T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
DOKTORA TEZİ

BİRİM DİSK VE HALKASAL BÖLGEDE KOMPLEKS KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLER İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

İlker GENÇTÜRK

TEMMUZ - 2019

Matematik Anabilim Dalında İlker GENÇTÜRK tarafından hazırlanan BİRİM DİSK VE HALKASAL BÖLGEDE KOMPLEKS KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLER İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ Adlı Doktora Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Ali OLGUN
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin Doktora Tezi olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan	:	Prof. Dr. Ali ARAL	______________
Üye(Danışman)	:	Prof. Dr. Kerim KOCA	______________
Üye	:	Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL	______________
Üye	:	Doç. Dr. Recep ŞAHİN	______________
Üye	:	Doç. Dr. Murat OLGUN	______________

19.07.2019

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Doktora derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Recep ÇALIN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

BİRİM DİSK VE HALKASAL BÖLGEDE KOMPLEKS KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLER İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

GENÇTÜRK, İlker
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Doktora Tezi
Danışman: Prof. Dr. Kerim KOCA
Temmuz 2019, 68 sayfa

Bu tezde, belli tipten bazı kompleks kısmi türevli denklemler için temel sınır değer problemlerin çözülebilme koşulları ve çözümleri incelenmiştir. Bu çerçevede, tezin giriş bölümünde çalışmanın amacı ve önemi belirtilmiştir.

İkinci bölümde temel tanım ve kavramlara yer verilmiş, belli sınıftan fonksiyonlar için bazı integral gösterimlerini içeren teoremler ifade edilmiştir.

Sonraki bölümde ise, birim diskte sınır değer problemleri incelenmiş, bölümün sonunda orijinal bir sonuca yer verilmiştir.

Üçüncü ve son bölümde ise bir halkasal bölgede sınır değer problemleri incelenmiş, bölüm ve tez yine orijinal bir sonuç ile sonlandırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sınır değer problemi, kompleks kısmi türevli denklem, Cauchy-Riemann denklemi, Bitsadze denklemi.

ABSTRACT

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR COMPLEX PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS IN UNIT DISC AND A RING DOMAIN

GENÇTÜRK, İlker
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, Ph. D. Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Kerim KOCA

July 2019, 68 pages

In this thesis, solvability conditions and solutions of basic boundary value problems for some models complex partial differential equations are investigated. In this way, aim and importance of the study is given in Introduction chapter of thesis.

In the second chapter, basic concepts and definitions are given and important integral representations for some class of functions are obtained.

In the next chapter, boundary value problems in the unit disc are investigated and at the end of chapter, original result is given.

In the last chapter boundary value problems in a ring domain are investigated and with an original result chapter and thesis are finished.

Key Words: Boundary value problem, Complex partial differential equations, Cauchy-Riemann equation, Bitsadze equation.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca; tecrübe ve katkıları ile beni yönlendiren, tez konusunun oluşmasında ve hazırlanmasında hiçbir zaman yardımını eksik etmeyen değerli hocam, Sayın Prof. Dr. Kerim KOCA'ya, desteğini hiçbir zaman eksik etmeyen sevgili eşime, anneme, babama ve aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

D	Kompleks düzlemin bir alt bölgesi
$\overline{D}$	D bölgesinin kapanışı
∂D	D bölgesinin sınırı
$C(D;\mathbb{C})$	D bölgesinde sürekli kompleks fonksiyonlar sınıfı
$C^m(D;\mathbb{C})$	D bölgesinde m. basamağa kadar sürekli kısmi türevlere sahip kompleks fonksiyonlar sınıfı
$C^\alpha(D;\mathbb{C})$	D bölgesinde tanımlı α üsteli ile Holder sürekli kompleks fonksiyonlar sınıfı
$L_p(D;\mathbb{C})$	D bölgesinde p. kuvvetleri integrallenebilir kompleks fonksiyonlar sınıfı
$C^{\alpha,1}(D;\mathbb{C})$	D bölgesinde 1. basamaktan kısmi türevleri mevcut ve α üsteli ile Holder sürekli kompleks fonksiyonlar sınıfı
$C_0^k(D;\mathbb{C})$	D bölgesinde k. basamağa kadar türevlere sahip tüm test fonksiyonları sınıfı
$\mathbb{D}$	Birim disk
$W_z^{1,p}(D;\mathbb{C})$	$L_p(D;\mathbb{C})$ sınıfında genelleştirilmiş birinci basamaktan z e göre türevli fonksiyonların uzayı
$W_{\bar{z}}^{1,p}(D;\mathbb{C})$	$L_p(D;\mathbb{C})$ sınıfında genelleştirilmiş birinci basamaktan $\bar{z}$ e göre türevli fonksiyonların uzayı
$W_z^{1+\alpha}(\overline{D};\mathbb{C})$	$\overline{D}$ de genelleştirilmiş birinci basamaktan z göre türevli Hölder sürekli fonksiyonların uzayı
$W_{\bar{z}}^{1+\alpha}(\overline{D};\mathbb{C})$	$\overline{D}$ de genelleştirilmiş birinci basamaktan $\bar{z}$ göre türevli Hölder sürekli fonksiyonların uzayı

1 . GİRİŞ

B. Riemann ve D. Hilbert tarafından Riemann ve Riemann-Hilbert problemleri [10] ile başlayan kompleks kısmi türevli denklemler için sınır değer problemleri matematiğin kompleks analiz, kısmi türevli denklemler, fonksiyonel analiz, matematiksel fizik gibi çeşitli dallarındaki bilgi ve metodları bir araya getirir. Son yıllarda dünya çapında çeşitli araştırma grupları bu teoriye ilgi çekici katkılar sağlamaktadır.

Cauchy-Riemann denklemi, Beltrami denklemi, Bitsadze denklemi, sabit veya analitik katsayılı eliptik denklemler gibi bazı özel denklemler için ortaya konulan sınır değer problemlerinde, teorinin ana amaçlarından birisi olarak problemlerin analitik veya özel çözümü verilmektedir. [4, 8, 11, 16, 20, 22, 23]. Bununla beraber yapılan çalışmalar çoğunlukla birim disk, yarı düzlem gibi basit bağlantılı bölgelerde ele alınmıştır. Çoklu bağlantılı bölgelerde ise sınır değer problemlerinin incelenmesi en basit durum olan analitik fonksiyonlarda bile beraberinde çeşitli zorlukları getirir. Ortaya çıkan ana sorun çözümlerin tek türlü geçerliliğinin basit bağlantılı bölgelerden çoklu bağlantılı bölgelere geçerken karşılaşılan durum ile ilgilidir.[21]. Bu konu da bilinen az sayıda sonuç vardır. [1, 18].

H. Begehr integral gösterim formülleri kullanarak keyfi basamaktan kompleks kısmi türevli denklemler için sınır değer problemlerinin sistematik olarak incelemeyi başlatmıştır. Begehr bunu yaparken ilk olarak kompleks Cauchy-Riemann operatörü $\partial_{\bar{z}}$ ve onun eşleniği ∂_z operatörünün kuvvetlerinin bir çarpımının oluşturduğu denklemler için temel sınır değer problemlerini olan Schwarz, Dirichlet ve Neumann problemlerini ele almıştır. Bu incelemenin ana metodu kompleks düzlemde bir düzgün D bölgesinde birinci basamaktan sürekli kısmi türevlere sahip ve bölgenin sınırında sürekli bir fonksiyon için uygulanan Gauss teoreminin kompleks formu ile ortaya çıkan Cauchy-

Pompeiu gösterim formüllerinin kullanılmasıdır. Bu formül kompleks analizde analitik fonksiyonlar için bilinen Cauchy integral formülünün bir genelleştirilmesidir. Cauchy-Pompeiu gösterim formüllerinde ortaya çıkan bölge integrali özel olarak Pompeiu operatörü olarak adlandırılır ve bu operatör kompleks kısmi türevli denklemler için sınır değer problemlerinin çözümünde önemli rol oynar. Pompeiu operatörünün özellikleri [22] nolu kaynakta incelenmiştir.

1.1. Tezin Amacı

Kompleks kısmi türevli denklemler için sınır değer problemleri ışığın kırınımı (diffraction) teorisi, medikal görüntüleme, elastisite teorisi, potansiyel teori, kiriş teorisi, akışkanlar dinamiği gibi birçok alanda çeşitli uygulamalara sahiptir.

Bu tezde birim disk ve halkasal bölgede homojen ve homojen olmayan Cauchy-Riemann denklemi ve Bitsadze denklemi için temel sınır değer problemleri olan Schwarz, Dirichlet, Neumann ve Robin problemleri incelenecektir. Bu problemlerin çözülebilme koşulları ve çözüm gösterimleri özel formda verilecektir.

Bu tezin ana amacı birim disk ve halkasal bölgelerdeki sınır değer problemleri incelenirken ortaya çıkan ve daha önce göz önüne alınmamış çeşitli tipten denklemler için sınır değer problemlerinin çözülebilme koşulları ve çözümlerini ortaya koymaktır.

1.2. Kaynak Özetleri

Bu tezin hazırlanışında önce [4, 5] nolu kaynaklardan bazı kompleks fonksiyon sınıfları için integral gösterilimleri öğrenilmiştir. Tezin ana başlıklarından biri olan birim disk için sınır değer problemleri incelenirken daha önce birim diskte yapılan çalışmalar olan [3, 5, 6, 7, 9, 12, 13, 14] kaynakları incelenmiştir.

Halkasal bölge göz önüne alındığında ise [21] nolu kaynak ele alınmıştır. Bu kaynak bir doktora tezi olup burada çeşitli tipten kısmi türevli denklemler için sınır değer problemleri halkasal bölgede incelenmiştir.

2 . TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Cauchy Tipli İntegraller

Bu bölümde $\mathbb{C}$ kompleks düzlemde düzgün eğriler üzerinde Cauchy tipli integrallerin bazı özellikleri verilecektir.

Bir düzgün Γ eğrisi, sürekli olarak değişen teğetlere sahip bir kapalı veya açık Jordan yayıdır. Böyle bir eğri, $\mathbb{R}$ reel ekseninin $[0,1]$ aralığını $\mathbb{C}$ nin içine dönüştüren ve $[0,1]$ üzerinde $z'(\tau) \neq 0$ olan sürekli türetilebilir bir z fonksiyonu yardımıyla

$$\Gamma = \{z : z = z(\tau), 0 \leq \tau \leq 1\}$$

şeklinde temsil edilebilir.

Tanım 2.1.1. $z_0 \in \mathrm{D}$ sabit bir nokta olmak üzere, her $z \in \mathrm{D}$ için

$$|u(z) - u(z_0)| \leq H|z - z_0|^{\alpha} \tag{2.1.1}$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde H pozitif reel sabiti ve $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde α sabiti varsa $u(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında Hölder süreklidir denir.

Eğer her $z_1, z_2 \in \mathrm{D}$ için (2.1.1) yazılıyorsa $u(z)$ fonksiyonuna D de Hölder süreklidir denir.

D üzerinde tanımlı Hölder sürekli fonksiyonlar kümesi $C^{\alpha}(D)$ şeklinde gösterilirken, $C^{\alpha}(D;\mathbb{C})$, D de tanımlı kompleks değerli Hölder sürekli fonksiyonları; $C^{\alpha}(D;\mathbb{R})$, D de tanımlı reel değerli Hölder sürekli fonksiyonları ifade eder.

Tanım 2.1.2. Γ, kompleks düzlemde verilmiş bir eğri ve φ, Γ boyunca integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} \tag{2.1.2}$$

olarak tanımlanan integrale Cauchy tipli integral denir.

(2.1.2) şeklinde tanımlanan $\phi(z)$ fonksiyonu, $\tilde{\mathbb{C}}\,(= \mathbb{C} \cup \{\infty\})$ genişletilmiş kompleks düzlemi göstermek üzere, $\tilde{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ da analitiktir ve sonsuzda sıfır değerini alır.

Burada dikkat edilmesi gereken nokta, genelikle $\phi(z)$ nin, Γ üzerinde mevcut olmadığıdır.

Örnek olarak bir $[a,b]$ reel aralığını göz önüne alalım. $a < c < b$ olsun. Bu durumda

$$\int_a^b \frac{dx}{x - c} \tag{2.1.3}$$

genelleştirilmiş integrali mevcut değildir. Çünkü

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0, \\ \varepsilon_2 \to 0}} \left[\int_a^{c-\varepsilon_1} \frac{dx}{x - c} + \int_{c+\varepsilon_2}^{b} \frac{dx}{x - c} \right] = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0, \\ \varepsilon_2 \to 0}} \left[\log \frac{b - c}{c - a} + \log \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right]$$

ifadesi genellikle mevcut değildir. Fakat eğer limitler $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \to 0$ olacak şekilde simetrik olarak alınırsa bu durumda

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{x - c} + \int_{c+\varepsilon}^{b} \frac{dx}{x - c} \right] = \log \frac{b - c}{c - a}$$

olur ki elde edilen bu değere (2.1.3) integralinin Cauchy Esas Değeri denir.

Tanım 2.1.3. Γ, $\mathbb{C}$ de düzgün bir eğri olsun. Γ üzerinde bir c noktası için, φ fonksiyonu $\zeta = c$ de singüleriteye sahip ve $\Gamma \setminus \{c\}$ de integrallenebilir bir fonksiyon olsun. $\varepsilon > 0$ için

$$\Gamma_\varepsilon := \Gamma \setminus \{\zeta : |\zeta - c| < \varepsilon\}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \varphi(\zeta;c)d\zeta$$

değeri mevcutsa, bu değere singüler integralin Cauchy Esas Değeri denir ve

$$\text{C. E. D.} \int_{\Gamma_\varepsilon} \varphi(\zeta;c)d\zeta$$

veya kısaca

$$\int_{\Gamma} \varphi(\zeta;c)d\zeta$$

şeklinde gösterilir.

Benzer şekilde, eğer $D \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve φ, $c \in D$ de bir singüleriteye sahip ve ε yeterince küçük pozitif bir sayı olmak üzere

$$D_\varepsilon := D \setminus \{z : |z-c| < \varepsilon\}$$

bölgesi üzerinden

$$\int_{D_\varepsilon} \varphi(z;c)dxdy$$

integrali mevcut olacak şekilde $D \setminus c$ de tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{D_\varepsilon} \varphi(z;c)dxdy$$

mevcut ise, bu değere

$$\int_{D} \varphi(z;c)dxdy$$

singüler integralinin Cauchy esas değeri denir ve

$$\int_{D} \varphi(z;c)dxdy := \text{C. E. D.} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{D_\varepsilon} \varphi(z;c)dxdy$$

şeklinde gösterilir.

Teorem 2.1.4. [4] Γ, $\mathbb{C}$ de düzgün basit kapalı (parçalı) bir eğri ve $\varphi \in C^{\alpha}(\Gamma)$ olsun.

Bu durumda

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \varphi(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z} \tag{2.1.4}$$

fonksiyonu, Γ üzerinde Cauchy Esas Değeri anlamında mevcuttur.

Teorem 2.1.5. [4] Γ ve φ bir önceki teoremdeki gibi olmak üzere

$$\psi(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\tau)}{\zeta - z}d\zeta, \quad \tau \in \Gamma \tag{2.1.5}$$

fonksiyonu, limit Γ nın iki tarafından teğetsel olmayacak bir şekilde alınmak koşuluyla

$$\lim_{z\to\tau} \psi(z) = \psi(\tau) \tag{2.1.6}$$

ifadesini sağlar.

Teorem 2.1.6. (Plemelj-Sokhotzki) Teorem 2.1.4 deki şartlar altında (2.1.4) Cauchy integrali, D^+, $\partial D^+ = \Gamma$ ile sınırlanmış bölge ve $D^- = \tilde{\mathbb{C}} \setminus (D^+ \cup \Gamma)$ olmak üzere

$$\phi^+(\tau) := \lim_{\substack{z\to\tau \\ z\in D^+}} \phi(z), \quad \phi^-(\tau) := \lim_{\substack{z\to\tau \\ z\in D^-}} \phi(z) \tag{2.1.7}$$

sınır değerlerine sahiptir.

Ayrıca, $\tau \in \Gamma$ için

$$\phi^+(\tau) = \frac{1}{2}\varphi(\tau) + \phi(\tau), \quad \phi^-(\tau) = -\frac{1}{2}\varphi(\tau) + \phi(\tau) \tag{2.1.8}$$

geçerlidir. Burada $\phi(\tau)$ Cauchy Esas Değeri anlamındadır.

Tanım 2.1.7. (2.1.8) ifadelerine Plemelj-Sokhotzki formülleri denir. Bunlara eşdeğer olarak

$$\phi^+(\tau) - \phi^-(\tau) = \varphi(\tau), \quad \phi^+(\tau) + \phi^-(\tau) = 2\phi(\tau), \quad \tau \in \Gamma$$

şeklinde de yazılabilir.

2.2. İntegral Gösterilimleri

Tanım 2.2.1. Bir $f(z)$ kompleks fonksiyonu z_0 noktası ve bu noktanın bir komşuluğundaki her noktada türevli ise f ye z_0 da analitik fonksiyon denir.

Bir f fonksiyonu D bölgesinin her noktasında analitik ise f ye D bölgesinde analitiktir denir. Kompleks düzlemin her noktasında analitik olan bir fonksiyona da tam fonksiyon denir.

$\mathbb{C}$ kompleks düzlemde, $z = x + iy, (x, y \in \mathbb{R})$ olmak üzere $w = u + iv$ kompleks değerli fonksiyonu bir çift reel değerli $u = (x, y)$ ve $v = (x, y)$ fonksiyonları yardımıyla verilir. Ayrıca, z nin reel ve sanal kısımları yardımıyla yine w fonksiyonu z ve $\overline{z}$ nin bir fonksiyonu olarak da yazılabilir.

Bilindiği gibi, $w = u + iv$ fonksiyonu D bölgesinde analitik ise u ve v fonksiyonları Cauchy-Riemann denklem sistemini sağlar. Tersine u ve v fonksiyonlarının kısmi türevleri sürekli ve Cauchy-Riemann denklem sistemini sağlarsa, bu durumda w, D bölgesinde analitiktir.

$w = u + iv$ fonksiyonu analitik olsun. Bu durumda; u, v

$$u_x = v_y, \;\; u_y = -v_x$$

Cauchy-Riemann sistemini sağlar. Burada

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \;\; \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

kompleks kısmi türev operatörleri kullanılırsa,

$$2w_z = u_x + iv_x - iu_y + v_y = 2(u_x + iv_x)$$

$$2w_{\overline{z}} = u_x + iv_x + iu_y - v_y = 0$$

elde edilir. Böylece Cauchy-Riemann sistemi

$$w_{\bar{z}} = 0$$

kompleks homojen Cauchy-Riemann denklemi ile gösterilebilir.

