KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

QUASİ METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

ÖZET

QUASİ METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

TUĞBA YALÇIN

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Doktora Tezi

Danışman: Prof. Dr. HAKAN ŞİMŞEK

Şubat 2019, 52 Sayfa

Bu çalışmada sağ K−tam, sol M−tam, sağ ve sol Smyth−tam T_1 − quasi metrik uzaylarda çeşitli sabit nokta teoremleri verilmiştir. Simülasyon fonksiyonları yardımıyla genelleştirilmiş sağ ve sol Z − büzülme dönüşümleri tanımlanmış, bu dönüşümlerin sabit noktasının varlığı ve tekliği gösterilmiştir. Mesafe değiştiren fonksiyonlar ile C−sınıfı ve A−sınıfı fonksiyonlar yardımıyla tanımlanan büzülme koşulunu sağlayan fonksiyonların sabit noktalarının var ve tek olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Quasi Metrik Uzay, Sabit Nokta, K−Tam, M−Tam, Smyth−Tam, Simülasyon Fonksiyonu, Z− Büzülme, Mesafe Değiştiren Fonksiyon, C−Sınıfı

ABSTRACT

FIXED POINT THEOREMS ON QUASI METRIC SPACES

TUGBA YALCIN

Kırıkkale University

Institute of Science

Department of Mathematics, Ph. D. Thesis

Supervisor: Prof. Dr. HAKAN SIMSEK

February 2019, 52 Pages

In this study, some fixed point theorems are given on right K−complete, left M−complete, right and left Smyth−complete T_1- quasi metric spaces. Generalized right and left $Z-$contractions are defined by using simulation functions, the existence and uniqueness of the fixed points of these contractions are proven. Altering distance functions, functions of C−class and A−class are used to define new contractions, the existence and uniqueness of the fixed points of these contractions are proven.

Keywords: Quasi Metric Space, Fixed Point, K−Complete, M−Complete, Smyth−Complete, Simulation Function, $Z-$Contraction, Altering Distance Function, C−Class

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın yürütülmesi sırasında sabrıyla ve hoşgörüsüyle daima destek olan danışmanım Prof. Dr. Hakan Şimşek'e, neredeyse bir ortak danışman gibi yardımcı olan Prof. Dr. İshak Altun'a, TİK'lerde gösterdiği hoşgörü ve kolaylıklar ile beni rahatlatan Doç. Dr. Murat Olgun'a, akademik hayata girmemi ve bu yolda ilerlememi sağlayan, her sorunda kapısını çaldığım Prof. Dr. Oktay Akbaş'a, attığım her adımda arkamda olduklarını bana devamlı hissettiren değerli annem ve babama, yalnızca tezimin değil hayatımın her aşamasında beni yüreklendiren, güçlendiren, destekleyen, yaşama sevincim olan eşim Serkan Yalçın'a ve oğullarım Furkan ve Yusuf'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
M.D.F.	Mesafe Değiştiren Fonksiyon
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
U.M.D.F.	Ultra Mesafe Değiştiren Fonksiyon
Z	Simülasyon Fonksiyonları Kümesi

1.GİRİŞ

Metrik uzay kavramı, topoloji alanındaki en önemli kavramlardan biridir. Bu kavramı ilk kez Fonksiyonel Analiz, Olasılık ve Calculus alanlarında da çalışan Fransız matematikçi Maurice Fréchet (1906) doktora tezinde ele almıştır [1]. Limit, süreklilik gibi temel kavramların bilinen anlamlarıyla yalnızca Öklid uzayında değil, farklı yapılarda da kullanılabilmesi için, üzerinde çalışılan uzayda herhangi iki eleman arasındaki "mesafe" kavramının tanımlanabilmesi gerekmektedir. Bu manada metrik uzay kavramı; cebir, differensiyel geometri, fonksiyonel analiz, istatistik, fizik ve mühendislik gibi pek çok alandaki çeşitli çalışmalar için temel olmuştur.

Metrik uzaylar üzerinde tanımlı fonksiyonlarla ilgili en dikkat çeken çalışmalardan biri, Banach tarafından yapılmıştır. 20. yüzyılın önemli matematikçilerinden kabul edilen Polonyalı Matematikçi Stefan Banach (1922), doktora tezinde ilk kez "Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremi"ni ortaya atmıştır [2]. Bu teoremde, tam metrik uzaylarda tanımlı her büzülme dönüşümünün yalnız bir sabit noktası olduğu ispatlanmıştır. Sabit noktanın varlığı ve tekliğinin yanı sıra bu noktanın iteratif olarak nasıl elde edileceği de bu teoremde gösterilmiştir.

Banach'ın bu önemli teoreminin genelleştirmeleri, bir çok matematikçi tarafından araştırılmaktadır [3]. Bu genelleştirmeler temel olarak üç başlıkta toplanabilir.

1. Uzayın metrik yapısını değiştirerek Banach teoreminin genelleştirmeleri yapılmaktadır. Metrik fonksiyonlar yerine, onların özelliklerinin bir ya da birkaçına sahip olmayan fonksiyonlarla da çalışmak mümkün olmaktadır. Bu fonksiyonlara, pseudo metrik, kısmi metrik, quasi metrik, $G-$metrik, $B-$metrik gibi örnekler verilebilir.
2. Metrik uzayın tamlık kavramı yerine kompaktlık konvekslik gibi kavramlar kullanılarak genelleştirmeler elde edilmiştir. Yine metrik olmayan uzaylarda

tamlık kavramına benzer kavramlar üretilmiş, bu yönde genelleştirmeler yapılmıştır.

3. Büzülme olmayan dönüşümler için bu teoremin çeşitli versiyonları üretilmiştir. Analiz ve differensiyel geometri alanlarında matematiğe önemli katkılarda bulunmuş Alman matematikçi Rudolph Otto Sigismund Lipschitz (1864) Fourier serilerinin yakınsaklığı üzerine çalışmalar yapmıştır [4]. Bu çalışmadan esinlenilerek Lipschitz süreklilik kavramı ve büzülme tipi dönüşümler çeşitli matematikçiler tarafından ele alınmıştır. Bunun dışında, büzülebilir dönüşümler, $F-$büzülme, $Z-$büzülme gibi çeşitli fonksiyonlarla üretilen sabit nokta teoremi genelleştirmeleri elde edilmiştir.

Bu çalışmanın ikinci bölümü iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda metrik fonksiyon, metrik uzay, bu uzaylarda yakınsaklık, Cauchy dizileri, tamlık kavramları tanımlanmıştır. Ayrıca büzülme dönüşümü, büzülebilir dönüşüm, Kannan, Caristi ve quasi$-$büzülme fonksiyonları, mesafe değiştiren ve ultra mesafe değiştiren fonksiyonlar, $Z-$ büzülme fonksiyonlarının tanımları verilmiştir. Bunların yanı sıra sabit nokta teorisi alanındaki çalışmalardan bazıları da bulunmaktadır.

İkinci kısımda quasi $-$ pseudo metrik, quasi metrik, T_1- quasi metrik tanımları ve bu tanımlara ait örnekler bulunmaktadır. Quasi metrik uzaylarda Cauchy dizilerinin sınıflandırılmasına, bu uzaylara has tamlık tanımlarına yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde; Banach sabit nokta teoreminin yukarıda sözü edilen genelleştirilmeleri içerisinde yer alan teoremler verilmiştir. Üçüncü bölüm iki kısma ayrılmış olup, ilk kısımda tam quasi metrik uzaylarda genelleştirilmiş sağ ve sol $Z-$ büzülme dönüşümleri tanımlanmış, bu dönüşümlerin sabit noktasının sağ K$-$tam, sol M$-$tam, sağ ve sol Smyth$-$tam T_1- quasi metrik uzaylarda varlığı ve tekliği gösterilmiştir. İkinci kısımda ise mesafe değiştiren fonksiyonlar ile C$-$sınıfı ve A$-$sınıfı fonksiyonlar yardımıyla özel bir büzülme koşulu tanımlanmıştır. Sağ K$-$tam, sol M$-$tam, sağ ve sol Smyth$-$tam T_1-

quasi metrik uzaylarda, bu koşulu sağlayan dönüşümlerin sabit noktalarının var ve tek olduğu gösterilmiştir.

Son bölümde ise üçüncü bölümde ispatlanan teoremlerin önceki bölümlerde ele alınmış olan özel durumlarıyla ilişkileri verilmiştir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. İlk kısımda metrik uzaylar hakkında yapılan çalışmalar, ikinci kısımda quasi metrik uzay kavramı, bu uzaylarda yakınsaklık, Cauchy dizileri ve tamlık tanımları bulunmaktadır. Burada verilen genel tanım ve teoremler için Mahmut Koçak'ın "Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar" kitabından faydalanılmıştır [29].

2.1 Metrik Uzaylar

Tanım 2.1.1: X kümesi boş olmayan bir küme ve $d: X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall x, y, z \in X$ için;

- $d(x,y) \geq 0$
- $x = y \iff d(x,y) = 0$
- $d(x,y) = d(y,x)$
- $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

koşulları sağlanıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde bir metriktir denir. (X,d) sıralı ikilisine ise bir metrik uzay adı verilir.

Örnek 2.1.2: $X = \mathbb{R}$ ve $d(x,y) = |x-y|$ fonksiyonu, $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir. (X,d) uzayına tek boyutlu Öklid metrik uzayı denir.

Tanım 2.1.3: (X,d) metrik uzayının $\{x \epsilon X \mid d(x_0,x) < \varepsilon\}$ şeklinde tanımlı alt kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar denir ve $B_d(x_0,\varepsilon)$ ile gösterilir.

Her metrik ile, tanımlı olduğu küme üzerinde bir τ_d topolojisi oluşturulabilir. Bu topolojinin bazı $\{B_d(x,\varepsilon) | \, x \in X, \varepsilon > 0\}$ kümesidir.

Uyarı 2.1.4: Eğer (X,d) bir metrik uzaysa τ_d topolojisi T_2 dir.

Tanım 2.1.5: (X,d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$, bu uzayda tanımlı bir dizi olsun. $x_0 \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} d(x_0, x_n) = 0$$

oluyorsa $\{x_n\}$ dizisi x_0 noktasına yakınsaktır denir.

Uyarı 2.1.6: (X, d) metrik uzayında yakınsak bir dizinin tek bir limiti vardır.

Tanım 2.1.7: (X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$, bu uzayda tanımlı bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k \in \mathbb{N}$, her $n, m \geq k$ için

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$$

oluyorsa $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.1.8: (X, d) bir metrik uzayında tanımlı her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya tam metrik uzay denir.

Tanım 2.1.9: (X, d) bir metrik uzay olsun. Bu uzayda tanımlı $T: X \to X$ dönüşümünün tanım kümesindeki tüm x, y ler için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda . d(x, y)$$

olacak şekilde bir $\lambda \in [0,1)$ varsa, T dönüşümüne bir büzülme dönüşümü denir.

Örnek 2.1.10: $X = [0,1]$ ve $d(x, y) = |x - y|$ için $T: X \to X$ dönüşümü

$$Tx = \frac{1}{2 + x}$$

şeklinde tanımlanırsa,

$$d(Tx, Ty) = \left|\frac{x - y}{(2 + x)(2 + y)}\right|$$

olur. Burada $x \neq y$ için

$$\frac{d(Tx,Ty)}{|x-y|} = \left|\frac{1}{(2+x)(2+y)}\right| \leq \frac{1}{4}$$

ve

$$d(Tx,Ty) \leq \frac{1}{4}.d(x,y)$$

olduğu görülür. Yani T dönüşümü, $\lambda = \frac{1}{4}$ için bir büzülme dönüşümüdür.

Teorem 2.1.11: (Banach, 1922) (X,d) boş olmayan bir tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir büzülme dönüşümü olsun, bu durumda T nin X uzayında bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir. Üstelik $x_1 \in X$ olmak üzere

$$x_1,\ x_2 = Tx_1, \dots, x_n = Tx_n$$

şeklinde tanımlı $\{x_n\}$ dizisi bu sabit noktaya yakınsar [2].

