

T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELEKTRİK ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ
ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİR ANTEN DİZİSİNE GELEN SİNYALİN YÖNÜNÜN TEKİL DEĞER
AYRIŞIMI VE MATRİS KALEM YÖNTEMİ İLE BULUNMASI

Nilay AYTAŞ

Temmuz 2017

ÖZET

BİR ANTEN DİZİSİNE GELEN SİNYALİN YÖNÜNÜN TEKİL DEĞER AYRIŞIMI VE MATRİS KALEM YÖNTEMİ İLE BULUNMASI

AYTAŞ, Nilay

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Elektrik Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı, Yüksek Lisans tezi

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Eyüp TUNA

Ortak Danışman: Prof. Dr. Erkan AFACAN

Temmuz 2017, 68 sayfa

Sinyal kaynaklarının yönünün tespiti, radar sistemleri, konum bulma sistemleri, elektronik harp sistemleri gibi askeri sistemler başta olmak üzere maden rezervlerinin tespiti, mobil iletişim sistemleri, kaçak radyo yayınlarının bulunması, kaybolan dağcılarının yerinin tespiti gibi sivil uygulamalarda da etkin bir şekilde kullanılmaktadır.

İlk dönemlerde sadece tek bir sinyal kaynağının konumunu belirleyen sistemler günümüzde alt uzay tekniklerinin gelişmesi ile aynı anda birçok sinyal kaynağından gelen sinyallerin yönünü ve konumunu tespit edebilme yeteneğini kazanmıştır. Tekil Değer Ayırışımı yöntemi ile Matris Kalem yöntemi sinyalin alt uzay analizinde kullanılan yöntemlerden ikisidir. Bu çalışmada söz konusu iki yöntemi kullanarak anten dizisine bir veya birden fazla sinyal kaynağından gelen sinyallerin geliş yönlerinin belirlenmesi amaçlanmıştır. Ayrıca anten dizisine gelen sinyallerin gürültü içerip içermemesi durumu da göz önünde bulundurularak sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Elde edilen sonuçlar Tekil Değer Ayırışımı ve Matris Kalem yöntemi ile anten dizisine gelen sinyallerin yönünün belirlendiğini, sinyal kaynağı sayısı ile sisteme ait tekil değerler arasında doğru orantı olduğunu ve sinyal gürültü oranı ile tekil değerler arasında ise ters orantı olduğunu göstermiştir.

Anahtar kelimeler: Tekil Değer Ayrışımı, Matris Kalem Yöntemi, Sinyal Alt Uzay Analizi, Dizi Sinyal İşleme.



ABSTRACT

DETERMINATION OF THE DIRECTION OF INCOMING SIGNAL ON THE ANTENNA ARRAY VIA SINGULAR VALUE DECOMPOSITION AND MATRIX PENCIL METHOD

AYTAŞ, Nilay

Kırıkkale University

Institute of Science

Department of Electrical Electronics Engineering, Master's Thesis

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Eyüp TUNA

Co-Supervisor: Prof. Dr. Erkan AFACAN

July 2017, 68 page

Signal source direction determination is used effectively especially in radar, locating and electronic warfare systems also in civil techniques such as detection of mine reserves, mobile communication systems, finding the illegal broadcasts and location of missing mountaineers.

The systems that used to only determine the location of a single signal source have obtained the ability to simultaneously detect the direction and location of signals from multiple signal sources following the development of subspace techniques. The Singular Value Decomposition method and the Matrix Pencil method are two of the methods used in subspace signal analysis. This study aims at determining the arrival directions of the signals coming from one or more signal sources to the antenna array using these methods. In addition, results are compared considering the presence of noise in the incoming signals to the antenna array.

The results show that the directions of the signals coming to the antenna array can be determined via the Singular Value Decomposition and Matrix Pencil method, they also show that there are two proportions; a direct one between the number of signal sources

and the singular values of the system, and an inverse proportion between signal to noise ratio and singular values.

Key Words: Singular Value Decomposition, Matrix Pencil Method, Signal Subspace Analysis, Array Signal Processing.



TEŞEKKÜR

Tez alıŐmalarım esnasında değerli yardım ve katkılarıyla bana destek olan, danışman hocam Sayın Prof. Dr. Erkan AFACAN'a, kıymetli tecrübelerini esirgemeyen hocam Sayın Yrd. Do. Dr. Eyüp TUNA'ya ve bu s¼re boyunca daima desteğini g¼rd¼ę¼m ArŐ. Gör. Ersin KORKMAZ'a teŐekk¼r ederim.

Y¼ksek lisans eğitimim s¼resince beni maddi açıdan destekleyen T¼B¼TAK Bilim İnsanı Destekleme Daire BaŐkanlıęı'na teŐekk¼r ederim.

T¼m eğitim ve iŐ hayatum boyunca her daim yanımda olan ve desteklerini hep hissettiğim babam Kemal AYTAŞ'a, annem Kevser AYTAŞ'a ve kız kardeŐlerim Kutlay AYTAŞ YAZANEL ile Pelin AYTAŞ'a sonsuz teŐekk¼rlerimi sunuyorum.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET	i
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
ÇİZELGELER DİZİNİ	x
1. GİRİŞ	1
1.1. Literatür Özetleri	3
2. ELEKTROMANYETİK DALGA DENKLEMLERİ	6
2.1. Maxwell Denklemlerinin Diferansiyel Formda Gösterimi.....	6
2.2. Maxwell Denklemlerinin İntegral Formda Gösterimi	7
3. ANTEN TEMELLERİ	9
3.1. Temel Anten Parametreleri.....	9
3.1.1. Işıma Örüntüsü.....	9
3.1.2. Işıma Şiddeti	13
3.1.3. Işıma Güç Yoğunluğu.....	14
3.1.4. Yöneltilik	15
3.1.5. Kazanç	15
3.1.6. Etkin Açıklık.....	16
3.2. Dizi Antenler	16
3.2.1. Doğrusal Anten Dizileri.....	17
3.2.1.1. İki Elemanlı Dizi	18
3.2.1.2. N-Elemanlı Doğrusal Dizi.....	21
4. TEKİL DEĞER AYRIŞIMI	25

4.1. Özel Matris Tanımları	25
4.1.1. Birim Matris.....	25
4.1.2. Köşegen Matris	25
4.1.3. Ortogonal Matris.....	26
4.1.4. Matris Transpozu	26
4.1.5. Hermite Matris	27
4.1.6. Hankel Matrisi	27
4.1.7. Üniter Matris.....	27
4.1.8. Simetrik Matris	28
4.2. Vektörler.....	28
4.2.1. Matrisin Özdeğerleri ve Özvektörleri	28
4.3. Tekil Değer Ayrışımı Yöntemi.....	30
5. MATRİS KALEM YÖNTEMİ.....	39
5.1. Yön Bulma Yöntemleri	39
5.2. Matris Kalem Yöntemi.....	41
5.2.1. Gürültüsüz Sinyallerin Analizinde Kullanılan Matris Kalem Yöntemi ...	43
5.1.2. Gürültülü Sinyallerin Analizinde Kullanılan Matris Kalem Yöntemi.....	46
6. SİMÜLASYON SONUÇLARI	49
6.1. Gürültüsüz Sinyal Kaynakları Kullanılarak Sinyalin Tekil Değerlerinin Bulunması.....	49
6.2. Gürültülü Sinyal Kaynakları Kullanılarak Sinyalin Tekil Değerlerinin Bulunması.....	54
6.3. Farklı Sinyal Gürültü Oranı İçeren Sinyal Kaynakları Kullanılarak Tekil Değerlerin Bulunması.....	58
6.4. Gürültüsüz Sinyal Kaynakları Kullanılarak Matris Kalem Yöntemiyle Sinyalin Yönünün Bulunması.....	60

6.4. Gürültülü Sinyal Kaynakları Kullanılarak Matris Kalem Yöntemiyle Sinyalin Yönünün Bulunması	61
7. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	63
KAYNAKLAR	66



ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>ŞEKİL</u>	<u>Sayfa</u>
3.1. Işıma örüntüsünün üç boyutlu koordinat sisteminde gösterimi	10
3.2. Işıma örüntüsü kulakları.....	11
3.3. Işıma şiddetinin ve hüzmeye genişliklerinin doğrusal çizimi.....	11
3.4. İzotropik ve yönlü antenin ışımaya örüntüsü.....	13
3.5. z- ekseninde boyunca yerleştirilmiş iki elemanlı bir dizi geometrisi	18
3.6. 2-elemanlı anten dizisi için uzak alan gözlem noktası.....	20
3.7. $M=2N$ elemanlı doğrusal anten dizisi	22
3.8. $M=2N+1$ elemanlı doğrusal anten dizisi.....	22
3.9. (a) $N=10$, $d=\lambda/4$ ve $\beta=0$ (b) $N=10$, $d=\lambda$, $\beta=0$ için 3 boyutlu ışımaya örüntüsü	23
4.1. $An \times p$ matrisi için Tekil Değer Ayrışımı	31
6.1. Gürültüsüz tek sinyal kaynağından 5. dizi elemanına gelen sinyal	50
6.2. Gürültüsüz iki sinyal kaynağından 5. dizi elemanına gelen sinyal	51
6.3. Gürültüsüz üç sinyal kaynağından 5. dizi elemanına gelen sinyal	52
6.4. Gürültüsüz sinyallerin tekil değerlerinin grafiksel gösterimi.....	53
6.5. Gürültülü tek sinyal kaynağından 5. dizi elemanına gelen sinyal.....	54
6.6. Gürültülü iki sinyal kaynağından 5. dizi elemanına gelen sinyal	55
6.7. Gürültülü üç sinyal kaynağından 5. dizi elemanına gelen sinyal.....	56
6.8. Gürültülü sinyallerin tekil değerlerinin grafiksel gösterimi.....	57

ÇİZELGELER DİZİNİ

ÇİZELGE

Sayfa

2.1.	Maxwell Denklemleri'nin diferansiyel ve integral gösterimleri.....	8
6.1.	Gürültüsüz sinyallerin tekil değerleri.....	53
6.2.	Gürültülü sinyallerin tekil değerleri.....	57
6.3.	Tek kaynağın farklı sinyal gürültü oranları için elde edilen tekil değerleri .	58
6.4.	İki kaynağın farklı sinyal gürültü oranları için elde edilen tekil değerleri...	59
6.5.	Üç kaynağın farklı sinyal gürültü oranları için elde edilen tekil değerleri ..	60
6.6.	Matris Kalem yöntemiyle bulunan gürültüsüz sinyal kaynaklarına ait yön verileri	61
6.7.	Matris Kalem yöntemiyle bulunan farklı sinyal gürültü oranına sahip sinyal kaynaklarının yön verileri	62
6.8.	Matris Kalem yöntemiyle bulunan farklı geliş açılara sahip gürültülü sinyal kaynaklarının yön verileri.....	62

1. GİRİŞ

Bir veya birden fazla sinyal kaynağının ışıma yapması halinde, belirli bir anten grubu kullanılarak sinyale ait geliş açısının elde edilmesine yönelik çalışmalar uzun yıllardır önemli bir uğraş alanı olmuştur [1]. Dizi antenler ile elde edilen veriler kullanılarak iki ve üç boyutlu uzayda konumların belirlenmesi radar, sismoloji, astronomi gibi birçok alanda karşılaşılan problemlerden biridir [2]. Dizi antenlerin temel kullanım amacı; ilgilenilen bir veya birden fazla nesnenin belirli bir bölgede algılanması, tanımlanması, konumunun belirlenmesi ve izlenmesidir. Bu antenler askeri uygulamalarda keşif, gözetleme, sınır ihlalleri, konum belirleme ve rota belirleme disiplinlerinde geniş kullanım alanına sahiptir [3]. Sivil uygulama alanlarında ise kaçak yayın yapan radyo ve televizyon istasyonlarının yerinin tespiti, dağcılık sporu yapanlar gibi kaybolma riski olanların yerinin tespitinde kullanılmaktadır [4].

Günümüzde sinyal algılayıcı sistemler mekanik ya da elektronik taramalı düzeneklerle yön bilgisi elde ederler. Mekanik taramalı sistemler bir hedefi dar hüzmeli antenlerle izlemeye çalışırken, elektronik taramalı sistemlerde bu bilgi sayısal demet sentezi ile gerçekleşir. Örneğin, hava alanlarında, gemilerde olduğu gibi mikrodalga radarları daha çok mekanik taramalı olurken, HF (3-30MHz), VHF (300-1000MHz) frekansında çalışan radarlar elektronik taramalıdır [4]. Sinyal kaynaklarına ait parametrelerin belirlenmesinde hareketli platformlar yerine dizi antenler kullanılmasının birçok avantajı vardır. Bu avantajlar hareketli platformlarda meydana çıkan mekanik kısıtlamaların dizi antenler kullanıldığında ortadan kalkması, dizi antenlerin elektronik olarak kontrol edilebilmeleri, hareketli platformlara oranla hafif olduklarından dizi antenlerin daha kolay taşınabilme özelliği olarak gösterilebilir.

Sinyal kaynaklarına ait parametrelerin dizi antenler kullanılarak elde edilmesi literatürde dizi verisi işlenmesi (array processing) olarak adlandırılır ve yayılım kavramına uygun olarak taşınan sinyallerin işlenmesi ile ilgilidir [5]. Esas amaç, uzaya dağılmış halde bulunan kaynakların dizi antenler üzerinde ışıması sonucu elde edilen sinyallerle ilgili bütün parametrelerin kestirilmesidir. Bu parametreler arasında ilk aklımıza gelenler, kaynak sayısı, kaynakların yatay ve yükseliş açıları, konumları ve

frekansları olarak sayılabilir. Bu parametreler arasında en önemlisi kaynak yönlerinin tespitidir ve literatürde Yön Bulma (direction finding) olarak adlandırılır [3].

Bu tez çalışmasında bir anten dizisine gelen sinyalin geliş açısı Tekil Değer Ayrışımı ve Matris Kalem yöntemi kullanılarak belirlenmiştir. Sinyal kaynağı sayısının artırılması durumunda sisteme ait tekil değerlerin değişimi incelenmiştir. Aynı zamanda sinyallerin alt uzay yaklaşımı ile analizleri yapılarak gürültü içerip içermediği tespit edilmiş, eğer içeriyorsa gürültü filtreleme işlemi Tekil Değer Ayrışımı yöntemi ile yapılmıştır. İlk olarak tek kaynak ile sekiz elemanlı doğrusal anten dizisi kullanılmıştır, daha sonra kaynak sayısı üçe çıkarılmıştır. Gürültüsüz ve gürültülü sinyallerin Tekil Değer Ayrışımı yöntemi ile analizi yapılarak tekil değerleri elde edilmiş ve karşılaştırılmıştır. Sinyal kaynağından gelen sinyallerin gürültü oranı değiştirilerek tekil değerlere etkisi incelenmiştir. Alt uzay analizleri yapılan birbirinden farklı geliş açılara sahip sinyallerin geliş yönleri, Matris Kalem yöntemi ile bulunmuştur.

Tezin ikinci bölümünde, elektromanyetik dalgaların temelini oluşturan Maxwell Denklemleri ile ilgili açıklamalar yapılmıştır. Denklemler diferansiyel ve integral formda gösterilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde, temel anten parametrelerinden bahsedilmiş, antenlere ait başlıca kavramlar formüller ile açıklanmıştır. Tezde kullanılan doğrusal anten dizileri ile ilgili teorik bilgilere yer verilmiştir.

Tezin dördüncü bölümünde, Tekil Değer Ayrışımı yöntemi matematiksel olarak incelenmiştir, bu yöntem ile verilen bir matrisin tekil değerleri bulunmuştur.

Tezin beşinci bölümünde, Matris Kalem yöntemi matematiksel olarak incelenmiştir. Yöntemi uygularken kullanılacak formüller ve sinyale ait veriler ile matrislerin nasıl elde edileceği gösterilmiştir.