Teorem 2.2.2 (Cauchy teoremi). γ basit kapalı düzgün bir eğri ve D, γ tarafından sınırlanan bir bölge olsun. Eğer w fonksiyonu D de analitik ve $\overline{D}$ de sürekli ise bu durumda

$$\int_{\gamma} w(z)dz = 0 \tag{2.2.1}$$

dır.

Cauchy teoreminden Cauchy tipli integral yardımıyla analitik bir fonksiyonun gösterimi elde edilebilir.

Teorem 2.2.3 (Cauchy İntegral Formülü). D bir bölge ve γ bu bölge içinde bir kapalı eğri olsun. Eğer z, γ içinde bir nokta ve $w(z)$, D de analitik ise,

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z} \tag{2.2.2}$$

dir.

Teorem 2.2.4 (Cauchy Türev Formülü). D bir bölge ve γ bu bölge içinde bir kapalı eğri olsun. Eğer z, γ içinde bir nokta ve $w(z)$, D de analitik ise,

$$w^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{w(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta \tag{2.2.3}$$

dir.

Birinci basamaktan kompleks kısmi türevli denklemler için sınır değer problemlerini incelerken kullandığımız temel kaynaklar Gauss teoremi ve Cauchy-Pompeiu gösterim formülleridir. Bu formüllere geçmeden önce bazı fonksiyon sınıflarının tanımını verelim: Bir kapalı $\overline{D} \subset \mathbb{C}$ bölgesinde sürekli fonksiyonların kümesini $C(D;\mathbb{C})$ ile, $D \subset \mathbb{C}$

bölgesinde m. basamağa kadar sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonların kümesini de $C^m(D;\mathbb{C})$ ile gösterelim.

Teorem 2.2.5 (Gauss teoreminin kompleks formu). [4] D, $\mathbb{C}$ kompleks düzlemin düzgün bir bölgesi, $w \in C^1(D;\mathbb{C}) \cap C(\overline{D};C)$ olsun. Bu durumda

$$\int_D w_{\overline{z}}(z)dxdy = \frac{1}{2i}\int_{\partial D} w(z)dz, \tag{2.2.4}$$

$$\int_D w_z(z)dxdy = -\frac{1}{2i}\int_{\partial D} w(z)d\overline{z} \tag{2.2.5}$$

özdeşlikleri geçerlidir.

Gauss teoreminden aşağıdaki gösterim formülleri elde edilebilir:

Teorem 2.2.6 (Cauchy-Pompeiu Gösterimleri). [4] $D \subset \mathbb{C}$ ve $w \in C^1(D;\mathbb{C}) \cap C(\overline{D};\mathbb{C})$ olsun.

Bu durumda, her $z \in D$ için $\zeta = \xi + i\eta$ olmak üzere;

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi}\int_D w_{\overline{\zeta}}(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \tag{2.2.6}$$

ve

$$w(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w(\zeta)\frac{d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta - z}} - \frac{1}{\pi}\int_D w_{\zeta}(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\overline{\zeta - z}} \tag{2.2.7}$$

özdeşlikleri geçerlidir.

Tanım 2.2.7. [22] $f \in L_1(D;\mathbb{C})$ olmak üzere;

$$Tf(z) = -\frac{1}{\pi}\int_D f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}, \quad z \in \mathbb{C} \tag{2.2.8}$$

operatörüne Pompeiu Operatörü denir.

$f \in C^\alpha(\mathrm{D};\mathbb{C})$ veya $f \in L_1(\mathrm{D};\mathbb{C})$ olması durumunda (2.2.8) ifadesi daima mevcuttur. Hatta

$$T : C^\alpha(\mathrm{D};\mathbb{C}) \to C^{\alpha,1}(\mathrm{D};\mathbb{C})$$

şeklinde sınırlı bir operatördür. Burada $C^{\alpha,1}(\mathrm{D};\mathbb{C})$, 1. basamaktan kısmi türevleri mevcut ve Hölder sürekli fonksiyonların sınıfıdır. Pompeiu operatörü homojen olmayan Cauchy-Riemann denklemi için sınır değer problemlerini çözmek için kullanılır.

Tanım 2.2.8 (Test Fonksiyonu). $D \subset \mathbb{C}$ alt bölgesi verilsin. $\varphi \in C^k(D)$ olmak üzere reel değerli bir fonksiyon olsun. φ fonksiyonu tamamen D nin içinde bulunan, kompakt bir alt bölgenin sınırında ve dışında özdeş olarak sıfır ise φ'ye D bölgesinde test fonksiyonu denir.

D'ye ait k.basamağa kadar türevlere sahip tüm test fonksiyonlarının sınıfı da $C_0^k(\mathrm{D};\mathbb{C})$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.9. Her $\varphi \in C_0^1(\mathrm{D};\mathbb{C})$ test fonksiyonu için verilen f fonksiyonuna karşılık

$$\iint\limits_D \left(f\frac{\partial\varphi}{\partial z} + g\varphi \right) dxdy \;=\; 0 \tag{2.2.9}$$

$$\left(\iint\limits_D \left(f\frac{\partial\varphi}{\partial \overline{z}} + g\varphi \right) dxdy \;=\; 0 \right) \tag{2.2.10}$$

koşulu sağlanacak şekilde bir g fonksiyonu var ise g ye f in z $(\overline{z})$ ye göre birinci basamaktan Sobolev anlamında (genelleştirilmiş, zayıf) türev denir ve

$$\frac{\partial f}{\partial z} = g, \; \left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = g \right),$$

şeklinde gösterilir.

Not 1. $g \in C^1(D)$ ve $g = f_{\overline{z}}$ için $\varphi \in C_0^1(\mathrm{D};\mathbb{C})$ olduğunda, Gauss teoreminin kompleks formülü (2.2.5) gereğince

$$\begin{aligned} \iint\limits_D \left(f(z)\varphi_{\overline{z}}(z) + g(z)\varphi(z)\right) dxdy &= \iint\limits_D \left(f(z)\varphi(z)\right)_{\overline{z}} dxdy \\ &= -\frac{1}{2i}\int\limits_{\partial D} f(z)\varphi(z)dz = 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan, eğer f klasik anlamda türetilebilir ise aynı zamanda Sobolev anlamında türetilebilirdir ve onun Sobolev türevi klasik türevine eşittir sonucu çıkar.

Teorem 2.2.10. [22] $f \in L_1(D;\mathbb{C})$ ise, bu durumda her $\varphi \in C_0^1(\mathrm{D};\mathbb{C})$ için

$$\int_D Tf(z)\varphi_{\bar{z}}(z)dxdy + \int_D f(z)\varphi(z)dxdy = 0 \tag{2.2.11}$$

dır.

Teorem 2.2.11. [22] Eğer $f \in L_1(D;\mathbb{C})$ ise bu durumda Pompeiu integrali $\bar{z}$ e göre Sobolev anlamında türevlenebilirdir ve D bölgesinde $\partial_{\bar{z}}Tf = f$ dir. Ayrıca, $z \in \mathbb{C}\backslash\overline{D}$ için Tf analitiktir.

Teorem 2.2.12. Eğer $f \in L_p(D;\mathbb{C}),\ p > 1$ ise bu durumda Tf in z ye göre türevi

$$\partial_z Tf(z) = \Pi f(z) = -\frac{1}{\pi}\int_D f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{(\zeta - z)^2}$$

şeklinde ifade edilir. Bu singüler integrali Cauchy esas değeri anlamında vardır.

Pompeiu operatörünün tanımı ve özellikleri [22] nolu kaynaktan alınmıştır. Ayrıca daha fazla bilgi için [4] ve [5] kaynaklarına bakılabilir.

Kompleks düzlemde orjin merkezli birim disk olarak $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ yi göz önüne alalım. Birim disk için Gauss teoremi kullanılarak (2.2.6) dan elde edilen Cauchy-Pompeiu formülünün bir diğer versiyonunu aşağıdaki şekilde verebiliriz:

Teorem 2.2.13. [4] $w \in C^1(\mathbb{D};\mathbb{C}) \cap C(\overline{\mathbb{D}};\mathbb{C})$ ise her $z \in \mathbb{D}$ için

$$\begin{aligned} w(z) \quad = \quad & \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \mathrm{Re}\,w(\zeta)\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1} \mathrm{Im}\,w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} \\ & -\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\left(\frac{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{\overline{z w_{\bar{\zeta}}(\zeta)}}{1 - z\bar{\zeta}}\right)d\xi d\eta \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

ifadesi geçerlidir.

(2.2.12) gösterilimi Schwarz-Poisson-Pompeiu formülü olarak adlandırılır.

Sonuç 2.2.1. [4] Her $w \in C^1(\mathbb{D};\mathbb{C}) \cap C(\mathbb{D};\mathbb{C})$ fonksiyonu her $z \in \mathbb{D}$ için

$$\begin{aligned} w(z) \;=\; & \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} \operatorname{Re} w(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\left(\frac{w_{\overline{\zeta}}(\zeta)}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z} + \frac{\overline{w_{\overline{\zeta}}(\zeta)}}{\overline{\zeta}}\frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\right)d\xi d\eta \\ & + i\operatorname{Im} w(0) \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

biçiminde gösterilebilinir.

(2.2.13) formülü Cauchy-Schwarz-Poisson-Pompeiu formülü olarak adlandırılır.

Not 2. Birim diskin içinde analitik ve sınırında sürekli olan fonksiyonlar için (2.2.13) formülü

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} \operatorname{Re} w(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta} + i\operatorname{Im} w(0) \tag{2.2.14}$$

şeklini alır ki bu formül Schwarz-Poisson Formülü olarak adlandırılır. Bu formül birim disk için sınır değer problemlerini incelemede başlangıç noktasıdır.

Not 3. Birim diskte

$$w_{\bar{z}} = f,\ (\operatorname{Re})|_{\partial\mathbb{D}} = \gamma,\ \operatorname{Im} w(0) = c \tag{2.2.15}$$

olarak verilmiş sınır değer problemi gözönüne alınırsa (2.2.13)

$$\begin{aligned} w(z) \;=\; & \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z} + \frac{\overline{f(\zeta)}}{\overline{\zeta}}\frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\right)d\xi d\eta \\ & + ic \end{aligned} \tag{2.2.16}$$

halini alır ki (2.2.16) nın, Dirichlet Problemi olarak adlandırılan (2.2.15) sınır değer probleminin bir çözümü olduğu görülür.

Bu bize integral gösterimlerinin sınır değer problemlerini çözmede nasıl kullanıldığını göstermektedir. Bu metot sadece birim disk için geçerli olmamakla birlikte bu bölgede problemlerin çözümlerinin özel olarak verilmektedir.

Tanım 2.2.14.

$$\frac{\zeta + z}{\zeta - z}, \quad z \in \mathbb{D}, \quad \zeta \in \partial\mathbb{D}$$

çekirdeği birim disk için Schwarz çekirdeği olarak adlandırılır. Schwarz çekirdeğinin reel kısmı ise

$$\mathrm{Re}\,\frac{\zeta + z}{\zeta - z} = \frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta - z}} - 1, \quad z \in \mathbb{D}, \quad \zeta \in \partial\mathbb{D}$$

$\mathbb{D}$ için Poisson çekirdeğidir.

Schwarz, [19] da birim disk için Poisson çekirdeğinin $\gamma \in C(\partial\mathbb{D};\mathbb{R})$ olmak üzere

$$\lim_{|z|\to 1,\ |z|<1} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \left[\frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta - z}} - 1 \right] \frac{d\zeta}{\zeta} \quad = \quad \gamma(z) \qquad (2.2.17)$$

özelliğini sağladığını ispat etmiştir.

(2.2.17) den $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ olmak üzere $\gamma \in C(\partial\mathbb{D}_r;\mathbb{R})$ için

$$\lim_{|z|\to r,\ |z|>r} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} \gamma(\zeta) \left[\frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta - z}} - 1 \right] \frac{d\zeta}{\zeta} \quad = \quad -\gamma(z) \qquad (2.2.18)$$

ifadesi geçerlidir. (2.2.17) den farklı olarak (2.2.18) in ters işaretli olmasının sebebi dönme yönünün değişimindendir.

3 . BİRİM DİSKTE KOMPLEKS KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLER İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Bu bölümde birim diskte kompleks kısmi türevli denklemler için temel sınır değer problemleri olan Schwarz, Dirichlet, Neumann ve Robin sınır değer problemlerinin çözümlerini ifade eden teoremler ispatsız olarak verilecektir.

3.1. Analitik Fonksiyonlar için Sınır Değer Problemleri

En basit ve temel durumlar analitik fonksiyonlar için sınır değer problemlerini incelerken ortaya çıkmaktadır.

$w_{\bar{z}} = 0$ denkleminin çözümleri analitik fonksiyonlar olduğundan analitik fonksiyonlar için verilen tüm sınır değer problemlerin çözümleri de analitik bir fonksiyondur.

Tanım 3.1.1 (Schwarz Sınır Değer Problemi). $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diskinde $w_{\bar{z}} = 0$ denkleminin

$$\operatorname{Re} w \,|_{\partial\mathbb{D}} = \gamma,\ \operatorname{Im} w(0) = c,\ \gamma \in C(\partial\mathbb{D};\mathbb{R}),\ c \in \mathbb{R}$$

sınır koşullarını sağlayan $w(z)$ çözümünün bulunması problemine analitik fonksiyonlar için Schwarz sınır değer problemi denir.

Teorem 3.1.2. [5] $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} w_{\bar{z}} &= 0, & z &\in D \\ \operatorname{Re} w(z) \mid_{\partial\mathbb{D}} &= \gamma(z), & \gamma &\in C(\partial\mathbb{D}\,;\mathbb{R}) \\ \operatorname{Im} w(0) &= c, & c &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Schwarz problemi tek çözüme sahiptir ve bu çözüm

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} + ic \tag{3.1.1}$$

dir.

Tanım 3.1.3 (Dirichlet Sınır Değer Problemi). $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diskinde $w_{\bar{z}} = 0$ denkleminin

$$w(z) \mid_{\partial\mathbb{D}} = \gamma(z)\ ,\ z \in \partial\mathbb{D}, \gamma \in C(\partial\mathbb{D};\mathbb{C})$$

sınır koşullarını sağlayan $w(z)$ çözümünün bulunması problemine analitik fonksiyonlar için Dirichlet sınır değer problemi denir.

Teorem 3.1.4. [5] $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},\ \gamma \in C(\partial\mathbb{D};\mathbb{R})$ olmak üzere
$w_{\bar{z}} = 0$ denkleminin

$$w(z) \mid_{\partial\mathbb{D}} = \gamma(z), z \in \mathbb{D}$$

koşulunu sağlayan çözümünün mevcut olması için gerek ve yeter şart $|z| < 1$ için

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{\overline{\zeta}}{1 - \bar{z}\zeta} d\zeta = 0 \tag{3.1.2}$$

olmasıdır. Bu durumda da problemin tek çözümü

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} \tag{3.1.3}$$

Cauchy integral formülü ile verilir.

Üçüncü sınır değer problemi olan Neumann sınır değer problemini ifade etmek için öncelikle düzgün bir sınıra sahip bir bölgenin sınırında normal türevini tanımlamak gerekir. Bu yönlü türev, $|z-a| = r$ çemberi üzerinde yarıçap vektörü yönündedir. Yani; birim normal vektörü $\nu = \frac{(z-a)}{r}$ olmak üzere bu yöndeki normal türev

$$\partial_\nu = \partial_r = \frac{z}{r}\partial_z + \frac{\bar{z}}{r}\partial_{\bar{z}}$$

olarak yazılır. Özel olarak birim disk için

$$\partial_r = z\partial_z + \bar{z}\partial_{\bar{z}}$$

dir.

Tanım 3.1.5 (**Neumann Sınır Değer Problemi**). $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diskinde $w_{\bar{z}} = 0$ denkleminin $c \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\partial_\nu w(z) \mid_{\partial\mathbb{D}} = \gamma(z) \, , \; w(0) = c, \quad z \in \partial\mathbb{D}, \; \gamma \in C(\partial\mathbb{D};\mathbb{C})$$

sınır koşullarını sağlayan $w(z)$ çözümünün bulunması problemine analitik fonksiyonlar için Neumann sınır değer problemi denir.

Teorem 3.1.6. [9] Birim diskte analitik fonksiyonlar için Neumann sınır değer probleminin çözülebilir olması için gerek ve yeter şart $|z| < 1$ için

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{(1-\bar{z}\zeta)\zeta} = 0 \tag{3.1.4}$$

olmasıdır. Bu durumda problemin çözümü

$$w(z) = c - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \log(1 - z\overline{\zeta}) \frac{d\zeta}{\zeta} \tag{3.1.5}$$

dır.

Bir diğer sınır değer problemi olan Robin sınır değer problemi aslında Dirichlet ve Neumann sınır değer problemlerinin bir birleşimidir.

Tanım 3.1.7 (Robin Sınır Değer Problemi). $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diskinde $w_{\bar{z}} = 0$ denkleminin

$$(w + \partial_\nu w)(z) \mid_{\partial\mathbb{D}} = \gamma(z)\,, \quad z \in \partial\mathbb{D}\,,\ \gamma \in C(\partial\mathbb{D};\mathbb{C})$$

sınır koşullarını sağlayan $w(z)$ çözümünün bulunması problemine analitik fonksiyonlar için Robin sınır değer problemi denir.

Teorem 3.1.8. [9] $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diskinde $\gamma \in C(\partial\mathbb{D};\mathbb{R})$ olmak üzere $w_{\bar{z}} = 0$ denkleminin

$$w(z) \mid_{\partial\mathbb{D}} = \gamma(z),\ z \in \mathbb{D}$$

koşulunu sağlayan çözümünün mevcut olması için gerek ve yeter şart $|z| < 1$ için

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{\overline{\zeta}}{1 - \bar{z}\zeta} d\zeta = 0 \tag{3.1.6}$$

olmasıdır. Bu durumda da problemin tek çözümü

$$w(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{\ln(1 - z\overline{\zeta})}{z} d\zeta \tag{3.1.7}$$

formundadır.

3.2. Birim Diskte Homojen Olmayan Cauchy-Riemann Denklemi için Sınır Değer Problemleri

Bu bölümde bir önceki bölümde verilen sınır değer problemlerinin homojen olmayan Cauchy-Riemann Denklemi için çözümleri incelenecektir.