Tanım 2.1.12: (X,d) metrik uzayında tanımlı $T: X \rightarrow X$ dönüşümü,

$$d(Tx,Ty) < d(x,y)$$

eşitsizliğini, tanım kümesindeki tüm x,y ler için sağlıyorsa, T ye büzülebilir dönüşüm denir.

Teorem 2.1.13: (Edelstein,1962) (X,d) bir kompakt metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ büzülebilir bir dönüşüm olsun. Bu durumda T dönüşümü X uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir [5].

Teorem 2.1.14: (Bryant, 1968) (X,d) bir tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ dönüşümünün n. kuvveti bir büzülme dönüşümü ise T dönüşümünün X uzayında tek bir sabit noktası vardır [6].

Tanım 2.1.15: (Kannan, 1969) Bir (X, d) tam metrik uzayında tanımlı T dönüşümü için

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha. d(x, Tx) + \alpha. d(y, Ty)$$

olacak şekilde bir $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ varsa T, bir Kannan fonksiyonudur [7].

Teorem 2.1.16: (Subrahmanyam, 1975) Bir metrik uzayın tam olması için gerek ve yeter koşul, o uzaydaki her Kannan fonksiyonunun bir sabit noktaya sahip olmasıdır [8].

Tanım 2.1.17: (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq q. max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}$$

olacak şekilde bir $0 \leq q < 1$ varsa, T ye quasi−büzülme dönüşümü denir [9].

Teorem 2.1.18: (Ciric,1974) (X, d) bir tam metrik uzay ve T dönüşümü bu uzayda tanımlı bir quasi−büzülme olsun. Bu durumda T nin tek bir sabit noktası vardır [9].

Tanım 2.1.19: (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x \in X$ için

$$d(x, Tx) \leq \phi(x) - \phi(Tx)$$

olacak şekilde alttan yarı sürekli, negatif olmayan reel değerli bir ϕ fonksiyonu varsa T ye Caristi fonksiyonu denir [10].

Teorem 2.1.20: (Caristi, 1976) (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer T bir Caristi fonksiyonu ise T nin X de bir sabit noktası vardır [10].

Caristi fonksiyonları çok geniş bir sınıftır, Ciric ve Kannan fonksiyonlarını da içerir. Bu teoremin ispatları çeşitli yöntemlerle farklı matematikçiler tarafından da yapılmıştır. Deimling (1974) ile Brezis ve Browder (1976) tarafından yapılanlar en çok kabul görenler olmuştur [11,12].

Teorem 2.1.21: (Matkowski, 1994) (X, d) bir tam metrik uzay, T bu uzayda tanımlı bir dönüşüm, $\psi: [0, \infty) \to [0, \infty)$ monoton azalmayan ve her $t \in [0, \infty)$ için $\lim_{n\to\infty} \psi^n(t) = 0$ eşitliğini sağlayan bir fonksiyon olsun.

$$d(Tx, Ty) \leq \psi(d(x, y))$$

eşitsizliği her $x, y \in X$ için sağlanıyorsa, T nin X uzayında tek bir sabit noktası vardır [13].

Tanım 2.1.22: $\psi: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu

(ψ1) sürekli ve azalmayandır,

(ψ2) $\psi(t) = 0$ ancak ve ancak $t = 0$ için geçerlidir,

özelliklerini sağlıyorsa ψ ye mesafe değiştiren fonksiyon (M.D.F) denir [14].

Tanım 2.1.23: $\phi: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu

(ϕ1) ϕ süreklidir,

(ϕ2) $t > 0$ için $\phi(t) > 0$

özelliklerini sağlıyorsa ϕ ye ultra mesafe değiştiren fonksiyon (U.M.D.F) denir [17].

Uyarı 2.1.24: Tanımlarından görülebileceği gibi her M.D.F bir U.M.D.F'dir. Ancak bunun tersi doğru değildir.

Teorem 2.1.25: (Khan, 1984) (X, d) tam bir metrik uzay, T, X üzerinde bir dönüşüm, ϕ bir M.D.F olsun. $a: \mathbb{R}^+ \to [0,1)$ azalan bir fonksiyon olmak üzere

$$\phi[d(Tx, Ty)] \leq a[d(x, y)].\phi[d(x, y)]$$

eşitsizliği, her $x \neq y \in X$ için sağlanıyorsa T nin X üzerinde tek bir sabit noktası vardır [14].

Teorem 2.1.26: (Rhoades, 2001) (X, d) bir tam metrik uzay, T bu uzayda tanımlı bir dönüşüm, $\psi: [0, \infty) \to [0, \infty)$ bir M.D.F olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) - \psi(d(x, y))$$

oluyorsa, T nin X uzayında tek bir sabit noktası vardır [15].

Teorem 2.1.27: (Dutta, 2008) (X, d) tam bir metrik uzay ve $T: X \to X$ dönüşümü

$$\psi[d(Tx, Ty)] \leq \psi[d(x, y)] - \phi[d(x, y)]$$

eşitsizliğini, $\psi, \phi: [0, \infty) \to [0, \infty)$ M.D.F 'leri için sağlasın. Bu durumda T nin X üzerinde tek bir sabit noktası vardır [16].

Tanım 2.1.28: $f: [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu eğer

$(f1)$ $f(s, t) \leq s$

$(f2)$ $f(s, t) = s \Rightarrow s = 0$ veya $t = 0$

özelliklerini sağlıyorsa C−sınıfındadır denir [17].

Tanım 2.1.29: $h: [0, \infty) \to [0, \infty)$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere, her $t \in [0, \infty)$ için $h(t) \geq t$ oluyorsa h fonksiyonu A−sınıfındadır denir [17].

Tanım 2.1.30: T dönüşümü X kümesi üzerinde tanımlı olmak üzere $F \subseteq X$ kümesi $x \in F \Rightarrow T(x) \in F$ koşulunu sağlıyorsa F kümesine T altında değişmez (invariant under T) denir.

Teorem 2.1.31: (Ansari, 2014) (X, d) tam metrik uzay, ψ; M.D.F, ϕ; U.M.D.F, f; C−sınıfından ve h; A−sınıfından birer fonksiyon, $T: X \to X$,

$$h[\psi(d(Tx, Ty))] \leq f[\psi(d(x, y)), \phi(d(x, y))]$$

koşulunu, T altında değişmeyen kapalı bir $F \subseteq X$ kümesindeki her x, y için sağlayan bir dönüşüm ise T nin F kümesinde tek bir sabit noktası vardır [17].

Tanım 2.1.32: $\zeta: [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$(\zeta 1)$ $\zeta(0,0) = 0$

$(\zeta 2)$ $\forall t, s > 0,$ $\quad \zeta(t, s) < s - t$

$(\zeta 3)$ $\{t_n\}$ ve $\{s_n\}$; $(0, \infty)$ aralığında $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n > 0$ olacak şekilde iki dizi ise $\limsup\limits_{n\to\infty} \zeta(t_n, s_n) < 0$ olur,

koşullarını sağlıyorsa ζ ya simülasyon fonksiyonu denir [18].

Tanım 2.1.33: (X, d) bir metrik uzay ve Z bütün simülasyon fonksiyonlarının kümesi olmak üzere $T: X \to X$ dönüşümü için

$$\forall x, y \in X \ \exists \zeta \in Z: \ \zeta(d(Tx, Ty), d(x, y)) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T ye bir $Z -$ büzülme denir [18].

Uyarı 2.1.34: Burada $\zeta(t, s) = \lambda s - t$ alınırsa T dönüşümü Banach tipinde bir büzülme olur.

Teorem 2.1.35: (Kojasteh, 2015) Tam metrik uzayda tanımlı her $Z-$ büzülmenin tek bir sabit noktası vardır [18].

Tanım 2.1.36: (X,d) bir metrik uzay ve T, bu uzayda tanımlı bir dönüşüm olsun. Her $x,y \in X$ için

$$M(x,y) = max\left\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \frac{1}{2}[d(x,Ty) + d(Tx,y)]\right\}$$

olmak üzere

$$\zeta(d(Tx,Ty), M(x,y)) \geq 0$$

olacak şekilde bir $\zeta \in Z$ simülasyon fonksiyonu varsa T ye genelleştirilmiş $Z-$ büzülme denir [19].

Teorem 2.1.37: (Olgun, 2015) Tam metrik uzaylarda tanımlı her genelleştirilmiş $Z-$ büzülmenin tek bir sabit noktası vardır [19].

Burada Banach teoreminin birçok genelleştirmesi daha verilebilir ancak çalışmalarımızla alakalı olanları vermeye özen gösterdik.

2.2 Quasi Metrik Uzaylar

Metrik uzay kavramındaki simetri aksiyomu kaldırılarak onun yerine konan şartla veya şartlarla metrik uzaylara benzer olan pek çok kavram üretilmiştir. Wilson (1931) tarafından ilk kez ortaya atılan "quasi metrik" kavramı, dikkat çekenlerden biridir [20]. Son yıllarda bu alanda birçok çalışma yapılmıştır. Bu bölümde verilen tanım ve teoremler için Stefan Cobzaş 'ın Functional Analysis in Asymmetric Normed Spaces kitabından faydalanılmıştır [30].

Tanım 2.2.1: X kümesi ve $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. $\forall x, y, z \in X$ için;

$$(d1)\ d(x,x) = 0$$

$$(d2)\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

oluyorsa d ye bir quasi − pseudo metrik denir. Bunlara ek olarak

$$(d3)\ d(x,y) = d(y,x) = 0\ \Rightarrow x = y$$

koşulunu da sağlıyorsa d ye quasi metrik denir. Bir quasi metrik

$$(d4)\ d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$$

özelliğini sağlıyorsa d ye T_1 – quasi metrik denir.

Bu durumda (X, d) ikilisine quasi – pseudo metrik (veya quasi metrik veya T_1 – quasi metrik) uzay denir.

Tanımlardan görülebileceği gibi her metrik bir T_1 – quasi metrik, her T_1 – quasi metrik bir quasi metrik ve her quasi metrik bir quasi − pseudo metriktir.

Örnek 2.2.2: $X = \mathbb{R}$ ve $d(x,y) = max\{y^2 - x^2, 0\}$ olsun.

- $d(x,x) = 0$ sağlanır.

- $(d2)$ koşulu her $x, y, z \in \mathbb{R}$ için sağlanır.
- Ancak $d(x, -x) = d(-x, x) = 0$ olduğu halde $-x = x$ her x için sağlanmaz.

Yani; (X, d) uzayı quasi – pseudo metriktir, quasi metrik değildir.

Örnek 2.2.3: $X = [0,1]\ ve\ d(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leq y\ için \\ 1, & x > y\ için \end{cases}$ fonksiyonu verilsin.

- $(d1)$ ve $(d2)$ koşullları sağlanır.
- $d(x, y) = d(y, x) = 0$ ise $x \leq y\ ve\ y \leq x$ olacağından $x = y$ elde edilir.
- Ancak $d(x, y) = 0$ her $x \leq y$ için sağlandığından $x = y$ sonucuna ulaşılmaz.

(X, d) uzayı quasi metriktir, ancak T_1 – quasi metrik değildir.

Örnek 2.2.4: $X = [0,1]\ ve\ d(x,y) = \begin{cases} y - x, & x \leq y\ için \\ 1, & x > y\ için \end{cases}$ fonksiyonu tanımlansın.

- $(d1)$ ve $(d2)$ koşulları sağlanır.
- $d(x, y) = 0$ ise $y - x = 0$ olmalıdır, $x = y$ elde edilir.
- Ancak $d(x, y) = d(y, x)$ eşitliği her $x, y \in \mathbb{R}$ için sağlanmaz.

Bu durumda (X, d) uzayı T_1 – quasi metriktir ancak metrik değildir.

Örnek 2.2.5: $X = [0,1]\ ve\ d(x,y) = \begin{cases} |x - y|, & y \neq 0\ veya\ x = y = 0\ için \\ 1, & y = 0\ ve\ 0 < x \leq 1\ için \end{cases}$ olarak tanımlansın.

