı integral formülleri, T_D ve Π_D operatörleri.

ABSTRACT

GENERALİZED ANALYTİC FUNCTİONS FOR CAUCHY-TYPE İNTEGRALS

KARA AYTEKİN, Belgin

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Supervisor:Prof. Dr. Kerim Koca

Department of Mathematics, M. Sc. Thesis

June 2005, 65 pages

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, we give some background that we need in the rest of the thesis. In the second chapter, we describe how the operators of the complex partial derivatis have been obtained and Gauss-Ostrogradski integrals in plane are given. In the third chapter, Cauchy type integrals for generalized analytic functions have been studied. In the last chapter, the norm of complex singular integral operators and with respect to these norms, existance and convergence theorems are given.

Key Words : Generalized analytic functions , Cauchy-type integrals, Gauss-Ostrogradski integral formulas, T_D and Π_D operators.

TEŞEKKÜRLER

Tez çalışmalarım esnasında yardımlarını esirgemeyen Prof.Dr.Kerim KOCA’ya, çalışmalarımda yardımlarını gördüğüm Yrd.Doç.Dr.Ali OLGUN’a, Yrd.Doç.Dr.Ali ARAL’a, tezimin birçok aşamasında bana destek olan arkadaşım Diğdem BAYLAM’a ve her zaman yanımda olan anneme,babama ve eşime tesekkür ederim.

ŞEKİLLER DİZİNİ

ŞEKİL

İÇİNDEKİLER

1.GİRİŞ

Düzlemde kompleks sınır-değer problemleri incelenirken Cauchy tipi integrallerle karşılaşılır. Diğer taraftan singülerliğe sahip Cauchy tipi integrallerin varlığı (yakınsaklığı) sınır-değer probleminin çözümünün varlığı ile eşdeğerdir.

Bilindiği gibi analitik fonksiyonlarla genelleştirilmiş analitik fonksiyonlar arasında benzerlik nedeniyle bire-bir ilişki vardır. Yani w bir genelleştirilmiş analitik fonksiyon ise

$$w = \phi(z)e^{w(z)} \qquad \textbf{(1.1)}$$

gösterilimi mevcuttur ve burada $\phi(z)$ keyfi bir holomorf fonksiyon ve

$$w(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{A(\zeta)+B(\zeta)\dfrac{\overline{w(\zeta)}}{w(\zeta)}}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta \quad , \; \zeta = \xi + i\eta \qquad \textbf{(1.2)}$$

dir. Buradanda görüldüğü gibi (1.2) Cauchy tipi bir integraldir. (1.1) eşitliği benzerlik prensibi olarak isimlendirilir. Analitik fonksiyonların sağladığı kalitatif özellikler (1.1) bağıntısı yardımıyla genelleştirilmiş analitik fonksiyonlara taşınabilir. Bu özelliklerin başında Cauchy integral gösterilimi , serisel gösterilim , singülerlikler ve tipleri v.s. gelmektedir.

Holomorf fonksiyonlar için verilen rezidü teoremlerinden de bilindiği gibi Cauchy tipi integraller , integrali hesaplamadan sonucun elde edilmesini sağlar. Ayrıca Cauchy integral ve Cauchy türev formülleri analitik fonksiyonları karakterize eden önemli sonuçlardır. Benzer bağıntılar kompleks diferensiyel denklemler için de ortaya konabilir. Örneğin

$$w_{\bar{z}} = F(z, w, w_z) \; , \; z \in D \qquad \textbf{(1.3)}$$

formundaki bir kompleks diferensiyel denklem için

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint_{D}\frac{F(\zeta,w(\zeta),w_{\zeta}(\zeta))}{\zeta-z}\,d\xi\,d\eta \quad , \quad \zeta=\xi+i\eta \qquad \textbf{(1.4)}$$

Cauchy tipi integrallerle verilen çözüm gösterilimi mevcuttur. Eğer (1.3) denklemindeki bilinmeyen fonksiyonun ∂D sınırındaki bir değeri önceden uygun şekilde verilirse (1.4)'deki eğrisel integral bize holomorf bir fonksiyon verir.

Bu basit örnekten de görüldüğü gibi kompleks denklemler için sınır-değer problemleri incelendiğinde (1.4)'deki bölge integraline benzer integral tipleri ortaya çıkar. Ayrıca (1.4)'ün z 'ye göre türevi alınırsa bölge integrali

$$-\frac{1}{\pi}\iint_{D}\frac{F(\zeta,w(\zeta),w_{\zeta}(\zeta))}{(\zeta-z)^{2}}\,d\xi\,d\eta \qquad \textbf{(1.5)}$$

şeklinde kuvvetli singülerliğe sahip bir başka Cauchy tipi integrale dönüşür. Gerek (1.4)'de gerekse (1.5)'deki bölge integralleri singülerliğe sahip olup integrallerin mevcut olup olmadığı veya hangi uygun kuşullar altında mevcut olduğu problemin çözümünün varlığı için araştırılmalıdır.

Bu tezde (1.4) ve (1.5)'deki katlı integrallerinin varlığı T_D ve Π_D operatörleri ve bu operatörlerin normları yardımıyla incelenmektedir. Ayrıca düzgün sınırlı bir D bölgesinde

$$-\frac{1}{\pi}\iint_{D}\frac{f(\zeta)\,d\xi\,d\eta}{(z_1-\zeta)^{\alpha}\,(z_2-\zeta)^{\beta}}$$

tipindeki integralin mevcut olması için α ve β sabitlerinin ne olması gerektiği yine bu tezde ayrıntılı olarak ele alınmıştır.

1.1. Kaynak Özetleri

Bu tezin hazırlanmasında Almanca ve İngilizce yazılmış kitaplar ile makalelerden yararlanılmıştır. Önce 1. ve 2. numaralı kaynaklardan yararlanılarak temel tanım ve kavramlar ortaya konmuştur. Tezin esas kısmını oluşturan Cauchy tipi integraller , singülerlikler , operatör normları ve özellikleri için 2.,3.,4. ve 5. kaynaklardan yararlanılmıştır. Genelleştirilmiş Analitik Fonksiyonların sağladığı özel tipten bir kompleks diferansiyel denklem ve homogen olmayan Cauchy-Riemann sistemi konuları ise 6 numaralı kaynaktan öğrenilmiştir.

1.2. Çalışmanın Amacı

Tezin Giriş kısmında da bahsedildiği gibi tezin temel amacı zayıf ve kuvvetli singülerliğe sahip Cauchy tipi integrallerin yakınsaklığı incelenmektedir. Bu inceleme sırasında iki temel operatör olan T_D ve Π_D operatörleri ile karşılaşılmaktadır. Bu operatörlerin tanımlı olduğu $C_\lambda\left(\overline{D}\right), \left(0 < \lambda < 1\right)$ Hölder-sürekli fonksiyonlar uzayında verilen Hölder normuna göre sınırlılıkla ilgili temel Lemma ve Teoremler ortaya koymak tezin bir diğer amacıdır. Çünkü kompleks diferensiyel denklemler için verilen çeşitli sınır-değer problemlerinin çözümlerinin varlık ve tekliği değişik bölgelerde bu operatörlerin sınırlılığına bağlıdır.

Bu tez , kompleks diferensiyel denklemlerde incelenen Dirichlet Problemleri için bir temel kaynak oluşturacak niteliktedir ve bu konularda yapılabilecek bir doktora tezi için güvenilir bir altyapı oluşturmaktadır.

2.MATERYAL VE YÖNTEMLER

2.1. Temel Tanım ve Kavramlar

Reelde bilindiği gibi (a,b) de türevlenebilen

$$f:[\,a,b\,]\to\mathbb{R}$$
$$x\ \to y=f(x)$$

fonksiyonu için $x_0\in(a,b)$ noktasındaki lineerleştirilmesi

$$\widetilde{f}(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

ile verilir.Bu $\widetilde{f}(x)$ lineerleştirilmesi , $f(x)$ in grafiğinin $(x_0,f(x_0))$ noktasındaki teğet doğrusudur.

$D\subset\mathbb{C}$ alt bölge ; $f\in C^1(D)$; D , z -düzleminde bir bölge ve $z=x+iy$ olsun. D ‘ de $f=u+iv$ şeklinde kompleks değerli bir fonksiyon tanımlayalım. $f\in C^1(D)$ ve $z_0=x_0+iy_0\in D$ sabit bir nokta olsun. u ve v nin (x_0,y_0) noktasındaki lineerleştirilmesi sırasıyla

$$\widetilde{u}(x,y)=u(x_0,y_0)+u_x(x_0,y_0)(x-x_0)+u_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$\widetilde{v}(x,y)=v(x_0,y_0)+v_x(x_0,y_0)(x-x_0)+v_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

şeklindedir. Ayrıca $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial y}+i\dfrac{\partial v}{\partial y}$ yazılabilir. Benzer düşünceyle $f=u+iv$ fonksiyonunun $z_0=x_0+iy_0$ noktasındaki reel anlamda lineerleştirilmesi

$$\widetilde{f}(z)=f(z_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)(y-y_0) \qquad \textbf{(2.1)}$$

olarak verilir.

Diğer taraftan

$$z - z_0 = (x - x_0) + i(y - y_0)$$
$$\overline{z - z_0} = (x - x_0) - i(y - y_0)$$

dır. Son denklemlerin birbirleriyle toplanması ve çıkarılmasıyla

$$x - x_0 = \frac{1}{2}\left[(z - z_0) + \overline{(z - z_0)}\right]$$
$$y - y_0 = \frac{-i}{2}\left[(z - z_0) - \overline{(z - z_0)}\right]$$

yazılabilir. Bu değerler f 'nin $\tilde{f}$ lineerleştirilmesinde yerine yazılırsa

$$\tilde{f}(z) = f(z_0) + \frac{1}{2}\left[\ \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\ \right](z - z_0)$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\ \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\ \right]\overline{(z - z_0)} \qquad \textbf{(2.2)}$$

elde edilir. (2.1) de $x - x_0$ ve $y - y_0$ ın katsayıları f 'nin sırasıyla x ve y 'ye göre türevleri olduğuna dikkat edilirse, benzer olarak (2.2)'de $(z - z_0)$ ve $\overline{(z - z_0)}$ 'nin katsayıları sırasıyla $f(z)$'nin z ve $\bar{z}$ 'ye göre z_0 noktasındaki kompleks kısmî türevleri olarak değerlendirilir.

Yani daha genel olarak

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\ \frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\ \right) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\ \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\ \right) \qquad \textbf{(2.3)}$$

olur.

TANIM 2.1. : $$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\ \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\ \right) \ , \ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\ \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\ \right) \qquad \textbf{(2.4)}$$

Operatörlerine ***birinci basamaktan kompleks kısmî türev operatörleri*** denir.

(2.3) denklemlerinden

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= i\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(2.5)}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad ,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$$

yazılabilir.

Diğer taraftan (2.5)'den

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \qquad \textbf{(2.6)}$$

bağıntısı yazılabilir. Ayrıca (2.6)'nın eşleniği alınırsa

$$u_x - iv_x = \overline{(f_z)} + \overline{(f_{\bar{z}})} \qquad \textbf{(2.7)}$$

olur. (2.6) ile (2.7)'nin taraf tarafa bir toplanıp bir de çıkarılması ile

$$u_x = \frac{1}{2}\left[f_z + f_{\bar{z}} + \overline{(f_z)} + \overline{(f_{\bar{z}})}\right]$$
$$v_x = \frac{i}{2}\left[-f_z - f_{\bar{z}} + \overline{(f_z)} + \overline{(f_{\bar{z}})}\right]$$

bulunur ve böylece reel türevler kompleks türevler cinsinden elde edilmiş olur.

Benzer şekilde

$$u_y = \frac{i}{2}\left[f_z - f_{\bar{z}} - \overline{(f_z)} + \overline{(f_{\bar{z}})}\right]$$
$$v_y = \frac{1}{2}\left[f_z - f_{\bar{z}} + \overline{(f_z)} - \overline{(f_{\bar{z}})}\right]$$

olduğu kolayca görülebilir.

$$\begin{aligned} f &: D \to \mathbb{C} \\ & z \to w = f(z) \end{aligned}$$

ve $u, v : D \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f = u + iv$ kompleks değerli fonksiyonun eşleniğinin z 'ye göre türevi (2.3) denkleminden yararlanılarak;

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial x} - i\frac{\partial \overline{f}}{\partial y} \right) = \frac{1}{2}\left[u_x - iv_x - i(u_y - iv_y) \right] = \frac{1}{2}\left[u_x - v_y - i(u_y + v_x) \right] \quad \textbf{(2.8)}$$

şeklinde yazılabilir.

Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}\left[u_x + iv_x + i(u_y + iv_y) \right] = \frac{1}{2}\left[u_x - v_y + i(u_y + v_x) \right] \\ &= \frac{1}{2}\left[u_x - v_y + i(u_y + v_x) \right] \end{aligned} \quad \textbf{(2.9)}$$

olur. (2.9) bağıntısında her iki tarafın eşleniği alınırsa

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \right)} = \frac{1}{2}\left[u_x - v_y - i(u_y + v_x) \right] \quad \textbf{(2.10)}$$

elde edilir. (2.8) ile (2.10)'nun karşılaştırılmasıyla

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \right)} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial z}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde

$$\overline{\left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial z} \right)} = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$$

olduğu elde edilebilir.

Ayrıca

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial \overline{f}}{\partial x}+i\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}\right]=\frac{1}{2}\left[u_x-iv_x+i\left(u_y-iv_y\right)\right]=\frac{1}{2}\left[u_x+v_y+i\left(u_y-v_x\right)\right] \qquad \textbf{(2.11)}$$

yazılabilir. (2.11) ifadesinde her iki tarafın kompleks eşleniği alınırsa

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}\left[u_x+v_y-i\left(u_y-v_x\right)\right]$$

bulunur. Bunlar kompleks türevler ile reel türevler arasındaki temel bağıntılardır ve bunlar tezin diğer bölümlerinde kullanılacaktır.

2.2. Analitik Fonksiyonlar

f fonksiyonu bir z_0 noktasının bir komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

varsa , f fonksiyonu z_0 noktasında türevlenebilirdir denir ve

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

ile gösterilir. $z-z_0=h$ denirse yukarıdaki tanım

$$f'(z_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

ifadesine eşdeğer olur.

NOT: $f(z)$, x ve y bağımsız değişkenlerine göre ayrı ayrı kısmî türevlere sahip olduğu halde $f'(z)$ mevcut olmayabilir. Örneğin $f(z)=\overline{z}$ için $f(z)=x-iy$, $\frac{\partial f}{\partial x}=1$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-i$ kısmî türevlerine sahip olduğu halde $\frac{df}{dz}$ mevcut değildir.

TEOREM 2.1.: $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ fonksiyonu herhangi bir $z=x+iy$ noktasında türeve sahipse bu takdirde

$$f'(z)=u_x(x,y)+iv_x(x,y)=-iu_y(x,y)+v_y(x,y)$$

dır.

İSPAT: $f'(z)$ mevcut olsun. Bu durumda

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

dır. $h=r+is$ diyelim ve $s=0$ olsun. $h=r, h\to 0$ için $r\to 0$ olur. Böylece

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{\substack{r\to 0\\ s=0}}\left[\frac{u(x+r,y)-u(x,y)}{r}+i\frac{v(x+r,y)-v(x,y)}{r}\right]$$

$$=u_x+iv_x$$

dir. Şimdi $r=0$ olsun. $h=is$, $h\to 0$ için $s\to 0$ olacağından

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\lim_{\substack{s\to 0\\ r=0}}\left[\frac{u(x,y+s)-u(x,y)}{is}+i\frac{v(x,y+s)-v(x,y)}{is}\right]$$

$$=\frac{1}{i}u_y+v_y=-iu_y+v_y$$

dır. Böylece $u_x+iv_x=-iu_y+v_y$ elde edilir. Buradan

$$\left.\begin{aligned} u_x &= v_y \\ v_x &= -u_y \end{aligned}\right\}$$

yazılabilir.