Teorem 3.2.1. [5] $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diskinde $f \in L_1(D;\mathbb{C})$ olmak üzere $w_{\bar{z}} = f$ homojen olmayan Cauchy-Riemann denkleminin

$$\operatorname{Re} w|_{\partial\mathbb{D}} = \gamma, \quad \operatorname{Im} w(0) = c$$

koşullarını sağlayan çözümü vardır ve bu çözüm

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|<1} \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} + \frac{\overline{f(\zeta)}}{\overline{\zeta}} \frac{1 + z\overline{\zeta}}{1 - z\overline{\zeta}} \right] d\xi d\eta + ic \tag{3.2.1}$$

formülü ile tek olarak belirlenebilir.

Teorem 3.2.2. [5] $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diskinde

$$\begin{aligned} w_{\bar{z}} &= f, \qquad z \in D,\ f \in L_1(D;\mathbb{C}) \\ w|_{\partial D} &= \gamma, \qquad \gamma \in C(\partial D;\mathbb{C}) \end{aligned}$$

olarak tanımlanan homojen olmayan Cauchy-Riemann denklemi için Dirichlet probleminin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul $|z| < 1$ birim D diskinde

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{\bar{z}}{1 - \bar{z}\zeta} d\zeta = \frac{1}{\pi} \int\limits_{|\zeta|<1} f(\zeta) \frac{\bar{z}}{1 - \bar{z}\zeta} d\xi d\eta \tag{3.2.2}$$

olmasıdır.

Bu durumda Dirichlet probleminin tek çözümü

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \int\limits_{|\zeta|<1} f(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \tag{3.2.3}$$

olur.

Teorem 3.2.3. [5] $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diskinde $f \in C^{\alpha}(\mathbb{D};\mathbb{C}),\ 0 < \alpha < 1,\ \gamma \in C(\partial\mathbb{D};\mathbb{C}),\ c \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$w_{\bar{z}} = f,\ \partial_{\nu} w|_{\partial\mathbb{D}} = \gamma,\ w(0) = c,$$

homojen olmayan Cauchy-Riemann denklemi için Neumann sınır değer probleminin çözülebilir olması için gerek ve yeter şart $|z| < 1$ için

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{(1-\bar{z}\zeta)\zeta} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} f(\zeta)\frac{d\overline{\zeta}}{1-\bar{z}\zeta} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1} \frac{\bar{z}f(\zeta)}{(1-\bar{z}\zeta)^2}d\xi d\eta = 0 \tag{3.2.4}$$

olmasıdır.

Bu durumda tek çözüm

$$w(z) = c - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} (\gamma(\zeta) - \overline{\zeta} f(\zeta))\log(1 - z\overline{\zeta})\frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1} \frac{zf(\zeta)}{\zeta(\zeta - z)}d\xi d\eta \tag{3.2.5}$$

dır.

Teorem 3.2.4. [9] Birim diskte homojen olmayan Cauchy-Riemann denklemi için Robin sınır değer problemi

$$w_{\bar{z}} = f,\ (w + \partial_{\nu} w)|_{\partial\mathbb{D}} = \gamma,\ f \in L_1(\mathbb{D},\mathbb{C}) \cap C(\partial\mathbb{D},\mathbb{C})$$

tek türlü çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul $|z| < 1$ için

$$z\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1} \left\{\gamma(\zeta) - \overline{\zeta} f(\zeta)\right\}\frac{d\zeta}{1-\bar{z}\zeta} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{|z|<1} \frac{\bar{z}\zeta}{(1-\bar{z}\zeta)^2} f(\zeta)d\xi d\eta\right\} = 0 \tag{3.2.6}$$

dır.

Bu durumda çözüm

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1} \left(\overline{\zeta} f(\zeta) - \gamma(\zeta)\right)\frac{\ln(1 - z\overline{\zeta})}{z}d\zeta - \frac{1}{\pi}\int\limits_{|z|<1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\xi d\eta \tag{3.2.7}$$

olarak verilir.

3.3. Birim Diskte Beltrami Denklemi için Sınır Değer Problemleri

$|q(z)| \leq q_0 < 1$ koşulunu sağlayan $q(z)$ fonksiyonu için

$$w_{\bar{z}} + q(z)w_z$$

formunda kompleks gösterime sahip Beltrami denklemi birinci basamaktan kısmi diferensiyel denklemlerden oluşan Cauchy-Riemann sisteminin daha genel halidir.

Burada $q(z)$ üzerine konulan koşul sistemin kuvvetli eliptikliğini sağlar ve eliptiklik koşulu olarak adlandırılır. Beltrami denkleminin çözümleri geometrik fonksiyon teorisinin temel konularından birisi olan quasikonform dönüşümlerdir. Çalışmanın bundan sonraki bölümlerinde $z \in \mathbb{D}$ için $q(z) = c$ (c sabit) alınacaktır. Yine bu bölümde Beltrami denklemi ile ilgili teoremler de ispatsız olarak verilecektir.

Teorem 3.3.1. [12] Birim diskte $f \in L_p(\overline{\mathbb{D}})$, $p > 2$, $\gamma \in C(\partial\mathbb{D}, \mathbb{R})$ ve $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$w_{\bar{z}} + cw_z = f, \quad \mathrm{Re}\, w|_{\partial\mathbb{D}} = \gamma, \quad \mathrm{Im}\, w(0) = a$$

olarak verilen Schwarz sınır değer problemi çözülebilirdir ve çözüm

$$\begin{aligned} w(z) \quad = \quad & \varphi(z) + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|<1} \left\{ c^k \Pi_1^k (f - c\varphi')(\zeta) \frac{\zeta - z}{\zeta(\zeta - z)} \right. \\ & \left. + \bar{c}^k \overline{\Pi_1^k (f - c\varphi')}(\zeta) \frac{1 + z\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}(1 - z\overline{\zeta})} \right\} d\xi\, d\eta \qquad (3.3.1) \end{aligned}$$

dır.

Burada $\varphi(z)$ fonksiyonu ve Π_1 operatörü

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}+ia \tag{3.3.2}$$

$$\Pi_1\rho(z) := -\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\left\{\frac{\rho(\zeta)}{(\zeta-z)^2}+\frac{\overline{\rho}(\zeta)}{(1-z\overline{\zeta})^2}\right\}d\xi d\eta \tag{3.3.3}$$

dır.

Teorem 3.3.2 ([12], [17]). Birim diskte $p>2$ için $f\in L_p(\overline{\mathbb{D}})$ ve $\gamma\in C(\partial\mathbb{D};\mathbb{C})$ olmak üzere;

$$w_{\overline{z}}+cw_z=f,\quad w|_{\partial\mathbb{D}}=\gamma$$

Dirichlet sınır değer probleminin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{1}{1+c\overline{z\zeta}}\frac{\overline{z}d\zeta}{1-\overline{z}\zeta}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k c^k\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}f(\zeta)(\overline{\zeta-z})^k\frac{\overline{z}^{k+1}d\xi d\eta}{(1-\overline{z}\zeta)^{k+1}} \tag{3.3.4}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Bu durumda problemin tek çözümü

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z-c(\overline{\zeta-z})} \\ &\quad -\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z-c(\overline{\zeta-z})} \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

dır.

Teorem 3.3.3. [13] Birim diskte Beltrami için Neumann sınır değer problemi

$$w_z+pw_z=f,\quad f\in L_q(\mathbb{D};\mathbb{C}),\ q>2,\ p\in\mathbb{C},\ |p|<1,$$
$$(\partial_\nu w)|_{\partial\mathbb{D}}=\gamma,\ w(0)=0,\quad \gamma\in C(\partial\mathbb{D},\mathbb{C}),$$

çözülebilirdir ancak ve ancak $|z|<1$ için

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\gamma(\zeta)-\overline{\zeta}f(\zeta)}{\zeta-p\overline{\zeta}}\frac{1+p\overline{z}^2}{1-\overline{z}\zeta-p\overline{z}(\overline{z-\zeta})}d\zeta$$
$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{(1+p\overline{z}^2)\overline{z}}{\left(1-\overline{z}\zeta-p\overline{z}(\overline{z-\zeta})\right)^2}d\xi d\eta=0 \qquad (3.3.6)$$

sağlanmasıdır.

Bu durumda tek çözüm

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\gamma(\zeta)-\overline{\zeta}f(\zeta)}{\zeta-p\overline{\zeta}}\log\frac{\zeta-p\overline{\zeta}}{\zeta-z-p(\overline{\zeta-z})}d\zeta$$
$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{z-p\overline{z}}{(\zeta-p\overline{\zeta})\left(\zeta-z-p(\overline{\zeta-z})\right)}d\xi d\eta \qquad (3.3.7)$$

dır.

3.4. Birim Diskte Bitsadze Denklemi için Sınır Değer Problemleri

İkinci basamaktan temel kompleks kısmi türevli denklemlerden birisi de $w_{\overline{z}\overline{z}}=f$ formunda homojen olmayan Bitsadze denklemidir.

Bu bölümde literatürde yapılan Bitsadze denklemi için bazı sınır değer problemleri birim disk esas alınarak çözülecektir. Bu bölümün önemi bir sonraki bölümün konusu olan halkasal bölgede aynı problemlerin çözümlerinin araştırılmasında yardımcı olmasıdır.

Teorem 3.4.1. [3] Birim diskte

$$w_{\overline{z}\overline{z}}=f,\ w|_{\partial\mathbb{D}}=\gamma_0,\ w_{\overline{z}}|_{\partial\mathbb{D}}=\gamma_1;\ f\in L_1(\mathbb{D};\mathbb{C}),\ \gamma_0,\ \gamma_1\in C(\partial\mathbb{D};\mathbb{C}),\ |z|<1 \qquad (3.4.1)$$

olarak verilen homojen olmayan Bitsadze denklemi için Dirichlet sınır değer probleminin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul $|z| < 1$ için

$$\frac{\bar{z}}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\left(\frac{\gamma_0(\zeta)}{1-\bar{z}\zeta}-\frac{\gamma_1(\zeta)}{\zeta}\right)d\zeta+\frac{\bar{z}}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{\overline{\zeta-z}}{1-\bar{z}\zeta}d\xi d\eta=0 \tag{3.4.2}$$

ve

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma_1(\zeta)\frac{\bar{z}d\zeta}{1-\bar{z}\zeta}-\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{\bar{z}d\xi d\eta}{1-\bar{z}\zeta}=0 \tag{3.4.3}$$

koşullarının sağlanmasıdır.

Bu durumda çözüm

$$\begin{aligned} w(z) \;=\; & \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma_0(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma_1(\zeta)\frac{\overline{\zeta-z}}{\zeta-z}d\zeta \\ & +\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{\overline{\zeta-z}}{\zeta-z}d\xi d\eta \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

olarak verilir.

Teorem 3.4.2. [3] Birim diskte

$$\begin{aligned} & w_{\bar{z}\bar{z}}=f,\; w|_{\partial\mathbb{D}}=\gamma_0,\; \partial_\nu w_{\bar{z}}|_{\partial\mathbb{D}}=\gamma_1,\; w_{\bar{z}}(0)=c; \\ & f\in L_1(\mathbb{D};\mathbb{C})\cap C(\partial\mathbb{D};\mathbb{C}),\; \gamma_0,\;\gamma_1\in C(\partial\mathbb{D};\mathbb{C}),\; c\in\mathbb{C} \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

olarak verilen homojen olmayan Bitsadze denklemi için Dirichlet-Neumann sınır değer probleminin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul $z\in\mathbb{D}$ için

$$c-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma_0(\zeta)\frac{d\zeta}{1-\bar{z}\zeta}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{1-|\zeta|^2}{\zeta(1-\bar{z}\zeta)}d\xi d\eta=0 \tag{3.4.6}$$

ve

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}(\gamma_1(\zeta)-\overline{\zeta}f(\zeta))\frac{d\zeta}{\zeta(1-\bar{z}\zeta)}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\frac{\bar{z}f(\zeta)}{(1-\bar{z}\zeta)^2}d\xi d\eta=0 \tag{3.4.7}$$

koşullarının sağlanmasıdır.

Bu durumda çözüm

$$
\begin{aligned}
w(\zeta) &= c\bar{z}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma_0(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z} \\
&\quad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\left(\gamma_1(\zeta)-\overline{\zeta}f(\zeta)\right)\frac{1-|z|^2}{z}\log(1-z\overline{\zeta})\frac{d\zeta}{\zeta} \\
&\quad +\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{|\zeta|^2-|z|^2}{\zeta(\zeta-z)}d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{3.4.8}
$$

ile verilir.

3.5. Beltrami Denklemine İndirgenebilen n. Basamaktan Bir Denklem için Sınır Değer Problemleri

[12] ve [13] nolu kaynaklarda $w_{\bar{z}}+cw_z=f$ Beltrami denklemi için Dirichlet, Schwarz, Neumann ve Robin sınır değer problemleri incelenmiştir. Ayrıca, yine [12] de Beltrami denklemine indirgenebilen 2. basamaktan $w_{z\bar{z}}+cw_{\bar{z}\bar{z}}=f,(z\in D,|c|<1)$ denklemi için bir Dirichlet probleminin çözümü hakkında bilgi verilmiştir.

Bu bölümde, $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ birim diskinde sabit katsayılı n. basamaktan

$$
\frac{\partial^n w(z)}{\partial\bar{z}^n}+c\frac{\partial^n w(z)}{\partial z\,\partial\bar{z}^{n-1}}=f(z),\ z\in D,\ f\in L_p(D,\mathbb{C}),\ n=1,2,..., \tag{3.5.1}
$$

kompleks kısmi türevli denkleminin

$$
\partial_{\bar{z}}^k w|_{\partial\mathbb{D}}=\gamma_k\ ,0\le k\le n-1,\ \gamma_k\in C(\partial\mathbb{D},\mathbb{C}) \tag{3.5.2}
$$

Dirichlet sınır koşullarını sağlayan çözümünün mevcut olması için gerek ve yeter koşullar altında elemanter çözüm ortaya konmaktadır.

(3.5.1)-(3.5.2) problemini incelemeden önce polianalitik fonksiyon olarak tanımlanan $\partial_{\bar{z}}^n w=0$ formundaki kompleks kısmi türevli denklemin homojen olmayan tipi $(\partial_{\bar{z}}^n w=f)$ için Dirichlet sınır değer probleminin çözülebilme koşullarını ve çözümünü veren teoremi ifade edelim:

Teorem 3.5.1. [14] Birim diskte $f \in L_1(\mathbb{D};\mathbb{C}), \gamma_k \in C(\partial\mathbb{D},\mathbb{C}), 0 \le k \le n-1$ olmak üzere

$$\partial_{\bar{z}}^n w = f(z),\ \ \partial_{\bar{z}}^k w|_{\partial D} = \gamma_k,\ 0 \le k \le n-1,$$

şeklinde tanımlanan Dirichlet için sınır değer probleminin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşullar $0 \le k \le n-1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &\sum_{\lambda=k}^{n-1} \frac{\bar{z}}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} (-1)^{\lambda-k} \frac{\gamma_\lambda(\zeta)}{1-\bar{z}\zeta} \frac{(\overline{\zeta - z})^{\lambda-k}}{(\lambda-k)!} d\zeta \\ &\qquad + \frac{(-1)^{n-k}}{\pi} \bar{z} \int\limits_{|\zeta|<1} \frac{f(\zeta)}{1-\bar{z}\zeta} \frac{(\overline{\zeta - z})^{n-1-k}}{(n-1-k)!} d\xi d\eta = 0 \end{aligned} \tag{3.5.3}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır. Bu durumda tek çözüm

$$\begin{aligned} w(z) \;\; = \;\; &\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2\pi i} \frac{1}{k!} \int\limits_{|\zeta|=1} \gamma_k(\zeta) \frac{(\overline{\zeta - z})^k}{\zeta - z} d\zeta \\ &\qquad + \frac{(-1)^n}{\pi} \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_{|\zeta|<1} f(\zeta) \frac{(\overline{\zeta - z})^{n-2}}{\zeta - z} d\xi d\eta \end{aligned} \tag{3.5.4}$$

dir.

Teorem 3.5.2. $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diskinde $|c| < 1$ olmak üzere

$$\partial_{\bar{z}}^n w + c\partial_z \partial_{\bar{z}}^{n-1} w = f(z),\ f \in L_p(\mathbb{D},\mathbb{C}),\ p > 2,\ n = 2,3,..., \tag{3.5.5}$$

$$\partial_{\bar{z}}^{k-1} w|_{\partial\mathbb{D}} = \gamma_k,\ \gamma_k \in C(\partial\mathbb{D};\mathbb{C}),\ 0 \le k \le n-1, \tag{3.5.6}$$

şeklinde tanımlanan sınır değer probleminin çözülebilir olması için gerek ve yeter şartlar her $z \in \mathbb{D}$ için f, γ_k fonksiyonlarının

$$I_1(z,\zeta) = \frac{1}{(n-k-2)!} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} c^r \frac{(\bar{z})^{r-1}}{(1-\bar{z}\zeta)^r} \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu \binom{r}{\nu} \frac{(\overline{\zeta - z})^{n-k+r-1}}{n-k+\nu-1}$$

ve

$$I_2(z,\zeta)=\frac{1}{(n-2)!}\sum_{r=1}^{\infty}c^r\frac{(\overline{\zeta-z})^{r-1}}{(\zeta-z)^{r-1}}\sum_{\nu=0}^{r}\frac{(-1)^\nu}{n+\nu-1}\binom{r}{\nu}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\sum_{\lambda=k}^{n-2}\frac{\bar{z}}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}(-1)^{\lambda-k}\frac{\gamma_\lambda(\zeta)}{1-\bar{z}\zeta}\frac{(\overline{\zeta-z})^{\lambda-k}}{(\lambda-k)!}d\zeta\\
&+\frac{(-1)^{n-k-1}}{2\pi i}\bar{z}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma_{n-1}(\zeta)\frac{(\overline{\zeta-z})^{n-k-1}}{(n-k-1)!(1-\bar{z}\zeta)}d\zeta\\
&+\frac{(-1)^{n-k-1}}{2\pi i}\bar{z}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma_{n-1}(\zeta)I_1(z,\zeta)d\zeta+\frac{(-1)^{n-k-1}}{\pi}\bar{z}\int\limits_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{\bar{z}I_1(z,\zeta)}{1-\bar{z}\zeta}d\xi d\eta=0
\end{aligned}$$

ve

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma_{n-1}(\zeta)\frac{2+c\bar{z}\overline{\zeta}}{1+c\overline{z\overline{\zeta}}}\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\zeta=\frac{\bar{z}}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\frac{f(\zeta)}{1-\bar{z}\zeta+c\bar{z}(\overline{\zeta-z})}d\xi d\eta$$

eşitliklerini sağlamasıdır.