- $(d1)$ ve $(d2)$ koşulları sağlanır.
- $d(x, y) = 0$ eşitliğinin sağlanması için, $y = 0$ ise $x = 0$, $y \neq 0$ ise $|x - y| = 0$ olmalıdır, her iki durumda da, $x = y$ elde edilir.
- Ancak $d(x, y) = d(y, x)$ eşitliği her $x, y \in \mathbb{R}$ için sağlanmaz.

Sonuç olarak, (X, d) uzayı T_1 – quasi metriktir ancak metrik değildir.

Örnek 2.2.6: $X = \{x_n : n = 0,1,\ldots\}$ uzayında tanımlı

$$d(x_m, x_n) = \begin{cases} 1, & m > 0 \; ve \; m \neq n \;\; ise \\ \frac{1}{n}, & m = 0 \; ve \; n \neq 0 \; ise \\ 0, & m = n \; ise \end{cases}$$ fonksiyonu verilsin.

- $(d1)$ ve $(d2)$ koşulları sağlanır.
- $d(x_m, x_n) = 0$ ise $m = n$ dir.
- Ancak $d(x_m, x_n) = d(x_n, x_m)$ eşitliği her $m, n \in \mathbb{N}$ için sağlanmaz.

Bu durumda (X, d) uzayı $T_1 -$ quasi metriktir ancak metrik değildir.

Tanım 2.2.7: (X, d) quasi metrik uzayında

$$B_d(x_0, \varepsilon) = \{x \in X \mid d(x_0, x) < \varepsilon\}$$

İle tanımlanan kümeye x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar denir.

Örnek 2.2.8: $X = \mathbb{R}$ ve $d(x, y) = max\{y^2 - x^2, 0\}$ şeklinde tanımlansın. (X, d) quasi metrik uzayında her $x_0 \in X$ için,

$$B_d(x_0, \varepsilon) = \{x \in X \mid d(x_0, x) < \varepsilon\} = \{x \in X \mid max\{x^2 - {x_0}^2, 0\} < \varepsilon\}$$

$$= (-\sqrt{{x_0}^2 + \varepsilon}, \sqrt{{x_0}^2 + \varepsilon})$$

şeklindedir. Bu durumda açık yuvarlar $\{(-a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ olarak ifade edilebilir.

Örnek 2.2.9: $X = \mathbb{R}$ ve $d(x, y) = \begin{cases} y - x, & x \leq y \;\; için \\ 1, & x > y \;\; için \end{cases}$ ile tanımlansın. (X, d) $T_1 -$ quasi metrik uzayında

$$B_d(x_0, \varepsilon) = \{x \in X \mid d(x_0, x) < \varepsilon\}$$

açık yuvarı

$\varepsilon \leq 1$ için $[x_0, x_0 + \varepsilon)$ ve $\varepsilon > 1$ için $(-\infty, \; x_0 + \varepsilon)$

aralıkları ile ifade edilir. Başka bir deyişle, bu uzaydaki tüm açık yuvarlar

$$\{(-\infty, a) |\ a \in \mathbb{R}\} \text{ veya } \{[a, b) |\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

şeklindedir.

Her quasi metrik ile, tanımlı olduğu kümede bir τ_d topolojisi oluşturulabilir. Bu topolojinin bazı $\{B_d(x, \varepsilon) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$ kümesidir.

Uyarı 2.2.10: Eğer (X, d) bir quasi metrik uzaysa, τ_d topolojisi T_0 dır ve $T_1 -$ quasi metrik uzaysa, τ_d topolojisi T_1 dir.

Örnek 2.2.11: 2.2.8 numaralı örnekte tanımlanmış olan uzayda, herhangi iki noktanın her birinin diğerini içermeyen açık komşulukları bulunamaz, (X, d) uzayı T_1 değildir. Ancak mutlak değerce küçük olan elemanın diğerini içermeyen açık komşuluğu bulunabileceğinden (X, d) uzayı T_0 dır.

Örnek 2.2.12: 2.2.9 numaralı örnekte herhangi farklı iki reel sayının ayrık açık komşulukları bulunabilir, bu durumda (X, d) quasi metrik uzayı T_2 dir.

Uyarı 2.2.13: Her (X, d) quasi metrik uzayı için

$$d^{-1}(x, y) = d(y, x)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon da X üzerinde bir quasi metrik belirtir.

$$d^s(x, y) = max\{d(x, y), d(y, x)\}$$

ile tanımlı d^s fonksiyonu ise bir metriktir.

Tanım 2.2.14: (X, d) bir quasi metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda tanımlı bir dizi olsun. $z \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} d(z, x_n) = 0$$

oluyorsa $\{x_n\}$ dizisi z noktasına yakınsaktır (veya d −yakınsaktır) denir. $\{x_n\}$ dizisi için $d^s(x_n, z) \to 0$ oluyorsa, bu dizi, τ_{d^s} topolojisine göre yakınsaktır denir.

Uyarı 2.2.15: (X, d) bir quasi metrik uzayında tanımlı bir dizinin d^s −yakınsak olması için gerek ve yeter koşul, aynı anda hem d −yakınsak hem de d^{-1} −yakınsak olmasıdır.

Örnek 2.2.16: $X = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ kümesi ve bu küme üzerinde

$$d\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n\ tek, m\ çift\ ve\ n < m\ için \\ 0, & n = m\ için \\ 1, & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

quasi metriği verilsin. Bu uzayda $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{2n}\right\}$ dizisi d −yakınsak ya da d^{-1} −yakınsak değildir.

Örnek 2.2.17: 2.2.8 numaralı örnekte tanımlanmış olan uzay göz önünde bulundurulsun. $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ dizisi,

$$\lim_{n\to\infty} d(0, x_n) = \lim_{n\to\infty} d\left(0, \frac{1}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n^2} = 0$$

olduğundan, bu uzayda d −yakınsaktır. Benzer şekilde

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, 0) = \lim_{n\to\infty} d\left(\frac{1}{2n}, 0\right) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

olduğundan $\{x_n\}$ dizisi aynı zamanda d^{-1} −yakınsaktır.

Örnek 2.2.18: $\mathrm{X} = [0,1)$ ve $d(x, y) = max\{y - x, 0\}$ olsun.

$$\{x_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$$

dizisi göz önüne alınsın.

$$\lim_{n\to\infty} d\left(x,\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} max\left\{\frac{n}{n+1} - x, 0\right\} = 1 - x$$

olduğundan $\{x_n\}$ dizisi d −yakınsak değildir, ancak

$$\lim_{n\to\infty} d\left(\frac{n}{n+1}, x\right) = \lim_{n\to\infty} max\left\{x - \frac{n}{n+1}, 0\right\} = 0$$

olduğundan $\{x_n\}$ dizisi, X kümesinin her elemanına d^{-1} −yakınsaktır.

Quasi metrik uzaylarda Cauchy dizileriyle ilgili birçok farklı yaklaşım vardır. Reilly vd. (1982) quasi metrik uzaylarda Cauchy dizilerini şu şekilde sınıflandırmıştır [21];

Tanım 2.2.19: (X, d) bir quasi metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzaydaki bir dizi olsun.

- $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x \in X,\; \exists k \in \mathbb{N} \;\; \forall m \geq k \;,\; d(x, x_m) < \varepsilon$ oluyorsa, $\{x_n\}$ dizisine sol d −Cauchy,
- $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x \in X,\; \exists k \in \mathbb{N} \;\; \forall m \geq k \;,\; d(x_m, x) < \varepsilon$ oluyorsa, $\{x_n\}$ dizisine sağ d −Cauchy,
- $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists k \in \mathbb{N} \;\; \forall r, s \geq k \;,\; d(x_r, x_s) < \varepsilon$ oluyorsa, $\{x_n\}$ dizisine d −Cauchy,
- $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists k \in \mathbb{N} \;\; \forall r, s;\; r \geq s \geq k \;,\; d(x_r, x_s) < \varepsilon$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisine sağ K−Cauchy,
- $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists k \in \mathbb{N} \;\; \forall r, s;\; r \geq s \geq k \;,\; d(x_s, x_r) < \varepsilon$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisine sol K−Cauchy,

dizisi denir.

Örnek 2.2.20: $X = [0,1]$ uzayı, $d(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leq y \text{ için} \\ 1, & x > y \text{ için} \end{cases}$ quasi metriği ve

$$\{x_n\} = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}, & n\ tek\ ise \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3^n}, & n\ çift\ ise \end{cases}$$

dizisi, (X, d) uzayında tanımlı bir dizi olsun.

$$d\left(\frac{1}{3}, x_n\right) = 0 \text{ ve } d(x_n, 1) = 0$$

eşitlikleri her $n \geq 1$ için sağlandığından $\{x_n\}$ dizisi hem d −yakınsak hem de d^{-1} −yakınsaktır. Aynı zamanda sol d −Cauchy ve sağ d −Cauchy dizisidir.

Ancak

$$d(x_r, x_s) < \varepsilon$$

eşitsizliği, r ve s 'nin birinin tek, diğerinin çift olma durumunda sağlanamayacağından d −Cauchy, sağ veya sol K−Cauchy dizisi değildir.

Örnek 2.2.21: $X = (0,1)$ ve $d(x, y) = \begin{cases} x - y, & x \geq y\ için \\ 1, & x < y\ için \end{cases}$ ile tanımlanan d fonksiyonu X üzerinde bir quasi metrik belirtir. Bu uzayda, $\{x_n\}$ dizisi,

$$\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n+1}\right\}$$

şeklinde tanımlansın. $\forall r < s$ için $d(x_r, x_s) \to 0$ sağlandığından $\{x_n\}$ dizisi sol K−Cauchy ve dolayısıyla sol d −Cauchy'dir. Fakat her $x \in X$ için belli bir noktadan sonra $d(x_r, x) = 1$ olduğundan $\{x_n\}$ dizisi sağ d −Cauchy değildir.

Quasi metrik uzaylarda çeşitli yazarlar tarafından birçok tamlık kavramı verilmiştir. Bu tanımlarla quasi metrik uzaylarda Banach sabit nokta teoreminin genelleştirmeleri yapılmaktadır.

Tanım 2.2.22: (X, d) quasi−pseudo metrik uzayında tanımlı her d −Cauchy dizisi, bu uzaydaki bir noktaya yakınsıyorsa (X, d) uzayına dizisel tam denir [22].

Teorem 2.2.23: (Reilly,1974) (X,d) dizisel tam T_2 quasi−pseudo metrik uzayında tanımlı her büzülme dönüşümünün yalnız bir sabit noktası vardır [22].

Tanım 2.2.24: (X,d) quasi metrik uzayında tanımlı her d −Cauchy dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = \lim_{n\to\infty} d(x,x_n) = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (X,d) uzayına tam uzay denir.

Uyarı 2.2.25: Burada verilmiş olan tamlık kavramı, d^s −yakınsak lık kavramına karşılık gelmektedir.

Teorem 2.2.26: (Hicks, 1988) (X,d) bir tam quasi metrik uzay, $T: X \to X$ ve $\phi, G : X \to [0,\infty)$ olsun. Bir $x_0 \in X$ için

$$d(y,Ty) \leq \phi(y) - \phi(Ty)$$

eşitsizliği her $y \in \{x_0, Tx_0, T^2x_0, \ldots\}$ için sağlanıyorsa,

1. $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x_0 = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır,
2. $G(x) = d(x,Tx)$ fonksiyonu

   $$G(z) \leq \lim_{n\to\infty} inf G(T^n x_0)$$

   eşitsizliğini sağlıyorsa $Tz = z$ olur,
3. $d(x_0, T^n x_0) \leq \phi(x_0)$

koşulları sağlanır [23].

Teorem 2.2.27: (Hicks, 1988) (X,d) bir tam quasi metrik uzay, $T: X \to X$ ve $h \in [0,1)$ olsun. Bir $x_0 \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \leq hmax\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \frac{1}{2}[d(x,Ty) + d(y,Tx)]\}$$

eşitsizliği her $y \in \{x_0, Tx_0, T^2x_0, \ldots\}$ için sağlanıyorsa,

1. $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x_0 = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır,

2. $G(x) = d(x, Tx)$ fonksiyonu

$$G(z) \leq \lim_{n\to\infty} \inf G(T^n x_0)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $Tz = z$ olur,

koşulları sağlanır [23].