TANIM 2.2.:

$$\left.\begin{aligned} u_x - v_y &= 0 \\ u_y + v_x &= 0 \end{aligned}\right\}$$

ifadesine u,v bilinmeyenlerine göre ***Cauchy-Riemann Denklemleri*** denir.

Cauchy- Riemann sistemi, birinci basamaktan reel kısmî türevli denklem sistemidir.

TANIM 2.3.:

a) Bir f kompleks fonksiyonu bir z_0 noktasının en az bir

$D(z_0,\delta)=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|<\delta\}$ komşuluğundaki bütün noktalarda türevlenebiliyorsa f fonksiyonuna z_0'da ***analitiktir*** denir.

b) Eğer bir f kompleks fonksiyonu bir D kümesinin bütün noktalarında analitikse f, D üzerinde ***analitiktir*** denir.

c) Bir f fonksiyonu $\mathbb{C}$'nin bütün noktalarında analitikse, f'ye ***tam (entire) fonksiyon*** denir.

Analitik fonksiyonlar ile ilgili aşağıdaki özellikler verilebilir:

1) z_0 noktasında analitik olan fonksiyon bu noktada türevlenebilirdir. Fakat tersinin doğru olması gerekmez. Örneğin, $f(z)=|z|^2$ fonksiyonu $z_0=0$'da türevlenebilir, fakat bu noktada analitik değildir. Çünkü $z_0=0$ hariç bu noktanın hiçbir komşuluğunda türevlenemez. Gerçekten de $f(z)=u+iv=x^2+y^2$ olduğundan $u=x^2+y^2, v=0$'dır. Buradan da $u_x=2x, u_y=2y, v_x=0, v_y=0$ olur ki Cauchy-Riemann eşitlikleri sadece $(x,y)=(0,0)$ noktasında gerçeklenir.

2) $f(z)$'nin ∞ daki analitikliği, $f\left(\frac{1}{z}\right)$'nin sıfırdaki analitikliği ile belirtilir.

3) f fonksiyonu bir z_0 noktasında analitikse z_0'ın bir komşuluğundaki tüm noktalarda analitiktir. Tanım 2.3.(a)'daki $D(z_0,\delta)$ komşuluğunda bulunan her z

için $D(z,\delta_1) \subset D(z_0,\delta)$ özelliğinde bir δ_1 vardır ve f , $D(z,\delta_1)$'de türevlenebilirdir, yani f, z'de analitiktir.

4) Bir f fonksiyonunun analitik olduğu noktaların kümesi açık kümedir,yani $A = \{z \in \mathbb{C} : f, z' de\, analitik\}$ kümesi açıktır. $z_0 \in A$ noktası için $D(z_0,\delta) \subset A$ olacak şekilde bir $D(z_0,\delta)$ komşuluğu vardır. Bu nedenle bazen, bir f fonksiyonunun analitikliği Tanım 2.3.(a)'daki gibi bir z_0 noktasında değil de bir açık $A \subset \mathbb{C}$ kümesinde tanımlanır.

5) ‘‘f, herhangi bir D kümesinde analitiktir’’ deniyorsa, gerçekten f bu D kümesini kapsayan açık bir A kümesinde analitik demektir. Örneğin , $f, D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$'de analitik deniyorsa, f bir $A = \{z : |z| < 1 + \varepsilon, \varepsilon > 0\}$ kümesinde analitiktir.

TANIM 2.4.: Bir f kompleks fonksiyonu, herhangi bir z_0 noktasının her komşuluğundaki bazı noktalarda analitik fakat z_0'da analitik değilse f'nin z_0'da ayrık ***aykırılığı (singülerliği) vardır*** denir.

A, B kümeleri $\mathbb{C}$'de açık, $f : A \to \mathbb{C}, g : B \to \mathbb{C}$ analitik ve $f(A) \subset B$ olsun. Bu durumda $F = gof$, A'da analitik ve $F'(z) = g'(f(z))f'(z)$'dir.

TEOREM 2.2.: $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ olsun. f'nin bir $z_0 = x_0 + iy_0$ noktasında analitik ve f'nin türevinin sürekli olması için gerek ve yeter koşul $z_0 = (x_0, y_0)$ noktasının bir $D(z_0,\delta)$ komşuluğunun bütün noktalarında, u_x, u_y, v_x, v_y kısmi türevlerinin var, sürekli ve bu komşulukta $u_x = v_y, v_x = -u_y$ Cauchy-Riemann sisteminin gerçeklenmesidir.

İSPAT: Bu teoremin ispatı 7. kaynağında vardır.

f bir D bölgesinde analitik olsun. Her $z \in D$ için $f'(z) = 0$ oluyorsa, f D'de sabittir.

f bir D bölgesinde analitik ve D üzerinde $f^{(n+1)}$ türevi var ve sıfır ise $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ şeklinde bir polinomdur.

Eğer f analitik ve $f = u + iv$ olmak üzere $u, v \in C^2(D)$ ise u ve v harmonik fonksiyonlardır. Yani

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \ , \ v_{xx} + v_{yy} = 0$$

Laplace Denklemlerini gerçekler. Ancak bunun karşıtı her zaman doğru değildir. Yani Laplace denkleminin u ve v gibi iki reel çözümü yardımıyla oluşturulan $f = u + iv$ fonksiyonu analitik olmayabilir.

TANIM 2.5.: u bir D bölgesinde harmonik olsun. Eğer D 'de tanımlanmış bir v harmonik fonksiyonu için $f = u + iv$, D'de analitik oluyorsa v ye u'nun ***harmonik eşleniği (konjugesi)*** denir.

TEOREM 2.3.: $f(z) = u + iv$ fonksiyonunun f_x ve f_y kısmi türevleri var ve sürekli olsun. $f(z) = u + iv$'nin analitik olması için gerek ve yeter koşul $f_{\bar{z}} = 0$ olmasıdır.

İSPAT:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(u + iv) + i\frac{\partial}{\partial y}(u + iv)\right] = \frac{1}{2}\left[u_x + iv_x + i\left(u_y + iv_y\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(u_x - v_y\right) + i\left(u_y + v_x\right)\right]$$

olduğundan

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \Leftrightarrow u_x - v_y = 0 \quad \text{ve} \quad u_y + v_x = 0$$

dır. Böylece ispat tamamlanır.

TANIM 2.6.: $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ ise bu durumda $f(z)$ ‘ye ***anti-analitik*** denir. $f(z)$ anti-analitik ise $\overline{f(z)}$ analitiktir.

2.3. Kompleks Düzlemde Eğriler ve Kompleks İntegraller

TANIM 2.7.:a) $[a,b] \subset \mathbb{R}$ aralığı verilsin ve

$$\begin{aligned} \gamma : [a,b] &\to \mathbb{C} \\ t &\to \gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan sürekli γ fonksiyonuna kompleks düzlemde bir eğridir denir. $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına γ eğrisinin sırasıyla ***başlangıç ve bitiş noktaları*** denir.

b) $\mathbb{C}$’de γ eğrisi verildiğinde $\gamma(a) = \gamma(b)$ oluyorsa ***eğriye kapalıdır*** denir.

c) $\mathbb{C}$’de verilen γ eğrisi her $t \in (a,b)$ için $\gamma'(t)$ türevine sahip ve sürekli ise $\gamma(t)$’ye ***türevlenebilir eğri*** denir.

d) $\gamma(t)$ türevlenebilir eğri olsun. Eğer $\left(her\ t \in (a,b)\ için\right)$ $\gamma'(t) \neq 0$ ise γ’ya ***düzgün (regüler) eğri*** denir.

e) $[a,b]$ aralığının sonlu çokluktaki noktaları hariç γ eğrisi türevlenebiliyor ve bu sonlu çokluktaki noktalarda γ’nın sağdan ve soldan türevi var ve bunlar $\gamma'(t)$’nin bu noktalardaki sağ ve sol limitlerine eşitse γ’ya $[a,b]$’da ***parçalı türevlenebilir eğri*** denir.

f) γ parçalı türevlenebilir olsun. Eğer her $t \in (a,b)$ için $\gamma'(t) \neq 0$ ise $\gamma(t)$'ye ***parçalı düzgün eğri*** denir.

g) $\gamma(t)$ eğrisi sadece $t_1 = t_2$ için $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ oluyorsa γ 'ya basit eğri denir. Basit eğrilere ***Jordan Eğrisi*** de denir. γ basit ve $\gamma(a) = \gamma(b)$ oluyorsa $\gamma(t)$'ye ***basit Jordan (kapalıJordan) eğrisi*** denir.

NOT: $\mathbb{C}$ kompleks düzlemindeki bir $\gamma(t)$ eğrisi bazen $z(t) = \gamma(t) = x(t) + iy(t)$ veya

$$\gamma : \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \qquad a \leq t \leq b$$

olarak yazılır.

Bir γ eğrisi verildiğinde, $z'(t_0) = \gamma'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$ türevi var ve $z'(t_0) \neq 0$ ise eğri $z_0 = z(t_0)$ noktasında bir teğete sahiptir.

TANIM 2.8.: Kendi kendini kesmeyen eğrilere ***basit eğri*** denir. Basit eğriler birebir ve sürekli fonksiyonlardır.

TANIM 2.9.: $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ $\qquad$ $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$

$t \to \gamma_1(t)$ $\qquad$ $t \to \gamma_2(t)$

eğrileri verilsin. γ_1 ile γ_2 ***toplamı (veya birleşimi)***

$$\gamma(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a,b] \\ \gamma_2(t) & t \in [c,d] \end{cases} \qquad t \to \gamma_1(t)$$

olarak tanımlanır (γ_1 ile γ_2 nin birbirine bitişik olması gerekmez .).

TANIM 2.10.: Bir $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eğrisinin tersi $-\gamma$ simgesi ile gösterilir ve $t \in [a,b]$ için $-\gamma(t) = \gamma(a+b-t)$'dir.

TANIM 2.11.: $z(t)=\gamma\ (t)=x(t)+iy(t)$, $0\le t\le 1$ eğrisi verilsin ve uç noktalar $z_0=z(0)$, $z_1=z(1)$ olsun. Eğer eğri üzerindeki noktalar z_0 'dan başlayarak t'ler arttıkça z_1 noktasına doğru hareket ediyorsa $\gamma(t)$'ye ***pozitif (saat yönünün tersi) yönde yönlendirilmiş eğri*** denir. Eğer eğri z_1'den başlamak üzere t'nin azalışına karşılık gelen sırada taranıyorsa bu durumda $\gamma(t)$'ye ***negatif (saat yönünde) yönde yönlendirilmiş eğri*** denir. Negatif yönde yönlendirilmiş eğriye $-\gamma(t)$ denirse $-\gamma(t)=z(-t)$, $-1\le t\le 0$ olur.

TANIM 2.12.: Sonlu sayıda γ_j , $j=1,2,...,n$ düzgün eğrileri verilmiş olsun. Eğer bütün $j=1,2,...,n-1$ değerleri için γ_j 'nin bitim noktası γ_{j+1}'in başlangıç noktası ile çakışıyorsa, γ eğrisine ***çevre (parçalı-düzgün eğri)*** denir.

Özel olarak γ_1'in başlangıç noktası γ_n'nin bitiş noktası ile çakışıyorsa ***kapalı eğri*** denir.

Kompleks düzlemde kapalı bir eğri (kapalı basit Jordan eğrisi) düzlemi üç ayrı kümeye ayırır. Bunlar kapalı eğrinin sınırladığı alan, eğrinin üzeri ve kapalı eğrinin dışıdır. Bir iç noktayı bir dış noktaya birleştiren her Jordan eğrisi bir sınır noktası bulundurur. İç noktaların her çifti tamamen iç noktalardan oluşan bir Jordan eğrisi ile birleştirilebilir. Dış noktaların her çifti tamamen dış noktalardan oluşan bir Jordan eğrisi ile birleştirilebilir. İç noktaların kümesi sınırlı, dış noktaların kümesi sınırsızdır. Bu kompleks integral hesaplarında çok sık kullanılan bir özelliktir.

Denklemi $z(t)=x(t)+iy(t)$, $a\le t\le b$ olan bir γ eğrisi bir D bölgesinde bulunsun. $f:D\to\mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere $w(t)=f\big(z(t)\big)$ fonksiyonu $z(t)$ eğrisinin f altındaki görüntüsü adını alır.

$z(t)$ türevlenebilir bir eğri ve f analitikse $w(t) = f(z(t))$ türevlenebilirdir ve $w'(t) = f'(z(t))z'(t)$ 'dir.

$z(t)$ düzgün eğri, f analitik ve $f'(z(t)) \neq 0$ ise $w(t) = f(z(t))$'de düzgün bir eğridir. Çünkü $w'(t) = f'(z(t))z'(t) \neq 0$'dır.

Düzlemde gerek eğrisel, gerekse bölgesel kompleks integraller çok önemli uygulamalara sahiptir ve ilginç sonuçlar mevcuttur.

TANIM 2.13.: $f(z)$ ve $F(z)$ bir D bölgesinde tanımlanmış analitik fonksiyonlar olsun. Eğer $F'(z) = f(z)$ oluyorsa $F(z)$'ye $f(z)$'nin ***belirsiz integrali*** denir ve

$$\int f(z)dz = F(z)$$

olarak yazılır.

$f(z)$'nin belirsiz integrali tek değildir. Gerçekten F, $f(z)$'nin bir belirsiz integrali ise

$$\frac{d}{dz}\left[F(z)+c\right] = F'(z) = f(z)$$

olması nedeniyle $f(z)$'nin sonsuz çoklukta belirsiz integrali vardır. $c \in \mathbb{C}$ keyfi bir sabit olmak üzere

$$\int f(z)dz = F(z) + c$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned} h : [a,b] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t \quad &\rightarrow h\,(t) = u(t) + iv(t) \end{aligned}$$

eğrisi verilsin. Eğer u, v reel değerli fonksiyonları $[a,b]$'de integrallenebilir ise bu takdirde $h(t)$'nin $[a,b]$ aralığında integrali

$$\int_a^b h(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt$$

olarak tanımlanır.

$D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlanmış $f(z)$ kompleks fonksiyonunu göz önüne alalım. $f(z)$, D'de sürekli , $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ve $\gamma(\,[a,b]\,) \subset D$ özelliğine sahip türevlenebilir eğri ise bu takdirde $f(z)$'nin γ boyunca eğrisel integrali

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\,\gamma(t)\,)\,\gamma'(t)dt$$

olarak verilir. Eğer $\gamma(t)$ eğrisi türevlenebilir n- tane eğrinin uç uca birleştirilmesi ile oluşan bir eğri ise bu takdirde

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\,\gamma(t)\,)\,\gamma'(t)\,dt$$

olur.

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ fonksiyonunun γ üzerinden integrali çoğu zaman

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma [u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy] + i\int_\gamma [u(x,y)\,dy + v(x,y)\,dx]$$

olarak da verilebilir. Çünkü

$$f(z)\,dz = (u+iv)\,(dx+idy) = (u\,dx - v\,dy) + i\,(u\,dy + v\,dx)$$

yazılabilir.

TEOREM 2.4.: f ve g sürekli fonksiyonlar ve γ , γ_1 , γ_2 parçalı türevlenebilir eğriler olmak üzere

a) $\int\limits_{\gamma} \left(c_1\, f + c_2\, g\right) dz = c_1 \int\limits_{\gamma} f(z)\, dz + c_2 \int\limits_{\gamma} g(z)\, dz$

b) $\int\limits_{\gamma} f(z)\, dz = -\int\limits_{-\gamma} f(z)\, dz$

c) $\int\limits_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\, dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)\, dz$

dir.