Bu durumda verilen problemin tek çözümü

$$\begin{aligned}
w(z)\quad=\quad&\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-1)^k}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\gamma_k(\zeta)}{k!}\frac{(\overline{\zeta-z})^k}{(\zeta-z)}d\zeta\\
&+\frac{(-1)^{n-1}}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma_{n-1}(\zeta)\frac{(\overline{\zeta-z})^{n-1}}{(n-1)!(\zeta-z)}d\zeta\\
&+\frac{(-1)^{n-1}}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma_{n-1}(\zeta)I_2(z,\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}\\
&-\frac{(-1)^{n-1}}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}f(\zeta)I_2(z,\zeta)\frac{d\xi d\eta}{(\zeta-z)^2}
\end{aligned}$$

dir.

İspat. (3.5.5) denkleminde

$$\partial_{\bar{z}}^{n-1} w = g \tag{3.5.7}$$

şeklinde bir değişken değiştirmesi yapılırsa bu denklem

$$g_{\bar{z}} + c g_z = f; f \in L_p(D,\mathbb{C}), p > 2 \tag{3.5.8}$$

Beltrami denklemine indirgenir ve (3.5.6) daki son sınır koşulundan

$$g|_{\partial\mathbb{D}} = \gamma_{n-1} \tag{3.5.9}$$

Dirichlet koşulu yazılabilir.

Diğer taraftan

$$\partial_{\bar{z}}^{n-1} w = g(z),\ g \in L_1(\mathbb{D};\mathbb{C}), \tag{3.5.10}$$

$$\partial_{\bar{z}}^{k} w|_{\partial D} = \gamma_k,\ 0 \le k \le n-2,\ \gamma_k \in C(\partial\mathbb{D},\mathbb{C}), \tag{3.5.11}$$

polianalitik fonksiyonlar için Dirichlet sınır değer problemi ortaya çıkar.

Dolayısıyla Teorem 3.3.2 ve Teorem 3.5.1 uygulanabilirdir. $g(\zeta)$, (3.5.3) de yerine yazılarak integrasyon sırası değiştirilirse

$$\begin{aligned}
&\sum_{\lambda=k}^{n-2} \frac{\bar{z}}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} (-1)^{\lambda-k} \frac{\gamma_\lambda(\zeta)}{1-\bar{z}\zeta} \frac{(\overline{\zeta - z})^{\lambda-k}}{(\lambda-k)!} d\zeta \qquad (3.5.12)\\
&+\frac{(-1)^{n-k-1}}{2\pi i}\bar{z} \int\limits_{|t|=1} \gamma_{n-1}(t) \frac{1}{\pi} \int\limits_{|\zeta|<1} \frac{(\overline{\zeta - z})^{n-k-2}}{(n-k-2)!(1-\bar{z}\zeta)} \frac{d\xi d\eta}{t-\zeta} dt\\
&+\frac{(-1)^{n-k-1}}{2\pi i}\bar{z} \int\limits_{|t|=1} \gamma_{n-1}(t) \frac{1}{\pi} \int\limits_{|\zeta|<1} \frac{(\overline{\zeta - z})^{n-k-2}}{(n-k-2)!} \frac{c(\overline{t-\zeta})}{t-\zeta-c(\overline{t-\zeta})} \frac{d\xi d\eta}{(1-\bar{z}\zeta)} dt\\
&-\frac{(-1)^{n-k-1}}{\pi}\bar{z} \int\limits_{|t|<1} f(t) \frac{1}{\pi} \int\limits_{|\zeta|<1} \frac{(\overline{\zeta - z})^{n-k-2}}{(n-k-2)!} \frac{1}{t-\zeta-c(\overline{t-\zeta})} \frac{d\xi d\eta}{1-\bar{z}\zeta} dt_1 dt_2; \quad \begin{array}{c}\zeta = \xi + i\eta\\ t = t_1 + it_2\end{array},\\
=\ & 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

Burada Cauchy-Pompeiu gösterilimi kullanılarak (3.5.12) nın ikinci terimi için

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\frac{(\overline{\zeta-z})^{n-k-2}}{(n-k-2)!(1-\bar{z}\zeta)}\frac{d\xi d\eta}{t-\zeta} \tag{3.5.13}$$
$$=\frac{(\overline{t-z})^{n-k-1}}{(n-k-1)!(1-\bar{z}t)}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{(\overline{\zeta-z})^{n-k-1}}{(n-k-1)!(1-\bar{z}\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta-t}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{(\overline{\zeta-z})^{n-k-1}}{(1-\bar{z}\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta-t} &= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{(\overline{\zeta-z})^{n-k-1}}{(\overline{\zeta-z})}\frac{d\overline{\zeta}}{1-t\overline{\zeta}}\\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{(\overline{\zeta-z})^{n-k-2}}{(1-t\overline{\zeta})}d\overline{\zeta}=0\end{aligned}$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\frac{(\overline{\zeta-z})^{n-k-2}}{(n-k-2)!(1-\bar{z}\zeta)}\frac{d\xi d\eta}{t-\zeta}=\frac{(\overline{t-z})^{n-k-1}}{(n-k-1)!(1-\bar{z}t)}$$

yazılabilir. Benzer şekilde (3.5.12) in diğer terimlerindeki integraller için de

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\frac{(\overline{\zeta-z})^{n-k-2}}{(n-k-2)!}\frac{c(\overline{t-\zeta})}{t-\zeta-c(\overline{t-\zeta})}\frac{d\xi d\eta}{(1-\bar{z}\zeta)}$$
$$=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}c^r}{(n-k-2)!}\frac{(\bar{z})^{r-1}}{(1-\bar{z}t)^r}\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^{\nu}\binom{r}{\nu}\frac{(\overline{t-z})^{n-k+r-1}}{n-k+\nu-1}$$

ve

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\frac{(\overline{\zeta-z})^{n-k-2}}{(n-k-2)!}\frac{1}{t-\zeta-c(\overline{t-\zeta})}\frac{d\xi d\eta}{(1-\bar{z}\zeta)}$$
$$=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}c^r}{(n-k-2)!}\frac{(\bar{z})^{r}}{(1-\bar{z}t)^{r+1}}\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^{\nu+1}\binom{r}{\nu}\frac{(\overline{t-z})^{n-k+r-1}}{n-k+\nu-1}$$

olduğu görülebilir.

Dolayısıyla (3.5.3) çözülebilme koşulu

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\lambda=k}^{n-2} \frac{\bar{z}}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} (-1)^{\lambda-k} \frac{\gamma_\lambda(\zeta)}{1-\bar{z}\zeta} \frac{(\overline{\zeta-z})^{\lambda-k}}{(\lambda-k)!} d\zeta \\
&+\frac{(-1)^{n-k-1}}{2\pi i} \bar{z} \int\limits_{|\zeta|=1} \gamma_{n-1}(\zeta) \frac{(\overline{\zeta-z})^{n-k-1}}{(n-k-1)!(1-\bar{z}\zeta)} d\zeta \\
&+\frac{(-1)^{n-k-1}}{2\pi i} \bar{z} \int\limits_{|\zeta|=1} \gamma_{n-1}(\zeta) \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1} c^r}{(n-k-2)!} \frac{(\bar{z})^{r-1}}{(1-\bar{z}\zeta)^r} \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu \binom{r}{\nu} \frac{(\overline{\zeta-z})^{n-k+r-1}}{n-k+\nu-1} d\zeta \\
&+\frac{(-1)^{n-k-1}}{\pi} \bar{z} \int\limits_{|\zeta|<1} f(\zeta) \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1} c^r}{(n-k-2)!} \frac{(\bar{z})^{r}}{(1-\bar{z}\zeta)^{r+1}} \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^{\nu+1} \binom{r}{\nu} \frac{(\overline{\zeta-z})^{n-k+r-1}}{n-k+\nu-1} d\xi d\eta \\
&= 0
\end{aligned}
$$

şekline gelir.

Problemin çözümü için (3.3.5) deki $g(\zeta)$ değeri, (3.5.4) de yerine yazılarak integrasyon sırası değiştirilirse, $t = t_1 + it_2$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
w(z) \;=\; & \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{\gamma_k(\zeta)}{k!} \frac{(\overline{\zeta-z})^k}{(\zeta-z)} d\zeta \\
&+\frac{(-1)^{n-1}}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \gamma_{n-1}(t) \left[\frac{1}{\pi} \int\limits_{|\zeta|<1} \frac{(\overline{\zeta-z})^{n-2}}{(n-2)!(\zeta-z)} \frac{d\xi d\eta}{t-\zeta} \right] dt \\
&+\frac{(-1)^{n-1}}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \gamma_{n-1}(t) \left[\frac{1}{\pi} \int\limits_{|\zeta|<1} \frac{(\overline{\zeta-z})^{n-2}}{(n-2)!(\zeta-z)} \frac{c(\overline{t-\zeta})}{t-\zeta-c(\overline{t-\zeta})} d\xi d\eta \right] dt \\
&-\frac{(-1)^{n-1}}{\pi} \int\limits_{|t|<1} f(t) \left[\frac{1}{\pi} \int\limits_{|\zeta|<1} \frac{(\overline{\zeta-z})^{n-2}}{(n-2)!(\zeta-z)} \frac{d\xi d\eta}{t-\zeta-c(\overline{t-\zeta})} \right] dt_1 dt_2
\end{aligned}
\tag{3.5.14}
$$

elde edilir.

Burada

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\frac{(\overline{\zeta-z})^{n-2}}{(n-2)!(\zeta-z)}\frac{d\xi d\eta}{\zeta-t}\\
&=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\frac{(\overline{\zeta-z})^{n-2}}{(n-2)!(t-z)}\left(\frac{1}{\zeta-t}-\frac{1}{\zeta-z}\right)d\xi d\eta\\
&=\frac{(\overline{t-z})^{n-1}}{(n-1)!(t-z)}-\frac{1}{2\pi i(n-1)!(t-z)}\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\left(\frac{(\overline{\zeta-z})^{n-1}}{\zeta-t}-\frac{(\overline{\zeta-z})^{n-1}}{\zeta-z}\right)d\zeta\\
&=\frac{(\overline{t-z})^{n-1}}{(n-1)!(t-z)}+\frac{1}{2\pi i(n-1)!(t-z)}\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}(\overline{\zeta-z})^{n-1}\left(\frac{1}{1-t\overline{\zeta}}-\frac{1}{1-z\overline{\zeta}}\right)\frac{d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}}\\
&=\frac{(\overline{t-z})^{n-1}}{(n-1)!(t-z)}
\end{aligned}
$$

olduğu göz önüne alınarak diğer integraller hesaplanırsa

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\frac{(\overline{\zeta-z})^{n-2}}{(n-2)!(\zeta-z)}\frac{c(\overline{t-\zeta})}{t-\zeta-c(\overline{t-\zeta})}d\xi d\eta\\
&\qquad=\frac{1}{(n-2)!}\sum_{r=1}^{\infty}c^r\frac{(\overline{t-z})^{r-1}}{(t-z)^r}\sum_{\nu=0}^{r}\frac{(-1)^\nu}{n+\nu-1}\binom{r}{\nu}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\frac{(\overline{\zeta-z})^{n-2}}{(n-2)!(\zeta-z)}\frac{d\xi d\eta}{t-\zeta-c(\overline{t-\zeta})}\\
&\qquad=\frac{1}{(n-2)!}\sum_{r=0}^{\infty}c^r\frac{(\overline{t-z})^{r-1}}{(t-z)^{r+1}}\sum_{\nu=0}^{r}\frac{(-1)^\nu}{n+\nu-1}\binom{r}{\nu}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Sonuç olarak bu değerlerin (3.5.14) de yerine yazılmasıyla

$$
\begin{aligned}
w(z) &= \sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-1)^k}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\gamma_k(\zeta)}{k!}\frac{(\overline{\zeta-z})^k}{(\zeta-z)}d\zeta \\
&+\frac{(-1)^{n-1}}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma_{n-1}(\zeta)\frac{(\overline{\zeta-z})^{n-1}}{(n-1)!(\zeta-z)}d\zeta \\
&+\frac{(-1)^{n-1}}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma_{n-1}(\zeta)\frac{1}{(n-2)!}\sum_{r=1}^{\infty}c^r\frac{(\overline{\zeta-z})^{r-1}}{(\zeta-z)^r}\sum_{\nu=0}^{r}\frac{(-1)^\nu}{n+\nu-1}\binom{r}{\nu}d\zeta \\
&-\frac{(-1)^{n-1}}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{1}{(n-2)!}\sum_{r=1}^{\infty}c^r\frac{(\overline{\zeta-z})^{r-1}}{(\zeta-z)^{r+1}}\sum_{\nu=0}^{r}\frac{(-1)^\nu}{n+\nu-1}\binom{r}{\nu}d\xi d\eta
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$\square$

Not 4. $n=1$ için (3.5.5)-(3.5.6) sınır değer problemi Beltrami denklemi için Dirichlet problemine denk olduğu görülebilir.

4 . HALKASAL BÖLGEDE SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Çalışmanın bu kısmında halkasal bölgede analitik fonksiyonlar için temel sınır değer problemlerin özel formda çözümleri verilecektir. Daha sonra da homojen olmayan Cauchy-Riemann Denklemi için sınır değer problemleri incelenecektir.

4.1. İntegral Gösterilimleri

r bir reel pozitif sayı olmak üzere kompleks düzlemin halkasal $R := \{z \in \mathbb{C}, 0 < r < |z| < 1\}$ bölgesini göz önüne alalım. R halkasal bölgesinde analitik fonksiyonlar için sınır değer problemlerini çözmek için aşağıdaki gösterim formülü önemli rol oynar:

Teorem 4.1.1. [21] w, R halkasal bölgede analitik ve $\overline{R}$ de sürekli olsun. Bu durumda

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R} \mathrm{Re}\, w(z)\left[\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{z}{r^{2n}\zeta-z}+\frac{\zeta}{\zeta-r^{2n}z}\right\}\right]\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}\overline{w(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta} \tag{4.1.1}$$

gösterilimi geçerlidir.

İspat. Cauchy teoreminden (Teorem 2.2.2) herhangi bir $z \in R$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R} w(z)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{r^{2n}\zeta-z}+\frac{\zeta}{\zeta-r^{2n}z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}=0, \tag{4.1.2}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R} w(z)\left[\frac{\bar{z}\zeta}{1-\bar{z}\zeta}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{r^{2n}\bar{z}\zeta-1}+\frac{\bar{z}\zeta}{\bar{z}\zeta-r^{2n}}\right)\right]\frac{d\zeta}{\zeta}=0 \tag{4.1.3}$$

yazılabilir.

(4.1.3) ün kompleks eşleniği ve (4.1.2), R de w fonksiyonu için uygulanan (2.2.2) Cauchy integral formülünün sağ tarafına eklenirse, bu durumda

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} w(\zeta)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{r^{2n}\zeta-z}+\frac{\zeta}{\zeta-r^{2n}z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} \overline{w(\zeta)}\left[\frac{z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{r^{2n}z\overline{\zeta}-1}+\frac{z\overline{\zeta}}{z\overline{\zeta}-r^{2n}}\right)\right]\frac{d\zeta}{\zeta} \end{aligned}$$

veya düzenleme ile

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} \mathrm{Re}\, w(\zeta)\left[\frac{\zeta}{\zeta-z}+\frac{z|\zeta|^2}{\zeta-z|\zeta|^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{r^{2n}\zeta-z}+\frac{\zeta}{\zeta-r^{2n}z}\right.\right. \\ &\quad \left.\left. -\frac{\zeta}{r^{2n}z|\zeta|^2-\zeta}-\frac{z|\zeta|^2}{z|\zeta|^2-r^{2n}\zeta}\right)\right]\frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} \mathrm{Im}\, w(\zeta)\left[\frac{\zeta}{\zeta-z}-\frac{z|\zeta|^2}{\zeta-z|\zeta|^2}\right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{r^{2n}\zeta-z}+\frac{\zeta}{\zeta-r^{2n}z}+\frac{\zeta}{r^{2n}z|\zeta|^2-\zeta}+\frac{z|\zeta|^2}{z|\zeta|^2-r^{2n}\zeta}\right)\right]\frac{d\zeta}{\zeta} \end{aligned}$$

elde edilir.

Sınır integrallerini ayırıp ve bazı kısaltmalar yapılırsa

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \mathrm{Re}\, w(\zeta)\left[\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{r^{2n}\zeta-z}+\frac{\zeta}{\zeta-r^{2n}z}\right)\right]\frac{d\zeta}{\zeta} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r} \mathrm{Re}\, w(\zeta)\left[\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{r^{2n}\zeta-z}+\frac{\zeta}{\zeta-r^{2n}z}\right)\right]\frac{d\zeta}{\zeta} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1} \mathrm{Im}\, w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} \end{aligned}$$

olup buradan

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} \mathrm{Re}\, w(\zeta)\left[\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{r^{2n}\zeta-z}+\frac{\zeta}{\zeta-r^{2n}z}\right)\right]\frac{d\zeta}{\zeta} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{\partial R} \mathrm{Im}\, w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r} \overline{w(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta} \end{aligned}$$

ifadesi yazılabilir.

Burada w, R de analitik olduğundan $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial R} \operatorname{Im} w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} = 0$ olduğu göz önüne alınırsa ispat tamamlanmış olur. □

Sonuç 4.1.1. $\overline{R}$ de sürekli ve R de analitik bir w fonksiyonunun reel kısmı

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} w(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R} \operatorname{Re} w(\zeta)\left[\frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta - z}} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r^{2n}\zeta}{r^{2n}\zeta - z} + \frac{r^{2n}\overline{\zeta}}{\overline{r^{2n}\zeta - z}}\right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \frac{r^{2n}z}{\zeta - r^{2n}z} + \frac{r^{2n}\overline{z}}{\overline{\zeta - r^{2n}z}}\right)\right]\frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r} \operatorname{Re} w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}\end{aligned}$$

formunda gösterilebilinir.