Tezin altıncı bölümünde, sinyal kaynağından gelen sinyallerin Tekil Değer Ayrışımı ve Matris Kalem yöntemi kullanılarak analizleri yapılmış, geliş yönleri tespit

edilmiştir. Elde edilen simülasyon sonuçları ile tekil değerler şekiller ve tablolar yardımıyla gösterilmiştir.

Tezin yedinci bölümünde, analiz sonuçları literatürdeki diğer çalışmalarla karşılaştırılıp bu tezde yapılan çalışmaların verdiği katkılar anlatılmıştır.

1.1. Literatür Özetleri

Sinyal kaynaklarının yönlerinin dizi antenler vasıtasıyla belirlenebilmesi için birçok yöntem mevcuttur. Ancak bir veya birden fazla kaynağın geçerli olduğu durumlara göre kullanılan teknikler birbirinden farklılık göstermektedir. Yapılan literatür taramasında anten dizisine gelen sinyalin yönünün tespiti üzerine birçok çalışmaya rastlanmıştır. Bu çalışmalardan bazıları aşağıda verilmiştir.

Gething 1966 yılında yaptığı çalışmada Genlik Karşılaştırmalı Tekli Darbe yöntemini kullanarak dizi elemanlarının çıktılarının fark ve toplam örüntülerini oluşturarak bunlar arasındaki orana göre yön tayini yapmıştır [6].

Bir diğer teknik interferometri yöntemini 1988 yılında kullanan Lipsky ise iki adet antenden alınan sinyalleri birbiriyle uyumlu iki kanala vererek çıkışta elde edilen faz farkını geliş yönünün tayininde kullanmıştır [7].

Her iki teknik de birden çok sinyal veya yansımaların olduğu durumlarda verimli şekilde kullanılamazlar. Haberleşme sistemlerinde yansıma, birden fazla kaynağın bulunması gibi etkilerin ihmal edilemeyeceği düşünüldüğünde daha geçerli tekniklerin geliştirilmesi kaçınılmaz hale gelmiştir.

Haykin'in 1991'de kitabında yer verdiğine göre 1960'lardan itibaren bu yönde çalışmalar başlatılmıştır [8]. Öncelikle Capon 1969 yılında ML (Maximum Likelihood Estimation) yöntemi ile birden fazla sinyali inceleyebilecek şekilde yeniden düzenleme yapmıştır. Bu yöntemde bir ağırlık fonksiyonu belirlenmekte ve fonksiyon minimize edilmeye

çalışılmaktadır. Fonksiyonun minimum olduğu açı değerleri geliş yönünü vermektedir. Temel olarak optimizasyon yöntemine benzer şekilde çalışmaktadır [9].

Bu çalışmalardan daha sonra ise elde edilen anten verilerinden çapraz ilinti matrisi oluşturularak yön tayini yapılmaya başlanmıştır. Buna örnek olarak ise 1967 yılında Burg'un çalıştığı ME (Maximum Entropy) yöntemi gösterilebilir [10]. Bu yöntemde elde edilen anten verileri kullanılarak oluşturulan ilinti matrisinin tersinin köşegen elemanları kullanılarak yön tayini yapılmaktadır.

1970'lerin ortalarından itibaren alt uzay kestirim teknikleri kullanılmaya başlanmıştır. 1973 yılında Pisarenko, gürültü içeren sistemi kovaryans yaklaşımıyla ilk olarak modelleyerek bu alanda yeni bir devir açmıştır [11].

Daha sonra ise Schmidt tarafından 1977 yılında ortaya atılan MUSIC (Multiple Signal Classification) yöntemiyle sensör dizilerinin geometrisinden bağımsız olarak ölçüm modeli geliştirilmiştir [12]. MUSIC yöntemi oldukça sık kullanılması ve yüksek hassasiyetle yön bulma özelliğine sahip olmasına karşın bütün parametre uzayını taramak zorunda olması nedeniyle yüksek bir hesaplama ve veri depolama maliyeti gerektirdiğinden bu sorunu aşmak için Roy ve Kailath 1989 yılında yaptığı çalışmalarla ESPRIT (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques) yöntemini geliştirmiştir. Bu yöntemle bütün parametre uzayını taramaya gerek kalmadan hesaplama yapılabilmekte, böylece MUSIC yönteminde karşılaşılan hesaplama ve depolama maliyetleri büyük oranda azaltılmaktadır [13].

Yön bulma çalışmaları devam ederken 1986 yılında Sibul, uyarlanabilir bir anten dizisinin yaptığı ışımada, anten sayısının kaynak sayısından fazla olması problemini çözmek için Tekil Değer Ayrışımı yöntemini kullanmıştır [14].

1990 yılında Hua ve Sarkar, gürültülü bir sinyale ait genelleştirilmiş özdeğerleri bulmak için Tekil Değer Ayrışımı yöntemi ile Matris Kalem yöntemini kullanmıştır [15].

1995 yılında Sarkar ve Pereira, bir sinüs sinyaline ait karmaşık üstel fonksiyonların toplamını tahmin etmek için Matris Kalem yöntemini kullanmış ve ayrıntılarıyla incelemiştir [16].

Yang ve Ingram 1997 yılında kısmen uyarlanabilir anten dizisini tasarlarken Tekil Değer Ayrışımı yöntemini kullanarak işlemcinin üzerine düşen yükü azaltmayı hedeflemiştir [17].

2010 yılında Yılmaz, Sarkar ve Salazar-Palma ESPRIT yöntemi ile Matris Kalem yöntemini birlikte kullanarak sinyalden aldıkları tek örnek ve çoklu örneklerle sinyalin geliş açısı tespitini yapmışlardır [18].

Ihedrane 2017 yılında akıllı antenlere gelen sinyallerin geliş açısını belirlemek için Matris Kalem yöntemini kullanmıştır [19].

2. ELEKTROMANYETİK DALGA DENKLEMLERİ

Elektromanyetik dalga teorisinde, dalga denklemlerinin temelini Maxwell Denklemleri oluşturmaktadır. Elektromanyetik teoride Maxwell Denklemleri zamanla değişen EM (Elektromanyetik) alanları tanımlamak için kullanılır. Bu dört denklem aşağıda detaylı bir şekilde anlatılmıştır. Gauss Yasası elektrik yükleri tarafından elektrik alanın oluşturulduğunu, Manyetik Akının Korunumu Yasası zamanla değişmeye uğrayan elektrik alanların manyetik alan ürettiğini, Faraday Elektromanyetik İndüksiyon Yasası ise elektrik alan üretmek için değişen bir manyetik alana ihtiyaç olduğunu göstermektedir [20].

2.1. Maxwell Denklemlerinin Diferansiyel Formda Gösterimi

Gauss Yasası, Eşitlik 2.1'de gösterildiği gibi yük yoğunluğunun elektrik alanın kaynağı olduğunu ve kapalı bir yüzeyin içindeki toplam yükün, yine o yüzeydeki elektrik alanın akısı ile doğru orantılı olduğunu kanıtlar [20].

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (2.1)$$

Manyetik Akının Korunumu Yasasına göre manyetik alanın kaynağı manyetik yük değildir. Yani bu yasa manyetik yükün kaynağının manyetik yük olmadığını göstermektedir. Eşitlik 2.2'de verilen denkleme göre herhangi kapalı bir yüzeydeki manyetik alanın akısı sıfır olmaktadır [20].

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.2)$$

Faraday Elektromanyetik İndüksiyon Yasasına göre manyetik alan içinde bulunan bir iletkenin oluşturduğu düzleme dik olarak gelen ve zamanla değişen akı, iletkenin uçlarında gerilim indüklenmesini sağlar. Bu yasa gereği manyetik akının zamanla değişmesi elektrik alanın vektörel kaynağını oluşturur [20]. Yasa Eşitlik 2.3'de gösterilmiştir.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

Genelleştirilmiş Amper Yasası ise Eşitlik 2.4'de gösterildiği gibi üzerinden akım geçen kapalı bir halka etrafında manyetik alanın oluşmasını kanıtlar [20].

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.4)$$

2.2. Maxwell Denklemlerinin İntegral Formda Gösterimi

Bir önceki bölümde diferansiyel formda gösterilen Maxwell Denklemlerini kullanmak için uzayda bir nokta yeterlidir. Fakat bir bölge ya da alan için hesap yapmak gerektiğinde Maxwell Denklemlerinin integral formlarını kullanmak gerekir [20]. Bu durumda ise Stokes ve Diverjans Teoremleri aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\int_S \nabla \times \vec{A} \cdot \hat{n} \, ds = \oint_C \vec{A} \cdot d\hat{l} \quad (2.5)$$

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A} \, dv = \oint_S \vec{A} \cdot \hat{n} \, ds \quad (2.6)$$

Diverjans Teoremi Eşitlik 2.1 ve Eşitlik 2.2'ye uygulanırsa,

$$\oint_S \vec{D} \cdot \hat{n} \, ds = \int_V \rho \, dv \quad (2.7)$$

ve

$$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} \, ds = 0 \quad (2.8)$$

elde edilir.

Stokes Teoremi Eşitlik 2.3 ve Eşitlik 2.4'e uygulanırsa,

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\hat{l} = - \int_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \hat{n} ds \quad (2.9)$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\hat{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right) \cdot \hat{n} ds \quad (2.10)$$

elde edilir.

Aşağıda verilen Çizelge 2.1'deki dört denklem, elektrik alan için Gauss Yasası ile elektrik yükleri tarafından elektrik alan oluşturulduğunu, manyetik alan için Gauss Yasası ile manyetik alanın kaynağının manyetik yük olmadığını, Ampere Yasası ile değişken elektrik alanların ve akım yoğunluklarının manyetik alan üretebildiğini ve son olarak Faraday'ın İndüksiyon Yasası ile değişken manyetik alanın ise elektrik alan ürettiğini göstermektedir. Bu dört denklem, elektromanyetik teorinin temelini oluşturmaktadır [20].

Çizelge 2.1. Maxwell Denklemleri'nin diferansiyel ve integral gösterimleri

Yasa	Diferansiyel Formu	İntegral Formu
Gauss Yasası	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$	$\oint_S \vec{D} \cdot \hat{n} ds = \int_V \rho dv$
Manyetik Akının Korunumu Yasası	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} ds = 0$
Faraday Elektromanyetik İndüksiyon Yasası	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{E} \cdot d\hat{l} = - \int_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \hat{n} ds$
Ampere Yasası	$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{H} \cdot d\hat{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right) \cdot \hat{n} ds$

3. ANTEN TEMELLERİ

Anten, genel bir tanımla metal çubuk veya tel yapısına sahip, radyo dalgalarını iletmekte ya da almakta kullanılan bir cihazdır. Anten serbest uzay ve kılavuz cihaz arasında geçiş yapısıdır. Kılavuz cihazı ya da iletim hattı koaksiyel hat veya içi boş boru (dalga kılavuzu) şeklinde olabilir ve iletim kaynağından antene ya da antenden alıcıya elektromanyetik enerjinin nakli için kullanılır. Anten kullanım durumuna göre alıcı ya da verici anten olabilir [21].

Antenin enerjii alma ve iletme görevine ek olarak kablosuz bir sistemde ışma enerjisini bazı yönlerde en iyi duruma getirmek, öne çıkarmak ve istenmeyen yönlerde de bastırma görevi de bulunmaktadır. Böylece anten istenilen yönlerde ışma yapmayı sağlayan bir cihaz olarak da hizmet verebilir. Kablosuz haberleşme sistemleri için anten en kritik bileşenlerden birisidir. İyi bir anten tasarımı ile sistem gereksinimleri kolayca karşılanabilir. Bir insan için gözler ne ifade ediyorsa anten de bir iletişim sistemi için aynı görevi görmektedir [21].

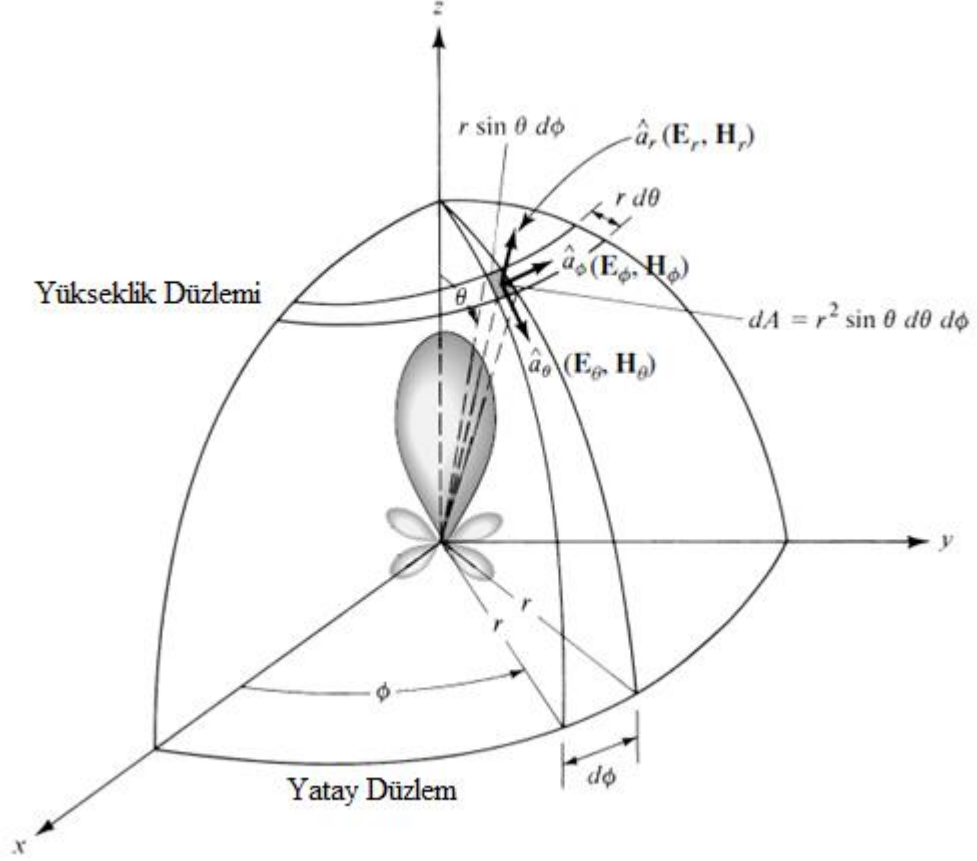
3.1. Temel Anten Parametreleri

Bir antene ait parametreler antenin performansını belirlediği için parametrelerin tanımı önemlidir. Anten dizilerinde, dizi elemanlarının yapısına giriş yapmadan ve gelen elektromanyetik sinyallerin yönünü belirleme metotlarını incelemeyen önce antenlerin genel özelliklerinden bahsedilecektir.