İSPAT: İspat tanım kullanılarak doğrudan elde edilebilir.

TEOREM 2.5.: $\widetilde{\gamma}$, γ 'nin değişik bir gösterilim şekli olsun. Eğer $f(z)$, $\widetilde{\gamma}$ görüntüsünü içinde bulunduran bir D kümesi üzerinde sürekli ise bu takdirde

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\, dz = \int\limits_{\widetilde{\gamma}} f(z)\, dz$$

dir. Yani integralin değeri eğrinin gösterilim şeklinden bağımsızdır.

İSPAT: İspat tanım kullanılarak doğrudan elde edilebilir.

TANIM 2.14.: $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$

$$t \to \gamma\,(t) = x(t) + iy(t)$$

eğrisi verilsin.

$$L\,[\,\gamma\,] = \int_a^b |\,\gamma'\,(t)\,|\, dt = \int_a^b \sqrt{[\,x'\,(t\,)]^2 + [\,y'\,(t\,)]^2}\;\, dt$$

ifadesine γ ***eğrisinin uzunluğu*** denir.

2.4.Genelleştirilmiş Analitik Fonksiyonlar

$$\left.\begin{aligned} u_x - v_y &= au + bv \\ u_y + v_x &= cu + dv \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(2.12)}$$

reel sistemini göz önüne alalım. Bu sisteme ***Genelleştirilmiş Homogen Olmayan Cauchy Riemann Sistemi*** denir.

İkinci denklemi i ile çarpıp taraf tarafa toplar, sonra iki ile böler ve $w = u + iv$, $\overline{w} = u - iv$ bağıntılarını da kullanırsak,

$$w_{\bar{z}} = Aw + B\overline{w} \qquad \textbf{(2.13)}$$

kompleks diferansiyel denklemi elde edilir. Burada

$$A = \frac{1}{4}\left[a + d + ic - ib\right] \quad , \quad B = \frac{1}{4}\left[a - d + ic + ib\right]$$

dir.

TANIM 2.15.: (2.13) denkleminin çözümlerine ***Genelleştirilmiş Analitik Fonksiyonlar*** denir ve bu denkleme de çoğu zaman Vekua denklemi adı verilir.

(2.13) denkleminin çözümleri

$$w(z) = \Phi(z) - \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{A(\zeta)w(\zeta) + B(\zeta)\overline{w}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta \quad ; \quad \zeta = \xi + i\eta$$

şeklinde bir gösterilime sahiptir. Burada Φ keyfi holomorf bir fonksiyon ve $A, B \in L_p(D)$, $p > 2$ dir. Eğer çözümün ∂D sınırındaki değeri

$$w\big|_{\partial D} = \varphi$$

şeklinde verilmişse Φ holomorf fonksiyonu

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

şeklinde hesaplanabilir. Böylece çözüm

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint_{D}\frac{A(\zeta)w(\zeta)+B(\zeta)\overline{w(\zeta)}}{\zeta-z}\,d\xi\,d\eta \qquad \textbf{(2.14)}$$

olur.

$D\subset\mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere $\overline{D}$ bölgesinde tanımlanmış bir $f(z)$ fonksiyonu her $z_1\,,z_2\in\overline{D}$ için

$$|\,f(z_2)-f(z_1)\,|\le H\,|\,z_2-z_1|^{\lambda}\ ,\ 0<\lambda\le 1 \qquad \textbf{(2.15)}$$

eşitsizliğini sağlasın. Burada H ve λ pozitif sabitlerdir ve bu sabitler z_1 ve z_2'nin seçiminden bağımsızdırlar. (2.15) eşitsizliğini sağlayan H sabitlerinin en küçüğünü veya infimumunu $H(f)$, $H(f,\lambda)$ veya $H(f,\lambda,\overline{D})$ ile gösterelim.Bu sayı tek olup $f(z)$ fonksiyonuna ilişkin ***Hölder Sabiti*** adını alır. Böylece

$$H(f)\equiv H(f,\lambda,\overline{D})=\sup_{z_1,z_2\in\overline{D}}\frac{|\,f(z_2)-f(z_1)\,|}{|\,z_2-z_1\,|^{\lambda}} \qquad \textbf{(2.16)}$$

olmak üzere

$$|\,f(z_2)-f(z_1)|\le H(f,\lambda,\overline{D})|z_2-z_1|^{\lambda}\ ,\ 0<\lambda\le 1 \qquad \textbf{(2.17)}$$

yazılabilir. (2.17) eşitsizliği, $H(f,\lambda,\overline{D})$ sabitinden daha küçük bir H_1 sabiti için artık geçerli değildir. (2.17) eşitsizliğini sağlayan fonksiyonların kümesini $C_\lambda(\overline{D})$ ile gösterelim. Burada λ sabiti $C_\lambda(\overline{D})$ sınıfındaki tüm fonksiyonlar için aynıdır.

TANIM 2.16.: (2.17) eşitsizliğine Hölder-koşulu ve bu eşitsizliği sağlayan fonksiyonlara da ***Hölder-sürekli fonksiyon*** denir.

Bazen $C_\lambda(\overline{D})$ sınıfı yerine $Lip(\lambda,\overline{D})$ gösterilim şekli de kullanılır. (2.17) eşitsizliğini sağlayan ve $\overline{D}$'da sınırlı olan fonksiyonların kümesini $H_\lambda(\overline{D})$ ile gösterelim. Bu durumda λ sabiti ***Hölder-Üsteli*** adını alır. Genelde $H_{\lambda}(\overline{D}) \subset C_{\lambda}(\overline{D})$'dır. Ancak D bölgesi sınırlı ise $C_{\lambda}(\overline{D}) \equiv H_{\lambda}(\overline{D})$'dır. Diğer bir ifadeyle genel olarak $C_{\lambda}(\overline{D})$ sınıfından olan bir fonksiyon $H_{\lambda}(\overline{D})$ sınıfından olmayabilir. Örneğin $\mathbb{C}$'de $f(z) = |z|^{\lambda}$ fonksiyonu Hölder-sürekli olup $C_{\lambda}(\overline{D})$ sınıfındandır. Ancak $f(z)$, $\mathbb{C}$'de sınırsız olduğundan $H_{\lambda}(\overline{D})$ sınıfına ait değildir.

Diğer taraftan

$$T_D : \ C_{\lambda}(\overline{D}) \to C_{\lambda}(\overline{D})$$
$$f \ \to T_D\,(f)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta$$

operatörünün tanımlarsak (2.13) denkleminin çözümleri kısaca

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + T_D\,(Aw + B\overline{w})(z) = \Phi(z) + T_D\,(Aw + B\overline{w})(z)$$

olarak yazılabilir. Ayrıca

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left[T_D f(z)\right] = f(z)$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left[T_D f(z)\right] = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\xi\, d\eta$$

özellikleri vardır. Şimdi

$$\left.\begin{aligned} u_x - v_y &= au + bv + f \\ u_y + v_x &= cu + dv + g \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(2.18)}$$

reel sistemini göz önüne alalım. Burada a, b, c, d, f, g D bölgesinde tanımlanmış Hölder-Sürekli reel değerli fonksiyonlardır.

TANIM 2.17.: (2.18) sistemine ***Homogen Olmayan Lineer Cauchy Riemann Sistemi*** denir.

Benzer işlemlerle (2.18) sisteminin

$$w_{\bar{z}} = Aw + B\overline{w} + F \quad , \quad w = u + iv \tag{2.19}$$

kompleks diferansiyel denklemine denk olduğu görülebilir. (2.19) denkleminin çözümleri de

$$w(z) = \Phi(z) + T_D(Aw + B\overline{w} + F)(z) \tag{2.20}$$

olur.

TEOREM 2.6.: $w(z)$ düzgün sınırlı bir D bölgesinde (2.13)'nin bir çözümü olsun. Ayrıca

$$g(z) = \begin{cases} A(z) + B(z)\dfrac{\overline{w(z)}}{w(z)} & , \quad w \neq 0 \\ 0 & , \quad w = 0 \end{cases} \tag{2.21}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu takdirde

$$w(z) = \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta \quad = -T_D g \tag{2.22}$$

olmak üzere

$$\Phi(z) = w(z)\, e^{-w(z)} \tag{2.23}$$

şeklinde tanımlanan Φ fonksiyonu holomorftur.

İSPAT: (2.23)'de türev alırsak

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\, e^{-w(z)} - \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\, w(z)\, e^{-w(z)} \\ &= e^{-w}\left(\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - w\,\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \right) \\ &= e^{-w}\left(-Aw - B\overline{w} + wg \right) \end{aligned}$$

elde edilir.

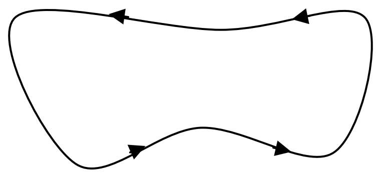
(2.21)’den dolayı

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} = 0$$

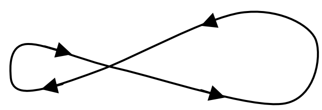
elde edilir. Böylece Φ holomorftur.

2.5. Kompleks Düzlemde Green-Gauss İntegral Formülleri

2.5.1. Düzlemde Reel Green-Gauss İntegral Formülleri



Şekil 2.1. Basit Eğri



Şekil 2.2. Basit Olmayan Eğri

Şekillerden de anlaşılacağı üzere basit kapalı $(\gamma(a) = \gamma(b)\,,\ a \le t \le b)$ eğri uç noktaları dışında kendisiyle kesişmez.

TEOREM 2.7.(Green Teoremi): D, $xy-$düzleminde bir basit bölge, γ’de bu bölgeyi çevreleyen ve saat yönünün ters yönünde yönlendirilmiş bir eğri olsun. P ve Q fonksiyonları D üzerinde sürekli türevlere sahip fonksiyonlar ise

$$\int_{\gamma} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy \qquad \textbf{(2.24)}$$

dir.

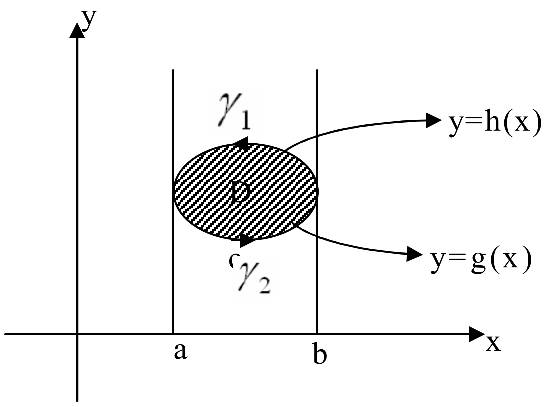
İSPAT: Teoremin ispatı için

$$\int_{\gamma} P(x,y)\,dx = -\iint_{D} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy \qquad \text{ve} \qquad \int_{\gamma} Q(x,y)\,dx = \iint_{D} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy$$

eşitliklerinin sağlandığını göstermek yeterlidir.

D bölgesi düzgün sınıra sahip bir bölge veya sonlu çoklukta düzgün eğrilerden oluşmuş olsun.

$\int\limits_{\gamma} P(x,y)\, dx = -\iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy$ olduğunu gösterelim.



Şekil 2.3. Basit Düşey Bölge

D bölgesi $y = g(x)$, $y = h(x)$ eğrileri ile sınırlanan bölge olsun (Şekil 2.3.).

γ eğrisi γ_1 ile γ_2 eğrilerinin birleşimidir.

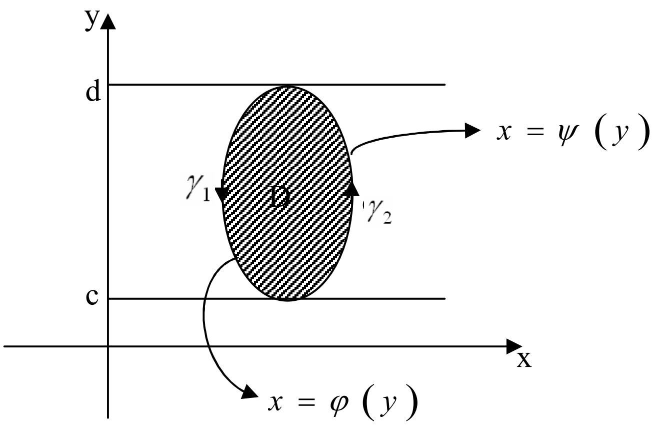
$$\iint\limits_{D} P_y(x,y)\, dx\, dy = \int\limits_{x=a}^{b} \int\limits_{y=g(x)}^{h(x)} P_y(x,y)\, dx\, dy = \int\limits_{a}^{b} P(x,h(x))\, dx - \int\limits_{a}^{b} P(x,g(x))\, dx$$

$$= -\int\limits_{\gamma_1} P(x,y)\, dx - \int\limits_{\gamma_2} P(x,y)\, dx = -\int\limits_{\gamma} P(x,y)\, dx$$

yazılabilir.Benzer şekilde

$$\int\limits_{\gamma} Q(x,y)\, dx = \iint\limits_{D} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy$$

olduğunu gösterelim.



Şekil 2.4. Basit Yatay Bölge

D bölgesi $x = \psi\,(y)$, $x = \varphi\,(y)$ eğrileri ile sınırlanan bölge ve $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ olsun (Şekil 2.4.). Bu durumda

$$\begin{aligned}
\iint_D Q_x(x,y)\,dx\,dy &= \int_{y=c}^{d} \int_{x=\varphi(y)}^{\psi(y)} Q_x(x,y)\,dx\,dy \\
&= \int_{y=c}^{d} Q(\psi\,(y),y)\,dy - \int_{y=c}^{d} Q(\varphi\,(y),y)\,dy \\
&= \int_{\gamma_2} Q(x,y)\,dy + \int_{\gamma_1} Q(x,y)\,dy \\
&= \int_{\gamma} Q(x,y)\,dy
\end{aligned}$$

elde edilir.

Bu iki eşitlikten

$$\int_{\gamma} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

Green Formülü bulunur.

TANIM 2.19.: (2.24) eşitliğine ***Reelde Green Formülü*** adı verilir.

2.5.2. Kompleks Düzlemde Gauss-Ostrogradski İntegral Formülleri

Reelde bölge integrallerini sınır integrallerine dönüştüren teoremler kompleks düzlemde de elde edilebilir.

Şimdi aşağıdaki teoremle bunu ifade edelim.

TEOREM 2.8.: $f \in C^1(D)$, $D \subset \mathbb{C}$ düzgün sınırlı bir bölge olmak üzere

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\, dx\, dy = \frac{1}{2i} \int_{\partial D} f(z) dz \quad , \iint_D \frac{\partial f}{\partial z}\, dx\, dy = -\frac{1}{2i} \int_{\partial D} f(z) d\bar{z}$$

dir (Gauss-Ostrogradski formüllerinin kompleks şekli).

İSPAT: $f(z) = u + iv$; $u, v : D \to \mathbb{R}$, $f, u, v \in C^1(D)$ olmak üzere Teorem 2.7'de P yerine u , Q yerine v yazalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} f(z) dz &= \int_{\partial D} (u + iv)(dx + idy) \\
&= \int_{\partial D} (udx - vdy) + i \int_{\partial D} (udy + vdx) \\
&= \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy + i \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy \\
&= \iint_D \left[-v_x - u_y + i(u_x - v_y) \right] dxdy \\
&= i \iint_D \left[iv_x + iu_y + u_x - v_y \right] dxdy \\
&= 2i \iint_D \frac{1}{2} \left[u_x - v_y + i(u_y + v_x) \right] dxdy \\
&= 2i \iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dxdy
\end{aligned}$$

olur.