Teorem 2.2.28: (Cobzaş, 2011) (X, d) bir dizisel tam T_1 −quasi metrik uzay ve T bu uzayda tanımlı bir dönüşüm olsun. $\tau_{d^{-1}}$ topolojisine göre altan yarı sürekli bir $\psi: X \to [0, \infty)$ fonksiyonu için

$$d(x, Tx) \leq \psi(x) - \psi(Tx)$$

eşitsizliği her $x \in X$ için sağlansın. Bu takdirde T nin bir sabit noktası vardır [24].

Teorem 2.2.29: (Jleli,2012) (X, d) bir tam quasi metrik uzay,

$\psi: [0, \infty) \to [0, \infty)$ sürekli bir fonksiyon olsun ve $\psi^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ koşulunu sağlasın. $T: X \to X$ dönüşümü

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) - \psi(d(x, y))$$

eşitsizliğini her $x, y \in X$ için sağlıyorsa, bu takdirde T nin tek bir sabit noktası vardır [25].

Teorem 2.2.30: (Alsulami, 2014) Tam quasi metrik uzaylarda $Z-$ büzülmelerin tek bir sabit noktası vardır [26].

Altun vd. (2017) yaptıkları çalışmada quasi metrik uzaylarda bugüne kadar en sık kullanılmış olan tamlık tanımlarını şu şekilde sınıflandırmıştır [27].

Tanım 2.2.31: (X, d) quasi metrik uzayında tanımlı her

- Sol (sağ) d −Cauchy dizisi d −yakınsak ise (X, d) ye sol(sağ) ς −tam,
- d −Cauchy dizisi d −yakınsak ise (X, d) ye ς −tam,

- Sol (sağ) d –Cauchy dizisi d^{-1} –yakınsak ise (X, d) ye sol(sağ) η –tam,
- d –Cauchy dizisi d^{-1} –yakınsak ise (X, d) ye η –tam,
- Sol (sağ) d –Cauchy dizisi d^s –yakınsak ise (X, d) ye sol(sağ) θ –tam,
- d –Cauchy dizisi d^s –yakınsak ise (X, d) ye θ –tam,
- Sol (sağ) K–Cauchy dizisi d –yakınsak ise (X, d) ye sol (sağ) K–tam,
- Sol (sağ) K–Cauchy dizisi d^{-1} –yakınsak ise (X, d) ye sol (sağ) M–tam,
- Sol (sağ) K–Cauchy dizisi d^s –yakınsak ise (X, d) *ye* sol (sağ) Smyth–tam

denir.

Uyarı 2.2.32: Tanım 2.2.21 'de verilen dizisel tam kavramı, bu çalışmadaki ϛ –tam kavramı ile, Tanım 2.2.23 'te verilen tam quasi metrik uzay kavramı bu çalışmadaki θ –tam kavramı ile özdeştir.

Örnek 2.2.33: $X = \mathbb{N}$ ve $d(m,n) = \begin{cases} 0, & m = n \ \ ise \\ \frac{1}{n}, & m > n \ ve \ m \ çift \ n \ tek \ ise \\ 1, & diğer \ durumlarda \end{cases}$

quasi metriği verilsin. (X, d) quasi metrik uzayı göz önünde bulundurulduğunda,

$$\{x_n\} = \{2n\}$$

dizisi bir sağ d –Cauchy dizisidir ve $(2n+1) \in \mathbb{N}$ tek sayılarına d^{-1} –yakınsaktır, ancak d –yakınsak değildir. Bu durumda sağ ϛ –tam değildir.

Örnek 2.2.34: $X = (0,1)$ ve $d(x,y) = \begin{cases} x - y, & x \geq y \ için \\ 1, & x < y \ için \end{cases}$ olsun.

(X, d) quasi metrik uzayında genel terimi

$$\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n+1}\right\}$$

olan $\{x_n\}$ dizisi sol d −Cauchy ve sol K−Cauchy olduğu halde $d,\ \ d^{-1}$ veya d^s −yakınsak olmadığından, (X,d) uzayı sol ς / η / θ −tam veya sol K / M / Smyth−tam değildir.

Bu uzayda $\{x_n\}$ sağ d −Cauchy olan bir dizi ise her $\varepsilon > 0$ için,

$$d(x_n,x) = \begin{cases} x_n - x, & x_n \geq x \text{ } için \\ 1, & x_n < x \text{ } için \end{cases} \quad < \varepsilon$$

eşitsizliğinin sağlanabilmesi için

$$x_n + \varepsilon < x \leq x_n$$

şeklinde olmalıdır. Bu durumun, $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere her $n > k$ için sağlanması gerektiğinden, dizi bir noktadan sonra sabit dizi olmalıdır. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi $d,\ d^{-1}$ ve d^s −yakınsaktır, (X,d) uzayı sağ ς −tam, sağ η −tam ve sağ θ −tamdır.

Örnek 2.2.35: $X = [0,1],\ d(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leq y \text{ } için \\ 1, & x > y \text{ } için \end{cases}$ verilsin.

$d(0,x_n) = 0$ ve $d(x_n,1) = 0$ eşitlikleri her $\{x_n\}$ dizisi için sağlandığından bu uzayda tanımlı her dizi d ve d^{-1} −yakınsaktır. Bu durumda (X,d) uzayı sol (sağ) ς / η / θ −tamdır ve sol (sağ) K / M / Smyth−tamdır.

3. QUASİ METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bu başlıkta, birinci kısımda quasi metrik uzaylarda genelleştirilmiş $Z-$ büzülme fonksiyonları, [19] çalışmasındakine benzer olarak tanımlanacak, sağ K−tam, sol M−tam ve Smyth tam T_1 − quasi metrik uzaylarda genelleştirilmiş $Z-$ büzülmelerin sabit noktasının tekliği ispatlanacaktır. İkinci kısımda ise C−sınıfı ve A−sınıfı fonksiyonlar yoluyla özel bir büzülme koşulu tanımlanacak ve bu koşulu sağlayan dönüşümlerin sabit noktalarını varlığı ve tekliği gösterilecektir.

3.1 Genelleştirilmiş Z −Büzülme Dönüşümleri İçin Sabit Nokta Teoremleri

Metrik uzaylarda yaygın olarak bilinen, Tanım 2.1.36 ’da kullanılmış olan maksimum fonksiyonu, quasi metrik uzayların simetri koşulunu sağlamaması nedeniyle sol tam uzaylara uygun değildir. Bu nedenle bu çalışmada sağ ve sol tam uzaylar için M_1 ve M_2 olmak üzere iki fonksiyon olarak tanımlanmıştır.

Tanım 3.1.1: $T: X \to X$ bir dönüşüm olmak üzere, $M_1, M_2: X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonları

$$M_1(x,y) = max\{d(x,y), d(Tx,x), d(Ty,y), \frac{1}{2}[d(x,Ty) + d(Tx,y)]\}$$

ve

$$M_2(x,y) = max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \frac{1}{2}[d(x,Ty) + d(Tx,y)]\}$$

şeklindedir.

Tanım 3.1.2: (X,d) bir quasi metrik uzay olsun. $T: X \to X$ dönüşümü, her $x, y \in X$ için

$$\zeta(d(Tx,Ty), M_1(x,y)) \geq 0$$

eşitsizliğini bir $\zeta \in Z$ için sağlıyorsa, T ye genelleştirilmiş sağ $Z-$ büzülme,

$$\zeta(d(Tx,Ty),M_2(x,y)) \geq 0$$

eşitsizliğini bir $\zeta \in Z$ için sağlıyorsa, T ye genelleştirilmiş sol $Z-$ büzülme denir.

Teorem 3.1.3: (X,d) bir sağ K−tam T_1- quasi metrik uzay, $T: X \to X$ e tanımlı bir genelleştirilmiş sağ $Z-$ büzülme ise bu takdirde T dönüşümünün tek bir sabit noktası vardır.

İspat: (X,d) uzayı bir sağ K−tam T_1- quasi metrik uzay ve $T: X \to X$ dönüşümü bir $\zeta \in Z$ için genelleştirilmiş sağ $Z-$ büzülme olsun. T tarafından üretilen $\{x_n\}$ Picard dizisinin yakınsak olduğu ve yakınsadığı değerin de T nin sabit noktası olduğunu gösterelim. $x_0 \in X$ keyfi noktasından başlamak üzere $\{x_n\}$ dizisi, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} = Tx_n$ koşulunu sağlayan Picard dizisi olsun. T bir genelleştirilmiş sağ $Z-$ büzülme olduğundan

$$\zeta(d(T^{n+1}x,T^n x),M_1(T^n x,T^{n-1}x)) \geq 0 \tag{3.1.1}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$M_1(T^n x,T^{n-1}x) = max\left\{\begin{matrix} d(T^n x,T^{n-1}x),d(T^{n+1}x,T^n x),d(T^n x,T^{n-1}x), \\ \frac{1}{2}(d(T^n x,T^n x)+d(T^{n+1}x,T^{n-1}x)) \end{matrix}\right\}$$

’dır. Ayrıca

$$d(T^{n+1}x,T^{n-1}x) \leq d(T^{n+1}x,T^n x) + d(T^n x,T^{n-1}x)$$

olduğundan

$$M_1(T^n x,T^{n-1}x) = max\{d(T^n x,T^{n-1}x),d(T^{n+1}x,T^n x)\}$$

elde edilir. Eğer

$$max\{d(T^n x, T^{n-1}x), d(T^{n+1}x, T^n x)\} = d(T^{n+1}x, T^n x)$$

ise

$$\zeta\big(d(T^{n+1}x, T^n x), M_1(T^n x, T^{n-1}x)\big) = \zeta(d(T^{n+1}x, T^n x), d(T^{n+1}x, T^n x)) \geq 0$$

eşitsizliği ζ nın simülasyon fonksiyonu olmasıyla çelişir. Bu durumda,

$$d(T^{n+1}x, T^n x) < d(T^n x, T^{n-1}x)$$

olur. Yani $\{d(T^n x, T^{n-1}x)\}$ dizisi monoton azalan, terimleri negatif olmayan bir dizidir ve limiti vardır.

$$\lim_{n\to\infty} d(T^n x, T^{n-1}x) = r$$

olsun. Eğer $r > 0$ ise $(\zeta 3)$ ten

$$\limsup_{n\to\infty} \zeta(\, d(T^{n+1}x, T^n x), d(T^n x, T^{n-1}x)) < 0$$

elde edilir ancak bu durum (3.1.1) ile çelişir, dolayısıyla $r = 0$ elde edilir,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0 \qquad (3.1.2)$$

olur. Şimdi $\{x_n\}$ dizisinin sağ K−Cauchy olduğunu gösterelim.

$$D = \{d(x_n, x_m),\ n > m \in \mathbb{N}\}$$

kümesinin sınırlı olmadığı varsayılsın. Eğer $x_n = x_{n+p}$ olacak şekilde $n \geq 0$ ve $p \geq 1$ değerleri varsa $\{x_n \mid\ n \in \mathbb{N}\}$ kümesi sonludur ve D kümesi sınırlıdır. Bu nedenle her $n, m \in \mathbb{N}$ için

$$n \neq m \text{ ise } x_n \neq x_m$$

olsun. Burada (3.1.2) göz önünde bulundurulursa bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için

$$d\left(x_{n+1},x_n\right)<1$$

eşitsizliğinin her $n\geq n_0$ için sağlandığı görülür. Ancak D kümesinin sınırlı olmadığı kabul edildiğinden $d\left(x_n,x_{n_0}\right)>1$ olacak şekilde en az bir $n>n_0$ sayısı vardır. Bu şekildeki n lerin en küçüğü n_1 ise

$$d\left(x_{n_1},x_{n_0}\right)>1$$

ve

$$\forall p\in\{n_0,n_0+1,\ldots,n_1-1\} \text{ için } d\left(x_p,x_{n_0}\right)\leq 1$$

olur. Benzer şekilde

$$d\left(x_{n_2},x_{n_1}\right)>1$$

ve

$$\forall p\in\{n_1,n_1+1,\ldots,n_2-1\} \text{ için } d\left(x_p,x_{n_0}\right)\leq 1$$

olacak şekilde n_1 den büyük en küçük n_2 sayısı vardır. Bu işlem devam ettirilerek, $\{x_n\}$ dizisinin

$$d\left(x_{n_{k+1}},x_{n_k}\right)>1$$

ve

$$\forall p\in\{n_k,n_k+1,\ldots,n_{k+1}-1\} \text{ için } d\left(x_p,x_{n_k}\right)\leq 1 \qquad (3.1.3)$$

koşullarını sağlayan bir $\{x_{n_k}\}$ altdizisi elde edilir. Burada üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$1<d\left(x_{n_{k+1}},x_{n_k}\right)\leq d\left(x_{n_{k+1}},x_{n_{k+1}-1}\right)+d\left(x_{n_{k+1}-1},x_{n_k}\right)$$

olur. Burada (3.1.2) ve (3.1.3) göz önünde bulundurularak $k \to \infty$ için limit alınırsa Sıkıştırma Teoremi'nden

$$\lim_{k\to\infty} d\left(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}\right) = 1$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\lim_{k\to\infty} d\left(x_{n_{k+1}-1}, x_{n_k-1}\right) = 1 \qquad (3.1.4)$$

olur.