Bu bölümde $L_p(D;\mathbb{C})$ sınıfında genelleştirilmiş birinci basamaktan z ye ve $\overline{z}$ ye göre türevli fonksiyonların uzayı sırasıyla $W_z^{1,p}(D;\mathbb{C})$ ve $W_{\overline{z}}^{1,p}(D;\mathbb{C})$ ile ifade edilirken, $W_z^{1+\alpha}(\overline{D};\mathbb{C})\left(W_{\overline{z}}^{1+\alpha}(\overline{D};\mathbb{C})\right)$ ise $\overline{D}$ de genelleştirilmiş birinci basamaktan z $(\overline{z})$ ye göre türevli Hölder sürekli fonksiyonların uzayını ifade eder.

4.2. Halkasal Bölgede Analitik Fonksiyonlar İçin Temel Sınır Değer Problemleri

4.2.1. Schwarz Sınır Değer Problemi

Teorem 4.2.1. [21] R halkasal bölgesinde $c \in R$ ve $r < \rho < 1$ olmak üzere

$$w_{\overline{z}} = 0,\ z \in R;\ \operatorname{Re} w|_{\partial R} = \gamma,\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho} \operatorname{Im} w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} = c,\ \gamma \in C(\partial R; R) \tag{4.2.1}$$

olarak tanımlanan analitik fonksiyonlar için Schwarz sınır değer probleminin tek türlü çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul her $z \in R$ için

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r} \gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} = 0 \tag{4.2.2}$$

olmasıdır. Bu durumda tek çözüm

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\gamma(\zeta)\left[\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{r^{2n}\zeta}{r^{2n}\zeta-z}+\frac{r^{2n}z}{\zeta-r^{2n}z}\right\}\right]\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}+ic \tag{4.2.3}$$

dir.

İspat. (4.2.3) formülü R de analitik bir fonksiyon belirtir ve reel kısmı

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}w(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\gamma(\zeta)\left[\frac{\zeta}{\zeta-z}+\frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta-z}}-1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r^{2n}\zeta}{r^{2n}\zeta-z}+\frac{r^{2n}\overline{\zeta}}{\overline{r^{2n}\zeta-z}}\right.\right.\\ &\left.\left.+\frac{r^{2n}z|\zeta|^2}{r^{2n}z|\zeta|^2-|z|^2\zeta}+\frac{r^{2n}|z|^2\zeta}{z|\zeta|^2-r^{2n}|z|^2\zeta}\right)\right]\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\lim_{|z|\to 1,\, z\in R}\operatorname{Re}w(z)=\lim_{|z|\to 1,\, z\in R}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\left[\frac{\zeta}{\zeta-z}+\frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta-z}}-1\right]\frac{d\zeta}{\zeta},$$

$$\lim_{|z|\to r,\, z\in R}\operatorname{Re}w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}-\lim_{|z|\to r,\, z\in R}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}\gamma(\zeta)\left[\frac{\zeta}{\zeta-z}+\frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta-z}}-1\right]\frac{d\zeta}{\zeta}$$

olur.

Burada

$$\frac{\zeta}{\zeta-z}+\frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta-z}}-1$$

ifadesi ($|z|<1$ için $|\zeta|=1$ veya $|z|>r$ için $|\zeta|=r$), $|z|<1$ birim disk ve $|z|>r$ bölgeleri için Poisson çekirdeğidir. Poisson çekirdeği $|z|<1$ ve $|z|>r$ için $\gamma\in C(\partial R;\mathbb{C})$ olmak üzere

$$\lim_{|z|\to 1,\, |z|<1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\left[\frac{\zeta}{\zeta-z}+\frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta-z}}-1\right]\frac{d\zeta}{\zeta} = \gamma(z), \tag{4.2.4}$$

$$\lim_{|z|\to 1,\, |z|>r}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}\gamma(\zeta)\left[\frac{\zeta}{\zeta-z}+\frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta-z}}-1\right]\frac{d\zeta}{\zeta} = -\gamma(z) \tag{4.2.5}$$

özelliklerini sağlar. Buradan (4.2.3) fonksiyonun (4.2.1) in ilk koşulunu sağlaması için gerek ve yeter koşulun (4.2.2) olduğu görülebilir.

Normalizasyon koşulu da denilen ikinci koşul ise

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=\rho} w(z)\frac{dz}{z} &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\gamma(\zeta)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=\rho}\left[\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r^{2n}\zeta}{r^{2n}\zeta-z}+\frac{r^{2n}z}{\zeta-r^{2n}z}\right)\right]\frac{dz}{z}\frac{d\zeta}{\zeta} \\
&\quad -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}+ic \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}+ic
\end{aligned}$$

olduğundan yine geçerlidir. □

4.2.2. Dirichlet Sınır Değer Problemi

Teorem 4.2.2. [21] R halkasal bölgede $\gamma\in C(\partial R;R)$ için

$$w_{\bar{z}}=0,\ z\in R;\ w|_{\partial R}=\gamma, \tag{4.2.6}$$

analitik fonksiyonlar için Dirichlet probleminin tek türlü çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul her $z\in R$ için

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\gamma(\zeta)\frac{\bar{z}d\zeta}{1-\bar{z}\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\gamma(z)\frac{\bar{z}d\zeta}{r^2-\bar{z}\zeta}=0 \tag{4.2.7}$$

dır.

Bu durumda tek çözüm Cauchy integrali ile tek türlü

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z} \tag{4.2.8}$$

olarak verilir.

İspat. (4.2.8) ile verilen w, Dirichlet probleminin bir çözümü olsun. Bu durumda, Cauchy integrali R de ve $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ olmak üzere $\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{R}$ de sürekli sınır değerlerine sahip bir analitik fonksiyon olduğundan

$$\lim_{z \to \zeta,\ z \in R} w(z) = \gamma(\zeta) \tag{4.2.9}$$

yazılabilir. $|z| < 1$ için

$$w\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \gamma(\zeta) \frac{\bar{z} d\zeta}{\bar{z}\zeta - 1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{\bar{z}}{\overline{z - \zeta}} \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \gamma(\zeta) \frac{|z|^2 \zeta}{|z|^2 \zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} \tag{4.2.10}$$

olduğuna dikkat edelim.

$$\begin{aligned} w(z) - w\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \left(\frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta - z}} - 1 \right) \frac{d\zeta}{\zeta} \\ & \quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \gamma(\zeta) \left(\frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{|z|^2 \zeta}{|z|^2 \zeta - z} \right) \frac{d\zeta}{\zeta} \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

farkı, (4.2.9) ve $|\zeta| = 1$ için Poisson çekirdeğinin özelliğinden ve $\lim\limits_{z \to \zeta,\ |z|<1} w\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)$ varolmasından dolayı

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ |z|<1}} w(z) - \lim_{\substack{z \to \zeta \\ |z|<1}} w\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \gamma(\zeta) \tag{4.2.12}$$

olur.

(4.2.9) tekrar göz önüne alınırsa

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ |z|<1}} w\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = 0 \tag{4.2.13}$$

olur.

$|z| > 1$ de $w(z)$ analitik ve sonsuzda sıfır değerini aldığından analitik fonksiyonlar için maksimum prensibi gereği $|z| > 1$ için $w(z) \equiv 0$ dır ve alır. Buna denk olarak $|z| < 1$ için $w(1/\bar{z}) \equiv 0$ dır. Yani; (4.2.7) de ilk koşul sağlanır.

$$w\left(\frac{r^2}{\bar{z}}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r} \gamma(\zeta)\frac{\bar{z}d\zeta}{\bar{z}\zeta - r^2},\ |z| < r \tag{4.2.14}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} w(z) - w\left(\frac{r^2}{\bar{z}}\right) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta)\left(\frac{\zeta}{\zeta - z} - \frac{|z|^2\zeta}{|z|^2\zeta - r^2 z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} \\ &\quad -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r} \gamma(\zeta)\left(\frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta - z}} - 1\right)\frac{d\zeta}{\zeta} \end{aligned} \tag{4.2.15}$$

farkı ve $|\zeta| = r$ için Poisson çekirdeğinin özelliğinden

$$\lim_{\substack{z\to\zeta \\ |z|>r}} w(z) - \lim_{\substack{z\to\zeta \\ |z|>r}} w\left(\frac{r^2}{\bar{z}}\right) = \gamma(\zeta) \tag{4.2.16}$$

elde edilir. (4.2.9) a göre,

$$\lim_{\substack{z\to\zeta \\ |z|>r}} w\left(\frac{r^2}{\bar{z}}\right) = 0 \tag{4.2.17}$$

dır. Analitik fonksiyonlar için maksimum prensibi gereği $|z| > r$ için

$$w\left(\frac{r^2}{\bar{z}}\right) \equiv 0$$

dır. Böylece (4.2.7) nin ikinci koşulu da geçerlidir.

Sonuç olarak (4.2.7) nin gerekli olduğu ispatlanır. Yeterliliği ise açıktır. □

Not 5. Daha genel bölgelerde analitik fonksiyonlar için Dirichlet problemi (2.1.8) Plemelj-Sokhotzki formülleri ile ele alınır. Bunun için sınır değerinin Hölder sürekli olması gerekir. Halkasal bölgelerde ise Hölder sürekliliğin gerekli olmamasının nedeni bu bölgelerde Poisson çekirdeği yerine Cauchy çekirdeğinin çözülebilme koşullarında yer almasıdır.

4.2.3. Analitik Fonksiyonlar için Neumann Sınır Değer Problemi

Üçüncü sınır değer problemi olan Neumann sınır değer problemini formülize etmek için öncelikle düzgün sınıra sahip bir bölgenin sınırında normal türevi tanımlamak gerekir. R halkasal bölgesinde normal türevinin yönü, birim çember üzerinde yarıçap vektörü ile çakışırken, $|z| = r$ çemberi üzerinde ise ters yönlüdür.

Bu durumda, R halkasının sınırı üzerinde normal türev operatörü

$$\partial_{\nu_z} = \begin{cases} z\partial_z + \overline{z}\partial_{\overline{z}}, & |z| = 1, \\ -\frac{z}{r}\partial_z - \frac{\overline{z}}{r}\partial_{\overline{z}}, & |z| = r, \end{cases} \tag{4.2.18}$$

şeklinde olur.

Teorem 4.2.3. [21] R halkasal bölgede $\gamma \in C(\partial R; R),\ c \in \mathbb{C},\ z_0 \in R$ sabit bir nokta olmak üzere;

$$w_{\overline{z}} = 0,\ zw_z|_{\partial R} = \gamma,\ w(z_0) = c, \tag{4.2.19}$$

analitik fonksiyonlar için Neumann probleminin tek türlü çözülebilir olması için gerek ve yeter koşullar her $z \in R$ için

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} \gamma(\zeta) \frac{\overline{z} d\zeta}{1 - \overline{z}\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} \gamma(\zeta) \frac{\overline{z} d\zeta}{1 - \overline{z}\zeta} = 0, \tag{4.2.20}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{\overline{z} d\zeta}{r^2 - \overline{z}\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} \gamma(\zeta) \frac{\overline{z} d\zeta}{r^2 - \overline{z}\zeta} = 0 \tag{4.2.21}$$

sağlanmasıdır.

Ayrıca eğer yukarıdaki koşullara ek olarak

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} = 0 \tag{4.2.22}$$

sağlanırsa bu durumda problemin çözümü

$$w(z) = c + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \log \left| \frac{1 - z_0\overline{\zeta}}{1 - z\overline{\zeta}} \right|^2 \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} \gamma(\zeta) \log \left| \frac{z_0\overline{\zeta} - r^2}{z\overline{\zeta} - r^2} \right|^2 \frac{d\zeta}{\zeta} \tag{4.2.23}$$

olur.

İspat. $\varphi := zw_z$ olacak şekilde yeni bir fonksiyon tanımlayalım. w analitik olduğundan φ fonksiyonu da analitiktir.

w için (4.2.19) Neumann problemi, φ analitik fonksiyonu için Dirichlet problemine denktir. Teorem 4.2.2 göre çözümün

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial R} \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

olması için gerek ve yeter koşul $z \in R$ için

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial R} \gamma(\zeta) \frac{\bar{z} d\zeta}{1 - \bar{z}\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial R} \gamma(\zeta) \frac{\bar{z} d\zeta}{r^2 - \bar{z}\zeta} = 0$$

olmasıdır.

Bu durumda

$$\begin{aligned} w_z(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial R} \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{z(\zeta - z)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \left(\frac{\overline{\zeta}}{1 - z\overline{\zeta}} + \frac{1}{z} \right) \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} \gamma(\zeta) \left(\frac{\overline{\zeta}}{r^2 - z\overline{\zeta}} + \frac{1}{z} \right) \frac{d\zeta}{\zeta} \end{aligned}$$

dir.

Bu ifadenin z ye göre integrali alınırsa $c_0 \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned} w(z) &= c_0 - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \log(1 - z\overline{\zeta}) \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} \gamma(\zeta) \log(z\overline{\zeta} - r^2) \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &\quad + \frac{\log z}{2\pi i} \int\limits_{\partial R} \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Eğer (4.2.22) ek koşulu altında c_0

$$c_0 = c + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \log(1 - z_0\overline{\zeta}) \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} \gamma(\zeta) \log(z_0\overline{\zeta} - r^2) \frac{d\zeta}{\zeta}$$

olarak belirlenirse (4.2.19) Neumann probleminin (4.2.23) çözümü elde edilir. □

Not 6. Eğer

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{\overline{z} d\zeta}{1 - \overline{z}\zeta} &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} \gamma(\zeta) \frac{\overline{z} d\zeta}{1 - \overline{z}\zeta} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{\overline{z} d\zeta}{r^2 - \overline{z}\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} \gamma(\zeta) \frac{\overline{z} d\zeta}{r^2 - \overline{z}\zeta}, \\ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial R} \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} &= 0 \end{aligned} \tag{4.2.24}$$

koşulları sağlanırsa (4.2.19) Neumann probleminin çözümü

$$w(z) = c - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \log \left| \frac{1 - z\overline{\zeta}}{1 - z_0\overline{\zeta}} \right|^2 \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} \gamma(\zeta) \log \left| \frac{z\overline{\zeta} - r^2}{z_0\overline{\zeta} - r^2} \right|^2 \frac{d\zeta}{\zeta} \tag{4.2.25}$$

formunda olur.

Gerçekten, (4.2.25) $\overline{z}$ ye göre türev alınırsa ve (4.2.24) ilk kısmı kullanılırsa

$$w_{\overline{z}}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{1 - \overline{z}\zeta} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{r^2 - \overline{z}\zeta} = 0$$

olduğu görülebilir.

Yani, (4.2.25) daha önce belirtilen sınır koşullarını sağlar, çünkü (4.2.24) koşulu (4.2.20) ve (4.2.21) koşullarını içerir.

4.3. Halkasal Bölgede Homojen Olmayan Cauchy-Riemann Denklemi için Sınır Değer Problemleri

Bu bölümde, homojen olmayan Schwarz, Dirichlet ve Neumann sınır eğer problemlerin halkasal R bölgesinde Pompeiu operatörünün özellikleri kullanılarak homojen durumdaki hallerine yani analitik fonksiyonlar için sınır değer problemlerine indirgenerek çözümleri incelenecektir.

Teorem 4.3.1. [21] R halkasal bölgesinde $f \in L_p(R;\mathbb{C}),\ p>2,\ \gamma \in C(\partial R;R),\ c \in \mathbb{R}$ ve $r<\rho<1$ koşulunu sağlayan keyfi ρ reel sabiti için

$$w_{\bar{z}} = f,\, z \in R;\ \operatorname{Re} w|_{\partial R} = \gamma,\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho} \operatorname{Im} w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} = c, \tag{4.3.1}$$

Schwarz problemini göz önüne alalım. Bu problemin tek türlü çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul her $z \in R$ için

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R} \gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{R}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta} + \frac{\overline{f(\zeta)}}{\overline{\zeta}}\right) d\xi d\eta \tag{4.3.2}$$

olmasıdır. Bu durumda tek çözüm $w(z) \in W_{\bar{z}}^{1,p}(R;\mathbb{C})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\gamma(\zeta)\left[\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+K_1(z,\zeta)\right]\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} \\ &-\frac{1}{2\pi}\int_R\frac{f(\zeta)}{\zeta}\left[\frac{\zeta+z}{\zeta-z}-1+K_1(z,\zeta)\right]d\xi d\eta \\ &-\frac{1}{2\pi}\int_R\frac{\overline{f(\zeta)}}{\overline{\zeta}}\left[\frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}+1+K_2(z,\zeta)\right]d\xi d\eta \\ &+\frac{1}{2\pi}\int_{\rho<|\zeta|<1}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta}-\frac{\overline{f(\zeta)}}{\overline{\zeta}}\right)d\xi d\eta+ic \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

olarak verilir. Burada

$$K_1(z,\zeta) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{r^{2n}\zeta}{r^{2n}\zeta-z}+\frac{r^{2n}z}{\zeta-r^{2n}z}\right\}, \tag{4.3.4}$$

$$K_2(z,\zeta) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{r^{2n}}{r^{2n}-z\overline{\zeta}}+\frac{r^{2n}z\overline{\zeta}}{1-r^{2n}z\overline{\zeta}}\right\} \tag{4.3.5}$$

dır.

İspat. Detaylı ispat için [21] nolu kaynak incelenebilir. □

Teorem 4.3.2. [21] R halkasal bölgesinde $f \in L_p(R;\mathbb{C}),\ p>2,\ \gamma \in C(\partial R;R)$,

$$w_{\bar{z}} = f,\ z \in R;\ w|_{\partial R} = \gamma, \tag{4.3.6}$$

homojen olmayan Cauchy-Riemann denklemi için Dirichlet probleminin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul her $z \in R$ için

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\gamma(\zeta)\frac{\bar{z}d\zeta}{1-\bar{z}\zeta} = \frac{1}{\pi}\int_R f(\zeta)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\xi d\eta, \tag{4.3.7}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\gamma(\zeta)\frac{\bar{z}d\zeta}{r^2-\bar{z}\zeta} = \frac{1}{\pi}\int_R f(\zeta)\frac{\bar{z}}{r^2-\bar{z}\zeta}d\xi d\eta \tag{4.3.8}$$

olmaasıdır. Bu durumda çözüm $W_{\bar{z}}^{1,p}(R;\mathbb{C}) \cap C(\overline{R};\mathbb{C})$ sınıfında olup tek çözüm

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{\pi}\int_R f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z} \tag{4.3.9}$$

dır.