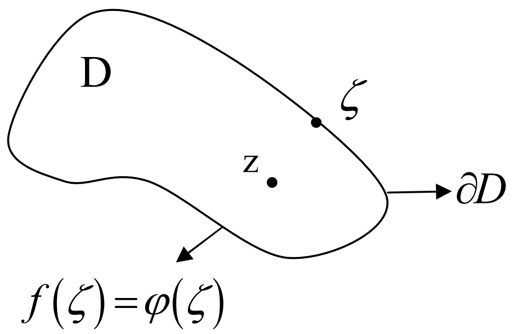
Böylece

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dxdy = \frac{1}{2i} \int_{\partial D} f(z) dz$$

elde edilir. Benzer şekilde diğeri de $d\bar{z} = dx - idy$ alınarak yapılır.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. Singülerliğe Sahip Katlı İntegraller İçin Sınırlandırmalar



Şekil 3.1. Sınırlı Kompleks Bölge

$f(z)$, D'de holomorf ∂D sınırında sürekli ve ∂D sınırında $f(z)$'nin değeri belli ise Cauchy integral formülü olarak bilinen

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \qquad \textbf{(3.1)}$$

ifadesi yazılabilir.

TANIM 3.1.: İntegral altında çarpan olarak $\dfrac{1}{(\zeta - z)^{\alpha}}$ şeklinde terim varsa bu tip integrallere ***Cauchy Tipi İntegraller*** denir.

Örneğin (3.1) ve (2.13) eşitlikleri Cauchy tipi integrallerdir.

TANIM 3.2.: Bir $w = f(z)$ fonksiyonu $D(z_0, r) - \{z_0\}$ delinmiş komşuluğunda analitik fakat z_0'da analitik değilse z_0'a $f(z)$'nin ***ayrık aykırı (singüler) noktası*** denir. Eğer $w = f(z)$ bir $D = \{\, z \in \mathbb{C} : |z| > r \,\}$ bölgesinde analitik fakat

$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$, $z_0 = 0$'da ayrık singülerliğe sahip ise $f(z)$, $z = \infty$'da ayrık singülerliğe sahiptir denir.

NOT: Analitik fonksiyonların ayrık olmayan singülerliği de olabilir. Örneğin $f(z) = \dfrac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}$ fonksiyonu $n \in Z$ olmak üzere $z = \frac{1}{n}$ noktalarında singülerliklere sahiptir. Özel olarak $z = 0$ seçersek bu ayrık olmayan bir aykırı noktadır. Çünkü n tamsayısı ne kadar büyük seçilirse seçilsin, $z = 0$'ın komşuluğunda bir başka aykırı nokta mutlaka vardır.

z_0 , $f(z)$'nin bir ayrık aykırı noktası olsun. Bu durumda $f(z)$, z_0'ın en az bir komşuluğunda

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

şeklinde Laurent Açılımına sahiptir.

TANIM 3.3.: Laurent Açılımda a_{-n} katsayılarının tümü sıfırsa bu takdirde z_0'a $f(z)$'nin ***kaldırılabilir ayrık aykırı noktası*** denir.

Laurent açılımında a_{-n} lerin sonlu tanesi hariç geri kalanların hepsi sıfır oluyorsa z_0'a $f(z)$'nin ***kutup yeri*** denir.

z_0 , $f(z)$'nin kutup yeri ise

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{k} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} \quad , \quad 1 \le n \le k$$

dir.

Eğer k, $a_{-k} \neq 0$ özelliğini sağlayan en büyük doğal sayı ise bu takdirde z_0'a $f(z)$'nin k - ***ıncı basamaktan kutup yeri*** denir. $k=1$ ise z_0 'a basit kutup yeri denir.

Laurent açılımında sonsuz çokluktaki a_{-n}'ler sıfırdan farklı ise z_0'a $f(z)$'nin ***esas ayrık noktası*** denir.

Bir $f(z)$ fonksiyonunun D bölgesindeki aykırılıkları sadece kutup noktaları ise $f(z)$'ye D'de ***meromorftur*** denir.

$f(z,\zeta)$ fonksiyonu D_ζ bölgesinde tanımlı olsun $(D_\zeta \subset \mathbb{C})$. Bundan sonra integraller ζ- düzleminin bir D_ζ bölgesi üzerinden hesaplanacaktır. Burada integrant ζ'nın dışında bir z parametresine de bağlıdır. Yani $\zeta = \xi + i\eta$ olmak üzere

$$F(z) = \iint_{D_\zeta} f(z,\zeta) d\xi \, d\eta$$

dir.

Eğer $f(z,\zeta)$, $\dfrac{1}{(\zeta - z)^\alpha}$ şeklinde singülerliğe sahipse ve başka singüler terim yoksa

$$f(z,\zeta) = \frac{f_1(z,\zeta)}{(\zeta - z)^\alpha}$$

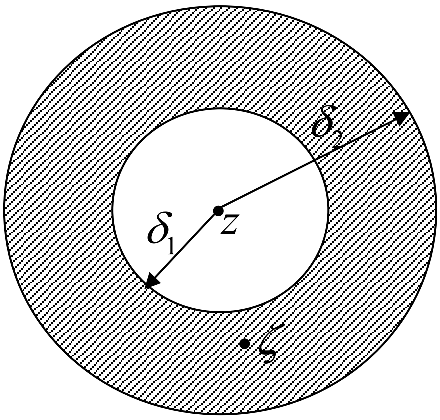
olacak şekilde singülerliği olmayan sürekli, sınırlı $f_1(z,\zeta)$ fonksiyonu vardır. $f_1(z,\zeta)$ sınırlı olduğundan her $z \in D_z$, $\zeta \in D_\zeta$ için

$$\left| f(z,\zeta) \right| = \left| \frac{f_1(z,\zeta)}{(\zeta - z)^\alpha} \right| = \frac{\left| f_1(z,\zeta) \right|}{\left| \zeta - z \right|^\alpha} \leq \frac{c}{\left| \zeta - z \right|^\alpha}$$

yazılabilir.Burada c bir sabit ve α negatif olmayan bir reel sayıdır.

TEOREM 3.1.: $f(z,\zeta)=\dfrac{f_1(z,\zeta)}{(z-\zeta)^{\alpha}}$ fonksiyonu verilsin. Bu takdirde $0\le\alpha<2$ ve $f_1(z,\zeta)$ her ζ, z için sınırlı ise sınırlı D_ζ bölgesi üzerinden $\iint\limits_{D_\zeta} f(z,\zeta)d\xi\, d\eta$ integrali mevcuttur ($\zeta=\xi+i\eta$).

İSPAT: $f(z,\zeta)$'nın $z=\zeta$'da singülerliği vardır. Şimdi $\delta_1<\delta_2$ olmak üzere z merkezli δ_1 ve δ_2 yarıçaplı diskleri gözönüne alalım. (Bakınız Şekil 3.2.) .



Şekil 3.2. Halkasal Bölge

D_ζ bölgesi olarak z merkezli δ_2 yarıcaplı diski alalım. Halkasal bölgeye $D_\zeta^{\,*}$ diyelim. Bu durumda

$$D_\zeta^{\,*}=D_\zeta-\left\{\zeta\in D_\zeta\ \middle|\ |z-\zeta|<\delta_1\right\}$$

$$\lim_{\delta_1\to 0} D_\zeta^{\,*}=D_\zeta$$

olur. Halkasal bölge üzerinden integral alınırsa,

$$\left| \iint_{D_\zeta^*} f(z,\zeta)\,d\xi\,d\eta \right| \leq \iint_{D_\zeta^*} \left| f(z,\zeta)\,d\xi\,d\eta \right|$$
$$= \iint_{\delta_1 \leq |\zeta - z| \leq \delta_2} \left| f(z,\zeta)\,d\xi\,d\eta \right|$$
$$= \iint_{\delta_1 \leq |\zeta - z| \leq \delta_2} \frac{|f_1(z,\zeta)|}{|\zeta - z|^\alpha}\,d\xi\,d\eta$$
$$\leq M \iint_{\delta_1 \leq |\zeta - z| \leq \delta_2} \frac{d\xi\,d\eta}{|\zeta - z|^\alpha}$$

olup buradan sağdaki integral için kutupsal koordinatları kullanırsak

$$\iint_{\delta_1 \leq |\zeta - z| \leq \delta_2} \frac{d\xi\,d\eta}{|\zeta - z|^\alpha} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=\delta_1}^{\delta_2} \frac{r\,dr\,d\theta}{r^\alpha}$$
$$= 2\pi \int_{\delta_1}^{\delta_2} r^{1-\alpha}\,dr$$
$$= 2\pi\,\frac{1}{2-\alpha}\,r^{2-\alpha}\Big|_{\delta_1}^{\delta_2}$$
$$= \frac{2\pi}{2-\alpha}\left[\delta_2^{\,2-\alpha} - \delta_1^{\,2-\alpha}\right]$$

bulunur. Böylece

$$\left| \iint_{D_\zeta^*} f(z,\zeta)\,d\xi\,d\eta \right| \leq \frac{2\pi M}{2-\alpha}\left[\delta_2^{\,2-\alpha} - \delta_1^{\,2-\alpha}\right] \tag{3.2}$$

elde edilir. Burada M, $|f_1(z,\zeta)| \leq M$ eşitsizliğini sağlayan bir pozitif reel sayıdır.

$\delta_1 \to 0$ için (3.2)'nin sağ tarafı mevcut olduğundan $\iint_{D_\zeta} f(z,\zeta)\,d\xi\,d\eta$ integrali vardır. Böylece $0 \leq \alpha < 2$ için $\delta_1 \to 0$ ise $\delta_1^{\,2-\alpha} \to 0$'dır. O halde $\left| \iint_{D_\zeta} f(z,\zeta)\,d\xi\,d\eta \right| \leq \frac{2\pi M}{2-\alpha}\,\delta_2^{\,2-\alpha}$ eşitsizliği var olduğundan $\iint_{D_\zeta} f(z,\zeta)\,d\xi\,d\eta$ integrali mevcuttur. Bu integral $z = \zeta$ olsa bile mevcuttur.

3.2. Ayrık Singülerliğe Sahip Fonksiyonların İntegralleri

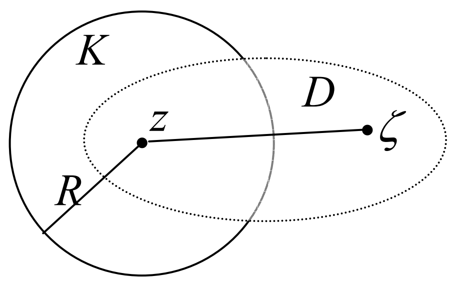
Bu kesimde Kompleks Diferensiyel Denklemler Teorisinde çok sık karşılaşılan bazı singüler integral tiplerini inceleyeceğiz.

TEOREM 3.2. (Schmidt Eşitsizliği) : $D \subset \mathbb{C}$ herhangi bir sınırlı bölge olmak üzere her $z \in \mathbb{C}$ için

$$\iint_D \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z|^\alpha} \le \frac{2\pi}{2-\alpha}\left(\frac{mD}{\pi}\right)^{1-\frac{\alpha}{2}} \quad , \quad 0 \le \alpha < 2 \qquad \textbf{(3.3)}$$

eşitsizliği mevcuttur.

İSPAT: $z \in D$ olmak üzere z merkezli R yarıçaplı bir K diskini; diskin alanı ile D bölgesinin alanı aynı olacak şekilde seçelim. Yani $\pi R^2 = mD$ olsun. (Bakınız Şekil 3.3.).



Şekil 3.3. Schmidt Eşitsizliği İle İlgili Bölge

Buradan

$R = \left(\dfrac{mD}{\pi}\right)^{1/2}$ olur. $\zeta \in D - K$ için $|\zeta - z| \ge R$ dir. Bu durumda

$$\frac{1}{|\zeta - z|^{\alpha}} \le \frac{1}{R^{\alpha}}$$

yazılabilir. D ve K bölgeleri aynı ölçüye sahip olduğundan $D-K$ ve $K-D$ bölgeleri de aynı ölçüye sahiptir. Böylece,

$$\begin{aligned}
\iint_{D} \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z|^{\alpha}} &= \iint_{D\cap K} \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z|^{\alpha}} + \iint_{D-K} \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z|^{\alpha}} \\
&\le \iint_{D\cap K} \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z|^{\alpha}} + \frac{1}{R^{\alpha}} \iint_{D-K} d\xi\, d\eta \\
&= \iint_{D\cap K} \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z|^{\alpha}} + \frac{1}{R^{\alpha}} \iint_{K-D} d\xi\, d\eta \\
&\le \iint_{D\cap K} \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z|^{\alpha}} + \iint_{K-D} \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z|^{\alpha}} \\
&= \iint_{K} \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z|^{\alpha}} \\
&= \int_{0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} \frac{1}{r^{\alpha}}\, r\, dr\, d\theta \\
&\le \frac{2\pi}{2-\alpha} R^{2-\alpha} \\
&= \frac{2\pi}{2-\alpha} \left(\frac{mD}{\pi} \right)^{1-\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}$$

olur. Burada r, θ ; $\zeta = z$ merkezli dairesel bölge için kutupsal koordinatlardır. Böylece teorem ispatlanmış oldu.

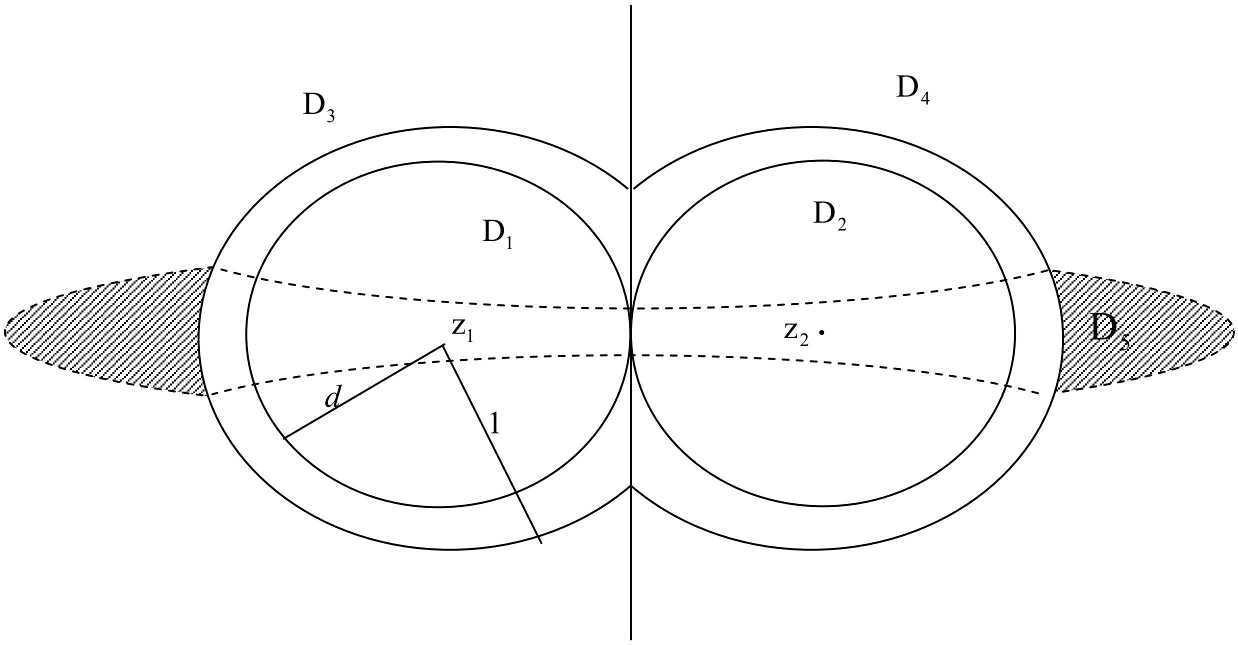
3.3. İntegrallenebilirlik İçin Gerekli Koşullar

Şimdi α , β reel sayılar ve $0 \le \alpha < 2$, $0 \le \beta < 2$ olmak üzere

$$J = \iint_D \frac{d\xi \, d\eta}{|\zeta - z_1|^{\alpha} \, |\zeta - z_2|^{\beta}} \qquad \textbf{(3.4)}$$

integrali için bir üst sınır bulmaya çalışalım. z_1 ve z_2 kompleks düzlemin farklı iki noktası ve $|z_1 - z_2| = 2\,d > 0$ olsun. $d < 1$ alalım.