$$M_1\left(x_{n_{k+1}-1}, x_{n_k-1}\right) = max\begin{Bmatrix} d\left(x_{n_{k+1}-1}, x_{n_k-1}\right), d\left(x_{n_{k+1}}, x_{n_{k+1}-1}\right), \\ d\left(x_{n_k}, x_{n_k-1}\right), \\ \frac{1}{2}\left(d\left(x_{n_{k+1}-1}, x_{n_k}\right) + d\left(x_{n_{k+1}}, x_{n_k-1}\right)\right) \end{Bmatrix}$$

ifadesinde üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$M_1\left(x_{n_{k+1}-1}, x_{n_k-1}\right) \leq d\left(x_{n_{k+1}}, x_{n_{k+1}-1}\right) + d\left(x_{n_{k+1}-1}, x_{n_k}\right) + d\left(x_{n_k}, x_{n_k-1}\right)$$

olduğu görülür. Burada (3.1.2) dikkate alınarak $k \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{k\to\infty} M_1\left(x_{n_{k+1}-1}, x_{n_k-1}\right) \leq 1$$

elde edilir. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} d\left(x_{n_{k+1}-1}, x_{n_k-1}\right) \leq \lim_{n\to\infty} M_1\left(x_{n_{k+1}-1}, x_{n_k-1}\right) \leq 1$$

elde edilir. (3.1.4) dikkate alındığında Sıkıştırma Teoreminden

$$\lim_{n\to\infty} M_1\left(x_{n_{k+1}-1}, x_{n_k-1}\right) = 1$$

elde edilir. $(\zeta 3)$ göz önünde bulundurulursa,

$$\limsup_{n\to\infty} \zeta\left(d\left(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}\right), M_1\left(x_{n_{k+1}-1}, x_{n_k-1}\right)\right) < 0$$

olur ancak bu eşitsizlik büzülme şartı ile çelişir. Bu durumda D sınırlı bir kümedir ve

$$c_n = sup\{d(x_i, x_j): i \geq j \geq n\}$$

dizisi, negatif olmayan reel sayılardan oluşan, monoton artmayan bir dizidir.

Bu durumda negatif olmayan bir c sayısı için

$$c = \lim_{n\to\infty} c_n$$

‘dir. c nin sıfıra eşit olduğunu gösterelim. Bunun için $c > 0$ olduğunu varsayalım. c_n dizisinin tanımından, her $k \in \mathbb{N}$ için

$$c_k - \frac{1}{k} < d\left(x_{m_k}, x_{n_k}\right) \leq c_k$$

olacak şekilde $m_k > n_k \geq k$ vardır,

$$\lim_{k\to\infty} d\left(x_{m_k}, x_{n_k}\right) = c \qquad (3.1.5)$$

’dir. Burada (3.1.2) gereği

$$m_k > n_k + 1$$

olduğu açıktır. Supremum tanımı dikkate alınarak $d\left(x_{m_k-1}, x_{n_k}\right)$ için üçgen eşitsizliği uygulandığında

$$d\left(x_{m_k}, x_{n_k}\right) - d\left(x_{m_k}, x_{m_k-1}\right) \leq d\left(x_{m_k-1}, x_{n_k}\right) \leq c_k$$

olduğu görülür. Burada $k \to \infty$ için limit alındığında Sıkıştırma Teoreminden

$$\lim_{k\to\infty} d\left(x_{m_k-1}, x_{n_k}\right) = c \tag{3.1.6}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\lim_{k\to\infty} d\left(x_{m_k}, x_{n_k-1}\right) = c$$

$$\lim_{k\to\infty} d\left(x_{m_k-1}, x_{n_k-1}\right) \ = c \tag{3.1.7}$$

olur.

$$M_1\left(x_{m_k-1}, x_{n_k-1}\right) = max \begin{Bmatrix} d\left(x_{m_k-1}, x_{n_k-1}\right), d\left(x_{m_k}, x_{m_k-1}\right), d\left(x_{n_k}, x_{n_k-1}\right), \\ \frac{1}{2}(d\left(x_{m_k-1}, x_{n_k}\right) + d\left(x_{m_k}, x_{n_k-1}\right)) \end{Bmatrix}$$

eşitliğinde

$$\begin{aligned} d\left(x_{m_k-1}, x_{n_k-1}\right) &\leq M_1\left(x_{m_k-1}, x_{n_k-1}\right) \\ &\leq d\left(x_{m_k}, x_{m_k-1}\right) + \ d\left(x_{m_k-1}, x_{n_k}\right) + d\left(x_{n_k}, x_{n_k-1}\right) \end{aligned}$$

olduğu açıktır. Burada (3.1.2), (3.1.6) ve (3.1.7) göz önüne alınarak $k \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{k\to\infty} M_1\left(x_{m_k-1}, x_{n_k-1}\right) = c \tag{3.1.8}$$

olduğu görülür. $(\zeta 3)$ özelliğine göre (3.1.5) ve (3.1.8) dikkate alınırsa

$$\limsup_{n\to\infty} \zeta(d\left(x_{m_k}, x_{n_k}\right), M_1\left(x_{m_k-1}, x_{n_k-1}\right)) < 0$$

olmalıdır ancak bu durum büzülme şartıyla çelişir. Yani $c = 0$ elde edilir, $\{x_n\}$ dizisi sağ K−Cauchy dizisidir.

X uzayı sağ K−tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} d(z, x_n) = 0$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır, yani $\{x_n\}$ dizisi, z değerine d −yakınsaktır. Bu değerin T nin sabit noktası olduğunu gösterelim. $r \neq 0$ için

$$d(Tz, z) = r$$

olduğu kabul edilsin.

$$M_1(z, x_n) = max\left\{d(z, x_n), d(Tz, z), d(x_{n+1}, x_n), \frac{1}{2}(d(Tz, x_n) + d(z, x_{n+1})\right\}$$

eşitliğinde

$$\lim_{n\to\infty} M_1(z, x_n) = d(Tz, z) = r$$

olduğu açıktır. Bu durumda $(\zeta 3)$ özelliğinden

$$\limsup_{n\to\infty} \zeta\big(d(Tz, Tx_n), M_1(z, x_n)\big) < 0$$

elde edilir ve bu durum büzülme şartıyla çelişir.

$$d(Tz, z) = 0$$

olur, z noktası, T dönüşümünün bir sabit noktasıdır.

Şimdi T nin sabit noktasının tek olduğunu gösterelim. $z, w \in X,\ T$ nin iki sabit noktası olsun, bu durumda $X,\ T_1$ − quasi metrik uzay olduğundan

$$d(z, w) > 0$$

sağlanır. T genelleştirilmiş sağ Z − büzülme olduğundan

$$\zeta(d(Tz, Tw), M_1(z, w)) \geq 0$$

eşitsizliği

$$M_1(z,w) = max\left\{d(z,w), d(z,z), d(w,w), \frac{1}{2}(d(z,w) + d(z,w)\right\} = d(z,w)$$

için sağlanır. Bu durum $(\zeta 2)$ koşuluyla çelişir, $z = w$ dir. $\{x_n\}$ dizisinin limiti olan z değeri, T nin tek sabit noktasıdır. ■

Teorem 3.1.4: (X, d) bir sol M−tam T_1 − quasi metrik uzay, $T,\ X$ kümesinde tanımlı bir genelleştirilmiş sol Z − büzülme ise T dönüşümünün tek bir sabit noktası vardır.

ispat: $\{x_n\}$ dizisinin sol K−Cauchy olduğu yukarıdaki ispatla simetrik olarak gösterilebileceğinden, sol M−tam uzaylarda da sabit noktanın tek olduğu açıktır.

Teorem 3.1.5: (X, d) bir sol (sağ) Smyth−tam T_1 − quasi metrik uzay, $T,\ X$ kümesinde tanımlı bir genelleştirilmiş sol (sağ) Z− büzülme ise T dönüşümünün tek bir sabit noktası vardır.

ispat: Sol (sağ) Smyth−tam uzaylardaki sol (sağ) K−Cauchy dizileri d^s −yakınsak olduğundan yine T dönüşümünün tek bir sabit noktası vardır.

Örnek 3.1.6: (Simsek, 2017) $X = \left[0, \frac{1}{3}\right]$ kümesinde tanımlı

$$d(x,y) = \begin{cases} y - x & x \leq y \ için \\ x & x > y \ için \end{cases}$$

fonksiyonu ve

$$Tx = \frac{x}{2}$$

dönüşümü verilsin.

(X, d) uzayının T_1- quasi metrik olduğu açıktır. Sağ K−tam olduğunu gösterelim. Bunun için her sağ K−Cauchy dizisi, d −yakınsak olmalıdır. Bu uzayda tanımlı bir $\{x_n\}$ sağ K−Cauchy dizisi verilsin. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ ve her $m \geq n \geq k$ için

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ vardır.

$$d(x_m, x_n) = \begin{cases} x_n - x_m & x_m \leq x_n \ için \\ x_m & x_m > x_n \ için \end{cases}$$

olduğundan, bu dizinin sağ K−Cauchy olabilmesi için artmayan bir dizi olması gerekmektedir. Alttan sınırlı da olduğu için d −yakınsaktır. Bu durumda (X, d) uzayı sağ K−tamdır. $\zeta: [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\zeta(s, t) = \frac{s}{2} - t$$

fonksiyonunun simülasyon fonksiyonu olduğu açıktır. T dönüşümünün ζ ile bir sağ $Z-$ büzülme dönüşümü olduğunu gösterelim.

- $x \leq \frac{y}{2}$ ise;

$$M_1(x, y) = max\left\{d(x, y), d\left(\frac{x}{2}, x\right), d\left(\frac{y}{2}, y\right), \frac{1}{2}(d\left(x, \frac{y}{2}\right) + d\left(\frac{x}{2}, y\right)\right\}$$

$$= max\left\{y - x, \frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{1}{2}(\frac{y}{2} - x + y - \frac{x}{2})\right\} = y - x$$

$$\zeta\big(d(Tx, Ty), M_1(x, y)\big) = \zeta\left(\frac{y}{2} - \frac{x}{2}, y - x\right) = 0$$

- $\frac{y}{2} < x \leq y$ ise;

$$M_1(x, y) = max\left\{y - x, \frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{1}{2}(x + y - \frac{x}{2})\right\} = \frac{2y + x}{4}$$

$$\zeta\big(d(Tx,Ty),M_1(x,y)\big)=\zeta\left(\frac{y}{2}-\frac{x}{2},\frac{2y+x}{4}\right)=\frac{5x-2y}{8}>0$$

- $y\leq\frac{x}{2}$ ise;

  $$M_1(x,y)=\ max\left\{x,\frac{x}{2},\frac{y}{2},\frac{1}{2}(x+\frac{x}{2})\right\}=x$$

  $$\zeta\big(d(Tx,Ty),M_1(x,y)\big)=\zeta\left(\frac{x}{2},x\right)=0$$

- $\frac{x}{2}<y<x$ ise;

  $$M_1(x,y)=\ max\left\{x,\frac{x}{2},\frac{y}{2},\frac{1}{2}(x+y-\frac{x}{2})\right\}=x$$

  $$\zeta\big(d(Tx,Ty),M_1(x,y)\big)=\zeta\left(\frac{x}{2},x\right)=0$$

Her durumda

$$\zeta\big(d(Tx,Ty),M_1(x,y)\big)\geq 0$$

eşitsizliği sağlandığından T bir sağ $Z-$ büzülme dönüşümüdür, teoremin tüm koşulları sağlanır ve $z=0$ değeri, dönüşümün tek sabit noktasıdır [28].