3.1.1. Işıma Örüntüsü

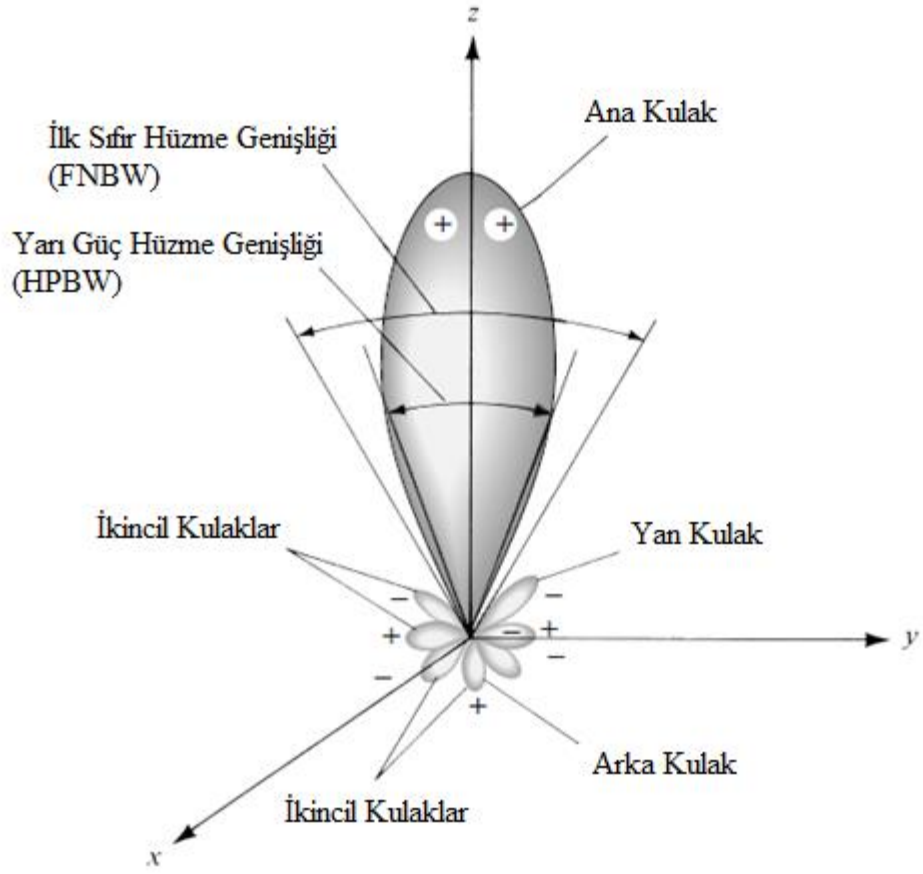
Anten örüntüsü ya da ışma örüntüsü bir antene ait ışma özelliklerinin uzaysal koordinatların bir fonksiyonu olarak matematiksel ifadesi ya da grafik üzerinde gösterimi olarak tanımlanabilir [21]. Işıma örüntüsü koordinatların bir fonksiyonudur. Bir antene ait ışma özellikleri ışma şiddeti, yönlülük, güç akı yoğunluğu, alan genliği

ve kutuplaşmayı içerir. Işıma örüntüsünün üç boyutlu koordinat sisteminde gösterimi Şekil 3.1’de verilmiştir.

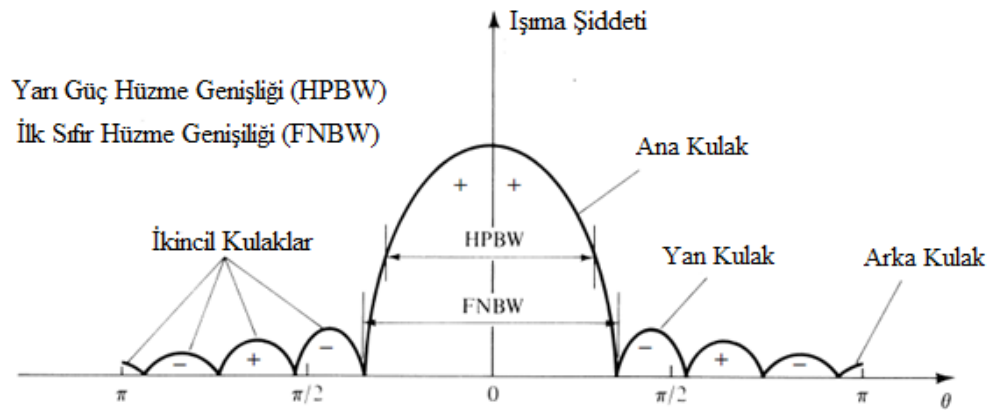


Şekil 3.1. Işıma örüntüsünün üç boyutlu koordinat sisteminde gösterimi [21]

Bir antenin alan örüntüsü, manyetik veya elektrik alanın genliğinin koordinat sisteminde çizimini ifade eder. Güç örüntüsü, elektrik veya manyetik alanın genliğinin karesinin koordinat sisteminde çizimini ifade eder. Desibel cinsinden güç örüntüsü elektrik veya manyetik alanın genliğini desibel cinsinden ifade eder.



Şekil 3.2. Işıma örüntüsü kulakları [21]



Şekil 3.3. Işıma şiddetinin ve hüzme genişliklerinin doğrusal çizimi [21]

Şekil 3.2 ve Şekil 3.3'te gösterilen ışımaya örüntüsündeki kısımlara kulak adı verilir. Kulaklardan bazıları diğerlerinden daha büyük ışımaya şiddetine sahip olsa da hepsi kulak olarak bilinir. En büyük ışımaya şiddetine sahip kulağa ana kulak adı verilir ve Şekil 3.2'deki anten için $\theta = 0^\circ$ yönündedir. İkincil kulak olarak adlandırılan kulaklar ise ana kulak haricinde kalan diğer tüm kulaklardır. Bu kulaklar, ışımaya olmasının istenmediği yönlerdeki ışımaları gösterir [21].

Anten çevresinde oluşan alan 3 bölgeye ayrılmaktadır; reaktif yakın alan, yakın ışımaya alanı (Fresnel) ve uzak alan (Fraunhofer). Reaktif yakın alan, anteni çevreleyen yakın alan bölgesinde reaktif alanın baskın olduğu bölümdür. Bu bölgede enerji depolaması gözlemlenir, yayılma az miktarda vardır. Yakın ışımaya alanı, uzak alan ile reaktif yakın alan arasında kalan bölgedir. Işımaya alan bileşenleri bu bölgede baskındır. Anten, ışımaya yaptığı dalga dalganın dalga boyu ile karşılaştırıldığında, boyutu dalga boyunu aşmayacak ancak maksimum boyutlarda ise, yakın ışımaya alanı oluşmayabilir. Sonsuza odaklı antende, yakın ışımaya alanı optik terminolojide Fresnel bölgesi olarak bilinir. Uzak alan bölgesinde, antene ait alan dağılımı bölgenin antene uzaklığından bağımsızdır. Optik terminolojide bu bölge Fraunhofer bölgesi olarak adlandırılır [21].

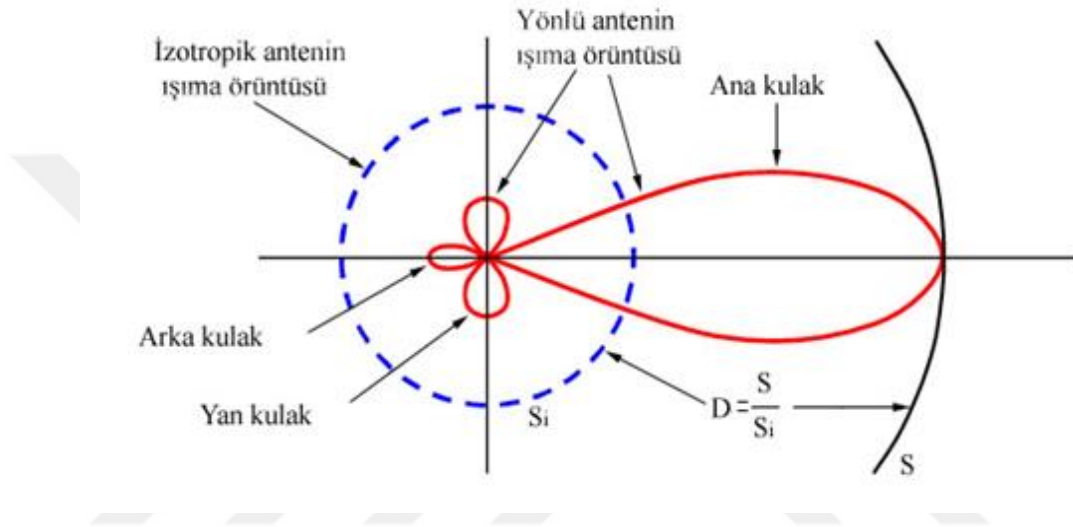
İzotropik antenlerde ışımaya örüntüsü, her yönde eşit ışımaya şeklinde görülür. Bu anten çeşidinde, aynı uzaklıktaki her yerde güç yoğunluğu birbirine eşittir. Yön bağımlı antenlerde ışımaya örüntüsünde kazanç ve yönlülük kavramları öne çıkmaktadır [22].

Bir antenin yönlülüğü sahip olduğu güç yoğunluğunu bir veya birden farklı doğrultuda ne kadar etkili doğrulttuğuna bağlıdır. Bu durumda antenin ışımaya yaptığı toplam enerji aynı kalmasına rağmen enerji yoğunluğu sadece belirli bir yöne doğrultulduğundan sinyal gücü artacaktır. Antenin ışımaya yaptığı sinyalin gücü arttığı zaman anten kazancı da artacaktır. Belirli bir yönde güç yoğunluğunu artırarak ışımaya yapan antenlere yön bağımlı antenler denir [22].

Şekil 3.4'te ana kulak ışımaya en yüksek değerinde yapıldığı veya sinyalin alındığı doğrultuyu gösterir. Yan kulaklar ile arka kulak ışımaya olması istenmeyen yönler olup kayıp enerjiyi gösterir. Belirli bir yönde ışımaya yapması istenen bir anten dizayn edilirken kayıp enerjiyi gösteren kulakların en aza indirilmesi gerekmektedir.

Belirlenen yönde ışınım yapan bir anten ile izotropik bir antenin aynı uzaklıkta oluşturdukları güç yoğunlukları dikkate alındığında yönlülük Eşitlik 3.1’de tanımlandığı gibi olur [22].

$$D = \frac{S}{S_i} \quad (3.1)$$



Şekil 3.4. İzotropik ve yönlü antenin ışınım örüntüsü

3.1.2. Işınım Şiddeti

Bir cismin uzayda kapladığı alanı belirtmek için kullanılan açıya katı açı denir. Birimi steradyandır. Işınım şiddeti ise birim katı açı başına antenden ışınan güç miktarıdır. Işınım şiddeti bir antenin uzak alanı ile ilişkilidir ve Eşitlik 3.2 ile ifade edilir.

$$U = r^2 W_{rad} \quad (3.2)$$

Şekil 3.3’ü temel alarak ışınım şiddetini antenin uzak bölge elektrik alanı ile ifade edersek Eşitlik 3.3 elde edilir.

$$U(\theta, \phi) = \frac{r^2}{2\eta} |E(r, \theta, \phi)|^2 \quad (3.3)$$

3.1.3. Işıma Güç Yoğunluğu

Bir noktadan diğer bir noktaya kablosuz olarak bilgi iletebilmek için elektromanyetik dalgalar kullanılır. Bu durumda elektromanyetik dalgaların belirli bir güç taşıdığı anlaşılmaktadır. Elektromanyetik dalgaların taşıdıkları güç Eşitlik 3.4'te verilmiştir [21].

$$\vec{W} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (3.4)$$

W ile gösterilen değer Poynting vektörüdür ve güç yoğunluğunu temsil eder. O halde kapalı bir yüzeyden geçen toplam güç değerini bulmak için Poynting vektörünün tüm yüzey üzerinden integrali alınır [21].

$$P = \oiint_S \vec{W} \cdot d\vec{s} = \oiint_S \vec{W} \cdot \hat{n} da \quad (3.5)$$

Bazı uygulamalarda zamanla değişen alanlar oluşur. Ortalama güç yoğunluğunu bulurken Poynting vektörünün belirli bir periyot için integrali alınır ve yine aynı periyoda bölünür [21]. Zaman ortalama güç yoğunluğu Eşitlik 3.6'da verildiği gibi hesaplanabilir.

$$\vec{W}_{av}(x, y, z) = [\vec{W}(x, y, z; t)]_{av} = \frac{1}{2} Re[\vec{E} \times \vec{H}^*] \quad (3.6)$$

Eşitlik 3.6'ya göre ışınan güç değeri Eşitlik 3.7'deki gibi tanımlanır.

$$P_{rad} = P_{av} = \oiint_S \vec{W}_{rad} \cdot d\vec{s} = \oiint_S \vec{W}_{av} \cdot \hat{n} da = \frac{1}{2} \oiint_S Re(\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot d\vec{s} \quad (3.7)$$

3.1.4. Yöneltilik

Yöneltilik, bir antenin belirlenen bir yönde yaptığı ışımının, antenin her yönde yaptığı ışımaya oranı olarak tanımlanmaktadır. Aynı şekilde antenin bir noktada oluşturduğu güç yoğunluğu ile yönsüz bir antenin aynı noktada meydana getirdiği güç yoğunluğuna oranı olarak bilinmektedir [21]. Yöneltilik ışımaya yapan antenin ışıdığı enerjiyi belirli bir yöne ne kadar iyi yönlendirip ilettiğinin en önemli göstergesidir. Eşitlik 3.8’de matematiksel ifadesi verilmiştir.

$$D = \frac{U}{U_0} = \frac{4\pi U}{P_{rad}} \quad (3.8)$$

Bir antene ait maksimum ışımaya şiddeti (maksimum yöneltilik)

$$D_{max} = D_0 = \frac{U_{max}}{U_0} = \frac{4\pi U_{max}}{P_{rad}} \quad (3.9)$$

olarak tanımlanmaktadır.

3.1.5. Kazanç

Anten parametreleri göz önüne alındığında antenin kazancı oldukça önemli bir parametredir. İlk bakışta yöneltilik ile anten kazancı birbirinden bağımsız terimler olarak görülse de antene ait verimlilik açısından önem arz eder. Bir antenin belirlenen herhangi bir yöndeki kazancı, yine aynı yöndeki ışımaya şiddetinin, ışımaya yapan anten tarafından yönbağımsız olarak toplandığında oluşacak olan ışımaya gücüne oranıdır [21].

$$Kazanç = 4\pi \frac{\text{ışımaya şiddeti}}{\text{toplam alınan güç}} = 4\pi \frac{U(\theta, \phi)}{P_{in}} \quad (3.10)$$

Anten kazancının verimlilik ve yöneltilik cinsinden ifadesi Eşitlik 3.11’de verilmiştir.

$$G(\theta, \phi) = e_0 \left[4\pi \frac{U(\theta, \phi)}{P_{rad}} \right] \quad (3.11)$$

dB cinsinden anten kazancı,

$$G(dB) = 10 \log(G(\theta, \phi)) \quad (3.12)$$

olarak tanımlanmıştır.

3.1.6. Etkin Açıklık

Bir antende ışınım yapan ve gelen dalgaları alan yüzeye etkin açıklık denir. A_e ile gösterilmektedir. Anten performansını belirleyen parametrelerden biridir [21]. Anten kazancı ile etkin açıklık arasındaki bağıntı aşağıda verildiği gibidir.

$$G = 4\pi \frac{A_e}{\lambda^2} \quad (3.13)$$

$$A_e = K_a \cdot A \quad (3.14)$$

K_a değeri anten açıklık verimini temsil eder ve antenin yaptığı ışınımın etkin açıklık üzerindeki dağılımına bağlı olarak değişir. Dağılımın doğrusal olması durumunda $K_a = 1$ olur. Büyük verimler elde edebilmek için bu durum ikincil kulaklar sayesinde dengelenir. Böylelikle anten uygulamalarında ikincil kulakları bulunan antenler için $K_a < 1$ olur ve etkin açıklıkları antenin fiziksel alanından daha küçük değerdedir [21].

3.2. Dizi Antenler

Sadece bir antene ait ışınım örüntüsüne bakıldığında, antenin ışınım yaptığı açıklığın geniş olduğu görülmektedir. Aynı zamanda tek bir antenin yönelticiliği de beklenen değerlerin altında kalabilmektedir. Fakat uzun mesafelerde haberleşmek için anten

kullanılan uygulamalarda ya da birçok radar uygulamasında antenin ışımaya gücünün belirlenen bir doğrultuda yoğunlaştırılması istenmektedir [21].