D bölgesini, aşağıdaki gibi beş parçaya ayıralım:



Şekil 3.4. Cauchy Tipi İntegraller İçin Sınırlı Bölge

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \{\, \zeta \mid |\zeta - z_1| \le d \,\} \\
D_2 &= \{\, \zeta \mid |\zeta - z_2| \le d \,\} \\
D_3 &= \{\, \zeta \mid d \le |\zeta - z_1| \le 1 \,\} \quad ve \quad \{\, \zeta \mid |\zeta - z_1| \le |\zeta - z_2| \,\} \\
D_4 &= \{\, \zeta \mid d \le |\zeta - z_2| \le 1 \,\} \quad ve \quad \{\, \zeta \mid |\zeta - z_2| \le |\zeta - z_1| \,\} \\
D_5 &= \{\, \zeta \mid |\zeta - z_1| \ge 1 \,\} \qquad ve \quad \{\zeta \mid |\zeta - z_2| \ge 1 \,\}
\end{aligned}
$$

D_1'den D_4 'e kadar $\zeta \in D$ olması gerekmemektedir.

Şimdi

$$
J_i = \iint_{D_i} \frac{d\xi \, d\eta}{|\zeta - z_1|^{\alpha} \, |\zeta - z_2|^{\beta}} \quad , \quad i = 1,2,3,4,5
$$

integrallerini göz önüne alalım. Eğer J_i integrallerini sınırlayabilir ve

$$
J \le J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5
$$

olduğunu gösterirsek (3.4.) integralinin mevcut olduğunu göstermiş oluruz.

Bu sınırlandırma sırasında (r,θ) ; J_1 ve J_3'ün hesabında z_1 merkezli disk, J_2 ve J_4'ün hesabında z_2 merkezli dairesel disk için kutupsal koordinatlar olsun.

Böylece belirlenen bölgeler üzerinden ilgili integraller hesaplanırsa

J_1 için

$$
J_1 = \iint_{D_1} \frac{d\xi \, d\eta}{|\zeta - z_1|^{\alpha} \, |\zeta - z_2|^{\beta}} \le \frac{1}{d^{\beta}} \iint_{|\zeta - z_1| \le d} \frac{d\xi \, d\eta}{|\zeta - z_1|^{\alpha}} = \frac{1}{d^{\beta}} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{d} \frac{r \, dr \, d\theta}{r^{\alpha}} = \frac{2\pi}{2-\alpha} \, d^{2-\alpha-\beta}
$$

olur ve benzer yolla

$$
J_2 = \iint_{D_2} \frac{d\xi \, d\eta}{|\zeta - z_1|^{\alpha} \, |\zeta - z_2|^{\beta}} \le \frac{1}{d^{\alpha}} \iint_{|\zeta - z_2| \le d} \frac{d\xi \, d\eta}{|\zeta - z_2|^{\beta}} = \frac{1}{d^{\alpha}} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{d} \frac{r \, dr \, d\theta}{r^{\beta}} = \frac{2\pi}{2-\beta} \, d^{2-\alpha-\beta}
$$

elde edilir. J_3 için D_3 bölgesinde

$$\frac{1}{|\zeta - z_1|^{\alpha}\,|\zeta - z_2|^{\beta}} \leq \frac{1}{|\zeta - z_1|^{\alpha+\beta}}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Halkasal bölge üzerinden integral hesaplanırken

$$\{\zeta \,||\, \zeta - z_1| = |\zeta - z_2|\,\}$$

doğrusunu hariç tutarsak

$$J_3 = \iint_{D_3} \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z_1|^{\alpha}|\zeta - z_2|^{\beta}} \leq \iint_{D_3} \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z_1|^{\alpha+\beta}} \leq \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=d}^{1} \frac{r\, dr\, d\theta}{r^{\alpha+\beta}}$$
$$= \begin{cases} -2\pi \ln d & , \alpha+\beta = 2 \\ \dfrac{2\pi}{2-\alpha-\beta}\left(1-d^{2-\alpha-\beta}\right), & \alpha+\beta \neq 2 \end{cases}$$

elde edilir. Bu sınır J_4 için de geçerlidir.

D_5 bölgesinde $|\zeta - z_1| \geq 1$ ve $|\zeta - z_2| \geq 1$ olduğundan

$$J_5 = \iint_{D_5} \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z_1|^{\alpha}\,|\zeta - z_2|^{\beta}} \leq \iint_{D_5} d\xi\, d\eta = mD \leq mD$$

elde edilir. Böylece $J \leq J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5$ olur.

Şimdi bu sonuçları aşağıdaki teoremle özetleyelim:

TEOREM 3.3.:

a) Eğer $2d = |z_2 - z_1| < 2$ ve $\alpha + \beta \neq 2$ ise

$$\text{J} \leq 2\pi\left(\frac{1}{2-\alpha} + \frac{1}{2-\beta} - \frac{2}{2-\alpha-\beta}\right)\left(\frac{|z_2 - z_1|}{2}\right)^{2-\alpha-\beta} + \frac{4\pi}{2-\alpha-\beta} + mD$$

eşitsizliği geçerlidir.

b) $|z_1 - z_2| < 2$ ve $\alpha + \beta = 2$ ise

$$J \leq 2\pi\left(\frac{1}{2-\alpha} + \frac{1}{2-\beta}\right) - 4\pi \ln\left(\frac{|z_2 - z_1|}{2}\right) + mD$$

eşitsizliği geçerlidir.

c) $|z_2 - z_1| \geq 2$ ise

$$J \leq 2\pi\left(\frac{1}{2-\alpha}+\frac{1}{2-\beta}\right)\left(\frac{|z_2 - z_1|}{2}\right)^{2-\alpha-\beta} + mD$$

eşitsizliği geçerlidir.

NOT: $\alpha + \beta > 2$ ise o zaman $\dfrac{4}{2-\alpha-\beta} < 0$ olup bu durumda $|z_2 - z_1| < 2$ için

$\left(\dfrac{|z_2 - z_1|}{2}\right)^{2-\alpha-\beta} > 1$ eşitsizliği yazılabilir.

Böylece

$$-\frac{4\pi}{2-\alpha-\beta}\left(\frac{|z_2 - z_1|}{2}\right)^{2-\alpha-\beta} + \frac{4\pi}{2-\alpha-\beta} > 0$$

olur. Bu durumda J 'nin sınırlandırılmasındaki $\dfrac{4\pi}{2-\alpha-\beta}$ negatif terimi diğer bir terimle sınırlandırılmalıdır.

3.4. Genelleştirilmiş Cauchy İntegral Formülü

TANIM 3.4.: u, v reel değerli fonksiyonlar olmak üzere

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= g(x,y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= h(x,y) \end{aligned}\right\}$$

sistemine ***genelleştirilmiş homogen olmayan Cauchy Riemann sistemi*** denir.

Burada h, g önceden verilen x, y reel değişkenlerinin fonksiyonlarıdır. $w = u + iv$ olsun. Buradan ikinci denklemi i ile çarpıp taraf tarafa toplarsak verilen sistemi,

$$w_{\bar{z}} = f = \frac{g + ih}{2}$$

kompleks formda yazabiliriz.

$$w_z = \frac{1}{2}\left(w_x - iw_y\right) \ , \quad w_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(w_x + iw_y\right)$$

oldukları da göz önüne alınırsa

$$w_x = w_z + w_{\bar{z}} \quad , \ w_y = iw_z - iw_{\bar{z}} = i\left(w_z - w_{\bar{z}}\right)$$

olduğu görülebilir.

Eğer $w \in C^1(D)$ ve Φ, D'de holomorf bir fonksiyon ise

$$\left(\Phi w\right)_{\bar{z}} = \Phi w_{\bar{z}} \quad , \quad \left(\overline{\Phi} w\right)_z = \overline{\Phi} w_z$$

yazılabilir.

Şimdi $D \subset \mathbb{C}$ ve $w \in C^1\left(\overline{D}\right)$ olsun. Bu durumda Gauss-Ostrogradski formülü yardımıyla

$$\iint_D w_{\bar{z}} \ dx\, dy = \frac{1}{2i} \int_{\partial D} w(z)dz \quad , \quad \iint_D w_z \ dx\, dy = -\frac{1}{2i} \int_{\partial D} w(z)d\bar{z}$$

yazılabilir. Bu formüller $w \in C^1(\overline{D})$ ve w, $\overline{D}$ kapalı bölgede sürekli olduğu sürece geçerlidir.

ζ, D'nin sabit bir noktası ve

$$w(z) = \frac{w}{z - \zeta}$$

olsun. Burada

$$D_\varepsilon = \{\zeta \in D : |\zeta - z| > \varepsilon\} \subset D$$

ve

$$\iint_{D_\varepsilon} w_{\bar z}\ dx\ dy = \frac{1}{2i}\int_{\partial D_\varepsilon} w(z)dz = \frac{1}{2i}\int_{\partial D} w(z)dz - \frac{1}{2i}\int_{|z-\zeta|=\varepsilon} w(z)dz$$

dir. Ayrıca

$$w_{\bar z} = \frac{w_{\bar z}}{z-\zeta}$$

olduğu da göz önüne alınırsa

$$\iint_{D_\varepsilon} \frac{w_{\bar z}}{z-\zeta}\ dx\ dy = \frac{1}{2i}\int_{\partial D} \frac{w(z)}{z-\zeta} dz - \frac{1}{2i}\int_{|z-\zeta|=\varepsilon} \frac{w(z)}{z-\zeta}\ dz$$

elde edilir. Burada $\varepsilon \to 0$ için $D_\varepsilon \to D$ olur. Böylece

$$\iint_{D} \frac{w_{\bar z}}{z-\zeta}\ dx\ dy = \frac{1}{2i}\int_{\partial D} \frac{w(z)}{z-\zeta}\ dz - \frac{1}{2i}\,.\,2\pi\ iw(\zeta\ )$$

yazılabilir. Böylece

$$w(\zeta\ ) = \frac{1}{2\pi\ i}\int_{\partial D} \frac{w(z)}{z-\zeta} dz - \frac{1}{\pi}\iint_{D} \frac{w_{\bar z}}{z-\zeta}\ dx\ dy \quad , \quad z = x + iy$$

olarak veya benzer şekilde

$$w(\zeta\ ) = -\frac{1}{2\pi\ i}\int_{\partial D} \frac{w(z)}{z-\zeta} dz - \frac{1}{\pi}\iint_{D} \frac{w_{\bar z}}{\bar z-\bar\zeta}\ dx\ dy$$

yazılabilir.Bu özdeşlikler $w \in C(\overline{D}) \cap C^1(D)$ hipotezi altında elde edildi.

SONUÇ: Eğer $f \in C^1(D)$ ise $w_{\bar{z}} = f$ kompleks denkleminin çözümü

$$w(z) = \Phi(z) - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{f(\zeta\,)\, d\xi\, d\eta}{\zeta - z}$$

olur. Burada

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi\, i} \int_{\partial D} \frac{w(z)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

dır.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

4.1. Hölder Sürekli Fonksiyonlar Uzayı

LEMMA 4.1.: $f \in C_\lambda(\overline{D})$ olmak üzere

$$\|f\|_{C_\lambda(\overline{D})} = \max\left[\sup_D |f(z)| \quad , \quad \sup_{z_1 \neq z_2} \frac{|f(z_2) - f(z_1)|}{|z_2 - z_1|^\lambda}\right] \tag{4.1}$$

ifadesi $C_\lambda(\overline{D})$ sınıfında bir normdur.

İSPAT: (4.1) in normun bütün özelliklerini sağladığını gösterelim.

i) Eğer f özdeş olarak sıfır ise o zaman tanım gereğince $\|f\|_{C_\lambda(\overline{D})} = 0$'dır. Tersine $\|f\|_{C_\lambda(\overline{D})} = 0$ ise $\sup\limits_D |f(z)| = 0$ yani f özdeş olarak sıfırdır.

ii) c bir kompleks sabit ise (4.1.)'den

$$\|cf\|_{C_\lambda(\overline{D})} = \max\left[\sup_D |cf(z)| \quad , \quad \sup_{z_1 \neq z_2} \frac{|(cf)(z_2) - (cf)(z_1)|}{|z_2 - z_1|^\lambda}\right]$$

$$= |c| \max\left[\sup_D |f(z)| \quad , \quad \sup_{z_1 \neq z_2} \frac{|f(z_2) - f(z_1)|}{|z_2 - z_1|^\lambda}\right]$$

$$= |c| \, \|f\|_{C_\lambda(\overline{D})}$$

olur.

iii) Şimdi $f_1, f_2 \in C_\lambda(\overline{D})$ ise $\|f_1 + f_2\|_{C_\lambda(\overline{D})} \leq \|f_1\|_{C_\lambda(\overline{D})} + \|f_2\|_{C_\lambda(\overline{D})}$

olduğunu gösterelim.(4.1)'in tanımından $f \in C_\lambda(\overline{D})$ ise

$$|f(z)| \leq \|f\|_{C_\lambda(\overline{D})} \tag{4.2}$$

dır. Aynı zamanda

$$| f(z_2) - f(z_1)| \leq \|f\|_{C_\lambda(\overline{D})} |z_2 - z_1|^\lambda \qquad \textbf{(4.3)}$$

olduğu tanımdan görülebilir. f_1 ve f_2 $C_\lambda(\overline{D})$ sınıfından herhangi iki eleman olsun. (4.2)’den

$$|f_1 + f_2| \leq |f_1| + |f_2| \leq \|f_1\|_{C_\lambda(\overline{D})} + \|f_2\|_{C_\lambda(\overline{D})}$$

yazılabilir. Böylece

$$\sup_D |f_1 + f_2| \leq \|f_1\|_{C_\lambda(\overline{D})} + \|f_2\|_{C_\lambda(\overline{D})} \qquad \textbf{(4.4)}$$

olup (4.3) bağıntısının göz önüne alınmasıyla

$$\begin{aligned} |(f_1 + f_2)(z_2) - (f_1 + f_2)(z_1)| &= | f_1(z_2) + f_2(z_2) - f_1(z_1) - f_2(z_1) | \\ &\leq |f_1(z_2) - f_1(z_1)| + |f_2(z_2) - f_1(z_1)| \\ &\leq \|f_1\|_{C_\lambda(\overline{D})} |z_2 - z_1|^\lambda + \|f_2\|_{C_\lambda(\overline{D})} |z_2 - z_1|^\lambda \\ &= \left(\|f_1\|_{C_\lambda(\overline{D})} + \|f_2\|_{C_\lambda(\overline{D})}\right) |z_2 - z_1|^\lambda \end{aligned}$$

yazılabilir.Buradan

$$\frac{|(f_1 + f_2)(z_2) - (f_1 + f_2)(z_1)|}{|z_2 - z_1|^\lambda} \leq \|f_1\|_{C_\lambda(\overline{D})} + \|f_2\|_{C_\lambda(\overline{D})} \qquad \textbf{(4.5)}$$

olur. Bu eşitsizlik ise $f_1 + f_2$’nin $C_\lambda(\overline{D})$ sınıfına ait olduğunu gösterir. (4.4) ve (4.5)’in birlikte kullanılmasıyla

$$\|f_1 + f_2\|_{C_\lambda(\overline{D})} \leq \|f_1\|_{C_\lambda(\overline{D})} + \|f_2\|_{C_\lambda(\overline{D})}$$

olur. O halde (4.1), $C_\lambda(\overline{D})$’da bir norm tanımlar.