İspat. Eğer problem çözülebilirse, bu durumda (4.3.9) formülü Cauchy-Pompeiu gösteriminden elde edilebilir. Çözümün tekliği ise Teorem 4.2.2 nin bir sonucudur. Yeni bir φ fonksiyonunu

$$\varphi = w - Tf$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$\varphi_{\bar z} = 0,\ \varphi|_{\partial R} = \gamma - Tf \qquad (4.3.10)$$

sınır değer problemi elde edilir. Bu ise (4.3.6) problemine denk olan bir sınır değer problemidir.

Teorem 4.2.2 den, (4.3.10) denklemi için çözülebilme koşulları

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} (\gamma(\zeta) - Tf(\zeta))\,\frac{\bar z d\zeta}{1-\bar z\zeta} &= 0, & (4.3.11)\\ \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} (\gamma(\zeta) - Tf(\zeta))\,\frac{\bar z d\zeta}{r^2-\bar z\zeta} &= 0 & (4.3.12)\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} Tf(\zeta)\frac{\bar z d\zeta}{1-\bar z\zeta} &= \frac{1}{\pi}\int_R f(t)\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\frac{\bar z}{1-\bar z\zeta}\,\frac{d\zeta}{\zeta - t}dt_1dt_2\\ &= \frac{1}{\pi}\int_R f(t)\frac{\bar z}{1-\bar z t}dt_1dt_2,\\ \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} Tf(\zeta)\frac{\bar z d\zeta}{1-\bar z\zeta} &= \frac{1}{\pi}\int_R f(t)\frac{r^2}{2\pi i}\int_{\partial R}\frac{\bar z}{1-\bar z\zeta}\,\frac{d\zeta}{\zeta - t}dt_1dt_2\\ &= \frac{1}{\pi}\int_R f(t)\frac{\bar z}{r^2-\bar z t}dt_1dt_2\end{aligned}$$

değerleri göz önüne alınırsa (4.3.11) ve (4.3.12) koşulları (4.3.7) ve (4.3.8) ile aynı olur.

Pompeiu operatörünün özelliğinden

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\left[\frac{\zeta}{\zeta-z}+\frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta-z}}-1\right]\frac{d\zeta}{\zeta} \\ &-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}\gamma(\zeta)\left[\frac{1}{\zeta-z}+\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}\right]d\zeta-\frac{1}{\pi}\int\limits_{R}f(\zeta)\left[\frac{1}{\zeta-z}+\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}\right]d\xi d\eta \end{aligned}$$

ifadesinin $z\in R$ için $|z|\to 1$ iken $\gamma(z)$ ye yaklaşması ve

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\left[\frac{1}{\zeta-z}+\frac{\bar{z}}{r^2-\bar{z}\zeta}\right]d\zeta \\ &-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}\gamma(\zeta)\left[\frac{\zeta}{\zeta-z}+\frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta-z}}-1\right]d\zeta \\ &-\frac{1}{\pi}\int\limits_{R}f(\zeta)\left[\frac{1}{\zeta-z}+\frac{\bar{z}}{r^2-\bar{z}\zeta}\right]d\xi d\eta \end{aligned}$$

ifadesinin de $z\in R$ için $|z|\to r$ iken $\gamma(z)$ ye yaklaşıyor olması göz önüne alınarak, (4.3.7) ve (4.3.8) koşulları altında, (4.3.9) un (4.3.6) nın çözümü olduğu görülür. $\square$

Lemma 1. [21] $|z|,|t|>r$ için

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}\frac{\log(\bar{z}\zeta-r^2)}{(r^2-\zeta t)^2}d\zeta=0 \tag{4.3.13}$$

dır.

Teorem 4.3.3. [21] R halkasal bölgesinde $f\in C^{\alpha}(\overline{R};\mathbb{C})$, $0<\alpha<1$, $\gamma\in C(\partial R;\mathbb{C})$,

$c\in\mathbb{C}$, $z_0\in\mathbb{C}$ olmak üzere

$$w_{\bar{z}}=f,\ \left(\lambda|z|\partial_{\nu_z}w\right)|_{\partial R}=\gamma,\ w(z_0)=c,\ \lambda=\begin{cases}1, & |z|=1,\\ -1, & |z|=r,\end{cases} \tag{4.3.14}$$

olarak verilen homojen olmayan Cauchy-Riemann denklemi için Neumann probleminin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşullar her $z \in R$ için

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{1-\bar{z}\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\gamma(\zeta)\frac{\overline{\zeta}d\zeta}{1-\bar{z}\zeta}+\frac{1}{\pi}\int_{R}f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{(1-\bar{z}\zeta)^2}=0, \tag{4.3.15}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{r^2-\bar{z}\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\gamma(\zeta)\frac{\overline{\zeta}d\zeta}{r^2-\bar{z}\zeta}+\frac{r^2}{\pi}\int_{R}f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{(r^2-\bar{z}\zeta)^2}=0 \tag{4.3.16}$$

olmasıdır.

Ayrıca, eğer γ ve f

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\left[\gamma(\zeta)-\overline{\zeta}f(\zeta)\right]\frac{d\zeta}{\zeta}=0 \tag{4.3.17}$$

koşulunu sağlarsa bu durumda çözüm $W_{\bar{z}}^{1+\alpha}(\overline{R};\mathbb{C})$ sınıfından olup tek çözüm

$$\begin{aligned}
w(z) \quad = \quad & c-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\left[\gamma(\zeta)-\overline{\zeta}f(\zeta)\right]\log\left(\frac{1-z\overline{\zeta}}{1-z_0\overline{\zeta}}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\left[\gamma(\zeta)-\overline{\zeta}f(\zeta)\right]\log\left(\frac{z\overline{\zeta}-r^2}{z_0\overline{\zeta}-r^2}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}\\
&-\frac{1}{\pi}\int_{R}f(\zeta)\frac{z-z_0}{(\zeta-z_0)(\zeta-z)}d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{4.3.18}$$

dır.

İspat. (4.3.14) problemini homojen duruma indirgemek için

$$\varphi = w - Tf$$

şeklinde yeni bir fonksiyon tanımlayalım. Bu durumda

$$\varphi_{\bar{z}}=0,\ (z\varphi_z)|_{\partial R}=\gamma-z\Pi-\bar{z}f,\ \varphi(z_0)=c-Tf(z_0) \tag{4.3.19}$$

olur.

Burada $f \in C^{\alpha}(\overline{R};\mathbb{C})$ için $\Pi f \in C^{\alpha}(\overline{R};\mathbb{C})$ olduğu [22] nolu kaynakta belirtilmiştir. Dolayısıyla (4.3.19) de sınır koşulunun sağ tarafı sürekli bir fonksiyondur.

(4.3.19) problemi, analitik fonksiyonlar için Neumann sınır değer problemidir. Buna göre, Teorem 4.2.3 uygulanırsa, problemin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşullar

$$\frac{1}{\pi}\int_{\partial R}\left[\gamma(\zeta)-\zeta\Pi f(\zeta)-\overline{\zeta}f(\zeta)\right]\frac{d\zeta}{1-\bar{z}\zeta}=0, \tag{4.3.20}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{\partial R}\left[\gamma(\zeta)-\zeta\Pi f(\zeta)-\overline{\zeta}f(\zeta)\right]\frac{d\zeta}{r^2-\bar{z}\zeta}=0, \tag{4.3.21}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{\partial R}\left[\gamma(\zeta)-\zeta\Pi f(\zeta)-\overline{\zeta}f(\zeta)\right]\frac{d\zeta}{\zeta}=0 \tag{4.3.22}$$

olarak yazılabilir. Bu durumda, yine aynı teoremden indirgenen problemin çözümü

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= c-Tf(z_0)-\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|=1}\left[\gamma(\zeta)-\zeta\Pi f(\zeta)-\overline{\zeta}f(\zeta)\right]\log\left(\frac{1-z\overline{\zeta}}{1-z_0\overline{\zeta}}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}\\ &\quad+\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|=r}\left[\gamma(\zeta)-\zeta\Pi f(\zeta)-\overline{\zeta}f(\zeta)\right]\log\left(\frac{z\overline{\zeta}-r^2}{z_0\overline{\zeta}-r^2}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}\end{aligned} \tag{4.3.23}$$

dir.

Lemma 1 ve Pompeiu operatörünün tanımı kullanılarak, $t=t_1+it_2$ için

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|=1}\Pi f(\zeta)\log(1-z\overline{\zeta})d\zeta &= -\frac{1}{\pi}\int_R f(t)\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\log(1-z\overline{\zeta})d\zeta}{(\zeta-t)^2}dt_1dt_2 \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_R f(t)\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\log(1-\bar{z}\zeta)d\zeta}{(1-\zeta\bar{t})^2}}dt_1dt_2=0,\end{aligned} \tag{4.3.24}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|=r}\Pi f(\zeta)\log(z\overline{\zeta}-r^2)d\zeta &= -\frac{1}{\pi}\int_R f(t)\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta=1|}\frac{\log(z\overline{\zeta}-r^2)d\zeta}{(\zeta-t)^2}dt_1dt_2 \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_R f(t)\overline{\frac{r^2}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\log(\bar{z}\zeta-r^2)d\zeta}{(r^2-\zeta\bar{t})^2}}dt_1dt_2=0\end{aligned} \tag{4.3.25}$$

olduğundan, bu değerler (4.3.23) de yerine yazılırsa, (4.3.18) in (4.3.14) probleminin çözümü olduğu görülür.

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\zeta\Pi f(\zeta)\frac{d\zeta}{1-\bar{z}\zeta} &= -\frac{1}{\pi}\int\limits_{R} f(t)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\frac{\zeta d\zeta}{(\zeta-t)^2(1-\bar{z}\zeta)}dt_1dt_2 \\
&= -\frac{1}{\pi}\int\limits_{R} f(t)\frac{dt_1dt_2}{(1-\bar{z}t)^2}, \qquad (4.3.26) \\
\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\zeta\Pi f(\zeta)\frac{d\zeta}{r^2-\bar{z}\zeta} &= -\frac{1}{\pi}\int\limits_{R} f(t)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\frac{\zeta d\zeta}{(\zeta-t)^2(r^2-\bar{z}\zeta)}dt_1dt_2 \\
&= -\frac{r^2}{\pi}\int\limits_{R} f(t)\frac{dt_1dt_2}{(r^2-\bar{z}t)^2}, \qquad (4.3.27) \\
\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\Pi f(\zeta)d\zeta &= -\frac{1}{\pi}\int\limits_{R} f(t)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\frac{d\zeta}{(\zeta-t)^2}dt_1dt_2 = 0 \qquad (4.3.28)
\end{aligned}$$

olduğundan, (4.3.20)-(4.3.22) eşitlikleri (4.3.15)-(4.3.17) koşullarını verir.

□

4.4. Bitsadze Denklemi için Sınır Değer Problemleri

Bu bölümde sırasıyla Schwarz, Dirichlet ve Dirichlet-Neumann Sınır değer problemlerinin homojen olmayan Bitsadze denklemi için varsa çözülebilme koşulları ve çözümleri incelenecektir.

4.4.1. Bitsadze Denklemi için Schwarz Sınır Değer Problemi

Teorem 4.4.1. [21] R halkasal bölgesinde $f\in L_p(R;\mathbb{C}),\gamma_0,\gamma_1\in C(\partial R;\mathbb{C}),c_0,c_1\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$w_{\bar{z}\bar{z}} = f,\ \mathrm{Re}\,w|_{\partial R} = \gamma_0,\ \mathrm{Re}\,w_{\bar{z}}|_{\partial R} = \gamma_1, \qquad (4.4.1)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho}\mathrm{Im}\,w(z)\frac{dz}{z} = c_0,\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho}\mathrm{Im}\,w_{\bar{z}}(z)\frac{dz}{z} = c_1 \qquad (4.4.2)$$

olarak verilen homojen olmayan Bitsadze denklemi için Schwarz sınır değer probleminin çözülebilir olması için

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\gamma_1(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi}\int_R\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta}+\frac{\overline{f(\zeta)}}{\overline{\zeta}}\right)d\xi d\eta, \tag{4.4.3}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\left[\gamma_0(\zeta)-\gamma_1(\zeta)(\zeta+\overline{\zeta})\right]\frac{d\zeta}{\zeta} = -\frac{1}{2\pi}\int_R\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta}+\frac{\overline{f(\zeta)}}{\overline{\zeta}}\right)(\zeta+\overline{\zeta})d\xi d\eta \tag{4.4.4}$$

koşullarının sağlanması gerekir. Bu durumda problemin çözümü reel kısmı $\overline{R}$ de sürekli türevlebilir olmak üzere $W_{\overline{z}}^{2,p}(R;\mathbb{C})$ sınıfından olup tek türlü olarak

$$\begin{aligned}
w(z) &= ic_0+i(z+\overline{z})c_1\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\left[\gamma_0(\zeta)-\gamma_1(\zeta)(\zeta-z+\overline{\zeta-z})\right]\left[\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+K_1(z,\zeta)\right]\frac{d\zeta}{\zeta}\\
&-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\left[\gamma_0(\zeta)-\gamma_1(\zeta)(\zeta-z+\overline{\zeta-z})\right]\frac{d\zeta}{\zeta}\\
&+\frac{1}{2\pi}\int_R\frac{f(\zeta)}{\zeta}\left[\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+K_1(z,\zeta)\right]\left(\zeta-z+\overline{\zeta-z}\right)d\xi d\eta\\
&+\frac{1}{2\pi}\int_R\frac{\overline{f(\zeta)}}{\overline{\zeta}}\left[\frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}+K_2(z,\zeta)\right]\left(\zeta-z+\overline{\zeta-z}\right)d\xi d\eta\\
&+\frac{1}{2\pi}\int_{r<|\zeta|<\rho}\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta}+\frac{\overline{f(\zeta)}}{\overline{\zeta}}\right]\left(\zeta-z+\overline{\zeta-z}\right)d\xi d\eta\\
&+\frac{r^2+\rho^2}{2\pi(1-r^2)}\int_{|\zeta|=1}\gamma_1(\zeta-\overline{\zeta})\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1+\rho^2}{2\pi(1-r^2)}\int_{|\zeta|=r}\gamma_1(\zeta-\overline{\zeta})\frac{d\zeta}{\zeta}\\
&-\frac{r^2+\rho^2}{2\pi i(1-r^2)}\int_{\rho<|\zeta|<1}\left[f(\zeta)-\overline{f(\zeta)}\right]d\xi d\eta\\
&-\frac{1+\rho^2}{2\pi i(1-r^2)}\int_{r<|\zeta|<\rho}\left[f(\zeta)-\overline{f(\zeta)}\right]d\xi d\eta\\
&+\frac{r^2+\rho^2}{2\pi i(1-r^2)}\int_{\rho<|\zeta|<1}\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta^2}-\frac{\overline{f(\zeta)}}{\overline{\zeta}^2}\right]d\xi d\eta
\end{aligned}$$

$$+\frac{r^2(1+\rho^2)}{2\pi i(1-r^2)}\int\limits_{r<|\zeta|<\rho}\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta^2}-\frac{\overline{f(\zeta)}}{\overline{\zeta}^2}\right]d\xi d\eta \tag{4.4.5}$$

ile verilir.

Burada

$$\begin{aligned}
K_1(z,\zeta) &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r^{2n}\zeta}{r^{2n}\zeta-z}+\frac{r^{2n}z}{\zeta-r^{2n}z}\right),\\
K_2(z,\zeta) &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r^{2n}}{r^{2n}-z\overline{\zeta}}+\frac{r^{2n}z\overline{\zeta}}{1-r^{2n}z\overline{\zeta}}\right)
\end{aligned}$$

dır.

4.4.2. Bitsadze Denklemi için Dirichlet Sınır Değer Problemi

Teorem 4.4.2. [21] $f\in L_1(R,\mathbb{C}),\ \gamma_0,\ \gamma_1\in C(\partial R;\mathbb{C})$ olmak üzere,

$$w_{\overline{z}\overline{z}}=f,\ w|_{\partial R}=\gamma_0,\ w_{\overline{z}}|_{\partial R}=\gamma_1, \tag{4.4.6}$$

olarak tanımlanan Bitsadze denklemi için Dirichlet sınır değer probleminin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşullar

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{z}}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\gamma_0(\zeta)\frac{d\zeta}{1-\overline{z}\zeta} &= \frac{\overline{z}}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\gamma_1(\zeta)\left[\frac{\overline{\zeta-z}}{1-\overline{z}\zeta}-\frac{r^2}{\zeta}\right]d\zeta\\
&\quad -\frac{\overline{z}}{\pi}\int\limits_{R}f(\zeta)\left[\frac{\overline{\zeta-z}}{1-\overline{z}\zeta}-\frac{r^2}{\zeta}\right]d\xi d\eta,
\end{aligned} \tag{4.4.7}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{z}}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\gamma_0(\zeta)\frac{d\zeta}{r^2-\overline{z}\zeta} &= \frac{\overline{z}}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\gamma_1(\zeta)\left[\frac{\overline{\zeta-z}}{r^2-\overline{z}\zeta}-\frac{1}{\zeta}\right]d\zeta\\
&\quad -\frac{\overline{z}}{\pi}\int\limits_{R}f(\zeta)\left[\frac{\overline{\zeta-z}}{r^2-\overline{z}\zeta}-\frac{1}{\zeta}\right]d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{4.4.8}$$

ve

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\gamma_1(\zeta)\frac{\bar{z}d\zeta}{1-\bar{z}\zeta} = \frac{1}{\pi}\int_R f(\zeta)\frac{\bar{z}d\xi d\eta}{1-\bar{z}\zeta}, \tag{4.4.9}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\gamma_1(\zeta)\frac{\bar{z}d\zeta}{r^2-\bar{z}\zeta} = \frac{1}{\pi}\int_R f(\zeta)\frac{\bar{z}d\xi d\eta}{r^2-\bar{z}\zeta} \tag{4.4.10}$$

olmasıdır.

Bu durumda problemin tek çözümü $f \in L_p(R,\mathbb{C}),\ p>2,\ \gamma_0,\ \gamma_1 \in C(\partial R;\mathbb{C})$ için

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\gamma_0(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\gamma_1(\zeta)\frac{\overline{\zeta-z}}{\zeta-z}d\zeta - \frac{r^2}{2\pi i z}\int_{\partial R}\gamma_1(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\int_R f(\zeta)\frac{\overline{\zeta-z}}{\zeta-z}d\xi d\eta + \frac{r^2}{\pi z}\int_{\partial R} f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta} \end{aligned} \tag{4.4.11}$$

formundadır.