Kullanılan tek bir antenin istenilen yönde ve güçte bu ihtiyacı karşılaması için antenin elektriksel özelliklerinde değişiklik yapılması gerekir. Ancak beklenen değerde güç sağlayacak bir antenin imalatının ve montajının oldukça zor olması, bu güce sahip bir antene ait beslemenin elverişli olmaması nedeniyle birden fazla antenin bir araya getirilmesi fikri oluşmuştur. Böylece birden fazla anten belirli düzen ve şekillerde birlikte kullanılmaya başlanmıştır. Bu sayede beklenen anten gücü elde edilmiştir. Öyleyse sadece bir anten elemanının fiziksel boyutlarını değiştirme zorunluluğu olmaksızın antenin boyutlarını artırmanın diğer yolu bir elektriksel ve geometrik uyumluluk içinde ışımaya yapan elemanların montajını yapmaktır. Birden fazla eleman ile oluşturulmuş bu yeni antene anten dizisi denir [21].

Elde edilen dizinin toplam alanını hesaplamak için her bir ışımaya yapan elemanın ışımaya alanlarının vektörel toplamalarının bulunması gerekir. Diziyi oluşturan elemanların hepsi farklı elektriksel özelliklere sahip olabilirler. Fakat hesaplamalarda kolaylık olması açısından bütün elemanlar birbiri ile özdeş olarak kabul edilmektedir [21].

Kullanım alanına göre anten dizileri bir ya da iki boyutlu olabilirler. Anten dizisinde yer alan her bir antenin kendi yaptığı ışımaya bir araya gelerek toplamlarından, tek bir anten elemanının ışımaya deseninden bağımsız bir ışımaya deseni ortaya çıkar [21].

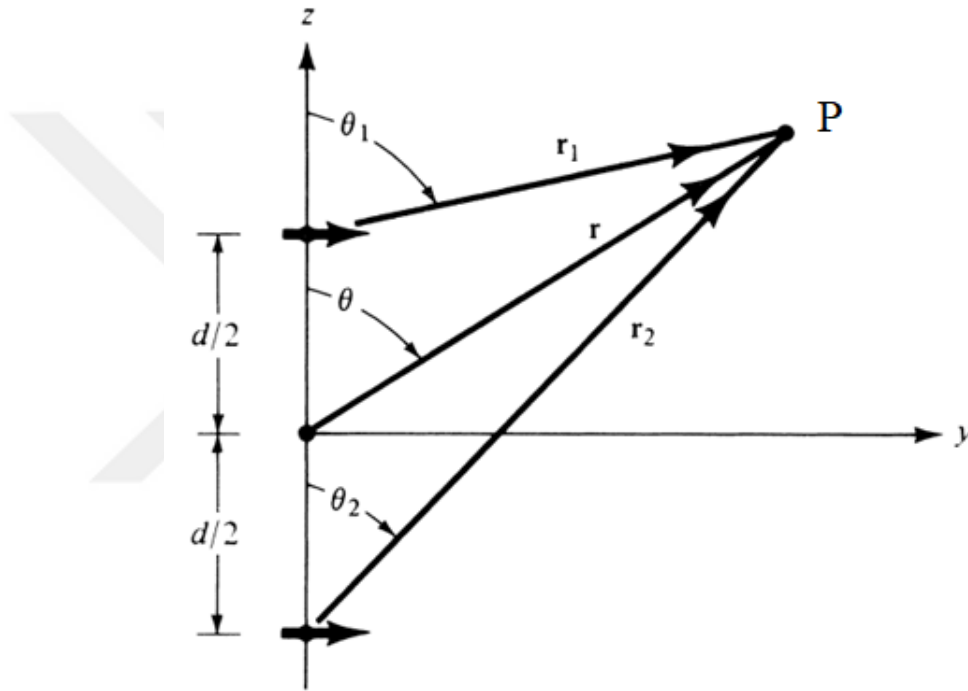
3.2.1. Doğrusal Anten Dizileri

En temel ve pratik dizilerden sayılan doğrusal anten dizileri bir doğru üzerine yerleştirilmiş elemanlardan oluşan dizileridir. Birçok uygulamada doğrusal anten dizileri, özdeş antenlerin eşit aralıklı olarak yerleştirilmesi ile elde edilir [21].

3.2.1.1. İki Elemanlı Dizi

Şekil 3.5'te verilen iki elemanlı anten dizisinde, iki adet dipol anten z-ekseni boyunca yerleştirilmiştir. İki antenin ışınma yaptığı toplam alan, ikisinin ayrı ayrı ışınma yaptığı alanın toplamına eşittir ve Eşitlik 3.15'te verilmiştir [21].

$$E_t = E_1 + E_2 \quad (3.15)$$



Şekil 3.5. z- eksenini boyunca yerleştirilmiş iki elemanlı bir dizi geometrisi [21]

Belirlenen bir referans noktasında oluşan elektrik alan hesabı için iki elemanlı dizi antende orijine yerleştirilmiş tek elemanın etkisi olduğu düşünülerek yola çıkılabilir. Dizi elemanlarının oluşturduğu alan ile dizi faktörü olarak ifade edilen bir faktörün çarpımı seçilen referans noktasındaki toplam elektrik alana eşittir [21].

$$E_{toplam} = [E(\text{tek bir elemanın referans nok. etkisi}) \times [\text{dizi faktörü}]] \quad (3.16)$$

Dizilerin her biri kendine özel dizi faktörüne sahiptir. Diziye ait dizi faktörü genellikle, dizide bulunan eleman sayısının, elemanların geometrik diziliminin, elemanlar arasındaki mesafenin, faz ve genliğin fonksiyonu olarak tanımlanmaktadır. İki elemanlı eşdeğer dipol anten dizisinde elemanlar arasındaki mesafenin d , faz farkının β olduğunu varsayarsak, Şekil 3.5’de gösterilen dizinin P noktasında oluşturduğu elektrik alan ifadesi Eşitlik 3.17’de gösterildiği gibi ifade edilmektedir [21].

$$E_T = \hat{a}_\theta j\eta \frac{kI_0 l}{4\pi} \left[\frac{e^{-j[kr_1 - (\beta/2)]}}{r_1} \cos\theta_1 + \frac{e^{-j[kr_2 - (\beta/2)]}}{r_2} \cos\theta_2 \right] \quad (3.17)$$

Seçilen noktanın antenin uzak alanında olduğunu varsaydığımızda Şekil 3.6’da verilen durum meydana gelir. Böyle bir durum oluştuğunda $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ varsayabiliriz [21].

$$r_1 \approx r - \frac{d}{2} \cos\theta \quad (3.18)$$

$$r_2 \approx r + \frac{d}{2} \cos\theta \quad (3.19)$$

$$r_1 \cong r_2 \cong r \quad (3.20)$$

Verilen Eşitlik 3.17 tekrar düzenlenirse,

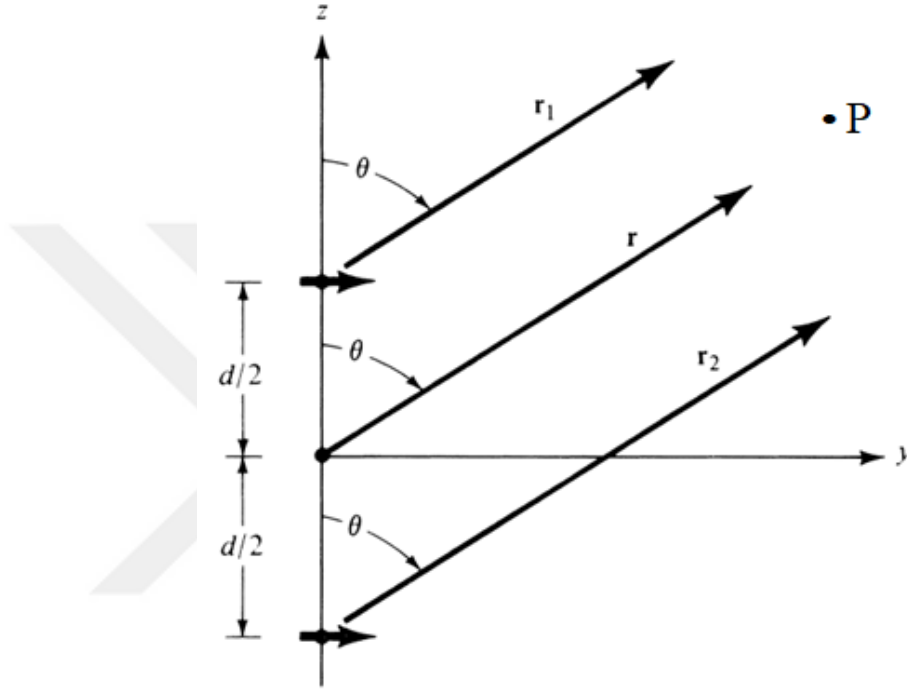
$$E_T = \hat{a}_\theta j\eta \frac{kI_0 l e^{-jkr}}{4\pi r} |\cos\theta| \left[e^{j(kd\cos\theta + \beta)/2} + e^{-j(kd\cos\theta + \beta)/2} \right] \quad (3.21)$$

$$E_T = \hat{a}_\theta j\eta \frac{kI_0 l e^{-jkr}}{4\pi r} |\cos\theta| \underbrace{2\cos \left[\frac{1}{2} (kd\cos\theta + \beta) \right]}_{AF} \quad (3.22)$$

elde edilir.

Yukarda verilen Eşitlik 3.22’de ifade edildiği gibi Şekil 3.6’da gösterilen dizinin belirlenen P noktasında oluşturduğu toplam alan, dizinin orijinine yerleştirilen tek

elemanın P noktasında meydana getirdiği elektrik alan değeri ile dizi faktörünün çarpımına eşittir. Anten dizilerinde diziyi oluşturan eleman sayısına, dizideki elemanlar arası mesafeye, bu elemanlar arasındaki faz farkına göre dizi faktörü farklı değerler alabilir [21].



Şekil 3.6. 2-elemanlı anten dizisi için uzak alan gözlem noktası [21]

Dizi faktörünün normalize edilmiş ifadesi aşağıda gösterildiği gibidir.

$$(AF)_n = \cos \left[\frac{1}{2} (kdcos\theta + \beta) \right] \quad (3.23)$$

Eşitlik 3.23'de verilen dizi faktörü, Şekil 3.6'da gösterilen anten dizisine ait dizi faktörünü ifade eder.

3.2.1.2. N-Elemanlı Doğrusal Dizi

Bir önceki bölümde iki elemanlı dizi özellikleri anlatılmış olup bu bölümde de iki elemanlı diziden yola çıkılarak N elemanlı dizi özellikleri anlatılacaktır. Şekil 3.7 referans alınarak her bir dizi elemanının özdeş olduğunu varsayalım.

Verilen dizide eleman sayısı $M=2N$ olarak gösterilmiştir. Bu dizide bulunan tüm elemanların aralarında β kadar faz farkı olduğunu varsayarsak, bu durumda elektrik alan ifadesi $+z$ ekseninde uzanan dizi elemanları için Eşitlik 3.24'de verildiği gibi olur. Diziye ait elektrik alanın $-z$ ekseninde uzanan dizi elemanları için ifadesi ise Eşitlik 3.24'de gösterilen ifadenin eşleniği olacaktır [21].

$$E_T = a_1 e^{j(1/2)kdsin\theta} + a_2 e^{j(3/2)kdsin\theta} + \dots + e^{j\left[\frac{2N-1}{2}\right]kdsin\theta} \quad (3.24)$$

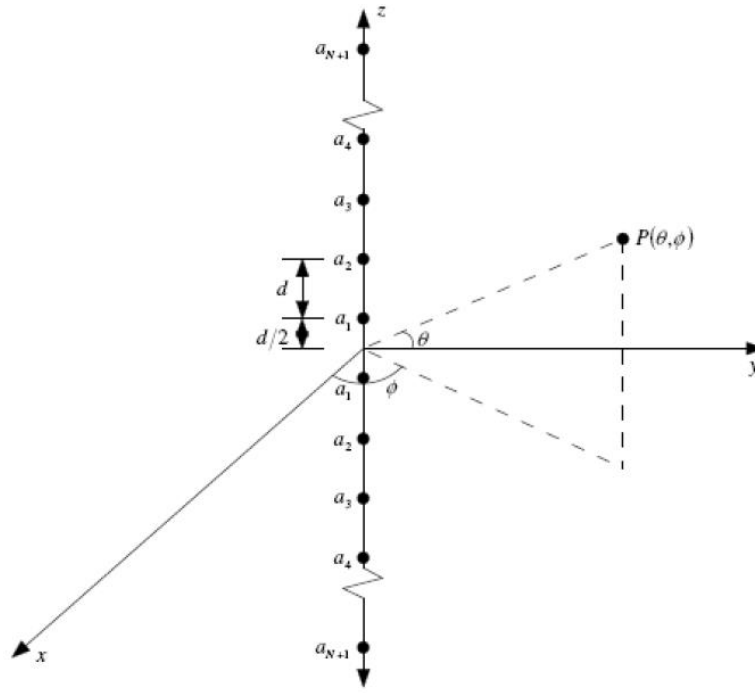
$$E_T = \sum_{n=1}^N a_n e^{j\left[\frac{2n-1}{2}\right]kdsin\theta} \quad (3.25)$$

Şekil 3.7'de verilen diziyeye ait dizi faktörü aşağıda gösterildiği gibidir [21];

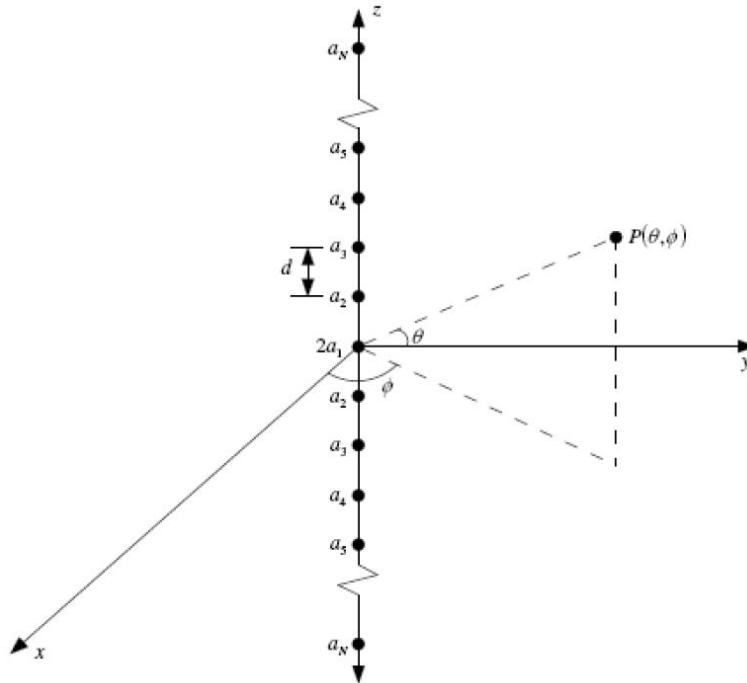
$$AF(\theta) = 2 \sum_{n=1}^N a_n \cos \left[\frac{(2n-1)}{\lambda} \pi dsin\theta \right] \quad (3.26)$$

Eğer Şekil 3.8'de verildiği gibi diziyeye ait eleman sayısı $M=2N+1$ ise dizi faktörü ifadesi Eşitlik 3.27'de gösterildiği gibi olur [21].

$$AF(\theta) = 2 \sum_{n=1}^{N+1} a_n \cos \left[\frac{(2n-1)}{\lambda} \pi dsin\theta \right] \quad (3.27)$$