TEOREM 4.1.: (4.1) normuna göre $C_\lambda(\overline{D})$ bir Banach uzayıdır.

İSPAT: $C_\lambda(\overline{D})$ 'nin tamlığını göstermek için $C_\lambda(\overline{D})$ sınıfında bir $\{f_n\}_{n\in N}$ Cauchy dizisi seçelim. Cauchy dizisi tanımı gereğince her $n,k \geq n_0$ olduğunda

$$\|f_n - f_k\|_{C_\lambda(\overline{D})} < \varepsilon \tag{4.6}$$

olacak şekilde $n_0(\varepsilon)$ sayısı vardır. (4.2)'den $|f(z)| \leq \|f\|_{C_\lambda(\overline{D})}$ yazılabilir. O halde her $n,k \geq n_0$ için

$$|f_n(z) - f_k(z)| < \varepsilon \tag{4.7}$$

elde edilir. Bu ise $\{f_n\}_{n\in N}$ dizisinin D bölgesinde düzgün yakınsak olduğunu verir. O halde (4.7)'de n sabit tutulup $k \to \infty$ için limit alınırsa $n \geq n_0$ için

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \tag{4.8}$$

olacak şekilde sürekli bir f fonksiyonu bulabiliriz. (4.3)'den

$$|[f_n(z_2) - f_k(z_2)] - [f_n(z_1) - f_k(z_1)]| \leq \|f_n - f_k\|_{C_\lambda(\overline{D})} |z_2 - z_1|^\lambda$$

yazılabilir. (4.6)'dan

$$\|f_n - f_k\|_{C_\lambda(\overline{D})} < \varepsilon$$

olması nedeniyle

$$|[f_n(z_2) - f_k(z_2)] - [f_n(z_1) - f_k(z_1)]| < \varepsilon\, |z_2 - z_1|^\lambda$$

olur. n sabit tutulup $k \to \infty$ için limit alınırsa

$$|[f_n(z_2) - f(z_2)] - [f_n(z_1) - f(z_1)]| < \varepsilon\, |z_2 - z_1|^\lambda$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{|[f_n(z_2) - f(z_2)] - [f_n(z_1) - f(z_1)]|}{|z_2 - z_1|^\lambda} < \varepsilon \tag{4.9}$$

bulunur. Bu ise $f_n - f$ ve $f - f_n$ farklarının $C_\lambda(\overline{D})$ sınıfına ait olduğunu gösterir.Böylece $f - f_n + f_n = f$ fonksiyonu da $C_\lambda(\overline{D})$ sınıfına aittir. (4.8) ve (4.9) eşitlikleri birlikte kullanılırsa her $n \geq n_0$ için

$$\left\| f_n - f \right\|_{C_\lambda(\overline{D})} < \varepsilon$$

eşitsizliğinin gerçeklendiği görülür.Bu ise $\{f_n\}_{n\in N}$ dizisinin $C_\lambda(\overline{D})$'deki norma göre f'ye yakınsadığını gösterir.Böylece ispat tamamlanmış olur.

4.2. T_D Operatörünün Bir İleri Özelliği

Bu kesimde , Kesim 2.4'de tanımlanan T_D operatörünün bir ileri özelliğini ve normunu inceleyeceğiz.

$$\frac{\partial w}{\partial \overline{z}} = g$$

homogen olmayan Cauchy-Riemann denkleminin bir özel çözümü

$$w_0(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta \tag{4.10}$$

dir.

TEOREM 4.2.: $0 < \lambda < 1$ olması halinde T_D , $C_\lambda(\overline{D})$ sınıfından yine kendi içine dönüşen sınırlı bir operatördür.

İSPAT: $z \in \overline{D}$ herhangi bir nokta olsun. Bu durumda

$$T_D f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta \ , \ \zeta = \xi + i\eta$$

olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan

$$\frac{1}{\zeta - z_2} - \frac{1}{\zeta - z_1} = \frac{\zeta - z_1 - \zeta + z_2}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)} = \frac{z_2 - z_1}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)}$$

olması nedeniyle

$$T_D f(z_2) - T_D f(z_1) = -\frac{z_2 - z_1}{\pi} \iint_D \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)} d\xi \, d\eta$$

yazılabilir.Böylece (4.2) eşitsizliğinin de gözönüne alınmasıyla

$$\left| T_D f(z) \right| \leq \frac{\| f \|_{C_\lambda(\bar{D})}}{\pi} \iint_D \frac{1}{|\zeta - z|} d\xi \, d\eta \tag{4.11}$$

ve

$$\left| T_D f(z_2) - T_D f(z_1) \right| \leq \frac{\| f \|_{C_\lambda(\bar{D})}}{\pi} |z_2 - z_1| \iint_D \frac{d\xi \, d\eta}{|\zeta - z_1| \, |\zeta - z_2|} \tag{4.12}$$

elde edilir.Kesim 3.2'deki Teorem 3.2'de , $\alpha = 1$ alınırsa ve

$$K_1 = \frac{1}{\pi} 2\pi \left(\frac{mD}{\pi} \right)^{1/2}$$

denirse her $z \in \overline{D}$ için

$$\left| T_D f(z) \right| \leq K_1 \, \| f \|_{C_\lambda(\bar{D})} \tag{4.13}$$

olur.

Benzer şekilde $|z_2 - z_1| \leq 1$ kabul edilir ve Kesim 3.3.'deki Teorem 3.3'de, $\alpha = \beta = 1$ için yazılırsa K_2 , D 'nin alanına bağlı bir sabit olmak üzere

$$\iint_D \frac{d\xi \, d\eta}{|\zeta - z_1| \, |\zeta - z_2|} \leq K_2 - 4\pi \ln \frac{|z_2 - z_1|}{2}$$

yazılabilir.

Böylece (4.12)'den

$$\left| T_D f(z_2) - T_D f(z_1) \right| \leq \frac{1}{\pi} \left[K_2 \, |z_2 - z_1|^{1-\lambda} - 4\pi \, |z_2 - z_1|^{1-\lambda} \ln \frac{|z_2 - z_1|}{2} \right] \| f \|_{C_\lambda(\bar{D})} \, |z_2 - z_1|^{\lambda} \tag{4.14}$$

olur. $0 < \lambda < 1$ olması nedeniyle $1-\lambda > 0$ 'dır. O halde $\rho^{1-\lambda} \ln\dfrac{\rho}{2}$ ifadesi $\rho \to 0$ için sıfır limitine sahiptir. Böylece $\rho = |z_1 - z_2|$ olmak üzere herhangi z_1, z_2 için $0 < |z_2 - z_1| \le 1$ olduğu sürece (4.14) ifadesindeki

$$\frac{1}{\pi}\left[\, K_2\, |z_2 - z_1|^{1-\lambda} - 4\pi\, |z_2 - z_1|^{1-\lambda} \ln\frac{|z_2 - z_1|}{2} \,\right]$$

terimi sınırlıdır. Bu sınır K_3 ile gösterilirse o zaman (4.14) ifadesi

$$|T_D\, f(z_2) - T_D f(z_1)| \le K_3\ \|f\|_{C_\lambda(\overline{D})}\, |z_2 - z_1|^{\lambda} \qquad \textbf{(4.15)}$$

haline dönüşür. K_2 yalnızca D'ye bağlı olduğundan K_3'de D'ye bağlıdır. (4.15) eşitsizliği $|z_2 - z_1| \le 1$ varsayımı altında geçerlidir. Eğer $|z_2 - z_1| > 1$ ise $|z_2 - z_1|^{\lambda} > 1$ olacağından (4.13)'ün yani $|T_D f(z)| \le K_1\, \|f\|_{C_\lambda(\overline{D})}$ eşitsizliğinin göz önüne alınmasıyla

$$|T_D\, f(z_2) - T_D f(z_1)| \le |T_D\, f(z_2)| + |T_D\, f(z_1)| \le 2K_1\, \|f\|_{C_\lambda(\overline{D})} \le 2\mathrm{K}_1\, \|f\|_{C_\lambda(\overline{D})}\, |z_2 - z_1|^{\lambda} \qquad \textbf{(4.16)}$$

yazılabilir.Böylece $|z_2 - z_1| > 1$ olması halinde (4.16) eşitsizliği geçerlidir. O halde herhangi $z_1, z_2 \in \overline{D}$ için

$$|T_D\, f(z_2) - T_D f(z_1)| \le \max(2K_1, K_3)\ \|f\|_{C_\lambda(\overline{D})}\, |z_2 - z_1|^{\lambda} \qquad \textbf{(4.17)}$$

olur. Buradan

$$\frac{|T_D f(z_2) - T_D f(z_1)|}{|z_2 - z_1|^{\lambda}} \le \max(2K_1, K_3)\ \|f\|_{C_\lambda(\overline{D})}$$

bulunur. Bu ise $T_D f$'in tekrar $C_\lambda(\overline{D})$ sınıfına ait olduğunu gösterir. $f \in C_\lambda(\overline{D})$ olmak üzere

$$\|f\|_{C_\lambda(\overline{D})} = \max\left[\ \sup_D |f(z)| \quad , \quad \sup_{z_1 \neq z_2} \frac{|f(z_2) - f(z_1)|}{|z_2 - z_1|^\lambda}\ \right]$$

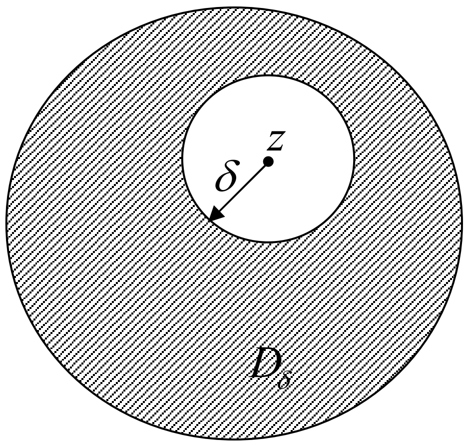
Hölder normuna dikkat edilirse (4.13) ve (4.17)'den

$$\|T_D f\|_{C_\lambda(\overline{D})} \leq \max\left(2K_1, K_3\right) \ \|f\|_{C_\lambda(\overline{D})} \tag{4.18}$$

olduğu görülür. Bu ise $C_\lambda(\overline{D})$ içine dönüşen T_D operatörünün sınırlı olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4.3. Π_D Operatörü

D, z-düzleminin sınırlı bir bölgesi ve D'nin sınırı yeterince düzgün olsun. $z \in D$ herhangi bir nokta olmak üzere z-merkezli δ-yarıçaplı diskin kapanışını D'den çıkaralım. δ'yı öyle belirleyelim ki bu disk tamamen D'nin içinde kalsın. Bu diski D'den çıkardıktan sonra geri kalan bölgeye D_δ diyelim.Bu durumda $\partial D_\delta = \partial D \cup \partial D_\delta(z)$ olur. Burada $\partial B_\delta(z) = \left\{\ \zeta \in \mathbb{C} \,\middle|\, |\zeta - z| = \delta\ \right\}$ dır (Bakınız Şekil 4.1).



Şekil 4.1. Gauss-Formülü İçin Sınırlı Bölge

Daha önce Teorem 2.8 ile verilen

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\, dx\, dy = \frac{1}{2i}\int_{\partial D} f(z)dz \quad , \quad \iint_D \frac{\partial f}{\partial z}\, dx\, dy = -\frac{1}{2i}\int_{\partial D} f(z)d\bar{z}$$

Gauss-Ostrogradski integral teoremi, D_ζ halkasal bölgesinde

$f(z)=\dfrac{\bar{\zeta}}{\zeta - z}$, $h(z)=\dfrac{\bar{\zeta}}{(\zeta - z)^2}$ olarak tanımlanan fonksiyonlar için kullanılırsa,

$$\left.\begin{aligned} &\iint_{D_\delta} \frac{1}{\zeta - z} d\xi\, d\eta = \frac{1}{2i}\int_{\partial D} \frac{\bar{\zeta}}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2i}\int_{\partial D_\delta(z)} \frac{\bar{\zeta}}{\zeta - z} d\zeta \\ &\text{ve} \\ &\iint_{D_\delta} \frac{1}{(\zeta - z)^2} d\xi\, d\eta = \frac{1}{2i}\int_{\partial D} \frac{\bar{\zeta}}{(\zeta - z)^2} d\zeta - \frac{1}{2i}\int_{\partial D_\delta(z)} \frac{\bar{\zeta}}{(\zeta - z)^2} d\zeta \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(4.19)}$$

olur.Burada

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} . \frac{\bar{\zeta}}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} . \frac{\bar{\zeta}}{(\zeta - z)^2} = \frac{1}{(\zeta - z)^2}$$

olduklarına dikkat edilmelidir.

(4.19)'daki birinci eşitliğin sağındaki ilk integrali

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{\bar{\zeta}}{(\zeta - z)} d\zeta = \psi(z) \qquad \textbf{(4.20)}$$

şeklinde yazalım.Bu durumda $\psi(z)$, D 'de holomorf bir fonksiyon olur ve

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{\bar{\zeta}}{(\zeta - z)^2} d\zeta = \psi'(z)$$

yazılabilir. Çünkü integralde $\bar{z}$ yok ve $\psi(z)$, D 'de holomorftur. Böylece (4.19)'un ikinci formülünün sağ tarafındaki ilk ifade için bir gösterilimi elde edilmiş oldu. (4.19)'daki ikinci formülün ikinci ifadesi için de şu lemmayı verelim:

LEMMA 4.2.: $k \geq 0$ bir tamsayı olmak üzere

$$\int_{\partial D_\delta(z)} \frac{\overline{\zeta}}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta = \begin{cases} 2\pi i \overline{z} & , \quad k = 0 \; için \\ 0 & , \quad k \geq 1 \; için \end{cases}$$

dır.

İSPAT: $\partial D_\delta(z)$ eğrisini pozitif yönde yönlendirelim ve

$$\zeta - z = \delta e^{i\theta} \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

konumunu yapalım. Buradan

$$\overline{\zeta} = \overline{z} + \delta e^{-i\theta} \quad , \quad d\zeta = i\delta e^{i\theta} d\theta$$

olması nedeniyle

$$I = \int_{\partial D_\delta(z)} \frac{\overline{\zeta}}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta = i \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\overline{z} + \delta e^{-i\theta}}{\delta^{k+1} \; e^{i(k+1)\theta}} \delta e^{i\theta} d\theta$$

$$= i \int_{\theta=0}^{2\pi} \left[\frac{\overline{z}}{\delta^k} e^{-ik\theta} + \frac{1}{\delta^{k-1}} e^{-i(k+1)\theta} \right] d\theta$$

yazılabilir. Öte yandan sıfırdan farklı ρ için

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{i\rho\theta} \; d\theta = -\frac{i}{\rho} e^{i\rho\theta} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

ve ($\rho = 0$ için)

$$\int_0^{2\pi} 1 \, d\theta = 2\pi$$

olup bu da Lemmanın doğruluğunu gösterir.