3.2 C−Sınıfı ve A−Sınıfı Fonksiyonlar Yoluyla Elde Edilen Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda Teorem 2.1.31 'de metrik uzaylar için elde edilen sonuç, maksimum fonksiyonunu da içeren bir eşitsizlik ile quasi metrik uzaylarda gösterilmiştir.

Teorem 3.2.1: (X,d) bir sağ K−tam T_1 – quasi metrik uzay,

$\psi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ bir M.D.F, $\phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ bir U.M.D.F,

$f:[0,\infty)\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ bir C−sınıfı ve $h:[0,\infty)\to[0,\infty)$ bir A−sınıfı fonksiyon olmak üzere,

$T:X\to X$ dönüşümü

$$h\big[\psi\big(d(Tx,Ty)\big)\big]\leq f\big[\psi\big(M_1(x,y)\big),\phi\big(M_1(x,y)\big)\big] \tag{3.2.1}$$

koşulunu, T altında değişmeyen kapalı bir $F\subseteq X$ kümesindeki her x,y için sağlıyorsa T nin F kümesinde tek bir sabit noktası vardır.

İspat: T dönüşümü, (X,d) sağ K−tam T_1 – quasi metrik uzayında tanımlı ve F, X in T altında değişmeyen kapalı bir alt kümesi olsun. Herhangi bir $x_0\in F$ için $\{x_n\}$ dizisi, $x_n=Tx_{n-1}$ şeklinde tanımlansın. F, T altında değişmeyen olduğu için $\{x_n\}\in F$ olduğu açıktır. (3.2.1) eşitsizliğinde x yerine x_n, y yerine x_{n-1} yazılırsa,

$$M_1(x_n,x_{n-1})=max\{d(x_n,x_{n-1}),d(x_{n+1},x_n),d(x_n,x_{n-1}),$$

$$\frac{1}{2}[d(x_n,x_n)+d(x_{n+1},x_{n-1})]\}$$

için,

$$\psi\big(d(x_{n+1},x_n)\big) \leq h\big[\psi\big(d(x_{n+1},x_n)\big)\big]$$

$$\leq f\big[\psi\big(M_1(x_n,x_{n-1})\big),\phi\big(M_1(x_n,x_{n-1})\big)\big] \tag{3.2.2}$$

olur.

$$\frac{1}{2}d(x_{n+1},x_{n-1}) \ \leq \frac{1}{2}\{d(x_{n+1},x_n)+d(x_n,x_{n-1})\}$$

$$\leq max\{d(x_{n+1},x_n),d(x_n,x_{n-1})\}$$

olduğundan

$$M_1(x_n,x_{n-1}) = max\{d(x_{n+1},x_n),d(x_n,x_{n-1})\}$$

olması gerektiği elde edilir.

Burada en az bir n_0 için $M_1\big(x_{n_0},x_{n_0-1}\big) = d\big(x_{n_0+1},x_{n_0}\big)$

oluyorsa, (3.2.2) eşitsizliği,

$$\psi\left(d\big(x_{n_0+1},x_{n_0}\big)\right) \leq h\left[\psi\left(d\big(x_{n_0+1},x_{n_0}\big)\right)\right]$$

$$\leq f\left[\psi\left(d\big(x_{n_0+1},x_{n_0}\big)\right),\phi\left(d\big(x_{n_0+1},x_{n_0}\big)\right)\right]$$

şeklini alır. f, C−sınıfından bir fonksiyon olduğundan $(f1)$ özelliği kullanılarak

$$f\left[\psi\left(d\big(x_{n_0+1},x_{n_0}\big)\right),\phi\left(d\big(x_{n_0+1},x_{n_0}\big)\right)\right] \leq \psi\left(d\big(x_{n_0+1},x_{n_0}\big)\right)$$

elde edilir. Bu durumda $(f2)$ den

$$\psi\left(d\big(x_{n_0+1},x_{n_0}\big)\right) = 0 \text{ veya } \ \phi\left(d\big(x_{n_0+1},x_{n_0}\big)\right) = 0$$

olduğu görülür. ψ bir M.D.F ve ϕ bir U.M.D.F olduğundan, $(\psi 2)$ ve $(\phi 2)$ göz önünde bulundurulursa her iki durumda da

$$d\left(x_{n_0+1}, x_{n_0}\right) = 0$$

sonucuna ulaşılır. X uzayı T_1- quasi metrik olduğundan $x_{n_0+1} = x_{n_0}$ elde edilir, yani x_{n_0} değeri, T dönüşümünün sabit noktasıdır.

Bu nedenle, her $n > 0$ için

$$M_1(x_n, x_{n-1}) = max\{d(x_{n+1}, x_n), d(x_n, x_{n-1})\} = d(x_n, x_{n-1})$$

olduğu kabul edilir. Başka bir deyişle $\{d(x_n, x_{n-1})\}$ dizisi alttan sınırlı ve azalan bir dizidir.

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n-1}) = r$$

olsun. (3.2.2) 'de $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\psi(r) \leq h[\psi(r)] \leq f[\psi(r), \phi(r)]$$

elde edilir. Burada $(f2)$, $(\psi 2)$ ve $(\phi 2)$ göz önünde bulundurulursa $r = 0$ olduğu görülür. Yani,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n-1}) = 0 \qquad (3.2.3)$$

olur. Benzer şekilde, $d(x_{n-1}, x_n) \to 0$ olduğunu göstermek için, (3.2.1) eşitsizliğinde x yerine x_{n-1} ve y yerine x_n yazılırsa,

$$M_1(x_{n-1}, x_n) = max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n-1}), d(x_{n+1}, x_n),$$

$$\frac{1}{2}[d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_n)]\}$$

için,

$$\psi\big(d(x_n,x_{n+1})\big) \le h\big[\psi\big(d(x_n,x_{n+1})\big)\big]$$

$$\le f\big[\psi\big(M_1(x_{n-1},x_n)\big),\phi\big(M_1(x_{n-1},x_n)\big)\big] \qquad (3.2.4)$$

olur. Burada $\{d(x_n,x_{n-1})\}$ azalan bir dizi ve

$$\mathrm{d}(x_{n-1},x_{n+1}) \ \le d(x_{n-1},x_n)+d(x_n,x_{n+1})$$

olduğundan,

$$M_1(x_{n-1},x_n) = max\{d(x_{n-1},x_n), d(x_n,x_{n-1}),$$

$$\frac{1}{2}[d(x_{n-1},x_n)+d(x_n,x_{n+1})]\,\}$$

elde edilir. En az bir bir n_0 için

$$ma\,x\big\{d\big(x_{n_0-1},x_{n_0}\big),d\big(x_{n_0},x_{n_0-1}\big),d\big(x_{n_0},x_{n_0+1}\big)\,\big\} = d\big(x_{n_0},x_{n_0+1}\big) \quad (3.2.5)$$

oluyorsa, (3.2.4) eşitsizliği

$$\psi\left(d\big(x_{n_0},x_{n_0+1}\big)\right) \le h\left[\psi\left(d\big(x_{n_0},x_{n_0+1}\big)\right)\right]$$

$$\le f\left[\psi\left(M_1\big(x_{n_0-1},x_{n_0}\big)\right),\phi\left(M_1\big(x_{n_0-1},x_{n_0}\big)\right)\right]$$

durumuna gelir. Burada f nin C−sınıfından olduğu göz önünde bulundurulursa

$$f\left[\psi\left(M_1\big(x_{n_0-1},x_{n_0}\big)\right),\phi\left(M_1\big(x_{n_0-1},x_{n_0}\big)\right)\right] \le \psi\left(M_1\big(x_{n_0-1},x_{n_0}\big)\right)$$

elde edilir. Başka bir deyişle

$$\psi\left(d\left(x_{n_0}, x_{n_0+1}\right)\right) \leq \psi\left(M_1\left(x_{n_0-1}, x_{n_0}\right)\right)$$

olur. ψ fonksiyonu azalmayan olduğundan (3.2.5) eşitliği dikkate alınarak,

$$\psi\left(d\left(x_{n_0}, x_{n_0+1}\right)\right) \leq \psi\left(M_1\left(x_{n_0-1}, x_{n_0}\right)\right) \leq \psi\left(d\left(x_{n_0}, x_{n_0+1}\right)\right)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik, $d\left(x_{n_0}, x_{n_0+1}\right) = 0$ olduğunu, yani x_{n_0} değerinin, T dönüşümünün sabit noktası olduğunu gösterir. Bu nedenle her $n > 0$ için

$$M_1(x_{n-1}, x_n) = max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n-1})\}$$

olduğu varsayılır.

<u>Birinci Durum:</u> Yalnızca sonlu sayıda $1 \leq i \leq k$ için

$$d\left(x_{n_i-1}, x_{n_i}\right) > d\left(x_{n_i}, x_{n_i-1}\right)$$

oluyorsa, $n > n_k$ için $d(x_{n-1}, x_n) \leq d(x_n, x_{n-1})$ eşitsizliği sağlanır. (3.2.3) göz önünde bulundurularak

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n-1}, x_n) = 0$$

sağlanır.

<u>İkinci Durum:</u> Sonsuz sayıda n_i için

$$d\left(x_{n_i-1}, x_{n_i}\right) > d\left(x_{n_i}, x_{n_i-1}\right)$$

oluyorsa, her n_i için

$$M_1\left(x_{n_i-1}, x_{n_i}\right) = d\left(x_{n_i-1}, x_{n_i}\right)$$

sağlanır ve (3.2.4) eşitsizliği,

$$\psi\left(d\left(x_{n_i}, x_{n_i+1}\right)\right) \leq h\left[\psi\left(d\left(x_{n_i}, x_{n_i+1}\right)\right)\right]$$

$$\leq f\left[\psi\left(d\left(x_{n_i-1}, x_{n_i}\right)\right), \phi\left(d\left(x_{n_i-1}, x_{n_i}\right)\right)\right]$$

$$\leq \psi\left(d\left(x_{n_i-1}, x_{n_i}\right)\right) \qquad (3.2.6)$$

şeklini alır. Bu durumda $\{d(x_{n_i-1}, x_{n_i})\}$ dizisi azalandır.

$$\lim_{i\to\infty} d\left(x_{n_i-1}, x_{n_i}\right) = r$$

olacak şekilde (3.2.6) eşitsizliğinde $i \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\psi(r) \leq h[\psi(r)] \leq f[\psi(r), \phi(r)]$$

elde edildiğinden $r = 0$ olur, başka bir deyişle,

$$\lim_{i\to\infty} d\left(x_{n_i-1}, x_{n_i}\right) = 0 \qquad (3.2.7)$$

sonucuna ulaşılır. $\{x_n\}$ dizisinin $\{x_{n_i}\}$ alt dizisinde olmayan elemanları, $1 \leq i \in \mathbb{N}$ için x_{m_i} olarak adlandırılırsa bu m_i değerleri için

$$d\left(x_{m_i-1}, x_{m_i}\right) \leq d\left(x_{m_i}, x_{m_i-1}\right) \qquad (3.2.8)$$

olduğu görülür. Eğer x_{m_i} değerleri sonlu sayıdaysa (3.2.7) 'deki limit, x_n için de sıfıra eşittir. Sonsuz sayıdaysa, (2.2.8) eşitsizliğinde $i \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{i\to\infty} d\left(x_{m_i-1}, x_{m_i}\right) \leq \lim_{i\to\infty} d\left(x_{m_i}, x_{m_i-1}\right)$$

olur. (3.2.3) limiti her x_n için, dolayısıyla x_{m_i} için de geçerli olduğundan,

$$\lim_{i\to\infty} d\left(x_{m_i-1}, x_{m_i}\right) = 0 \qquad (3.2.9)$$

elde edilir. Tanımları dolayısıyla, $\{x_n\}$ dizisi, $\{x_{n_i}\}$ ve $\{x_{m_i}\}$ alt dizilerinin birleşiminden oluşmaktadır. Burada (3.2.7) ve (3.2.9) limitleri birlikte değerlendirildiğinde,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n-1}, x_n) = 0 \tag{3.2.10}$$

sonucuna ulaşılır.