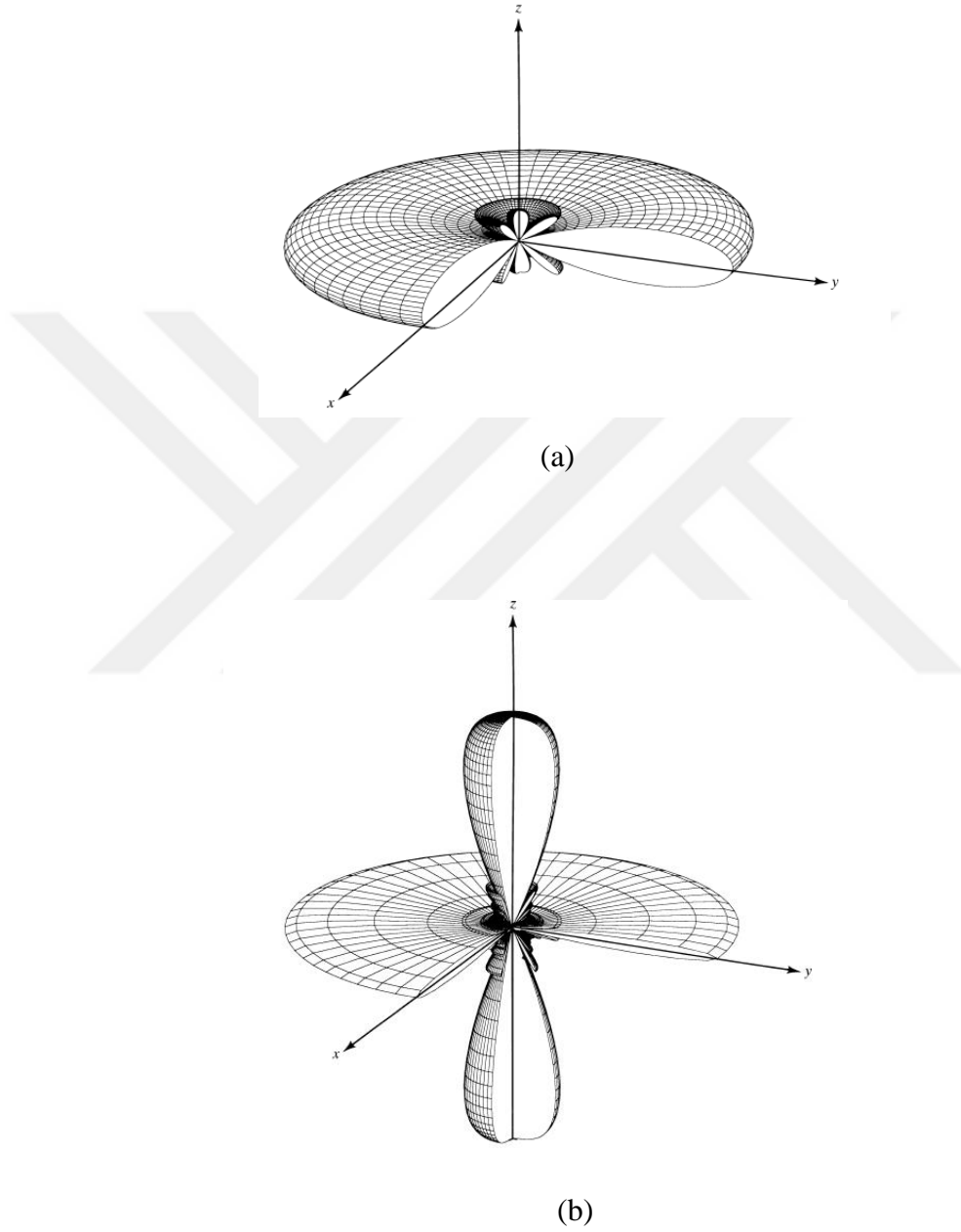


Şekil 3.7. $M=2N$ elemanlı doğrusal anten dizisi [21]



Şekil 3.8. $M=2N+1$ elemanlı doğrusal anten dizisi [21]

N elemanlı doğrusal anten dizilerinde sıklıkla kullanılan terim olan dizi faktörü, diziyi oluşturan eleman sayısına, dizideki elemanlar arası mesafeye, bu elemanlar arasındaki faz farkına göre farklı değerler alabilir [23].



Şekil 3.9. (a) $N=10$, $d=\lambda/4$ ve $\beta=0$ (b) $N=10$, $d=\lambda$ ve $\beta=0$ için 3 boyutlu ışınma örüntüsü [21]

Işıma yapan antende yüksek verimlilik istenmesi durumunda açıklığın boyutları oldukça önemlidir. Dizide bulunan eleman sayısı ve elemanlar arasındaki açıklık toplam ışımanın yüzey alanını belirler. Bu durum da dizinin açıklığını belirleyen bir faktördür. Diziye ait açıklığın fazla olması durumunda yüksek kazançlar elde edilebilir [23].



4. TEKİL DEĞER AYRIŞIMI

Tekil değer ayrışımı vektör uzayları arasında geçişi sağlayan bir yöntemdir. Bir vektör uzayında verilen matrisin, diğer vektör uzayına geçişine imkan vererek matrisi farklı şekillerde ifade etmek için kullanılan bir matematiksel uygulamadır. Tekil değer ayrışımı yöntemini incelemeye başlamadan önce yöntemi uygularken kullanılan matris tanımları ve vektörlerden bahsedilecektir.

4.1. Özel Matris Tanımları

Bu bölümde Tekil Değer Ayrışımı yöntemi uygulanırken kullanılacak matris tanımları yapılacaktır.

4.1.1. Birim Matris

Köşegen üzerindeki elemanları 1, bunların dışında kalan diğer elemanları 0 olan kare matrise birim matris denir. “I” ile gösterilir. Aşağıda verilen I matrisi 3×3 birim matristir [24].

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.1.2. Köşegen Matris

a_{ij} terimi matrisin elemanlarını göstermek üzere, köşegen üzerinde bulunan elemanları (a_{ii}) sıfırdan farklı olup, köşegendeki elemanlar dışında bulunan tüm elemanların sıfır olduğu matristir. Köşegen matrisler kare matris olmak zorundadır. Aşağıda 3×3 köşegen matris örneği görülmektedir [24].

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

4.1.3. Ortogonal Matris

$A = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$ vektörlerinin tanımladığı bir kare matris olmak üzere eğer tüm $i \neq j$ için $v_i \cdot v_j = 0$ ve tüm $i = j$ için ise $v_i \cdot v_j = 1$, diğer bir deyişle $A \cdot A^T = I$ ise A matrisi ortogonal matristir [24].

4.1.4. Matris Transpozu

Bir matrisin transpozunu (devriğini) elde etmek için satırları ile sütunlarının yerleri değiştirilir. Aşağıda verilen bir A matrisinin transpozu görülmektedir.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & 0 \\ 8 & 2 & 7 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & -5 & 2 \\ 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$r \in R$, A ve B birer matris olmak üzere,

- i. $(A^T)^T = A$
- ii. $(A + B)^T = A^T + B^T$
- iii. $(AB)^T = B^T A^T$
- iv. $(rA)^T = rA^T$

durumları sağlanır [24].

4.1.5. Hermite Matris

Pozitif belirlenen Hermite forma \langle, \rangle sahip olan karmaşık vektör uzayına Hermite uzay denir. Bir matrisin karmaşık eşleniğinin transpozesi kendisine eşit ise bu matrise Hermite matris denir [24].

4.1.6. Hankel Matrisi

Bir Hankel Matrisi,

$$H_n = [h_{ij}], \quad i, j = (0, \dots, n-1) \quad (4.1)$$

şeklinde gösterilir. Burada $h_{ij} = h_{i+j}$ olarak tanımlanır. Hankel matrisi aşağıdaki gibidir.

$$H_n = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \dots & h_{n-1} \\ h_1 & h_2 & h_3 & \dots & h_n \\ h_2 & h_3 & h_4 & \dots & h_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n-1} & h_n & h_{n+1} & \dots & h_{2n-2} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Eşitlik 4.2’de görüldüğü gibi Hankel matrisleri simetriktir [24].

4.1.7. Üniter Matris

Lineer cebirde sıklıkla kullanılan bu matris, bölünemez anlamındaki vahid matris olarak da bilinir. Tanım olarak ise eğer bir matrisin tersyüz eşleniği (conjugate transpose) kendisi ile çarpıldığında birim matris oluşuyorsa bu matrise üniter matris denir. Üniter matris U harfi ile gösterilir. Aşağıdaki özellikleri sağlar [24].

- i. $U^*U = UU^*$
- ii. $U^{-1} = U^*$

iii. $|\det(u)| = 1$

4.1.8. Simetrik Matris

Lineer cebirde, transpozu kendisine eşit olan matrislere simetrik matris denir. Aşağıda verilen A matrisi simetriktir [24].

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

4.2. Vektörler

Tek boyutlu sayı dizilerine vektörler denir. Vektörde yer alan elemanların sıralanma yönlerinin durumuna göre sütun veya satır vektörü isimlerini alırlar. Sütun vektörü bir $n \times 1$ matristir. Satır vektörü ise $1 \times n$ matristir. Aşağıda sütun vektörü x ve satır vektörü y örneği gösterilmiştir. Buna göre $y = x^T$ olduğu görülmektedir. O halde eğer x sütun vektörü ise x^T satır vektörüdür [24].

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad y = [2 \quad 1 \quad 3]$$

4.2.1. Matrisin Özdeğerleri ve Özvektörleri

Bir lineer sistemde, özdeğer problemi Eşitlik 4.3'de gösterilen ifadenin $x = 0$ dışında çözümlere sahip olacak şekilde λ değerlerinin belirlenmesidir. Belirlenen bu λ değerlerine özdeğerler denir. Bu değerlere karşılık gelen vektörlere ise özvektörler denir [24].

$n \times n$ boyutlarında $A = [a_{ij}]$ matrisi tanımlanır ve x 'in n bileşenli bir vektör olduğu varsayılırsa bu durumda Eşitlik 4.3'deki gibi olacak şekilde λ değerlerini ve sıfır değerinden farklı x vektörlerini bulma işlemine matrisin özdeğer ve özvektörlerini bulma denir. A matrisinin özdeğerleri λ değerleridir. Bu değerlere karakteristik değerler de denir. Matrisin özdeğerleri ve özvektörleri karmaşık değerli olabilir. Bundan dolayı Eşitlik 4.3, Eşitlik 4.4'deki gibi yazılabilir [24].

$$Ax = \lambda x \quad (4.3)$$

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad (4.4)$$

Bu denklemde I matrisi $n \times n$ boyutlarında birim matristir. Eşitlik 4.4'deki denklem homojen yapıya sahip bir sistemi ifade eder. Bu sistemin sıfırdan farklı çözümleri olabilmesi için determinant ifadesi Eşitlik 4.5'de gösterildiği gibi olmalıdır [24].

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (4.5)$$

Verilen determinant hesaplanırsa özdeğerlere göre n . dereceden polinom elde edildiği görülür. Bu polinom ise karakteristik denklemdir. Karakteristik denklemin kökleri λ özdeğerleridir [24].

A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ terimleri ile gösterilir. $n \times n$ boyutlarında bir A matrisi için özdeğer ve özvektörlerin sahip olduğu bazı özellikler aşağıda sıralandığı gibidir [24].

- i. A matrisi tekil ise en az bir özdeğer sıfırdır. A matrisinin tekil olması demek, A matrisinin determinantının sıfıra eşit olması demektir. A matrisi tekil değilse yani determinantı sıfırdan farklı ise tüm özdeğerler sıfırdan farklıdır.
- ii. Birim matrisin tüm özdeğerleri 1'e eşittir.
- iii. A matrisinin köşegen matris olması durumunda, matrisin özdeğerleri köşegen elemanlarıdır.

- iv. A matrisinin özdeğerleri ile A^{-1} matrisinin özdeğerleri aynıdır.
- v. Tüm özvektörlerin ortogonal olması için matrisin reel simetrik bir matris olması gerekir.
- vi. A matrisi ile A^T matrisinin özdeğerleri eşittir.
- vii. A matrisinin simetrik bir matris olduğu varsayılırsa bu durumda tüm özdeğerleri reel olur.
- viii. A matrisinin özdeğerine karşılık gelen özvektörü v ise, A matrisinin özvektörü c bir sabit olmak üzere cv olur.

4.3. Tekil Değer Ayrışımı Yöntemi

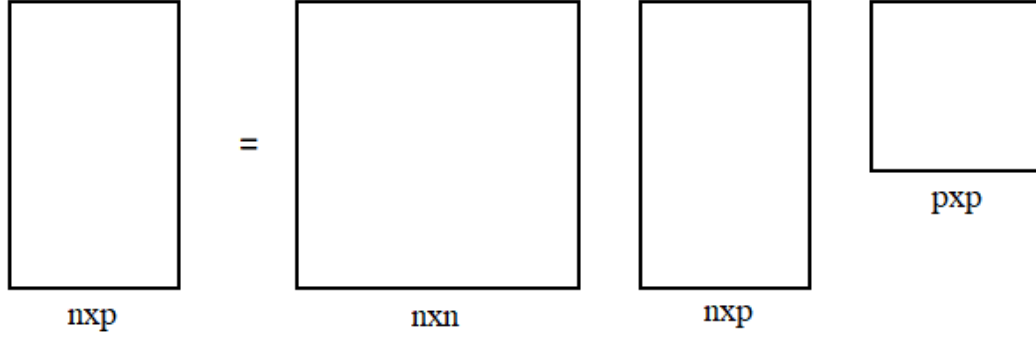
Tekil değer ayrışımı yöntemi satır ve sütun sayısı eşit olmayan bir A matrisini, ortak özelliklere sahip olan üç matrise ayırabilir [25].

$$A_{n \times p} = U_{n \times n} S_{n \times p} V_{p \times p}^T \quad (4.6)$$

$$UU^T = I_{n \times n} \quad (4.7)$$

$$V^T V = I_{p \times p} \quad (4.8)$$

Burada U ve V matrisleri ortogonal matrisler, S matrisi ise köşegen matristir. U matrisinin sütunları sol tekil vektörleri temsil eder, S matrisinin köşegeninde bulunan elemanlar tekil değerleri gösterir, V^T matrisinin satırları ise sağ tekil vektörleri temsil eder. A matrisine ait tekil vektörler v_1, v_2, \dots, v_r ve bu vektörlere karşılık gelen tekil değerler $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ olmak üzere Şekil 4.1'de şekilsel olarak tekil değer ayrışımı gösterilmiştir [25].



Şekil 4.1. $A_{n \times p}$ matrisi için Tekil Değer Ayrışımı

Tekil değer ayrışımı yöntemi orijinal verilere ait kovaryans matrisinin köşegen olduğu bir koordinat sisteminde genişlemeyi temsil eder. Tekil değer ayrışımının hesaplanması, $A A^T$ ve $A^T A$ 'nın özdeğerlerini ve özvektörlerini bulmayı amaçlamaktadır. $A^T A$ 'nın özvektörleri V matrisinin sütunlarını oluşturur, $A A^T$ 'nin özvektörleri U matrisinin sütunlarını oluşturur. S matrisindeki tekil değerler, $A^T A$ veya $A A^T$ 'nin özdeğerlerinin kareköküdür [25].

A matrisinin özilinti fonksiyonu $A^T A$ veya $A A^T$ 'dir. Özilinti fonksiyonunun ise A matrisinin kendine benzerliğini gösterdiği söylenebilir ve bu fonksiyondan elde edilen matrisin özdeğerleri ise bu ilişkinin niteliğini gösterir [25].