Bu lemmanın kullanılması ve (4.20)'nin de göz önüne alınmasıyla (4.19) bağıntılarından

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{\pi}\iint_{D_\delta}\frac{d\xi\, d\eta}{\zeta - z} &= \psi(z) + \overline{z} \\ -\frac{1}{\pi}\iint_{D_\delta}\frac{d\xi\, d\eta}{(\zeta - z)^2} &= \psi'(z) \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(4.21)}$$

bulunur. (4.21) eşitliklerinin sağ tarafları δ'dan bağımsız olup $\delta \to 0$ için $D_\delta \to D$ olması nedeniyle buradan

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{\pi}\iint_{D}\frac{d\xi\, d\eta}{\zeta - z} &= \psi(z) + \overline{z} \\ -\frac{1}{\pi}\iint_{D}\frac{d\xi\, d\eta}{(\zeta - z)^2} &= \psi'(z) \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(4.22)}$$

elde edilir. (4.21)'in sağ tarafları da δ'dan bağımsız olması nedeniyle özel olarak $\delta_1 \le |\zeta - z| \le \delta_2$ halkasal bölgeleri üzerinden integraller sıfırdır. Yani

$$\iint_{\delta_1 \le |\zeta - z| \le \delta_2}\frac{d\xi\, d\eta}{\zeta - z} = 0 \quad , \quad \iint_{\delta_1 \le |\zeta - z| \le \delta_2}\frac{d\xi\, d\eta}{(\zeta - z)^2} = 0 \qquad \textbf{(4.23)}$$

dır.($\zeta - z = |\zeta - z| e^{i\theta} = re^{i\theta}$, $d\xi\, d\eta = rdrd\theta$ olup halkasal bölge üzerinden integral alınırsa $\int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\theta = 0$, $n \in \mathrm{Z}$ olması nedeniyle (4.23)'ün sağlandığı doğrudan basit bir hesapla görülür.).

Diğer taraftan $0 \le \alpha < 2$ için

$$\iint_D \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z|^\alpha} \le \frac{2\pi}{2-\alpha}\left(\frac{mD}{\pi}\right)^{1-\frac{\alpha}{2}}$$

olması nedeniyle $\delta_1 < \delta_2$ olmak üzere sadece δ_2'nin yeterince küçük seçilmesiyle

$$\iint_{\delta_1 \le |\zeta - z| \le \delta_2}\frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z|}$$

integral değeri istenildiği kadar küçük yapılabilir. Ayrıca $r = |\zeta - z|$ olmak üzere

$$\iint_{\delta_1 \le |\zeta - z| \le \delta_2} \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z|^2} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=\delta_1}^{\delta_2} \frac{1}{r^2}\, r\, dr\, d\theta = 2\pi \ln\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)$$

olması nedeniyle integrantı $\dfrac{1}{|\zeta - z|^2}$ olan halkasal bölge üzerinden integral değeri, dış yarıçapın yeterince küçük seçilmesiyle δ_1 sabit kaldığı sürece yeterince küçük yapılabilir.

NOT: Eğer dış yarıçapı yeterince küçük olan halkasal bölge üzerinden hesaplanan integralde, integrant yeterince küçük oluyorsa bu durumda yeterince küçük ve dairesel olması gerekmeyen bir bölge üzerinden integral değeri de yeterince küçük yapılabilir.

Böylece $\zeta = z$ singüler noktasının bir dairesel komşuluğu üzerinden alınan integral ihmal edilebilir. Çünkü bu komşuluk yeterince küçük seçilebilir. O halde

$$-\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{d\xi\, d\eta}{(\zeta - z)^2}$$

integrali Cauchy esas değeri olarak daima mevcuttur.

$\overline{D}$ da tanımlanmış kompleks değerli f fonksiyonu için ($z \in D$ olduğunda)

$$-\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{f(\zeta)\, d\xi\, d\eta}{(\zeta - z)^2} \qquad \textbf{(4.24)}$$

integralinin Cauchy esas değeri anlamında mevcut olması için f fonksiyonuna bazı hipotezler yüklenmelidir. Bu integralin mevcut olması halinde (4.24) ile verilen ifadeyi $\Pi_D f$ sembolü ile gösterelim. Yani

$$\Pi_D f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{f(\zeta)\, d\xi\, d\eta}{(\zeta - z)^2}$$

olsun.

LEMMA 4.3.: $0 < \lambda \leq 1$ ve $f \in C_{\lambda}(\overline{D})$ olsun. Bu takdirde her $z \in D$ için Cauchy esas değeri olarak $\Pi_D f$ mevcuttur.

İSPAT: $f \in C_{\lambda}(\overline{D})$ ise o zaman

$$\frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|^2} \leq \frac{\|f\|_{C_{\lambda}(\overline{D})} |\zeta - z|^{\lambda}}{|\zeta - z|^2} = \frac{\|f\|_{C_{\lambda}(\overline{D})}}{|\zeta - z|^{2-\lambda}} \tag{4.25}$$

yazılabilir.Teorem 3.2'den kompleks düzlemdeki her z için

$$-\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{f(\zeta) - f(z)}{(\zeta - z)^2}\, d\xi\, d\eta$$

integrali klasik anlamda mevcuttur. Diğer taraftan

$$\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} = \frac{f(\zeta) - f(z)}{(\zeta - z)^2} + f(z)\frac{1}{(\zeta - z)^2} \tag{4.26}$$

dir. (4.26)'de sağdaki ilk ifadenin bölge üzerinden integrali mevcut ve her $z \in D$ için ikinci ifadenin de Cauchy esas değeri olarak bölge üzerinden integrali mevcuttur. (4.21)'deki ikinci integral olan

$$-\frac{1}{\pi}\iint_{D_\delta} \frac{1}{(\zeta - z)^2}\, d\xi\, d\eta = \psi'(z)$$

ifadesinin sağ tarafı δ'dan bağımsızdır. O halde her $z \in D$ ve $D_\delta(z) \subset D$ olmak üzere her δ için

$$-\frac{1}{\pi}\iint_{D_\delta} \frac{1}{(\zeta - z)^2}\, d\xi\, d\eta = 0$$

dır.Böylece (4.26)'den şunu söyleyebiliriz: Tamamen D'de bulunan $D_\delta(z)$ halkasal bölgesi verilsin. Bu takdirde δ yeterince küçük seçildiğinde her $z \in D$ için

$$\frac{1}{\pi}\left| \iint_{D_\delta} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\xi\, d\eta \right| \leq \varepsilon$$

olacak şekilde yeterince küçük $\varepsilon > 0$ sayısı mevcuttur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

LEMMA 4.4.: $D = \{ \zeta : |\zeta| < \mathbb{R} \}$ diskini göz önüne alalım.Bu takdirde (4.20) ile tanımlanan

$$\psi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{\overline{\zeta}}{\zeta - z}d\zeta$$

fonksiyonu özdeş olarak sıfırdır.

İSPAT: $\psi(z)$'nin k .basamaktan türevi $\partial D : |\zeta| = 1$ olmak üzere

$$\psi^{(k)}(z) = \frac{-k!}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\overline{\zeta}}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta$$

bulunur. O halde

$$\psi^{(k)}(0) = \frac{-k!}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\overline{\zeta}}{\zeta^{k+1}}\, d\zeta$$

olur.Lemma 4.2'de $z = 0$, $\delta = 1$ seçersek o zaman $\psi^{k}(0) = 0$, $k = 0,1,2,...$ bulunur. ψ fonksiyonu D diskinin tamamında holomorf olduğundan $z_0 = 0$ noktası komşuluğunda bu fonksiyon kuvvet serisine açılabilir ve bu kuvvet serisi D'de yakınsak olur. Böylece

$$\psi(z) = \psi(z_0) + \frac{\psi'(0)}{1!}z + \frac{\psi''(0)}{2!}z^2 + ...$$

olup $\psi(z)$'nin açılımındaki tüm türevler sıfır olduğundan $\psi(z)$ özdeş olarak sıfırdır. Bu lemmanın bir sonucu olarak aşağıdaki lemmayı verebiliriz:

LEMMA 4.5.: $D=\{\ \zeta : |\zeta| < \mathbb{R}\ \}$ olsun. Bu takdirde her $z \in D$ için

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{1}{\zeta - z}\ d\xi\, d\eta \ &= \ \overline{z} \\ -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{1}{(\zeta - z)^2}\, d\xi\, d\eta \ &= 0 \end{aligned}\right\}$$

dır.

İSPAT: Bir önceki lemmadan hemen görülebilir.

LEMMA 4.6.: $D=\{\ \zeta :\ |\zeta| < \mathbb{R}\ \}$ olsun. Bu takdirde $f \in C_\lambda(\overline{D})$ için

$$|\,\Pi_D f(z)| \leq 2\ \frac{R^\lambda}{\lambda}\ \|f\|_{C_\lambda(\overline{D})}$$

dır. Yani Π_D operatörü sınırlıdır.

İSPAT: Lemma 4.5'in göz önüne alınmasıyla

$$\Pi_D f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{f(\zeta) - f(z)}{(\zeta - z)^2}\, d\xi\, d\eta \qquad \textbf{(4.27)}$$

yazılabilir. Çünkü integrali fark üzerine dağıttığımız zaman ikinci integralin değeri sıfır olur. (4.25) bağıntısından

$$|\,\Pi_D f(z)| \leq \frac{\|f\|_{C_\lambda(\overline{D})}}{\pi}\iint_D \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z|^{2-\lambda}}$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikteki integral Teorem 3.2'den dolayı $\dfrac{2\,\pi\, R^\lambda}{\lambda}$ ile sınırlıdır.

Dolayısıyla,

$$|\,\Pi_D f(z)| \leq 2\ \frac{R^\lambda}{\lambda}\ \|f\|_{C_\lambda(\overline{D})}$$

eşitsizliği gerçeklenmiş olur.

(4.27) gösterilimi, D'de geçerli olduğundan her şeyden önce $\Pi_D f$'de D'de tanımlıdır. Şimdi $\Pi_D f$'in ∂D sınırına genişletilebileceğini görelim:

z_1, z_2 noktaları $|z_1 - z_2| < 1$ olacak şekilde D'de iki nokta olsun. Bu takdirde

$$\Pi_D f(z_2) - \Pi_D f(z_1) = -\frac{1}{\pi}\iint_D f(\zeta)\left[\frac{1}{(\zeta - z_2)^2} - \frac{1}{(\zeta - z_1)^2}\right] d\xi\, d\eta \tag{4.28}$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\zeta - z_2)^2} - \frac{1}{(\zeta - z_1)^2} &= \frac{(\zeta - z_1)^2 - (\zeta - z_2)^2}{(\zeta - z_1)^2\,(\zeta - z_2)^2} \\ &= (z_2 - z_1)\,\frac{(\zeta - z_1) + (\zeta - z_2)}{(\zeta - z_1)^2\,(\zeta - z_2)^2} \\ &= (z_2 - z_1)\left[\frac{1}{(\zeta - z_1)^2\,(\zeta - z_2)} + \frac{1}{(\zeta - z_2)^2\,(\zeta - z_1)}\right]\end{aligned}$$

yazılabilir.Bunun yardımıyla (4.28) ifadesindeki integrant $-\frac{1}{\pi}$'nin de integral içine alınmasıyla

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{z_2 - z_1}{\pi}\cdot\frac{f(\zeta) - f(z_1)}{(\zeta - z_1)^2(\zeta - z_2)} - \frac{z_2 - z_1}{\pi}\cdot\frac{f(\zeta) - f(z_2)}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)^2} \\ &-\frac{f(z_1)}{\pi}\cdot\frac{z_2 - z_1}{(\zeta - z_1)^2(\zeta - z_2)} - \frac{f(z_2)}{\pi}\cdot\frac{z_2 - z_1}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)^2}\end{aligned}\right\} \tag{4.29}$$

olur. $|\,\Pi_D f(z_2) - \Pi_D f(z_1)|$ ifadesini sınırlandırmak için (4.29)'deki dört toplamın integralleri ayrı ayrı sınırlandırılmalıdır.(4.25) eşitsizliği yani

$$\frac{|\,f(\zeta) - f(z)|}{|\,\zeta - z\,|^2} \leq \frac{\|\,f\,\|_{C_\lambda(\overline{D})}}{|\zeta - z|^{2-\lambda}}$$

bağıntısı göz önüne alınırsa ilk terimin mutlak değerinin integrali için

$$|\,z_2 - z_1\,|\;\|\,f\,\|_{C_\lambda(\overline{D})}\;\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z_1|^{2-\lambda}\,.\,|\zeta - z_2|} \tag{4.30}$$

yazılabilir. $0<\lambda<1$ olduğundan $\alpha = 2-\lambda$, $\beta = 1$ için Teorem 3.3 kullanılırsa $2-\alpha-\beta = \lambda - 1$ olması nedeniyle

$$-\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z_1|^{2-\lambda}\,.\,|\zeta - z_2|} \le \mathrm{K}_4\, |z_2 - z_1|^{\lambda-1} + \mathrm{K}_5$$

eşitsizliği ortaya çıkar. Burada $\mathrm{K}_4, \mathrm{K}_5$, D 'nin yarıçapı ve λ sabitine bağlı yeni sabitlerdir.Böylece $0<\lambda<1$, $|z_2 - z_1|<1$ ve $|z_2 - z_1| < |z_2 - z_1|^{\lambda}$ olmaları nedeniyle (4.30) için bir üst sınır olarak

$$\|f\|_{C_\lambda(\overline{D})}\,(\mathrm{K}_4 + \mathrm{K}_5)\, |z_2 - z_1|^{\lambda}$$

ifadesi alınabilir.Çünkü

$$\begin{aligned}
|z_2 - z_1|\; \|f\|_{C_\lambda(\overline{D})}\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z_1|^{2-\lambda}\,.\,|\zeta - z_2|} &\le |z_2 - z_1|\; \|f\|_{C_\lambda(\overline{D})}\left(\mathrm{K}_4\, |z_2 - z_1|^{\lambda-1} + \mathrm{K}_5\right)\\
&= \|f\|_{C_\lambda(\overline{D})}\left(\mathrm{K}_4\, |z_2 - z_1|^{\lambda} + \mathrm{K}_5 |z_2 - z_1|\right)\\
&\le \|f\|_{C_\lambda(\overline{D})}\left(\mathrm{K}_4\, |z_2 - z_1|^{\lambda} + \mathrm{K}_5 |z_2 - z_1|^{\lambda}\right)
\end{aligned}$$

yazılabilir. (4.29)'deki ikinci terimin mutlak değeri üzerinden integrali de aynı ifade ile sınırlandırılabilir. Çünkü ilk terimden farklı olarak sadece z_1 ile z_2'nin rolleri değişmiştir.

(4.29)'deki üçüncü ve dördüncü terimlerin mutlak değerlerinin integrallerini sınırlayabilmek için $z_1 \ne z_2$ olmak üzere

$$\frac{z_2 - z_1}{(\zeta - z_1)^2\,(\zeta - z_2)} = -\frac{1}{(\zeta - z_1)^2} + \frac{1}{(z_2 - z_1)}\left(\frac{1}{\zeta - z_2} - \frac{1}{\zeta - z_1}\right)$$

yazılışına dikkat edelim.Burada Lemma 4.5'in göz önüne alınmasıyla

$$-\frac{z_2 - z_1}{\pi}\iint_D \frac{d\xi\, d\eta}{(\zeta - z_1)^2\,(\zeta - z_2)} = \frac{\overline{z}_2 - \overline{z}_1}{z_2 - z_1}$$

bulunur.

Son eşitlikte z_1 ile z_2'nin yerleri değiştirilirse

$$\frac{z_2 - z_1}{\pi} \iint_D \frac{d\xi\, d\eta}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)^2} = \frac{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}{z_2 - z_1}$$

elde edilir. (4.29)'deki üçüncü ve dördüncü terimlerin D üzerinden integralleri hesaplanırsa ikisi birden

$$\left[f(z_1) - f(z_2) \right] \frac{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}{z_2 - z_1}$$

olur. Böylece bunun mutlak değeri de

$$| f(z_1) - f(z_2) | \leq \|f\|_{C_\lambda(\overline{D})} |z_2 - z_1|^\lambda$$

ile sınırlandırılabilir. Bunun göz önüne alınmasıyla $|z_2 - z_1| < 1$ olmak üzere her $z_1, z_2 \in D$ için

$$| \Pi_D f(z_2) - \Pi_D f(z_1) | \leq \left[2(\mathrm{K}_4 + \mathrm{K}_5) + 1 \right] \|f\|_{C_\lambda(\overline{D})} |z_2 - z_1|^\lambda \qquad \textbf{(4.31)}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

(4.31) eşitsizliği $\Pi_D f$ 'nin her $z \in D$ noktasında sürekli olduğunu gösterir. O halde sadece D'de tanımlanan Π_D fonksiyonu her $z_0 \in \partial D$ noktasında bir limite sahiptir.