$\{x_n\}$ dizisinin sağ K−Cauchy olmadığını varsayalım, verilen bir $\varepsilon > 0$ için, $k \in \mathbb{N}$ ve $n_k > m_k > k$ olacak şekilde,

$$d(x_{n_k}, x_{m_k}) \geq \varepsilon \text{ ve } d\left(x_{n_{k-1}}, x_{m_k}\right) < \varepsilon$$

eşitsizliklerini sağlayan $n_k,\ m_k$ değerleri vardır. Bu durumda

$$\varepsilon \leq d\left(x_{n_k}, x_{m_k}\right) \leq d\left(x_{n_k}, x_{n_{k-1}}\right) + d\left(x_{n_{k-1}}, x_{m_k}\right)$$

$$\leq d\left(x_{n_k}, x_{n_{k-1}}\right) + \varepsilon$$

olur. Burada $k \to \infty$ için limit alınırsa, Sıkıştırma Teoremi'nden ve (3.2.3) 'den

$$\lim_{k\to\infty} d\left(x_{n_k}, x_{m_k}\right) = \varepsilon$$

elde edilir. Benzer bir sonucun $d\left(x_{n_k-1}, x_{m_k-1}\right)$ için gösterilmesi, iki kez üçgen eşitsizliği kullanılarak sağlanır;

$$d\left(x_{n_k}, x_{m_k}\right) \leq d\left(x_{n_k}, x_{n_{k-1}}\right) + d\left(x_{n_{k-1}}, x_{m_k-1}\right) + d\left(x_{m_{k-1}}, x_{m_k}\right)$$

$$\leq d\left(x_{n_k}, x_{n_{k-1}}\right) + d\left(x_{n_{k-1}}, x_{n_k}\right) + d\left(x_{n_k}, x_{m_k}\right)$$

$$+ d\left(x_{m_k}, x_{m_k-1}\right) + d\left(x_{m_{k-1}}, x_{m_k}\right)$$

Burada $k \to \infty$ için limit alınırsa, (3.2.3) ve (3.2.10) göz önünde bulundurularak

$$\lim_{k\to\infty} d\left(x_{n_k-1}, x_{m_k-1}\right) = \varepsilon$$

olduğu görülür. (3.2.1) eşitsizliğinde x yerine $x_{n_{k-1}}$, y yerine x_{m_k-1} yazılarak,

$$\psi\left(d\left(x_{n_k}, x_{m_k}\right)\right) \leq h\left[\psi\left(d\left(x_{n_k}, x_{m_k}\right)\right)\right]$$

$$\leq f\left[\psi\left(M_1\left(x_{n_k-1}, x_{m_k-1}\right)\right), \phi\left(M_1\left(x_{n_k-1}, x_{m_k-1}\right)\right)\right] \qquad (3.2.11)$$

elde edilir. Burada

$$M_1\left(x_{n_k-1}, x_{m_k-1}\right) = max\{d\left(x_{n_k-1}, x_{m_k-1}\right), d\left(x_{n_k}, x_{n_k-1}\right), d\left(x_{m_k}, x_{m_k-1}\right),$$

$$\frac{1}{2}\left[d\left(x_{n_k-1}, x_{m_k}\right) + d\left(x_{n_k}, x_{m_k-1}\right)\right]\}$$

olur. Üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$M_1\left(x_{n_k-1}, x_{m_k-1}\right) \leq max\{d\left(x_{n_k-1}, x_{m_k-1}\right), d\left(x_{n_k}, x_{n_k-1}\right), d\left(x_{m_k}, x_{m_k-1}\right),$$

$$\frac{1}{2}\left[d\left(x_{n_k-1}, x_{n_k}\right) + d\left(x_{n_k}, x_{m_k}\right) + d\left(x_{n_k}, x_{n_k-1}\right) + d\left(x_{n_k-1}, x_{m_k-1}\right)\right]\}$$

olur. Burada

$$\lim_{k\to\infty} d\left(x_{n_k-1}, x_{m_k-1}\right) = \lim_{k\to\infty} d\left(x_{n_k}, x_{m_k}\right) = \varepsilon$$

ve

$$\lim_{k\to\infty} d\left(x_{n_k}, x_{n_k-1}\right) = \lim_{k\to\infty} d\left(x_{m_k}, x_{m_k-1}\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} d\left(x_{n_{k-1}-1}, x_{n_k}\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} d\left(x_{m_k-1}, x_{m_k}\right) = 0$$

olduğundan $\lim_{k\to\infty} M_1\left(x_{n_k-1}, x_{m_k-1}\right) = \varepsilon$ elde edilir. (3.2.11) eşitsizliğinde $k \to \infty$ için limit alınırsa

$$\psi(\varepsilon) \le h[\psi(\varepsilon)] \le f[\psi(\varepsilon), \phi(\varepsilon)]$$

eşitsizliği $\varepsilon > 0$ için f nin C−sınıfından, ψ nin M.D.F ve ϕ nin U.M.D.F olmasıyla çelişir. Yani $\{x_n\}$ dizisi sağ K−Cauchy'dir.

(X, d) uzayı sağ K−tam olduğundan $\{x_n\}$ dizisi d −yakınsaktır, başka bir deyişle bir $x \in X$ değeri için $\lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0$ olur. F kümesi kapalı olduğundan, F de tanımlı $\{x_n\}$ dizisinin limiti de F kümesindedir, yani $x \in F$ dir. (3.2.1) eşitsizliğinde y yerine x_n yazılırsa,

$$M_1(x, x_n) = max\{d(x, x_n), d(Tx, x_n), d(x_{n+1}, x_n),$$
$$\frac{1}{2}[d(x, x_{n+1}) + d(Tx, x_n)]\}$$

için

$$\psi\big(d(Tx, x_{n+1})\big) \le h\big[\psi\big(d(Tx, x_{n+1})\big)\big]$$
$$\le f\big[\psi\big(M_1(x, x_n)\big), \phi\big(M_1(x, x_n)\big)\big] \qquad (3.2.12)$$

elde edilir.

$$d(Tx, x_n) \le d(Tx, x) + d(x, x_n)$$

olduğundan $n \to \infty$ için $M_1(x, x_n) \to d(Tx, x)$ dir. (3.2.12) 'de $n \to \infty$ için limit alınarak

$$\psi(d(Tx, x) \le h[\psi(d(Tx, x))] \le f[\psi(d(Tx, x)), \phi(d(Tx, x))]$$

olduğu görülür, $d(Tx,x)=0$ sonucuna ulaşılır. X bir T_1- quasi metrik olduğundan $Tx=x$ değeri, T dönüşümünün sabit noktasıdır. Sabit noktanın tek olduğunu göstermek için birbirinden farklı $x,y \in F$ değerleri için $x=Tx$ ve $y=Ty$ olduğu varsayılır. Bu durumda

$$\begin{aligned} M_1(x,y) &= max\{d(x,y), d(Tx,x), d(Ty,y), \tfrac{1}{2}[d(x,Ty)+d(Tx,y)]\} \\ &= max\left\{d(x,y), d(x,x), d(y,y), \tfrac{1}{2}[d(x,y)+d(x,y)]\right\} \\ &= d(x,y) \end{aligned}$$

değeri (3.2.1) 'de yerine yazılırsa

$$\psi(d(x,y) \leq h[\psi(d(x,y))] \leq f[\psi(d(x,y)), \phi(d(x,y))]$$

elde edilir, yani $d(x,y)=0$ olur ve sabit noktanın tek olduğu görülür. ■

Sol M−tam uzaylarda, daralma koşulunda M_1 yerine M_2 kullanılır.

Teorem 3.2.2: (X,d) bir sol M−tam T_1- quasi metrik uzay,

$\psi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ bir M.D.F, $\phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ bir U.M.D.F,

$f:[0,\infty)\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ bir C−sınıfı ve $h:[0,\infty)\to[0,\infty)$ bir A−sınıfı fonksiyon olmak üzere, $T:X\to X$ dönüşümü

$$h\big[\psi\big(d(Tx,Ty)\big)\big] \leq f\big[\psi\big(M_2(x,y)\big), \phi\big(M_2(x,y)\big)\big] \tag{3.2.13}$$

koşulunu T altında değişmeyen kapalı bir $F\subseteq X$ kümesindeki her x,y için sağlıyorsa T nin F kümesinde tek bir sabit noktası vardır.

İspat: Genel hatlarıyla yukarıdaki ispata benzemektedir. Burada, (3.2.13) eşitsizliğindeki x yerine x_{n-1}, y yerine x_n yazılırsa,

$$M_2(x_{n-1}, x_n) = max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n-1}, x_n),$$

$$\frac{1}{2}[d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_n)]\}$$

için,

$$\psi(d(x_n, x_{n+1})) \leq h[\psi(d(x_n, x_{n+1}))]$$

$$\leq f\left[\psi\left(M_2(x_{n-1,}x_n)\right), \phi\left(M_2(x_{n-1,}x_n)\right)\right] \quad (3.2.14)$$

olur.

$$\mathrm{d}(x_{n-1}, x_{n+1}) \leq d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})$$

olduğundan $M_2(x_{n-1}, x_n) = max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\}$ elde edilir. Önceki ispata benzer şekilde, $\forall n > 0$

$$ma\,x\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\} = d(x_{n-1}, x_n)$$

olduğu görülür, $\{d(x_{n-1}, x_n)\}$ dizisi azalandır ve limiti sıfırdır. Aynı durum $\{d(x_n, x_{n-1})\}$ dizisi için de geçerlidir.

$\{x_n\}$ dizisinin sol K−Cauchy olmadığı varsayılırsa, verilen bir $\varepsilon > 0$ için, $k \in \mathbb{N}$ ve $n_k > m_k > k$ olacak şekilde,

$$d(x_{m_k}, x_{n_k}) \geq \varepsilon \text{ ve } d(x_{m_k}, x_{n_{k-1}}) < \varepsilon$$

eşitsizliklerini sağlayan n_k, m_k değerleri vardır. Üçgen eşitsizliği ve Sıkıştırma Teoremi kullanılarak

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{m_k}, x_{n_k}) = \varepsilon \text{ ve } \lim_{k\to\infty} d(x_{m_k-1}, x_{n_k-1}) = \varepsilon$$

elde edilir. (3.2.13) eşitsizliğinde x yerine , x_{m_k-1} ve y yerine $x_{n_{k-1}}$ yazıldığında,

$$\psi\left(d\left(x_{m_k}, x_{n_k}\right)\right) \leq h\left[\psi\left(d\left(x_{m_k}, x_{n_k}\right)\right)\right]$$

$$\leq f\left[\psi\left(M_2\left(x_{m_k-1}, x_{n_k-1}\right)\right), \phi\left(M_2\left(x_{m_k-1}, x_{n_k-1}\right)\right)\right] \qquad (3.2.15)$$

olur. Burada M_1 fonksiyonuna benzer şekilde

$$\lim_{k\to\infty} M_2\left(x_{m_k-1}, x_{n_k-1}\right) = \varepsilon$$

olduğundan (3.2.15) eşitsizliğinde $k \to \infty$ için limit alınırsa

$$\psi(\varepsilon) \leq h[\psi(\varepsilon)] \leq f[\psi(\varepsilon), \phi(\varepsilon)]$$

eşitsizliği $\varepsilon > 0$ için f nin C−sınıfından, ψ nin M.D.F ve ϕ nin U.M.D.F olmasıyla çelişir. Yani $\{x_n\}$ dizisi sol K−Cauchy'dir.