Eşitlik 4.6, matris vektör gösterimiyle Eşitlik 4.9'deki gibi ifade edilebilir.

$$A = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_{\min(n,p)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1p} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{p1} & v_{p2} & \dots & v_{pp} \end{bmatrix}^T \quad (4.9)$$

Eşitlik 4.6'deki ifadede A matrisini transpozu ile çarparsak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$A \cdot A^T = (USV^T) \cdot (USV^T)^T = USV^T V S^T U^T \quad (4.10)$$

Yine Eşitlik 4.6'daki ifadeye A matrisinin transpozunu A matrisi ile çarparsak aşağıdaki eşitlik elde edilir [25].

$$A^T A = (USV^T) \cdot (USV^T)^T = VS^T U^T USV^T \quad (4.11)$$

U matrisi ile U'nun transpozununun çarpılması ile birim matrisi elde ederiz. O halde aşağıdaki eşitlik, Eşitlik 4.11 yeniden düzenlenerek elde edilmiştir.

$$AA^T = VS^T SV^T \quad (4.12)$$

A'nın özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\min(n,p)}$ olarak gösterilirse Eşitlik 4.13 oluşturulur.

$$SS^T = S^T S = S^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{\min(n,p)} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

A matrisinin tekil değerleri, özdeğerlerinin karekökü olduğundan,

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sigma_{\min(n,p)} = \sqrt{\lambda_{\min(n,p)}} \quad (4.14)$$

elde edilir. O halde S matrisini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_{\min(n,p)} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Burada S matrisindeki tekil değerler $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{\min(n,p)}$ şeklinde azalan sırayla yerini alır.

Eşitlik 4.6'da U matrisi yalnız bırakılırsa,

$$U = AVS^{-1} \quad (4.16)$$

elde edilir. Buradan S matrisinin tersi eşitliğin karşı tarafına geçirilirse,

$$S.U = A.V \quad (4.17)$$

bulunur. Eşitlik 4.17 düzenlenerek verilen matrislerin vektörlerinin çarpımlarının σ_i ile ağırlıklandırılmış toplamı olarak ifade edilmesi durumunda,

$$i = 1, 2, \dots, \dots, \min(n, p) \quad (4.18)$$

$$A = \sum_{i=1}^{\min(n,p)} \sigma_i u_i v_i^T \quad (4.19)$$

elde edilir.

Verilen denklemde σ_i değerleri $\min(n,p)$ dışında sıfır değerleri aldığı için Eşitlik 4.19'da üst sınır $\min(n,p)$ 'ye kadar verilmiştir [25].

$$S_{ij} = \begin{cases} \sigma_i & \text{eğer } i = j \\ 0 & \text{eğer } i \neq j \end{cases} \quad (4.20)$$

Eşitlik 4.6 ve Eşitlik 4.19'daki denklemlerden aşağıdaki eşitlik elde edilebilir.

$$\sigma_i \cdot u_i = A \cdot v_i \quad (4.21)$$

Eşitlik 4.21'deki eşitliğin her iki tarafının normu alınır,

$$\|u_i\| = 1 \quad (4.22)$$

olduğundan aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\sigma_i = \|A \cdot v_i\| \quad (4.23)$$

Yukarıdaki gibi matematiksel altyapısı açıklanan Tekil Değer Ayırışımı yöntemi, herhangi bir uygulamayı çözmek için gereken tüm teorik bilgileri içermektedir [25].

Tekil değer ayrışımı yönteminin uygulanmasını daha iyi görebilmek için bir matrise bu yöntemi uygulayıp tekil değerlerini elde edelim.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 3 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Eşitlik 4.24'de verilen A matrisinin tekil değerlerini bulalım.

$$A \cdot A^T = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{5} \\ -\sqrt{5} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2\sqrt{5} \\ -2\sqrt{5} & 14 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Elde edilen bu matristen yola çıkarak $|\lambda I - A^T A|$ determinantının değerini hesaplayıp özdeğerleri elde edelim.

$$|\lambda I - A^T A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 6 & -2\sqrt{5} \\ -2\sqrt{5} & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 6 & 2\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} & \lambda - 14 \end{vmatrix} \quad (4.26)$$

$$(\lambda - 6) \cdot (\lambda - 14) - 20 = \lambda^2 - 20\lambda + 64 = 0 \quad (4.27)$$

Eşitlik 4.27'den özdeğerler hesaplandığında,

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 = 16 \\ \lambda_2 = 4 \end{array} \right\} \quad (4.28)$$

bulunur.

Bu özdeğerlere ait özvektörleri bulmak için aşağıdaki adımlar izlenir.

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 4 \\ \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 2 \end{array} \right\} \quad (4.29)$$

elde edilir ve bu değerlerle S matrisini yazabiliriz.

$$S = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

S matrisini bulduktan sonra V matrisini elde etmek için,

$$(\lambda_i I - A^T A) \cdot v_i = 0 \quad (4.31)$$

denklemini çözümler.

$$\left(\begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -2\sqrt{5} \\ -2\sqrt{5} & 14 \end{bmatrix} \right) \cdot v_1 = 0 \quad (4.32)$$

Buradan,

$$\begin{bmatrix} 10 & 2\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

elde edilir.

$$10 \cdot v_{11} + 2\sqrt{5} \cdot v_{12} = 0 \quad (4.34)$$

$$2\sqrt{5} \cdot v_{11} + 2 \cdot v_{12} = 0 \quad (4.35)$$

Eşitlik 4.34 ve Eşitlik 4.35'in çözümlerinden v_1^* aşağıdaki gibi elde edilir.

$$v_1^* = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{5} \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$\text{Norm sabiti } k_1 = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{5})^2} = \sqrt{6} \quad (4.37)$$

$$v_1 = \frac{v_1^*}{k_1} \quad (4.38)$$

Eşitliğinden,

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -5/\sqrt{6} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

olarak bulunur.

Aynı şekilde,

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -2\sqrt{5} \\ -2\sqrt{5} & 14 \end{bmatrix} \right) \cdot v_1 = 0 \quad (4.40)$$

bulunur. Buradan,

$$\begin{bmatrix} -2 & 2\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

elde edilir.

$$-2 \cdot v_{21} + 2\sqrt{5} \cdot v_{22} = 0 \quad (4.42)$$

$$2\sqrt{5} \cdot v_{21} \pm 10 \cdot v_{22} = 0 \quad (4.43)$$

Eşitlik 4.42 ve Eşitlik 4.43'ün çözümlerinden v_2^* aşağıdaki gibi elde edilirken norm sabiti k_2 ise aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$v_2^* = \begin{bmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad k_2 = \sqrt{1^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{6} \quad (4.44)$$

$$v_2 = \frac{v_2^*}{k_2} \quad (4.45)$$

Eşitliğinden,

$$v_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{5}/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

olarak bulunur. Böylece V matrisi aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

$$V = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & \sqrt{5}/\sqrt{6} \\ -\sqrt{5}/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

S ve V matrisini elde ettikten sonra U matrisi aşağıdaki gibi hesaplanır. Eşitlik 4.23 düzenlenirse Eşitlik 4.48 elde edilir.

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} \cdot A \cdot v_i \quad (4.48)$$

Buradan,

$$u_1 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -\sqrt{5}/\sqrt{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -\sqrt{5}/\sqrt{6} \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

$$u_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{5}/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{5}/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

elde edilir. Böylece U matrisi,

$$U = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} & \sqrt{5}/\sqrt{6} \\ -\sqrt{5}/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

olarak bulunur.

Buradan A matrisi için Tekil Değer Ayrışımı (TDA) uygulanmış olup aşağıdaki gibi üç matrise ayrılmış biçimi yazılabilir.

$$TDA(A) = USV^T = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} & \sqrt{5}/\sqrt{6} \\ -\sqrt{5}/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & \sqrt{5}/\sqrt{6} \\ -\sqrt{5}/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}^T \quad (4.52)$$

5. MATRİS KALEM YÖNTEMİ

Matris Kalem Yöntemi, belirlenen bir parametre için sinüs sinyalleri açısından değişim gösteren verileri kullanarak karmaşık genlik ve kutup noktalarını en yüksek doğruluk ile elde eden yöntemdir [15]. Bu yöntemi ayrıntılı olarak incelemeden önce anten dizilerine gelen sinyaller için kullanılan başlıca yön bulma yöntemlerinden bahsedilecektir.

5.1. Yön Bulma Yöntemleri

Bir anten dizisine gelen sinyalin yönünü tahmin etmek, o sinyalin kaynağından çıkan sinyalin hangi doğrultudan anten dizisine geldiğini tespit etmeye yarar. Eğer duruma radar antenleri açısından yaklaşırsak, bir radar anteni sinyal gönderdiği zaman yol aldığı doğrultuda bulunan herhangi bir hedefe çarpar, daha sonra geri dönen sinyal radar anteni tarafından tekrar alınır. Hedefe çarptıktan sonra geri dönen sinyalin geldiği doğrultuyu tespit edebilmek için ise sinyal geliş açısı kestirim yöntemleri kullanılmaktadır [26].

Bir anten dizisi kullanarak sinyal kaynağının tespit edilebilmesi için birçok yöntem kullanılmaktadır. Sinyal kaynağının tek ya da birden fazla olması, kullanılacak olan yöntemin çeşidini değiştirir [26].

Eğer yalnızca bir tane kaynak bulunuyorsa, bu durumda anten dizisinin iki ardışık elemanı arasında oluşan faz farkını kullanabiliriz. Böylece geliş açısının kestirimini yapabiliriz. Bu kestirim yapılırken dizide bulunan elemanlar arasındaki mesafe farkı kullanılarak sinyalin diğer dizi elemanına daha gecikmeli ulaşmasından yola çıkılır [26].

Eğer radar anteninin gönderdiği sinyal birden fazla hedeften geri dönüyorsa ya da birden fazla sinyal gönderiliyorsa, her bir sinyal antendeki her bir dizi elemanına aynı zamanlarda ulaşmaz. Sinyalin farklı zamanlarda ulaştığı düşünülürse, yukarıda

bahsedilen yöntem ile geliş açısı kestirimi yapmak imkansızdır. Böylesine durumlarda ise sinyalin geliş açısı kestirim algoritmaları ortaya atılıp geliştirilmiştir. İlk olarak 1960 yılında bu konu üzerinde çalışmalar başlatılmıştır. Birden fazla sinyali incelemek amacıyla Capon tarafından 1969 yılında MLE (Maximum Likelihood Estimation) yöntemi yeniden düzenlenip kullanılmaya başlanmıştır. Yön bulma probleminin çözümünde kullanılan yöntemlerden bir diğeri ise alt uzay kestirimi yöntemine dayanır. 1970 yılından itibaren alt uzay kestirim yöntemleri uygulamalarda kullanılmaya başlanmıştır. 1973 yılında Pisarenko, çalışmalarında kovaryans matrisi yaklaşımıyla gürültü sinyali içeren bir sistem üzerinde ilk defa bu yaklaşımı uygulayarak yön bulma probleminin çözümünde yeni bir sayfa açmıştır. Birkaç yıl sonra 1977 yılında ise Schmidt, MUSIC (Multiple Signal Classification) yöntemini ortaya atmış, anten dizisinde bulunan elemanların dizilim geometrisinden bağımsız olarak yön ölçüm modeli geliştirmiştir [27].

MUSIC yöntemi keşfedildikten sonra birçok uygulamada kendine yer bulmuştur. Bu yöntem beklenildiği gibi yüksek duyarlılıkla yön bulma özelliğine sahip olmasına rağmen, sistemde kullanılan tüm parametre uzayını tarayıp kullanmak durumunda olmasından dolayı oldukça fazla hesaplama ve veri depolama maliyetine neden olduğundan bu sorunu ortadan kaldırmak için ESPRIT (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques) yöntemi geliştirilmiştir [20]. Bu yöntem sayesinde MUSIC yönteminde ortaya çıkan veri depolama maliyeti sıkıntısı ve fazla hesaplamalar, tüm parametre uzayını taramaya gerek kalmadan çözülmüştür [27].

Hem MUSIC algoritması hem ESPRIT algoritması alt uzay yaklaşımı tabanlı algoritmalarıdır. Her ikisi de oldukça yüksek duyarlılıkla kestirimler yapması nedeniyle geçtiğimiz yıllar boyunca en çok tercih edilen yöntemler arasına girmiştir. Ayrıca ESPRIT algoritmasının sistemdeki işlemci üzerine bindirdiği yükün oldukça az olması, bu yöntemin tercih edilen yöntemler arasında yer almasına neden olmuştur [27].

Anten dizisine gelen sinyalin yönünü bulurken dikkat edilmesi gereken durumlar meydana gelir. Bu durumlardan bahsedecek olursak, dizi yapısının uygun olması,

dizideki alıcıların sahip oldukları geometrinin uygun şekilde seçilmesi ve alıcıların yapısı yön bulma probleminde dikkat gerektiren konulardır. Bunların yanı sıra uygun yöntemin belirlenmesi de oldukça önemli bir konudur. Yön bulma probleminin üzerinde fazlaca çalışılması, her türlü durum için oluşturulan farklı algoritmalar, bu problemin karmaşıklığını gözler önüne sermektedir [28].

Yön bulma konusuna maliyet açısından bakarsak, sinyal geliş açısı kestirim algoritmaları kullanılan sistemin maliyetini önemli derecede etkilemektedir. Maliyet artışını önlemek için kullanılan algoritmalarda bazı önemli özelliklerin bulunması gerekir. Bahsedilen özelliklerin başında seçilen algoritmanın kullanması gereken kapasite ihtiyacı ve bununla birlikte kullanılan algoritmanın yüksek hafızalara ihtiyaç duymayacak şekilde kurulabilmesi gelmektedir. Eğer kapasite ihtiyacı yüksek seviyelerde olmazsa sistemin işlemcisi üzerinde çok fazla aritmetik işlem yükü meydana gelmemiş olur ki bu durum istenen bir durumdur [26-28].

5.2. Matris Kalem Yöntemi

Matematik terminolojisinde “kalem” ifadesi, tarihte ilk olarak Cayley tarafından 1888 yılında kuadratik ve konik formlar için kullanılmıştır. Daha sonra Gantmacher “matris kalem” ifadesini 1959 yılında yayınladığı kitabının bir bölümünde “kuadratik formların kalemleri” olarak kullanmış, başka bir bölümünde ise “matrislerin tekil kalemleri” ifadesine yer vermiştir. Ancak Gantmacher, Rus bir bilim adamıdır. Bu durum göz önünde bulundurulduğunda Rusça’da kullanılan “demet” kelimesinin aynı zamanda “kalem” kelimesi ile aynı anlama gelmesinden dolayı “kalem” ifadesinin matematikteki kullanımının İngilizce literatürde “matris kalem” şeklinde yer bulduğu düşünülmektedir. Öte yandan Oxford İngilizce Sözlüğünde “kalem” kelimesi "bir ışın grubu veya bir ışın demetinin bir noktadan diğerine veya bir noktadan ayrılması" anlamında 1665 yılında bir örnekte kullanılmıştır. 1840 yılına ait olmak üzere yine aynı sözlük, geometrik anlamda "bir noktada buluşan bir dizi çizgi" anlamında “kalem” terimini kullanmıştır.

Matris Kalem Yöntemi yüksek hassasiyetle kutup ve genlik verilerinin üstel sinyal verilerinden elde edilmesini sağlar. Bu yöntem de diğer kestirim yöntemleri gibi alt uzay yaklaşımı tabanlı bir yöntemdir. Matris Kalem Yöntemini diğer MLE, MUSIC ve ESPRIT yöntemlerinden ayıran en önemli fark tüm bu yöntemler, R korelasyon matrisine bağımlı olarak görev yaparken Matris Kalem yönteminin korelasyon matrisine ihtiyaç duymamasıdır. Korelasyon matrisini tahmin etmek yüksek derecede hesaplama yükünü de beraberinde getirir. Çünkü korelasyon matrisini tahmin etmek için sinyalden elde edilmiş K adet örneğe (K adet anlık veriye) ihtiyaç vardır. Burada $K > 2N$ olacak şekilde seçilmelidir. Doğal varsayım, tüm K örneklerinin aynı istatistikleri takip etmeleri, yani verilerin homojen olmasıdır. Gücü zamanla değişen ve sönümlenen başka bir deyişle özelliklerin hızla değiştiği bir ortamda, bu durum geçerli olmayabilir. Korelasyon matrisinin tahmin edilmesi yoğun hesaplamaları da beraberinde getirir [16].