İspat. Verilen sınır değer problemi

$$w_{\bar{z}} = \varphi, \quad w|_{\partial R} = \gamma_0, \tag{4.4.12}$$

$$\varphi_{\bar{z}} = f, \quad \varphi|_{\partial R} = \gamma_1, \tag{4.4.13}$$

homojen olmayan Cauchy-Riemann denklemi için Dirichlet sınır değer problemleri sistemine indirgenir.

Teorem 4.3.2 nin sonucunu kullanarak

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\gamma_0(\zeta)\frac{\bar{z}d\zeta}{1-\bar{z}\zeta} = \frac{1}{\pi}\int_R \varphi(\zeta)\frac{\bar{z}d\xi d\eta}{1-\bar{z}\zeta}, \tag{4.4.14}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\gamma_0(\zeta)\frac{\bar{z}d\zeta}{r^2-\bar{z}\zeta} = \frac{1}{\pi}\int_R \varphi(\zeta)\frac{\bar{z}d\xi d\eta}{r^2-\bar{z}\zeta}, \tag{4.4.15}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\gamma_1(\zeta)\frac{\bar{z}d\zeta}{1-\bar{z}\zeta} = \frac{1}{\pi}\int_R f(\zeta)\frac{\bar{z}d\xi d\eta}{1-\bar{z}\zeta}, \tag{4.4.16}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\gamma_1(\zeta)\frac{\bar{z}d\zeta}{r^2-\bar{z}\zeta} = \frac{1}{\pi}\int_R f(\zeta)\frac{\bar{z}d\xi d\eta}{r^2-\bar{z}\zeta} \tag{4.4.17}$$

çözülebilme koşulları altında,

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\gamma_0(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi}\int_R \varphi(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}, \tag{4.4.18}$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\gamma_1(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi}\int_R f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \tag{4.4.19}$$

çözümleri yazılabilir.

(4.4.19) ifadesi, (4.4.18) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} w(z) = {} & \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\gamma_0(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\gamma_1(t)\frac{1}{\pi}\int_R \frac{d\xi d\eta}{(\zeta - t)(\zeta - z)}dt \\ & -\frac{1}{\pi}\int_R f(t)\frac{1}{\pi}\int_R \frac{d\xi d\eta}{(\zeta - t)(\zeta - z)}dt_1 dt_2 \end{aligned} \tag{4.4.20}$$

elde edilir.

Diğer taraftan

$$\frac{1}{\pi}\int_R \frac{d\xi d\eta}{(\zeta - t)(\zeta - z)} = \frac{1}{\zeta - z}\left[\frac{1}{\pi}\int_R \frac{d\xi d\eta}{\zeta - t} - \frac{1}{\pi}\int_R \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}\right] \tag{4.4.21}$$

olduğundan $\frac{1}{\pi}\int_R \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}$ integralini hesaplamak için Cauchy-Pompeiu gösterimi kullanılırsa integralin değeri

$$\frac{1}{\pi}\int_R \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} = -\bar{z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\frac{\overline{\zeta} d\zeta}{\zeta - z} = -\bar{z} + \frac{r^2}{z}$$

olarak bulunur.

(4.4.21) in değeri (4.4.20) de yerine yazılırsa çözüm elde edilir.

Diğer taraftan $\varphi(z)$ fonksiyonun (4.4.19) daki değeri, (4.4.14) ve (4.4.15) de yerine yazılırsa

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\gamma_0(\zeta)\frac{\bar{z}d\zeta}{1-\bar{z}\zeta} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\gamma_1(t)\frac{1}{\pi}\int\limits_{R}\frac{\bar{z}d\xi d\eta}{(\zeta-t)(1-\bar{z}\zeta)}dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{R}f(t)\frac{1}{\pi}\int\limits_{R}\frac{\bar{z}d\xi d\eta}{(\zeta-t)(1-\bar{z}\zeta)}dt_1dt_2 \quad (4.4.22)$$

ve

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\gamma_0(\zeta)\frac{\bar{z}d\zeta}{r^2-\bar{z}\zeta} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\gamma_1(t)\frac{1}{\pi}\int\limits_{R}\frac{\bar{z}d\xi d\eta}{(\zeta-t)(r^2-\bar{z}\zeta)}dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{R}f(t)\frac{1}{\pi}\int\limits_{R}\frac{\bar{z}d\xi d\eta}{(\zeta-t)(r^2-\bar{z}\zeta)}dt_1dt_2 \quad (4.4.23)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int\limits_{R}\frac{d\xi d\eta}{(\zeta-t)(1-\bar{z}\zeta)} &= -\frac{\overline{t-z}}{1-\bar{z}t}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\frac{(\overline{\zeta-z})d\zeta}{(\zeta-t)(1-\bar{z}\zeta)} \\
&= -\frac{\overline{t-z}}{1-\bar{z}t}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\frac{(|\zeta|^2-\bar{z}\zeta)d\zeta}{(\zeta-t)(1-\bar{z}\zeta)} \\
&= \frac{r^2}{t}-\frac{\overline{t-z}}{1-\bar{z}t}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int\limits_{R}\frac{d\xi d\eta}{(\zeta-t)(r^2-\bar{z}\zeta)} &= -\frac{\overline{t-z}}{r^2-\bar{z}t}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\frac{(\overline{\zeta-z})d\zeta}{(\zeta-t)(r^2-\bar{z}\zeta)} \\
&= -\frac{\overline{t-z}}{1-\bar{z}t}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\frac{(|\zeta|^2-\bar{z}\zeta)d\zeta}{(\zeta-t)(r^2-\bar{z}\zeta)} \\
&= -\frac{\overline{t-z}}{r^2-\bar{z}t}+\frac{1}{t}
\end{aligned}$$

olup bu değerler (4.4.22) ve (4.4.23) de ilgili yerlerde yerine yazılırsa (4.4.7) ve (4.4.8) çözülebilme koşulları elde edilir. Diğer çözülebilme koşulları olan (4.4.9) ve (4.4.10) eşitlikleri, (4.4.16) ve (4.4.17) ile aynı ifadelerdir. □

4.4.3. Bitsadze Denklemi için Dirichlet-Neumann Sınır Değer Problemi

Teorem 4.4.3. R halkasal bölgesinde $f \in C^{\alpha}(\overline{R};\mathbb{C})$, $0 < \alpha < 1$, $z_0 \in R$, $c \in \mathbb{C}$, γ_0, $\gamma_1 \in C(\partial R;\mathbb{C})$ için

$$w_{\overline{z}\overline{z}} = f, w|_{\partial R} = \gamma_0, (\lambda|z|\partial_\nu w_{\overline{z}})|_{\partial R} = \gamma_1, w_{\overline{z}}(z_0) = c,\ \lambda = \begin{cases} 1, & |z| = 1, \\ -1 & |z| = r, \end{cases} \tag{4.4.24}$$

probleminin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşullar her $z \in R$ için

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\left[\gamma_1(\zeta) - \overline{\zeta}f(\zeta)\right]\frac{d\zeta}{1-\overline{z}\zeta} + \frac{1}{\pi}\int_R f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{(1-\overline{z}\zeta)^2} = 0, \tag{4.4.25}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\left[\gamma_1(\zeta) - \overline{\zeta}f(\zeta)\right]\frac{d\zeta}{r^2-\overline{z}\zeta} + \frac{r^2}{\pi}\int_R f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{(r^2-\overline{z}\zeta)^2} = 0, \tag{4.4.26}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\gamma_0(\zeta)\frac{\overline{z}d\zeta}{1-\overline{z}\zeta} \quad = \quad & (1-r^2)\overline{z}\Bigg\{c - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\left[\gamma_1(\zeta) - \overline{\zeta}f(\zeta)\right]\log\left(\frac{|\zeta|^2}{|\zeta|^2 - z_0\overline{\zeta}}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} \\ & + \frac{z_0}{\pi}\int_R \frac{f(\zeta)}{\zeta}\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z_0} \\ & + \frac{1}{\pi}\int_R \frac{f(\zeta)}{\zeta}\frac{(1-|\zeta|^2)}{(1-r^2)}\frac{d\xi d\eta}{1-\overline{z}\zeta}\Bigg\}\end{aligned} \tag{4.4.27}$$

ve

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\gamma_0(\zeta)\frac{\overline{z}d\zeta}{r^2-\overline{z}\zeta} \quad = \quad & \left(\frac{1-r^2}{r^2}\right)\overline{z}\Bigg\{c - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\left[\gamma_1(\zeta) - \overline{\zeta}f(\zeta)\right]\log\left(\frac{|\zeta|^2}{|\zeta|^2 - z_0\overline{\zeta}}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} \\ & + \frac{z_0}{\pi}\int_R \frac{f(\zeta)}{\zeta}\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z_0}\Bigg\} \\ & - \frac{\overline{z}}{\pi}\int_R \frac{f(\zeta)}{\zeta}\frac{(|\zeta|^2-1)}{r^2-\overline{z}\zeta}d\xi d\eta\end{aligned} \tag{4.4.28}$$

ifadelerinin sağlanmasıdır.

Ayrıca, eğer γ_1 ve f

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\left[\gamma_1(\zeta)-\overline{\zeta}f(\zeta)\right]\frac{d\zeta}{\zeta}=0 \tag{4.4.29}$$

koşulunu sağlarsa bu durumda tek çözüm

$$\begin{aligned}
w(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\gamma_0(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}-\frac{c}{z}(r^2-|z|^2)\\
&-\frac{1}{2\pi i z}\int_{\partial R}\left[\gamma_1(\zeta)-\overline{\zeta}f(\zeta)\right]\left[(1-|z|^2)\log\left(\frac{|\zeta|^2-z\overline{\zeta}}{|\zeta|^2-z_0\overline{\zeta}}\right)\right.\\
&\qquad\left.-\left(1-r^2\right)\log\left(\frac{|\zeta|^2}{|\zeta|^2-z_0\overline{\zeta}}\right)\right]\frac{d\zeta}{\zeta}\\
&+\frac{1}{\pi}\int_R f(\zeta)\left[\frac{|\zeta|^2-z_0(\overline{\zeta-z})-|z|^2}{\zeta-z}-\frac{r^2z_0}{z\zeta}\right]\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z_0}
\end{aligned} \tag{4.4.30}$$

ile verilir.

İspat. (4.4.24) problemi

$$w_{\overline{z}}=g,\ w|_{\partial R}=\gamma_0, \tag{4.4.31}$$

$$g_{\overline{z}}=f,\ (\lambda|z|\partial_\nu g)|_{\partial R}=\gamma_1,\ g(z_0)=c \tag{4.4.32}$$

sistemine denktir. Teorem (4.3.2) e göre (4.4.31) in çözülebilme koşulları

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\gamma_0(\zeta)\frac{\overline{z}d\zeta}{1-\overline{z}\zeta} = \frac{1}{\pi}\int_R g(\zeta)\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}d\xi d\eta, \tag{4.4.33}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\gamma_0(\zeta)\frac{\overline{z}d\zeta}{r^2-\overline{z}\zeta} = \frac{1}{\pi}\int_R g(\zeta)\frac{\overline{z}}{r^2-\overline{z}\zeta}d\xi d\eta \tag{4.4.34}$$

olarak verilirken bu problemin tek çözümü

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\gamma_0(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{\pi}\int_R g(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z} \tag{4.4.35}$$

ile verilir.

Diğer taraftan, Teorem (4.3.3) yardımıyla, (4.4.32) nin çözülebilir olması için gerekli ve yeter koşullar

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\left[\gamma_1(\zeta)-\overline{\zeta}f(\zeta)\right]\frac{d\zeta}{1-\bar{z}\zeta}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{R}f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{(1-\bar{z}\zeta)^2}=0, \tag{4.4.36}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\left[\gamma_1(\zeta)-\overline{\zeta}f(\zeta)\right]\frac{d\zeta}{r^2-\bar{z}\zeta}+\frac{r^2}{\pi}\int\limits_{R}f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{(r^2-\bar{z}\zeta)^2}=0 \tag{4.4.37}$$

dır.

Ayrıca γ_1 ve f

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\left[\gamma_1(\zeta)-\overline{\zeta}f(\zeta)\right]\frac{d\zeta}{\zeta}=0 \tag{4.4.38}$$

koşulunu sağlarsa bu durumda tek çözüm

$$\begin{aligned} g(z) &= c-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\left[\gamma_1(\zeta)-\overline{\zeta}f(\zeta)\right]\log\left(\frac{1-z\overline{\zeta}}{1-z_0\overline{\zeta}}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} \\ &\quad+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}\left[\gamma_1(\zeta)-\overline{\zeta}f(\zeta)\right]\log\left(\frac{r^2-z\overline{\zeta}}{r^2-z_0\overline{\zeta}}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} \\ &\quad-\frac{1}{\pi}\int\limits_{R}f(\zeta)\frac{z-z_0}{(\zeta-z_0)(\zeta-z)}d\xi d\eta \end{aligned} \tag{4.4.39}$$

ile verilir.

Hesaplamalarda kolaylık olması için $t=t_1+it_2$ olmak üzere (4.4.39)

$$g(\zeta) = c-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\left[\gamma_1(t)-\bar{t}f(t)\right]\log\left(\frac{|t|^2-\zeta\bar{t}}{|t|^2-z_0\bar{t}}\right)\frac{dt}{t}-\frac{1}{\pi}\int\limits_{R}f(t)\frac{\zeta-z_0}{(t-z_0)(t-\zeta)}dt_1dt_2 \tag{4.4.40}$$

olarak yazılabilir.

Eğer (4.4.40), (4.4.33) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int\limits_R g(\zeta)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\xi d\eta &= \frac{1}{\pi}\int\limits_R \left\{c-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}[\gamma_1(t)-\bar{t}f(t)]\log\left(\frac{|t|^2-\zeta\bar{t}}{|t|^2-z_0\bar{t}}\right)\frac{dt}{t}\right\}\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\xi d\eta \\
&\quad -\frac{1}{\pi}\int\limits_R\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_R f(t)\frac{\zeta-z_0}{(t-z_0)(t-\zeta)}dt_1dt_2\right\}\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\xi d\eta
\end{aligned}$$

elde edilir. İntegrasyon sırası değiştirilirse

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int\limits_R g(\zeta)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\xi d\eta &= \frac{c\bar{z}}{\pi}\int\limits_R\frac{d\xi d\eta}{1-\bar{z}\zeta} \\
&\quad -\frac{\bar{z}}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}[\gamma_1(t)-\bar{t}f(t)]\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_R\log\left(\frac{|t|^2-\zeta\bar{t}}{|t|^2-z_0\bar{t}}\right)\frac{d\xi d\eta}{1-\bar{z}\zeta}\right]\frac{dt}{t} \\
&\quad -\frac{\bar{z}}{\pi}\int\limits_R f(t)\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_R\frac{\zeta-z_0}{t-\zeta}\frac{d\xi d\eta}{1-\bar{z}\zeta}\right]\frac{dt_1dt_2}{t-z_0}
\end{aligned}$$

bulunur.

İntegral gösterilimleri kullanılarak elde edilen

$$\begin{aligned}
\frac{c\bar{z}}{\pi}\int\limits_R\frac{d\xi d\eta}{1-\bar{z}\zeta} &= \frac{c\bar{z}}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\bar{\zeta}\frac{d\xi d\eta}{1-\bar{z}\zeta} = \frac{c\bar{z}}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{d\zeta}{(1-\bar{z}\zeta)\zeta}-\frac{c\bar{z}r^2}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}\frac{d\zeta}{(1-\bar{z}\zeta)\zeta} \\
&= (1-r^2)c\bar{z},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int\limits_R\log\left(\frac{|t|^2-\zeta\bar{t}}{|t|^2-z_0\bar{t}}\right)\frac{d\xi d\eta}{1-\bar{z}\zeta} &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\bar{\zeta}\log\left(\frac{|t|^2-\zeta\bar{t}}{|t|^2-z_0\bar{t}}\right)\frac{d\zeta}{1-\bar{z}\zeta} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\log\left(\frac{|t|^2-\zeta\bar{t}}{|t|^2-z_0\bar{t}}\right)\frac{d\zeta}{(1-\bar{z}\zeta)\zeta} \\
&\quad -\frac{r^2}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}\log\left(\frac{|t|^2-\zeta\bar{t}}{|t|^2-z_0\bar{t}}\right)\frac{d\zeta}{(1-\bar{z}\zeta)\zeta} \\
&= (1-r^2)\log\left(\frac{|t|^2}{|t|^2-z_0\bar{t}}\right)
\end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_R \frac{\zeta - z_0}{t-\zeta}\frac{d\xi d\eta}{1-\bar{z}\zeta} &= -\frac{1}{\pi}\int_R \frac{\zeta - z_0}{1-\bar{z}\zeta}\frac{d\xi d\eta}{\zeta - t} = \frac{\bar{t}(t-z_0)}{1-\bar{z}t} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} \frac{\overline{\zeta}(\zeta - z_0)}{1-\bar{z}\zeta}\frac{d\zeta}{\zeta - t} \\
&= \frac{\bar{t}(t-z_0)}{1-\bar{z}t} - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta - z_0}{1-\bar{z}\zeta}\frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - t)} + \frac{r^2}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r} \frac{\zeta - z_0}{1-\bar{z}\zeta}\frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - t)} \\
&= \frac{\bar{t}(t-z_0)}{1-\bar{z}t} - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta - z_0}{1-\bar{z}\zeta}\left(\frac{1}{t(\zeta - t)} - \frac{1}{t\zeta}\right)d\zeta + \frac{r^2 z_0}{t} \\
&= \frac{1}{t}\left(\frac{(|t|^2-1)(t-z_0)}{1-\bar{z}t} - z_0(1-r^2)\right)
\end{aligned}
$$

değerleri yardımıyla (4.4.33) ün sağ tarafı

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_R g(\zeta)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\xi d\eta &= (1-r^2)\bar{z}\Bigg\{c - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\left[\gamma_1(\zeta) - \overline{\zeta}f(\zeta)\right]\log\left(\frac{|\zeta|^2}{|\zeta|^2 - z_0\overline{\zeta}}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} \\
&\qquad + \frac{z_0}{\pi}\int_R \frac{f(\zeta)}{\zeta}\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z_0}\Bigg\} \\
&\quad - \frac{\bar{z}}{\pi}\int_R \frac{f(\zeta)}{\zeta}\frac{(|\zeta|^2-1)}{1-\bar{z}\zeta}d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{4.4.41}
$$

olarak yazılabilir.