$\{z_n\}_1^\infty$, D'de bir dizi olsun ve $z_0 \in \partial D$ noktasına yakınsasın. Bu durumda $m, n \geq n_0$ olduğunda $|z_n - z_m| < \varepsilon$ olacak şekilde n_0'a bağlı ε sayısı bulunabilir. O halde (4.31)'dan

$$| \Pi_D f(z_n) - \Pi_D f(z_m) | < \left[2(\mathrm{K}_4 + \mathrm{K}_5) + 1 \right] \|f\|_{C_\lambda(\overline{D})} \varepsilon^\lambda$$

yazılabilir ki bu da $\{\Pi_D f(z_n)\}_1^\infty$ ifadesinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. D'de z_0'a yakınsayan $z_n \to z_0$, $\tilde{z}_n \to z_0$ şeklinde iki farklı dizinin mevcut olduğunu varsayalım: ve $\{z_1, \tilde{z}_1, z_2, \tilde{z}_2, ...\}_1^\infty$ dizisini göz önüne alalım. Bu durumda bu Cauchy dizisinin limiti $\{z_n\}$ dizisinin özel saçimine bağlı değildir. O zaman $\{\Pi_D f(z_1), \Pi_D f(\tilde{z}_1), \Pi_D f(z_2), \Pi_D f(\tilde{z}_2), ...\}$ dizisi de yakınsaktır.

Böylece $\Pi_D f$, $\overline{D}$'nın tamamında tek anlamlı olarak belirlenebilir. (4.31) eşitsizliğini $|z_2 - z_1| < 1$ hipotezi altında elde etmiştik. Aynı eşitsizliğin herhangi iki $z_1, z_2 \in \overline{D}$ noktaları için de geçerli olduğu görülebilir. z_1 ve z_2 noktalarından her ikisi ya da en az biri ∂D sınırı üzerinde bulunuyorsa D'de bulunan diziler yardımıyla $z_{1,n} \to z_1$, $z_{2,n} \to z_2$ şeklinde bir yaklaşım yapılabilir.

(4.31) eşitsizliği $z_{1,n}$, $z_{2,n}$ için yazılır ve $n \to \infty$ için limit hesaplanırsa o zaman herhangi $z_1, z_2 \in \overline{D}$ noktaları için (4.31) eşitsizliği $|z_2 - z_1| < 1$ için yine geçerli olacaktır.

Son olarak (4.31) formundaki bir eşitsizlik $|z_2 - z_1| \geq 1$ olmak üzere herhangi $z_1, z_2 \in \overline{D}$ noktaları için de geçerlidir. Bu durumda $1 \leq |z_2 - z_1|^\lambda$ olup Lemma 4.6'nın göz önüne alınmasıyla

$$\begin{aligned}
|\Pi_D f(z_2) - \Pi_D f(z_1)| &\leq |\Pi_D f(z_2)| + |\Pi_D f(z_1)| \\
&\leq \frac{4R^\lambda}{\lambda} \|f\|_{C_\lambda(\overline{D})} \\
&\leq \frac{4R^\lambda}{\lambda} \|f\|_{C_\lambda(\overline{D})} |z_2 - z_1|^\lambda
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Eğer $\max\left[\ 2\left(\mathrm{K}_4+\mathrm{K}_5\right)+1\ ,\ \dfrac{4R^{\lambda}}{\lambda}\ \right]=\mathrm{K}_6$ dersek bu durumda aşağıdaki lemmayı verebiliriz.

LEMMA 4.7.: $D=\left\{\ \zeta:\left|\ \zeta\ \right|<\mathbb{R}\ \right\}$, $f\in C_{\lambda}\left(\overline{D}\right), 0<\lambda<1$ olsun. Bu takdirde $z_1,z_2\in\overline{D}$ için

$$\left|\Pi_D f\left(z_2\right)-\Pi_D f\left(z_1\right)\right|\leq \mathrm{K}_6\ \|f\|_{C_{\lambda}\left(\overline{D}\right)}\left|z_2-z_1\right|^{\lambda}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde λ ve R yarıçapına bağlı bir K_6 sabiti vardır.

NOT: $\lambda=1$ olması halinde Teorem 3.3.(b)'ye uygun olarak $\left|\ \Pi_D f\left(z_2\right)-\Pi_D f\left(z_1\right)\right|$ ifadesinin sınırlandırılmasında $-\left|z_2-z_1\right|\ln\left|z_2-z_1\right|$ ifadesi gelecektir. Bu durumda yine $\Pi_D f$ sadece bir $\lambda<1$ Hölder-üsteline göre Hölder sürekli olur.

Lemma 4.7 , her $f\in C_{\lambda}\left(\overline{D}\right)$ için $\Pi_D f$ in yine $C_{\lambda}\left(\overline{D}\right)$ uzayına ait olduğunu gösterir. $\dfrac{2R^{\lambda}}{\lambda}\leq \mathrm{K}_6$ olması nedeniyle Lemma 4.6 ve Lemma 4.7 'den

$$\left|\Pi_D f\right|_{\lambda}\leq \mathrm{K}_6\left\|f\right\|_{C_{\lambda}\left(\overline{D}\right)} \qquad \textbf{(4.32)}$$

yazılabilir. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz:

TEOREM 4.3.: (4.32) eşitsizliği geçerli olsun.Bu takdirde $0<\lambda<1$ için $\Pi_D f$ **,** $C_{\lambda}\left(\overline{D}\right)$ uzayından yine kendi içine dönüşen sınırlı bir operatördür. Ayrıca Π_D operatörünün normu için

$$\left\|\Pi_D\right\|\leq \mathrm{K}_6$$

eşitsizliği geçerlidir.

4.4. $\overline{D}$'da Hölder-Sürekli Türetilebilir Fonksiyonlar Uzayı

D sınırlı bir bölge olsun. $f \in C_\lambda\left(\overline{D}\right)$ sınıfından olan fonksiyonların içinde klasik anlamında $\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ türevlerinin yine $C_\lambda\left(\overline{D}\right)$ sınıfına ait olanlarının sınıfını $C_\lambda^1\left(\overline{D}\right)$ ile gösterelim.

$C_\lambda^1\left(\overline{D}\right)$ sınıfındaki bir normu

$$\|f\|_{1,\lambda} = \max\left[\ \|f\|_\lambda , \left\|\frac{\partial f}{\partial z}\right\|_\lambda , \left\|\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right\|_\lambda\ \right] \tag{4.33}$$

şeklinde tanımlayalım.

TEOREM 4.4.: C_λ^1 , bir Banach uzayıdır.

İSPAT: a) Önce (4.33) 'nin tüm norm koşullarını sağladığını gösterelim. Burada sadece üçgen eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim. Çünkü diğer özellikler aşikar olarak görülebilir.

Önce (4.33)'den , $f \in C_\lambda^1\left(\overline{D}\right)$ olmak üzere

$$\|f\|_\lambda \le \|f\|_{1,\lambda} \ , \ \left\|\frac{\partial f}{\partial z}\right\|_\lambda \le \|f\|_{1,\lambda} \ , \ \left\|\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right\|_\lambda \le \|f\|_{1,\lambda} \tag{4.34}$$

sınırlandırmalarının geçerli olduğuna dikkat edelim. $f_1, f_2 \in C_\lambda^1\left(\overline{D}\right)$ olsun. O zaman (4.34)'ün kullanılmasıyla

$$\left.\begin{aligned}
&\|f_1 + f_2\|_\lambda \le \|f_1\|_\lambda + \|f_2\|_\lambda \le \|f_1\|_{1,\lambda} + \|f_2\|_{1,\lambda} \\
&\left\|\frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\right\|_\lambda \le \left\|\frac{\partial f_1}{\partial z}\right\|_\lambda + \left\|\frac{\partial f_2}{\partial z}\right\|_\lambda \le \|f_1\|_{1,\lambda} + \|f_2\|_{1,\lambda} \\
&\left\|\frac{\partial f_1}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial f_2}{\partial \overline{z}}\right\|_\lambda \le \left\|\frac{\partial f_1}{\partial \overline{z}}\right\|_\lambda + \left\|\frac{\partial f_2}{\partial \overline{z}}\right\|_\lambda \le \|f_1\|_{1,\lambda} + \|f_2\|_{1,\lambda}
\end{aligned}\right\} \tag{4.35}$$

elde edilir. Burada $C_\lambda(\overline{D})$ uzayındaki üçgen eşitsizliği kullanıldı. Bu eşitsizliklerinden

$$\|f_1 + f_2\|_{1,\lambda} \leq \|f_1\|_{1,\lambda} + \|f_2\|_{1,\lambda}$$

olduğu görülür.

b) Şimdi $C_\lambda^1(\overline{D})$'nın tam olduğunu gösterelim. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ bir Cauchy dizisi olsun. Yani yeterince büyük m, n ler için

$$\|f_n - f_m\|_{1,\lambda}$$

ifadesi yeterince küçük kalsın. $f_n - f_m$ için (4.34) tekrar kullanılırsa

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\ ,\ \left\{\frac{\partial f_n}{\partial z}\right\}_{n=1}^{\infty}\ ,\ \left\{\frac{\partial f_n}{\partial \overline{z}}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

ifadeleri yine $C_\lambda(\overline{D})$ uzayında bir Cauchy dizisi oluştururlar. Bu durumda Kesim 4.1.'deki Teorem 4.1.'den

$$f_n \to f\ ,\ \frac{\partial f_n}{\partial z} \to g\ ,\ \frac{\partial f_n}{\partial \overline{z}} \to h \qquad \textbf{(4.36)}$$

olacak şekilde f, g, h limitleri mevcuttur ve bu limitler de $C_\lambda(\overline{D})$ uzayına aittir.

Diğer taraftan Kesim 4.1.'deki Teorem 4.1.'in ispatında olduğu gibi $C_\lambda(\overline{D})$'deki metriğe göre f_n , f ye , $\frac{\partial f_n}{\partial z}$, g 'ye , $\frac{\partial f_n}{\partial \overline{z}}$, h 'a düzgün olarak yakınsar.

$g, h \in C_\lambda(\overline{D})$ olması nedeniyle $f \in C_\lambda(\overline{D})$ olduğu gösterilmiş oldu. (4.33) ile verilen norm tanımı ile

$$g = \frac{\partial f}{\partial z} \qquad \textbf{(4.37)}$$

ve

$$h = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \tag{4.38}$$

kullanılırsa

$$\|f_n - f\|_{1,\lambda} = \max\left[\|f_n - f\|_\lambda \ , \left\|\frac{\partial f_n}{\partial z} - g\right\|_\lambda \ , \left\|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} - h\right\|_\lambda \right]$$

elde edilir.

(4.36) ile verilen yakınsaklık nedeniyle sağ taraftaki normlar yeterince büyük n'ler için istenildiği kadar küçük yapılabilir. O halde $C_\lambda^1(\overline{D})$'deki norma göre f_n , f'ye yakınsar. Bu ise ispatı tamamlar.

Eğer $0 < \lambda < 1$ ve $f \in C_\lambda(\overline{D})$ ise o zaman Teorem 4.2.' den $T_D f$ yine $C_\lambda(\overline{D})$ uzayına ait olur. Ayrıca (4.18) yani

$$\|T_D f\|_{C_\lambda(\overline{D})} \leq \max(2K_1, K_3) \ \|f\|_{C_\lambda(\overline{D})}$$

eşitsizliğide gerçeklenir. Kesim 3.4.'den

$$\frac{\partial}{\partial z} T_D f = \Pi_D f$$

olduğunu görmüştük. O halde Kesim 4.3.'deki Lemma 4.7. göz önüne alınmasıyla

$$\frac{\partial}{\partial z} T_D f \in C_\lambda(\overline{D})$$

olduğu söylenebilir. Diğer taraftan

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} T_D f = f$$

olduğundan şunu söyleyebiliriz: Eğer $f \in C_\lambda(\overline{D})$ ise o zaman $T_D f \in C_\lambda^1(\overline{D})$'dır.

(4.18)'in yanında (4.32)'e bir kez daha dikkat edilirse o zaman

$$
\begin{aligned}
\|T_D f\|_{1,\lambda} &= \max\left[\ \|T_D f\|_\lambda\ ,\left\|\frac{\partial}{\partial z} T_D f\right\|_\lambda\ ,\left\|\frac{\partial}{\partial \bar{z}} T_D f\right\|_\lambda\ \right] \\
&= \max\left[\ \|T_D f\|_\lambda\ ,\|\Pi_D f\|_\lambda\ ,\|f\|_\lambda\ \right] \\
&\le \max\left(\ 2\mathrm{K}_1\ ,\mathrm{K}_3\ ,\mathrm{K}_6 ,1\ \right)\|f\|_\lambda
\end{aligned}
$$

yazabiliriz. Böylece aşağıdaki teorem elde edilmiş oldu:

TEOREM 4.5.: T_D , $C_\lambda\left(\overline{D}\right)$ uzayından $C_\lambda^1\left(\overline{D}\right)$ uzayı içine giden sınırlı bir operatördür.

Eğer T_D , $C_\lambda\left(\overline{D}\right)$'den $C_\lambda^1\left(\overline{D}\right)$ içine bir operatör olarak düşünülürse o zaman T_D 'nin normu $\|T_D\|_1$ ile gösterilir. Eğer T_D 'yi $C_\lambda\left(\overline{D}\right)$'den yine $C_\lambda\left(\overline{D}\right)$'ye bir operatör olarak düşünülürse şimdiye kadar olduğu gibi T_D nin normunu $\|T_D\|$ ile gösterebiliriz.

$$\|T_D f\|_\lambda \le \|T_D f\|_{1,\lambda}$$

eşitsizliği her $f \in C_\lambda\left(\overline{D}\right)$ için geçerli olduğundan

$$\|T_D\| \le \|T_D\|_1$$

olur.

KAYNAKLAR

[1]- Murat DÜZ Yüksek Lisans Tezi, Kırıkkale Üniversitesi (2001)

[2]- W.TUTSCHKE , ‘’ Partielle Differentialgleichungen , klassische funktional analytische und komplexe Methoden ‘’ TEUBNER TEXTE, Bond 27 Leibzig (1983)

[3]- W.TUTSCHKE , ‘’ Tutschke’nin Partielle komplexe Differentialgleichungen in einer in mehrenen komplexen Variablen ‘’ , VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften , Berlin (1977)

[4]-W.TUTSCHKE , ‘’ Lösung nichtlinearer Partieller Differentialgleichungssysteme erster Ordnung in der Ebene durch Verwendung eine komplexen Normalform ‘’ Math. Nachi. 75, 283-298, (1976)

[5]- W.TUTSCHKE , ‘’ Funktionentheorie 2 Distributionentheonetische Methoden in der Komplexen Analysis ‘’ Lectures Notes , 2000, Technical University GRAZ, AUSTRIA

[6]- I.N.VEKUA, ‘’ Verallgemeinerte analytische Funktionen ‘’ Akademia Verlag, Berlin, (1963) (Überset aus dem Russ.)

[7]- T.BAŞKAN , ‘’ Kompleks Fonksiyonlar Teorisi ‘’ U.Ü. Yayınları (2000)