Tüm bu nedenler, Matris Kalem olarak bilinen "istatistiksel olmayan" veya "doğrudan veri bölgesi" tekniğinin geliştirilmesini motive etmiştir. Matris Kalem Yöntemi orijinal olarak sistemin kutuplarını tahmin etmek için geliştirilmiştir. Ancak yön bulma problemlerinin çözümü için de uygulandığında başarılı sonuçlar elde ettiği gözlemlenmiştir [16].

$N \times M$ boyutlarında A ve B matrislerini ifade edersek,

$$A - \lambda B \tag{5.1}$$

eşitliği iki matrisin Matris Kaleme uygun olarak gösterimidir.

Matris çifti $\{A, B\}$ 'nin genelleştirilmiş özdeğerleri, $A - \lambda B$ 'nin rank değerinin azalmasına neden olan λ değerleridir. Böyle bir λ değerine karşılık gelen genelleştirilmiş bir özvektör, uzayda $N(A - \lambda B)$ içindeki bir vektördür. Bir Matris Kalem, özdeğer kavramının kare olmayan matrislere genelleştirilmesini temsil eder. Matris Kalem Yöntemi doğal olarak sönümlü veya sönümsüz sinüzoidal tahmin probleminde ortaya çıkar [16].

Matris Kalem, iki fonksiyonu ortak zaman aralığında skaler λ parametresi ile birleştirir [16].

$$f(t, \lambda) = g(t) + \lambda h(t) \quad (5.2)$$

$f(t, \lambda)$ fonksiyonu, $g(t)$ ve $h(t)$ fonksiyonlarının kalemi olarak tanımlanır ve λ ile parametrize edilir. Matris Kalem fonksiyonu, $y(t)$ fonksiyonu verilir $g(t)$, $h(t)$ ve λ yaklaşık olarak seçildiğinde z_i değerlerinin çıkarımı ile ilgili önemli bilgiler içerir. z_i ise sistemin kutuplarını temsil eder [16].

Serbest uzayda yer alan izotropik çok yönlü nokta sensörlerinden oluşan eşit aralıklı bir dizinin uzak alanında, dar bant kaynaklarının var olduğu düşünülür. Böyle bir diziye düzgün doğrusal dizi denir. Odaklanılan kısım, Matris Kalem formülasyonunda kullanılan karmaşık matrisleri gerçek matrislere dönüştürmek için üniter dönüşümü kullanmak ve bu matrisleri aynı anda doğrusal dizide birbiriyle toplayan çoklu sinyallerin yönünü tahmin etmektir [18].

5.2.1. Gürültüsüz Sinyallerin Analizinde Kullanılan Matris Kalem Yöntemi

$x(n)$ vektörü, düzgün doğrusal anten dizisinde anten elemanlarının besleme noktasında ölçülen gerilim kümesidir. Bu nedenle gürültüsüz gerçel sinyal olan $x(t)$ aşağıdaki gibi modellenebilir [29].

$$y(t) = x(t) + n(t) = \sum_{i=1}^M R_i e^{s_i t} + n(t) \quad (5.3)$$

Bu ifadenin örneklenmiş olarak gösterimi ise Eşitlik 5.4'deki gibidir.

$$y(p) = \sum_{i=1}^M R_i z_i^p + n(p) \quad (5.4)$$

Burada,

$$z_i = e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin(\theta)}, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (5.5)$$

olarak verilmektedir.

Burada amacımız hesaplanan y_p ($p = 0, \dots, N - 1$) değerleri ile sistemin kutuplarını tahmin etmektir. Bu durumda, veriler N adet anten elemanın terminallerinden alınır. İşaretin geliş yönünü tahmin etmek için Matris Kalem Yöntemi kullanılır. Bu yöntem ESPRIT ile benzer yapıya sahip olarak görülse de burada korelasyon matrisi tahmini yapılmaz. Yöntem direkt olarak alınan veriye uygulanır [18].

Yöntemi uygulamak için öncelikle $x(p)$ matrisinden direkt olarak elde edilmiş bir Y matrisi olduğunu düşünelim. Y matrisi Hankel matrisidir ve Y 'nin her bir sütunu orijinal veri vektörünün pencerelemiş bir parçasıdır. Elemanları ise genel olarak $\{x(0) x(1) x(2) \dots x(N - 1)\}$ şeklinde sıralanır. Anten dizisinde N adet alıcı bulunduğu varsayılırsa Y matrisi aşağıdaki gibi gösterilebilir [18].

$$Y = \begin{bmatrix} x(0) & x(1) & \dots & x(L-1) \\ x(1) & x(2) & \dots & x(L) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(N-L) & x(N-L+1) & \dots & x(N-1) \end{bmatrix}_{(N-L+1) \times (L)} \quad (5.6)$$

Eşitlik 5.6'da verilen L, kalem parametresi olarak adlandırılır. L değeri, algoritmanın en iyi sonucu verebilmesi için $N/2$ ile $N/3$ arasında seçilmelidir [18].

Y matrisinden iki tane alt matris tanımlayabiliriz.

$$Y_a = \begin{bmatrix} x(0) & x(1) & \dots & x(L-1) \\ x(1) & x(2) & \dots & x(L) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(N-L-1) & x(N-L) & \dots & x(N-2) \end{bmatrix}_{(N-L) \times (L)} \quad (5.7)$$

$$Y_b = \begin{bmatrix} x(1) & x(2) & \cdots & x(L) \\ x(2) & x(3) & \cdots & x(L+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(N-L) & x(N-L+1) & \cdots & x(N-1) \end{bmatrix}_{(N-L) \times (L)} \quad (5.8)$$

Aynı zamanda,

$$Y_a = Z_a R Z_b \quad (5.9)$$

$$Y_b = Z_a R_0 Z_0 Z_b \quad (5.10)$$

olarak yeniden yazılabilir.

$$Z_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{(N-L-1)} & z_2^{(N-L-1)} & \cdots & z_M^{(N-L-1)} \end{bmatrix}_{(N-L) \times (M)} \quad (5.11)$$

$$Z_b = \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{(L-1)} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_M & \cdots & z_M^{(N-1)} \end{bmatrix}_{(M) \times (L)} \quad (5.12)$$

$$Z_0 = \text{diag}[z_1, z_2, \dots, z_M] \quad (5.13)$$

$$R_0 = \text{diag}[R_1, R_2, \dots, R_M] \quad (5.14)$$

Veriler oluşturulduktan sonra Matris Kalem formülünü uygularsak,

$$Y_b - \lambda Y_a = Z_a R_0 [Z_0 - \lambda I] Z_b \quad (5.15)$$

denklemini elde ederiz.

Eşitlik 5.15’de I matrisi $M \times M$ birim matristir. Burada $Y_b - \lambda Y_a$ matrisinin rankının M değerine eşit olacağı görülmektedir. O halde aşağıdaki eşitlik sağlanmaktadır [18].

$$M \leq L \leq N - M \quad (5.16)$$

Ancak eğer $\lambda = z_i, i = 1, 2, \dots, M$ için $[Z_0 - \lambda I]$ matrisinin i . sırası sıfır ise, bu matrisin rankı $M - 1$ olur. Bu nedenle z_i parametreleri, $\{Y_a, Y_b\}$ matris çiftinin genelleştirilmiş özdeğerlerinden bulunabilir. Öyleyse artık problem sıradan özdeğer bulma problemine dönüşür ve z_i parametreleri $\{Y_a^+ Y_b - \lambda I\}$ ifadesinden bulunabilir. Burada Y_a^+ terimi, Y_a 'nın Moore-Penrose tersidir. Moore-Penrose ise aşağıdaki gibi tanımlanır [18].

$$Y_a^+ = \{Y_a^H Y_a\}^{-1} Y_a^H \quad (5.17)$$

O halde aşağıda verilen Eşitlik 5.18'in özdeğerleri ihtiyacımız olan veriyi içerir [18].

$$Y_a^+ Y_b = \{Y_a^H Y_a\}^{-1} Y_a^H Y_b \quad (5.18)$$

Buradan sinyalin dizi antene geliş açısı aşağıdaki formül ile hesaplanır [30].

$$\theta_i = \cos^{-1} \left[\frac{\text{Im}(\ln(z_i))}{kd} \right], \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (5.19)$$

Burada Im ifadenin sanal kısmını göstermektedir.

5.1.2. Gürültülü Sinyallerin Analizinde Kullanılan Matris Kalem Yöntemi

Anten dizisine gelen sinyalin gürültü içermesi durumunda Matris Kalem Yöntemi uygulanmadan önce Tekil Değer Ayrışımı Yönteminin uygulanması gerekir. Tekil Değer Ayrışımı Yönteminin görevi, gürültülü sinyallerde filtreleme görevi görmesidir. Bu yöntem ile gürültüden arındırılan sinyal daha sonra Matris Kalem işlemine tabi tutulur [18].

Gürültülü sinyal $y(t)$ 'den oluşturulan Y matrisi aşağıdaki gibidir.

$$[Y] = \begin{bmatrix} y(0) & y(1) & \cdots & y(L) \\ y(1) & y(2) & \cdots & y(L+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(N-L-1) & y(N-L) & \cdots & y(N-1) \end{bmatrix}_{(N-L) \times (L+1)} \quad (5.20)$$

O halde Eşitlik 5.7 ve 5.8'deki $x(t)$, yerini $y(t)$ 'ye bırakır. Y_1 matrisi, Y matrisinin son sütunu silinerek oluşturulur. Y_2 matrisi, Y matrisinin ilk sütunu silinerek oluşturulur. L parametresi yine $N/2$ ile $N/3$ arasında seçilmelidir. Bu aralıkta seçilen L değeri, elde edilen z_i değerleri de göz önünde bulundurularak minimum değer olarak seçilmelidir [16].

Oluşturulan Y matrisine Tekil Değer Ayrışımı uygulanırsa,

$$[Y] = [U][S][V]^H \quad (5.21)$$

elde edilir.

Bu denklemde $[Y]^H[Y]$ ve $[Y][Y]^H$ matrislerinin özvektörlerinden oluşan $[U]$ ve $[V]$ üniter matristir, $[S]$ matrisi ise köşegen matristir ve $[Y]$ 'nin tekil değerlerini içerir [16].

$$[U]^H[Y][V] = [S] \quad (5.22)$$

Tekil Değer Ayrışımı uygulandıktan sonra M değerinin belirlenmesi gerekir. Bunun için herhangi bir tekil değer en büyük tekil değere oranlanması gerekir. Genel olarak düşünülürse M tane tekil değer ötesindeki tüm tekil değerler sıfıra eşittir. M değerini belirlemek için Eşitlik 5.23 kullanılır [18].

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_{max}} \approx 10^{-P} \quad (5.23)$$

Verilen σ_c değeri herhangi bir tekil değeri göstermektedir. P ise veride kullanılan belirgin basamak sayısını ifade eder. Bu oranın sırasıyla tekil değerler denendiğinde gittikçe azalması gerekmektedir. Eğer azalma değil de artma oluyorsa bu durum veri modelinin doğru yapılmadığını gösterir [18].

Gelen sinyale bu işlemler uygulandıktan sonra sıra filtrelenmiş matris elde etme aşamasına gelir. Bu matris $[V']$ ile gösterilirken, $[V]$ matrisinin M adet baskın sağ tekil vektörlerinden meydana gelmektedir [18].

$$[V'] = [v_1, v_2, \dots, v_M] \quad (5.24)$$

$M + 1$ 'den L değerine kadar olan sağ tekil vektörler nispeten çok küçük değerlere sahiptir ve atılması gerekir. Bu nedenle,

$$[Y_1] = [U][S'][V_1']^H \quad (5.25)$$

$$[Y_2] = [U][S'][V_2']^H \quad (5.26)$$

elde edilir. Burada, $[V_1']$ matrisi, $[V']$ matrisinin son sırası silinerek elde edilir. $[V_2']$ matrisi ise $[V']$ matrisinin ilk sırası silinerek elde edilir. $[S']$ matrisi, $[S]$ matrisinin baskın tekil değerlerinin olduğu M sütundan elde edilir [18].

O halde Eşitlik 5.27'in özdeğerleri, gürültülü gelen sinyalin yönünü tespit etmek için kullanılacak olan eşitliktir [18].

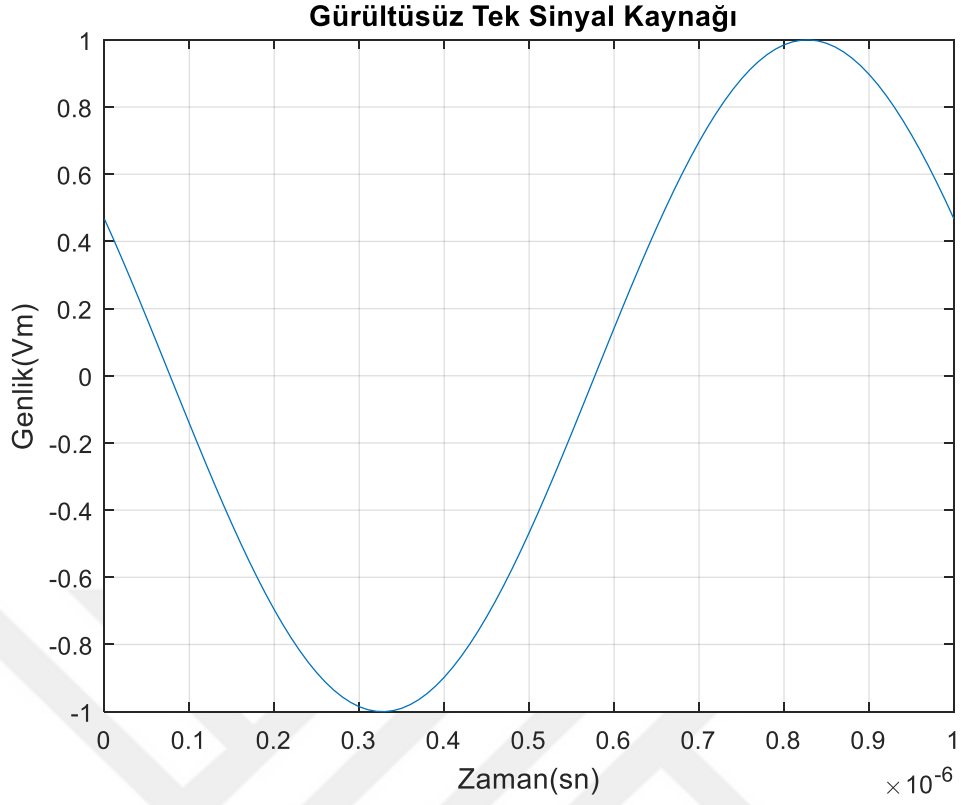
$$\{[V_2']^H - \lambda[V_1']^H\} \rightarrow \{[V_1']^H\}^+ \{[V_2']^H\}^+ - \lambda[I] \quad (5.27)$$

6. SİMÜLASYON SONUÇLARI

Bu tez çalışmasında doğrusal anten dizisine bir veya birden fazla kaynaktan gelen sinyalin yönü tespit edilmiştir. Bu çalışmada sinyal kaynağı sayısından daha küçük anten sayısı kullanılmıştır. İlk olarak tek sinyal kaynağından gelen gürültüsüz sinyal ile 8 elemanlı doğrusal anten dizisi kullanılmış ve sinyalin tekil değerleri elde edilmiştir. Daha sonra sinyal kaynağı sayısı üçe çıkarılarak gelen sinyallere aynı oranda gürültü eklenmiş ve tekil değerlerin kaynak sayısı ile değişimi incelenmiştir. Gürültü değerleri değiştirilerek Tekil Değer Ayırımı yöntemiyle sinyallerin tekil değerleri bulunmuştur. Son olarak eğer sinyal kaynağından gelen sinyal gürültü içeriyorsa Tekil Değer Ayırımı yöntemi ile gürültü filtrelenmiş ve Matris Kalem yöntemiyle sinyalin yönü tespit edilmiştir.