Dolayısıyla (4.4.24) probleminin çözülebilme koşullarından birisi olarak

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\gamma_0(\zeta)\frac{\bar{z}d\zeta}{1-\bar{z}\zeta} &= (1-r^2)\bar{z}\Bigg\{c - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\left[\gamma_1(\zeta) - \overline{\zeta}f(\zeta)\right]\log\left(\frac{|\zeta|^2}{|\zeta|^2 - z_0\overline{\zeta}}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} \\
&\qquad + \frac{z_0}{\pi}\int_R \frac{f(\zeta)}{\zeta}\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z_0}\Bigg\} \\
&\quad - \frac{\bar{z}}{\pi}\int_R \frac{f(\zeta)}{\zeta}\frac{(|\zeta|^2-1)}{1-\bar{z}\zeta}d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{4.4.42}
$$

elde edilir.

Benzer bir yolla, (4.4.40) (4.4.34) de yerine yazılır ve integrasyon sırası değiştirilirse

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_R g(\zeta)\frac{\bar{z}}{r^2-\bar{z}\zeta}d\xi d\eta &= \frac{c\bar{z}}{\pi}\int_R \frac{d\xi d\eta}{r^2-\bar{z}\zeta} \\
&\quad -\frac{\bar{z}}{2\pi i}\int_{\partial R}[\gamma_1(t)-\bar{t}f(t)]\left\{\frac{1}{\pi}\int_R \log\left(\frac{|t|^2-\zeta\bar{t}}{|t|^2-z_0\bar{t}}\right)\frac{d\xi d\eta}{r^2-\bar{z}\zeta}\right\}\frac{dt}{t} \\
&\quad -\frac{\bar{z}}{\pi}\int_R f(t)\left\{\frac{1}{\pi}\int_R \frac{\zeta-z_0}{t-\zeta}\frac{d\xi d\eta}{r^2-\bar{z}\zeta}\right\}\frac{dt_1 dt_2}{t-z_0}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Diğer taraftan,

$$
\begin{aligned}
\frac{c\bar{z}}{\pi}\int_R \frac{d\xi d\eta}{r^2-\bar{z}\zeta} &= \frac{c\bar{z}}{2\pi i}\int_{\partial R}\bar{\zeta}\frac{d\xi d\eta}{r^2-\bar{z}\zeta} = \frac{c\bar{z}}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{d\zeta}{(r^2-\bar{z}\zeta)\zeta} - \frac{c\bar{z}r^2}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{d\zeta}{(r^2-\bar{z}\zeta)\zeta} \\
&= \left(\frac{1-r^2}{r^2}\right)c\bar{z},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_R \log\left(\frac{|t|^2-\zeta\bar{t}}{|t|^2-z_0\bar{t}}\right)\frac{d\xi d\eta}{r^2-\bar{z}\zeta} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\bar{\zeta}\log\left(\frac{|t|^2-\zeta\bar{t}}{|t|^2-z_0\bar{t}}\right)\frac{d\zeta}{r^2-\bar{z}\zeta} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\log\left(\frac{|t|^2-\zeta\bar{t}}{|t|^2-z_0\bar{t}}\right)\frac{d\zeta}{(r^2-\bar{z}\zeta)\zeta} \\
&\quad -\frac{r^2}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\log\left(\frac{|t|^2-\zeta\bar{t}}{|t|^2-z_0\bar{t}}\right)\frac{d\zeta}{(r^2-\bar{z}\zeta)\zeta} \\
&= \left(\frac{1-r^2}{r^2}\right)\log\left(\frac{|t|^2}{|t|^2-z_0\bar{t}}\right)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int\limits_{R}\frac{\zeta-z_0}{t-\zeta}\frac{d\xi d\eta}{r^2-\overline{z}\zeta} &= -\frac{1}{\pi}\int\limits_{R}\frac{\zeta-z_0}{r^2-\overline{z}\zeta}\frac{d\xi d\eta}{\zeta-t}=\frac{\overline{t}(t-z_0)}{r^2-\overline{z}t}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\frac{\overline{\zeta}(\zeta-z_0)}{r^2-\overline{z}\zeta}\frac{d\zeta}{\zeta-t} \\
&= \frac{\overline{t}(t-z_0)}{r^2-\overline{z}t}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\zeta-z_0}{r^2-\overline{z}\zeta}\frac{d\zeta}{\zeta(\zeta-t)} \\
&\quad +\frac{r^2}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}\frac{\zeta-z_0}{r^2-\overline{z}\zeta}\frac{d\zeta}{\zeta(\zeta-t)} \\
&= \frac{\overline{t}(t-z_0)}{r^2-\overline{z}t}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\zeta-z_0}{r^2-\overline{z}\zeta}\left(\frac{1}{t(\zeta-t)}-\frac{1}{t\zeta}\right)d\zeta+\frac{z_0}{t} \\
&= \frac{1}{t}\left[\frac{(|t|^2-1)(t-z_0)}{r^2-\overline{z}t}-z_0\left(\frac{1-r^2}{r^2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

olduğundan (4.4.34) ün sağ tarafı

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int\limits_{R}g(\zeta)\frac{\overline{z}}{r^2-\overline{z}\zeta}d\xi d\eta &= \left(\frac{1-r^2}{r^2}\right)\overline{z}\left\{c-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\left[\gamma_1(\zeta)-\overline{\zeta}f(\zeta)\right]\log\left(\frac{|\zeta|^2}{|\zeta|^2-z_0\overline{\zeta}}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}\right\} \\
&\quad +\left(\frac{1-r^2}{r^2}\right)\overline{z}\frac{z_0}{\pi}\int\limits_{R}\frac{f(\zeta)}{\zeta}\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z_0} \\
&\quad -\frac{\overline{z}}{\pi}\int\limits_{R}\frac{f(\zeta)}{\zeta}\frac{(|\zeta|^2-1)}{r^2-\overline{z}\zeta}d\xi d\eta \qquad (4.4.43)
\end{aligned}
$$

olarak yazılabilir.

Buradan (4.4.24) probleminin bir diğer çözülebilme koşulu

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\gamma_0(\zeta)\frac{\overline{z}d\zeta}{r^2-\overline{z}\zeta} &= \left(\frac{1-r^2}{r^2}\right)\overline{z}\left\{c-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\left[\gamma_1(\zeta)-\overline{\zeta}f(\zeta)\right]\log\left(\frac{|\zeta|^2}{|\zeta|^2-z_0\overline{\zeta}}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}\right. \\
&\quad \left.+\frac{z_0}{\pi}\int\limits_{R}\frac{f(\zeta)}{\zeta}\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z_0}\right\} \\
&\quad -\frac{\overline{z}}{\pi}\int\limits_{R}\frac{f(\zeta)}{\zeta}\frac{(|\zeta|^2-1)}{r^2-\overline{z}\zeta}d\xi d\eta \qquad (4.4.44)
\end{aligned}
$$

olur.

(4.4.42), (4.4.44) ile beraber (4.4.36), (4.4.37) eşitlikleri (4.4.24) probleminin çözülebilme koşullarıdır. Bu koşullar sağlandığı takdirde problem çözülebilirdir.

Ayrıca, γ_1 ve f

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\left[\gamma_1(\zeta)-\overline{\zeta}f(\zeta)\right]\frac{d\zeta}{\zeta}=0 \tag{4.4.45}$$

koşulunu sağlarsa çözüm tektir.

(4.4.24) probleminin çözümünü bulmak için (4.4.35) denklemini göz önüne alalım. (4.4.40), (4.4.35) de ilgi yerlerde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_R g(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z} &= \frac{1}{\pi}\int_R\left\{c-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}[\gamma_1(t)-\overline{t}f(t)]\log\left(\frac{|t|^2-\zeta\overline{t}}{|t|^2-z_0\overline{t}}\right)\frac{dt}{t}\right\}\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z}\\ &\quad -\frac{1}{\pi}\int_R\left\{\frac{1}{\pi}\int_R f(t)\frac{\zeta-z_0}{(t-z_0)(t-\zeta)}dt_1dt_2\right\}\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z}\end{aligned} \tag{4.4.46}$$

elde edilir.

Buradaki

$$\begin{aligned}\frac{c}{\pi}\int_R\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z} &= \frac{c}{2\pi i}\int_{\partial R}\frac{\overline{\zeta}d\zeta}{\zeta-z}-c\overline{z}\\ &= \frac{c}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{d\zeta}{\zeta(\zeta-z)}-\frac{cr^2}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{d\zeta}{\zeta(\zeta-z)}-c\overline{z}\\ &= \frac{c}{z}(r^2-|z|^2),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int\limits_R \log\left(\frac{|t|^2-\zeta\bar{t}}{|t|^2-z_0\bar{t}}\right)\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z} &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\log\left(\frac{|t|^2-\zeta\bar{t}}{|t|^2-z_0\bar{t}}\right)\frac{\overline{\zeta}d\zeta}{\zeta-z}-\bar{z}\log\left(\frac{|t|^2-z\bar{t}}{|t|^2-z_0\bar{t}}\right)\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\log\left(\frac{|t|^2-\zeta\bar{t}}{|t|^2-z_0\bar{t}}\right)\frac{d\zeta}{\zeta(\zeta-z)}\\
&\quad -\frac{r^2}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}\log\left(\frac{|t|^2-\zeta\bar{t}}{|t|^2-z_0\bar{t}}\right)\frac{d\zeta}{\zeta(\zeta-z)}-\bar{z}\log\left(\frac{|t|^2-z\bar{t}}{|t|^2-z_0\bar{t}}\right)\\
&= \left(\frac{1-|z|^2}{z}\right)\log\left(\frac{|t|^2-z\bar{t}}{|t|^2-z_0\bar{t}}\right)-\left(\frac{1-r^2}{z}\right)\log\left(\frac{|t|^2}{|t|^2-z_0\bar{t}}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1}{\pi}\int\limits_R\frac{\zeta-z_0}{(t-\zeta)}\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z}=-\frac{1}{t-z}\frac{1}{\pi}\int\limits_R\frac{\zeta-z_0}{\zeta-t}d\xi d\eta+\frac{1}{t-z}\frac{1}{\pi}\int\limits_R\frac{\zeta-z_0}{\zeta-z}d\xi d\eta,
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int\limits_R\frac{\zeta-z_0}{\zeta-t}d\xi d\eta &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}(\zeta-z_0)\frac{\overline{\zeta}d\zeta}{\zeta-t}-\bar{t}(t-z_0)\\
&= 1-(|t|^2)+\frac{z_0}{t}(|t|^2-r^2)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\frac{1}{\pi}\int\limits_R\frac{\zeta-z_0}{\zeta-z}d\xi d\eta=1-(|z|^2)+\frac{z_0}{z}(|z|^2-r^2)
$$

integral değerleri göz önüne alınırsa (4.4.46) nın son terimi

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int\limits_R\frac{\zeta-z_0}{(t-\zeta)}\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z} &= -\frac{1}{t-z}\left(1-(|t|^2)+\frac{z_0}{t}(|t|^2-r^2)\right)\\
&\quad +\frac{1}{t-z}\left(1-(|z|^2)+\frac{z_0}{z}(|z|^2-r^2)\right)\\
&= \frac{|t|^2-|z|^2}{t-z}-\frac{z_0(\bar{t}-\bar{z})}{t-z}-\frac{r^2z_0}{zt}
\end{aligned}
$$

olur.

Buradan

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_R g(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} &= \frac{c}{z}(r^2-|z|^2) \\
&\quad -\frac{1}{2\pi i z}\int_{\partial R}\left[\gamma_1(\zeta)-\overline{\zeta}f(\zeta)\right]\left[\left(1-|z|^2\right)\log\left(\frac{|\zeta|^2-z\overline{\zeta}}{|\zeta|^2-z_0\overline{\zeta}}\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left. -\left(1-r^2\right)\log\left(\frac{|\zeta|^2}{|\zeta|^2-z_0\overline{\zeta}}\right)\right]\frac{d\zeta}{\zeta} \\
&\quad -\frac{1}{\pi}\int_R f(\zeta)\left[\frac{\overline{\zeta}(\zeta-z_0)-\overline{z}(z-z_0)}{\zeta-z}-\frac{r^2 z_0}{z\zeta}\right]\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z_0}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Sonuç olarak problemin çözümü

$$
\begin{aligned}
w(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\gamma_0(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}-\frac{c}{z}(r^2-|z|^2) \\
&\quad +\frac{1}{2\pi i z}\int_{\partial R}\left[\gamma_1(\zeta)-\overline{\zeta}f(\zeta)\right]\left[\left(1-|z|^2\right)\log\left(\frac{|\zeta|^2-z\overline{\zeta}}{|\zeta|^2-z_0\overline{\zeta}}\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left. -\left(1-r^2\right)\log\left(\frac{|\zeta|^2}{|\zeta|^2-z_0\overline{\zeta}}\right)\right]\frac{d\zeta}{\zeta} \\
&\quad +\frac{1}{\pi}\int_R f(\zeta)\left[\frac{\overline{\zeta}(\zeta-z_0)-\overline{z}(z-z_0)}{\zeta-z}-\frac{r^2 z_0}{z\zeta}\right]\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z_0}
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. □

5 . SONUÇ

Bu tezde önce kompleks kısmi türevli denklemler için tanımlanan çeşitli sınır değer problemleri ile ilgili temel kavramlar ve tanımlar verildi. Daha sonra homojen ve homojen olmayan Cauchy-Riemann denklemleri için birim diskte Schwarz, Dirichlet ve Neumann sınır değer problemleri incelenerek yine birim diskte belli tipten bir sınır değer probleminin çözülebilme koşulu ile beraber çözümü verildi.

Son olarak halkasal bölgede çeşitli sınır değer problemleri incelendi. İlgili kaynaklarda verilen çözüm metodları ve çözülebilme koşullarından yararlanılarak halkasal bölgede Bitsadze denklemi için Dirichlet-Neumann sınır değer probleminin çözümü elde edildi.

İleri bir çalışma olarak farklı bölgelerde çeşitli tipten kompleks kısmi türevli denklemler için sınır değer problemleri incelebilir. Alternatif bir yol olarak da temel kompleks sınır değer problemlerinin q veya pq-analoglarının elde edilmesi düşünülebilinir.

KAYNAKLAR

[1] Akhiezer, N., Elements of the theory of elliptic functions. Vol. 79. American Mathematical Soc., 1990.

[2] Başkan, T., Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, Dora Yayınları, 2010.

[3] Begehr H. G. W., Boundary Value Problems for Bitsadze Equation; Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics, 33, 5-23, 2004.

[4] Begehr H. G. W., Complex Analytic Methods for Partial Differential Equations: an Introductory Text. Singapore: World Scientific, 1994.

[5] Begehr H. G. W., Boundary Value Problems in Complex Analysis I; Bol. Asoc. Math. Venezolana, 65-85, 2005.

[6] Begehr H. G. W., Boundary Value Problems in Complex Analysis II; Bol. Asoc. Math. Venezolana, 165-184, 2005.

[7] Begehr H. G. W., Integral representations in complex, hypercomplex and Clifford analysis. Integral Transforms Spec. Funct., 13:223-241, 2002.

[8] Begehr H. G. W., Transformations, transmutations, and kernel functions. CRC Press, 1993.

[9] Begehr H. G. W., Harutyunyan G., Robin Boundary Value Problem for the Cauchy- Riemann Operator. Complex Variables and Elliptic Equations. Vol. 50(15), 1125-1136, 2005.

[10] Boundary value problems of analytic function theory. A.V. Bitsadze (originator), Encyclopedia of Mathematics. `http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Boundary_value_problems_of_`

analytic_function_theory&oldid=13982 (Erişim tarihi: 24.06.2019)

[11] Dzhuraev, A., Singular partial differential equations. Vol. 109. CRC Press, 1999.

[12] Harutyunyan G., Boundary Value Problem for the Beltrami Operator. Complex Variables and Elliptic Equations, Vol. 52(6), 475-484, 2007.

[13] Begehr H. G. W. , Harutyunyan G. , Neumann Problem for the Beltrami Operator and for Second order operators with Poisson/Bitsadze operator as main part. Complex Variables and Elliptic Equations : An International Journal. Vol. 54(12), 1129-1150, 2009.

[14] Begehr, H. G. W. , Kumar, A. , Boundary value problems for the inhomogeneous polyanalytic equation I. Analysis. 25.1: 55-72, 2007.

[15] Begehr, H. G. W, Schmersau, D., The Schwarz problem for polyanalytic functions. Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen. 24(2), 341-351, 2005.

[16] Gakhov, F.D., Boundary Value Problems, Pergamon Press, Oxford, 1966.

[17] Gençtürk İ., Beltrami Denklemi İçin Sınır Değer Problemleri. Yüksek Lisans Tezi. Kırıkkale Üniversitesi, Kırıkkale, 2013.

[18] Mityushev, V. V., Rogosin, S. V., Linear and nonlinear boundary value problems for analytic functions: theory and application. 1999.

[19] Schwarz H. A., Zur integration der partiellen differential-gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, Borchardt J., V.LXXIV, 218-253, 1872.

[20] Muskhelishvili N.I., Singular Integral Equations. Noordhoff, Groningen, 1953.

[21] Vaitsiakhovich T., Boundary Value Problems for Complex Partial Differential Equations In A Ring Domain, Doktora Tezi, Berlin Üniversitesi, Berlin, 2008.

[22] Vekua I. N., Generalized Analytic Functions, Oxford:Pergamon, 1962.

[23] Wen, G. C., Begehr, H. G. W., Boundary value problems for elliptic equations and systems. Halsted Press, 1990.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : İlker GENÇTÜRK
Doğum Tarihi/Yeri : 13.03.1987 / Kırıkkale
Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu
Lise **:** Kırıkkale Anadolu Lisesi, Haziran 2005
Lisans **:** Anadolu Üniversitesi, Matematik Bölümü, Haziran 2010
Yüksek Lisans **:** Kırıkkale Üniversitesi, FBE, Haziran 2013

Çalıştığı Kurum ve Yıllar :
Kırıkkale Üniversitesi, Matematik Bölümü (2014 -)

Yayınları :

1.) Gençtürk İ., Koca K., Dirichlet boundary value problem for a n th order complex partial differential equation. General Mathematics, Vol. 23, No. 1-2, 39- 48, 2015.

2.) Gençtürk İ., The Dirichlet-Neumann Boundary Value Problem for the Inhomogeneous Bitsadze Equation in a Ring Domain. Thai Journal of Mathematics, yayına kabul edildi.

Araştırma Alanları : Kompleks kısmi türevli denklemler, sınır değer problemleri.