(X, d) uzayı sol M−tam olduğundan, $\{x_n\}$ dizisi d^{-1} −yakınsaktır, yani bir $x \in F$ değeri için $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ olur. (3.2.13) 'de x yerine x_n ve y yerine x yazılırsa,

$$M_2(x_n, x) = max\{d(x_n, x), d(x_n, x_{n+1}), d(x, Tx),$$

$$\frac{1}{2}[d(x_n, Tx) + d(x_{n+1}, x)]\}$$

için

$$\psi\big(d(x_{n+1}, Tx)\big) \leq h\big[\psi\big(d(x_{n+1}, Tx)\big)\big]$$

$$\leq f\big[\psi\big(M_2(x_n, x)\big), \phi\big(M_2(x_n, x)\big)\big] \qquad (3.2.16)$$

olur. $n \to \infty$ için limit alınırsa $M_2(x_n, x) \to d(x, Tx)$ olduğundan (3.2.16) eşitsizliği

$$\psi(d(x,Tx) \leq h[\psi(d(x,Tx))] \leq f[\psi(d(x,Tx)),\phi(d(x,Tx))]$$

şeklini alır. Bu durumda $d(x,Tx)=0$ elde edilir, X bir T_1- quasi metrik olduğundan $Tx=x$ değeri, T dönüşümünün sabit noktasıdır. Sabit noktanın tek olduğu önceki teorem ile aynı şekilde ispatlanır. ■

d^s −yakınsaklık, d −yakınsaklığı ve d^{-1} −yakınsaklığı gerektirdiğinden benzer sonuçlara Smyth−tam uzaylar için kolaylıkla ulaşılır.

Teorem 3.2.3: (X,d) uzayı, sağ veya sol Smyth−tam T_1 − quasi metrik uzay, $\psi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ bir M.D.F, $\phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ bir U.M.D.F, $f:[0,\infty)\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ C−sınıfından ve $h:[0,\infty)\to[0,\infty)$ A−sınıfından birer fonksiyon olmak üzere $T:X\to X$ dönüşümü X uzayı sağ Smyth−tam ise

$$h[\psi(d(Tx,Ty))] \leq f[\psi(M_1(x,y)),\phi(M_1(x,y))]$$

eşitsizliğini ve sol Smyth−tam ise

$$h(\psi(d(Tx,Ty))] \leq f[\psi(M_2(x,y)),\phi(M_2(x,y))]$$

eşitsizliğini, T altında değişmeyen kapalı bir $F\subseteq X$ kümesindeki her x,y için sağlıyorsa T nin F kümesinde tek bir sabit noktası vardır.

Ansari (2014) vd. 'nin yayınladığı çalışmada tam metrik uzaylar için verilmiş olan örnekte, X uzayı üzerinde bir quasi metrik tanımlanarak benzer bir sonuç elde edilebilir [17].

Örnek 3.2.4: $X=[0,1]$ ve $d(x,y)=\begin{cases} x-y, & x\geq y \ için \\ 1, & x<y \ için \end{cases}$ ile elde edilen (X,d) T_1 − quasi metrik uzayında,

$$Tx=\begin{cases} \frac{1}{4}, & x=\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4} \ için \\ 1-x, & diğer \ durumlarda \end{cases}$$

dönüşümü; $\psi(t) = t,\ \ \phi(t) = \frac{t}{5},\ \ f(s,t) = s - t,\ \ h(t) = t$ fonksiyonları ve

$F = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right\}$ kümesiyle birlikte Teorem 2.2.9 ’un ön koşullarını sağlar.

$x, y \in F$ için

$$M_1(x,y) = max\{d(x,y), d(\frac{1}{4},x), d(\frac{1}{4},y), \frac{1}{2}(d(\frac{1}{4},y) + d(x,\frac{1}{4}))\} = 1$$

ve

$$h[\psi(d(Tx,Ty))] \leq f[\psi(M_1(x,y)), \phi(M_1(x,y))]$$

eşitsizliğinde sol taraf 0 ve sağ taraf $\frac{4}{5}$ olduğundan eşitsizlik her $x, y \in F$ için sağlanır.

4.SONUÇ VE ÖNERİLER

Metrik uzaylar üzerinde simulasyon fonksiyonu kullanılarak verilen bazı sabit nokta teoremlerinin quasi metrik uzaylar üzerinde genelleştirmeleri, 3.1 başlığında verilmiştir. Bu başlıktaki Teorem 3.1.'de X uzayı tam metrik olarak alınırsa Teorem 2.1.36, bununla beraber T dönüşümü $Z-$ büzülme olarak alınırsa Teorem 2.1.35 elde edilir. Ayrıca quasi metrik uzaylar göz önünde bulundurulduğunda Teorem 3.2.3 ile Teorem 2.2.30 'da elde edilen sonuçlar benzerdir.

Tezin 3.2 başlığında ise M.D.F, U.M.D.F, A−sınıfı ve C−sınıfı fonksiyonlar kullanılarak sağ K−tam, sol M−tam, sağ ve sol Smyth−tam T_1- quasi metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri elde edilmiştir.

Kısım 3.2'de ispatlanan teoremler, daha önceden ispatlanan bazı teoremlerin quasi metrik uzaylara ve daha geniş dönüşüm kümelerine genelleştirilmesidir.

Örneğin, ilk teoremde X bir tam metrik uzay ve F kümesi X in kendisi olarak alınır, ϕ fonksiyonu bir M.D.F olarak, $h(t)=t$ ve $f(s,t)=s-t$ olarak seçilir, $M_1(x,y)$ yerine $d(x,y)$ konulursa Teorem 2.1.16 elde edilir.

Benzer şekilde, X bir tam metrik uzay ve F kümesi X in kendisi olarak, $h(t)=t$, $a:\mathbb{R}^+\to[0,1)$ azalan bir fonksiyon olmak üzere $f(s,t)=a.s,$ ϕ bir M.D.F alınarak ve $M_1(x,y)$ yerine $d(x,y)$ konularak Teorem 2.1.25 e ulaşılır.

Çeşitli alanlarda, metrik uzaylar ile elde edilen sonuçlar benzer şekilde quasi metrik uzaylara genelleştirilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Frechet, M., Sur Quelques Points Du Calcul Fonctionnel, Rendiconti Circolo Mat. Palermo, 22, 1–74, 1906

[2] Banach, S., Sur Les Operations Dans Les Ensembles Abstraits Et Leur Application Aux Equations Integrales, Fund, Math. 3,133-181,1922

[3] Almezel, S., Topics in Fixed Point Theory, Springer International Publishing, Chapter 2, 2014

[4] Lipschitz, R., De Explicatione Per Series Trigonometricas İnsttuenda Functionum Unius Variablis Arbitrariarum, Et Praecipue Earum, Quae Per Variablis Spatium Finitum Valorum Maximorum Et Minimorum Numerum Habent İnfintum Disquisitio, *J. Reine Angew. Math.* ,296–308, 1864

[5] Edelstein, M., A Theorem on Fixed Points Under Isometries, Am. Math. Mon. 70, 298-300, 1963

[6] Bryant, V., A Remark on a Fixed Point Theorem for Iterated Mappings, Am. Math. Mon 75, 399–400, 1968

[7] Kannan, R., Some Results on Fixed Points II. Am. Math. Mon**.** 76**,** 405-408, 1969

[8] Subrahmanyam, P. V., Completeness and Fixed-Points, Monatshefte Math. 80, 325-330, 1975

[9] Ciric, L., B., A Generalization of Banach's Contraction Principle, Proc. Amer. Math. Soc., 45 (2), 267-273, 1974

[10] Caristi, J., Fixed Point Theorems for Mappings Satisfying Inwardness Conditions, Trans. Amer. Math. Soc. 215, 241-251, 1976

[11] Deimling, K., Zeros of Accretive Operators, Manuscripta Math 13, 365-374, 1974

[12] Brezis, H., Browder, B., A General Principle on Ordered Sets in Nonlinear Functional Analysis, Adv. in Math., 21, 355–364, 1976

[13] Matkowski, J., Nonlinear Contractions in Metrically Convex Spaces. Publ. Math. Debrecen 45, 103–114, 1994

[14] Khan, M. S. , Swaleh, M., Fixed Point Theorems by Altering Distances Between the Points, Bulletin of the Australian Mathematical Society, Vol:30, No:1, 1-9, 1984

[15] Rhoades, B., E., Some Theorems on Weakly Contractive Maps. Nonlinear Anal. 47, 2683–2693, 2001

[16] Dutta, P. N., Choudhury B. S., A Generalization of Contraction Principle in Metric Spaces, Hindawi Publishing Corporation, Fixed Point Theory and Applications, 2008

[17] Ansari, A. H., Note on $\psi - \phi$ Contractive Type Mappings and Related Fixed Point, The Second Regional Conference on Mathematics and Applications, Payame Noor University, 377-380, 2014

[18] Khojasteh, F., Shukla, S., Radenovic, S., A New Approach to the Study of Fixed Point Theorems via Simulation Functions, Filomat., 29:6, 2015

[19] Olgun, M., Alyıldız, T., Biçer, Ö., A New Aspect to Picard Operators with Simulation Functions, Turkish Journal Of Mathematics, 2015

[20] Wilson, W., A., On Quasi-Metric Spaces, *American J. Math.* 53, 675-84, 1931

[21] Reilly, I., L., Subrahmanyam, P., V., Vamanamurthy, M., K., Cauchy Sequences in Quasi-Pseudo Metric Spaces, Monatsh. Math., 93, 127–140, 1982

[22] Reilly, I., L., A Generalized Contraction Principle, Bull. Austral. Math. Soc. Vol. 10, 359-363, 1974

[23] Hicks, T., L., Fixed Point Theorems for Quasi-Metric Spaces, Math. Japon., 33 , 231–236, 1988

[24] Cobzaş, S., Completeness in Quasi-Metric Spaces and Ekeland Variational Principle, Topology Appl., 158, 1073– 1084, 2011

[25] Jleli, M., Samet, B., Remarks on G-Metric Spaces and Fixed Point Theorems, Fixed Point Theory and Applications 2012:210, 2012

[26] Alsulami, H., H., Karapınar, E., Khojasteh, F., A. F., A Proposal to the Study of Contractions in Quasi-Metric Spaces, Discrete Dyn. Nat. Soc., 2014

[27] Altun, I., 0lgun, M. ,Minak, G. Classification of Completeness of Quasi Metric Space and Some New Fixed Point Results, Nonlinear Funct. Anal. Appl., 22, 371–384, 2017

[28] H. Simsek, M. T. Yalcın, Generalized Z-Contractions on Quasi Metric Spaces and a Fixed Point Result, J. Nonlinear Sci. Appl. (10) , 3397–3403, 2017

[29] M. Koçak, Genel topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar, Kampüs Yayıncılık, 3.Baskı, 2011

[30] S. Cobzaş, Functional Analysis in Asymmetric Normed Spaces, Springer Basel,ISBN 978-3-0348-0477-6, 2013

ÖZGEÇMİŞ

EĞİTİM

Doktora: Matematik Bölümü, Kırıkkale Üniversitesi 2013-2019

Pedagojik Formasyon, Hacettepe Üniversitesi 2013-2014

Yüksek Lisans: Matematik Bölümü, TOBB ETÜ 2007-2009

Lisans: Matematik Bölümü, ODTÜ 2003-2007

DENEYİM

Araştırma Görevlisi , TOBB ETÜ 2007-2009

Matematik Öğretmeni, Final Okulları 2016-2018

DİL

İngilizce, İleri Seviyede

YAYIN VE SUNUMLAR

İkinci Basamaktan İndirgeme Dizileri Yoluyla Hessenberg Matrislerin Karakterizasyonu, Yüksek Lisans Tezi, 2009

Some Fixed Point Results in Quasi Metric Spaces, Sözlü Sunum, ICOME, İstanbul, Mayıs 2017

Generalized Z-Contractions on Quasi Metric Spaces and a Fixed Point Result, H. Şimşek, M. T. Yalcın, J. Nonlinear Sci. Appl. (10) , 3397–3403, 2017

Matematik Eğitiminde Anlamlı Oyunlaştırma, Sözlü Bildiri, ISCESS, Antalya, Kasım 2018