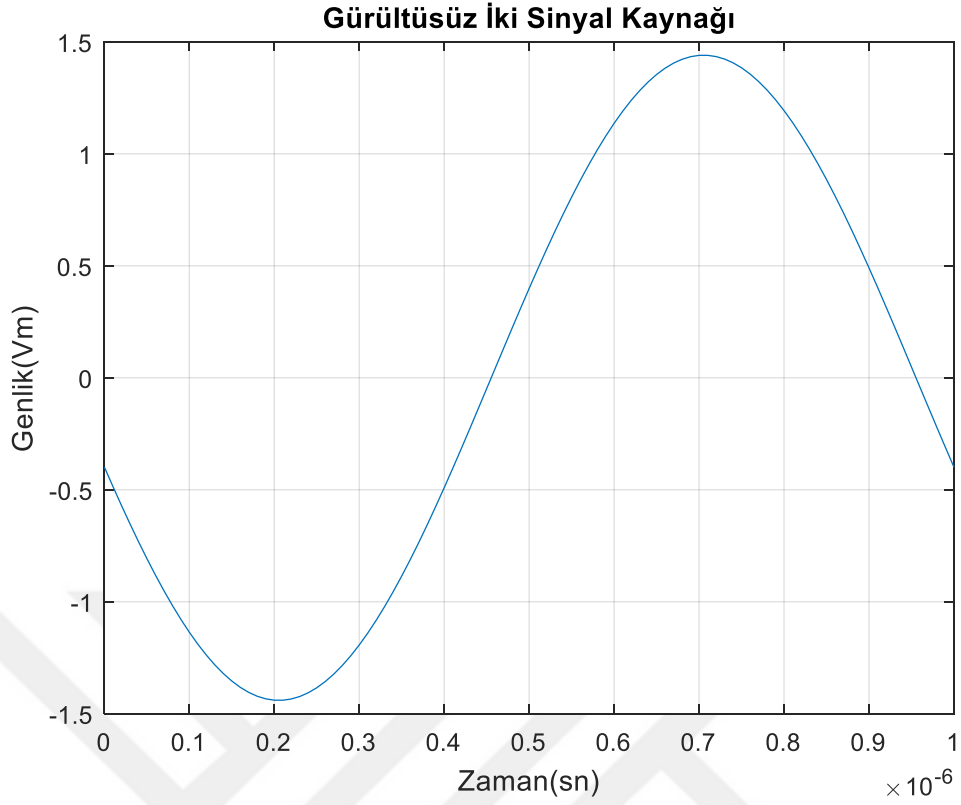
6.1. Gürültüsüz Sinyal Kaynakları Kullanılarak Sinyalin Tekil Değerlerinin Bulunması

Gürültüsüz sinyallerin tekil değerlerinin bulunması için ilk olarak 8 elemanlı doğrusal anten dizisi ile gürültüsüz tek kaynak kullanılmıştır. Kaynaktan ışılan sinyalin frekansı 1MHz'dir. Doğrusal anten dizisindeki elemanlar arasındaki mesafe 50m olarak alınmıştır. Sinyalin örnekleme frekansı 100Hz'dir. Kaynaktan gelen sinyalin geliş açısı 30^0 'dir. Anten dizisinin rastgele seçilen 5. dizi elemanına gelen sinyalin MATLAB simülasyonu Şekil 6.1'de verildiği gibidir.



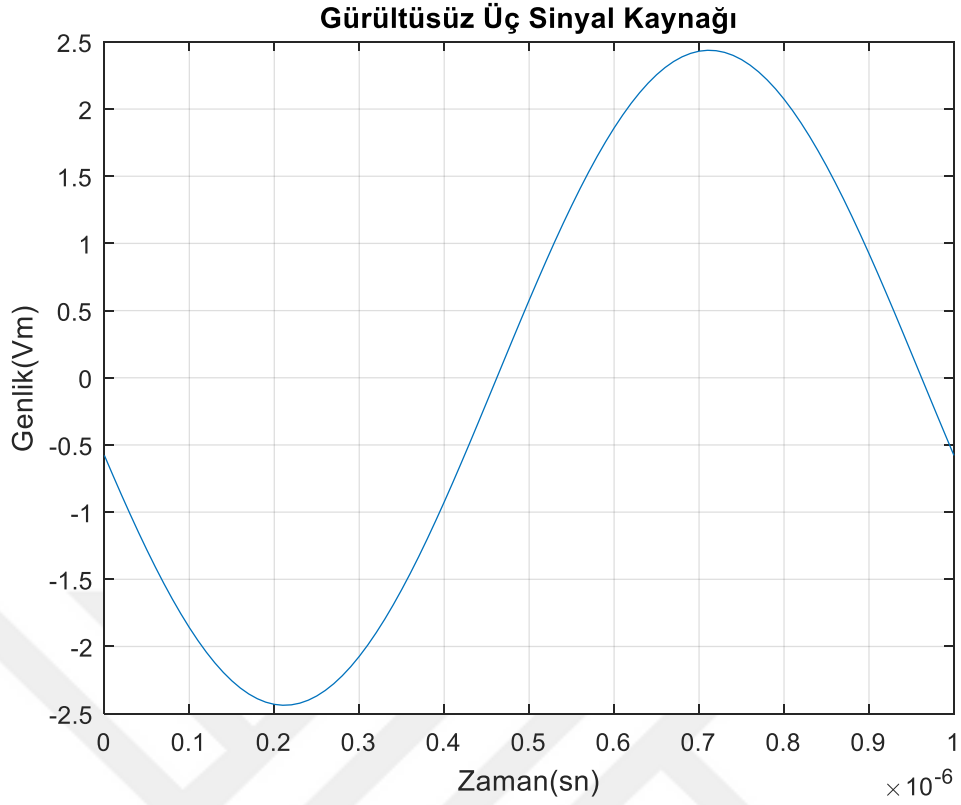
Şekil 6.1. Gürültüsüz tek sinyal kaynağından 5. dizi elemanına gelen sinyal

Kaynak sayısı ikiye çıkarılarak ikinci kaynağın geliş açısı 45^0 olarak ayarlanmıştır. Doğrusal anten dizisinin 5. elemanına gelen sinyallerin MATLAB simülasyonu Şekil 6.2’de verildiği gibidir.



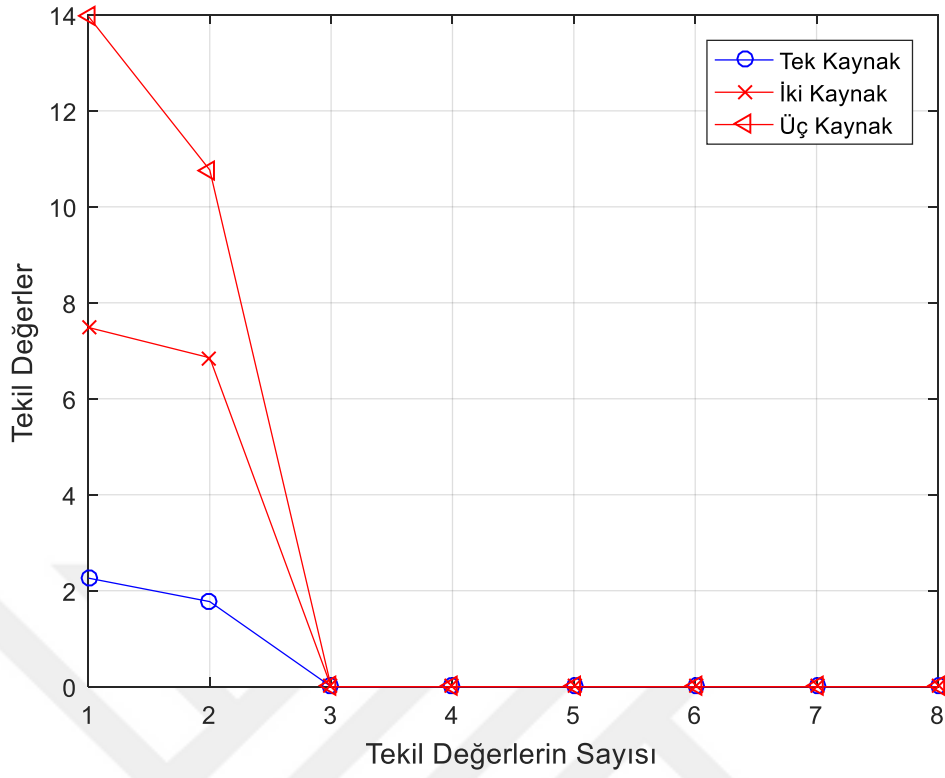
Şekil 6.2. Gürültüsüz iki sinyal kaynağından 5. dizi elemanına gelen sinyal

Kaynak sayısı üçe çıkarılarak üçüncü kaynağın geliş açısı 60^0 olarak ayarlanmıştır. Doğrusal anten dizisinin 5. elemanına gelen sinyallerin MATLAB simülasyonu Şekil 6.3'de verildiği gibidir.



Şekil 6.3. Gürültüsüz üç sinyal kaynağından 5. dizi elemanına gelen sinyal

Üç farklı kaynaktan gelen sinyalin yukarıda gösterildiği gibi modellenmesi yapıldıktan sonra bu sinyallerin özilinti matrisleri oluşturulmuştur. Her üç durum için de sinyallere Tekil Değer Ayrışımı yöntemi uygulanarak tekil değerler elde edilmiştir. Gürültüsüz kaynaklar ve 8 elemanlı doğrusal anten dizisine ait sistemin tekil değerleri Şekil 6.4'de gösterildiği gibidir. Çizelge 6.1'de değerler ayrıntılı olarak görülebilir.



Şekil 6.4. Gürültüsüz sinyallerin tekil değerlerinin grafiksel gösterimi

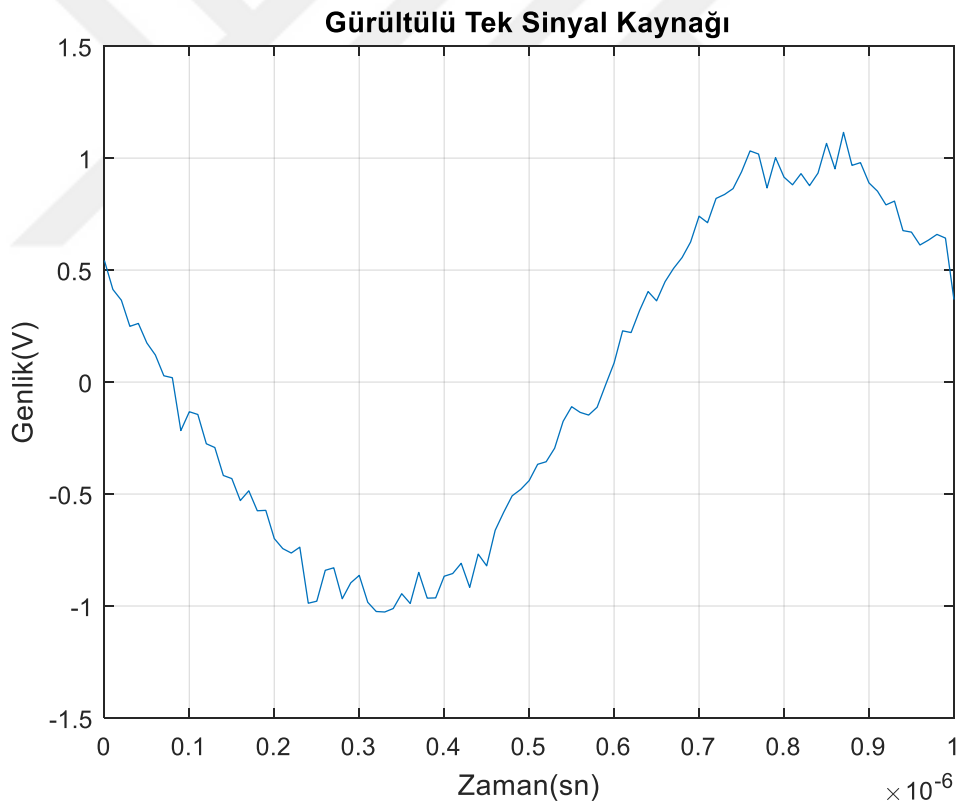
Çizelge 6.1. Gürültüsüz sinyallerin tekil değerleri

Tekil Değerler			
σ_n	Tek Kaynak	İki Kaynak	Üç Kaynak
σ_1	2,2622	7,4855	13,9752
σ_2	1,7725	6,8544	10,7678
σ_3	0	0	0
σ_4	0	0	0
σ_5	0	0	0
σ_6	0	0	0
σ_7	0	0	0
σ_8	0	0	0

6.2. Gürültülü Sinyal Kaynakları Kullanılarak Sinyalin Tekil Değerlerinin Bulunması

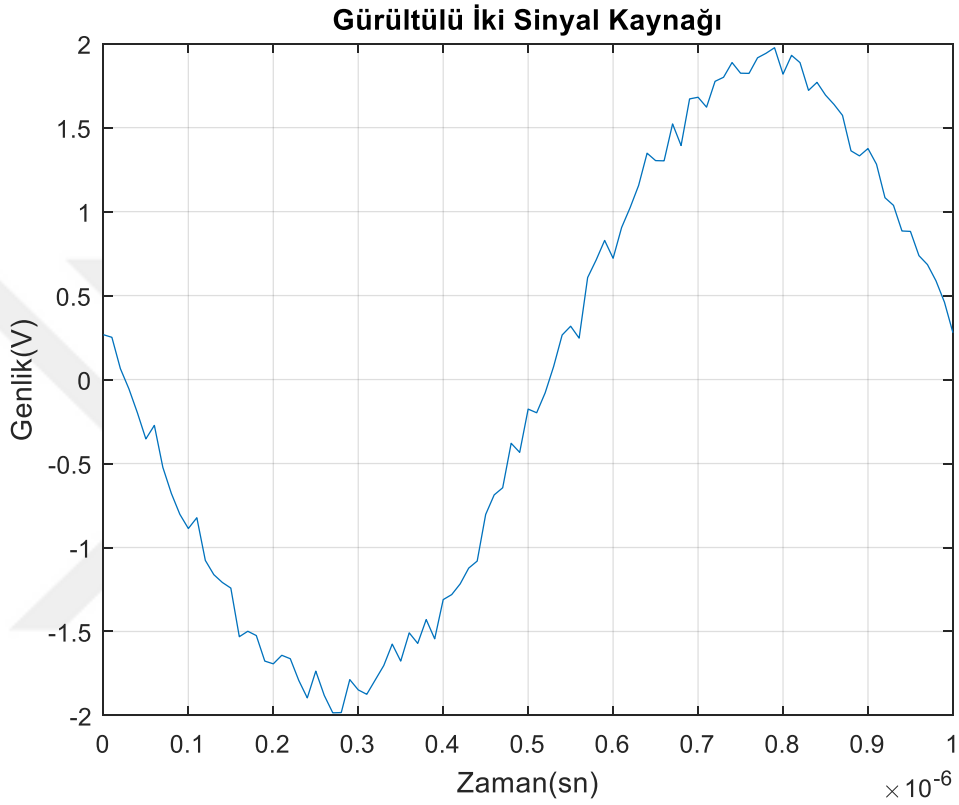
Gürültülü sinyallerin tekil değerlerinin bulunması için ilk olarak 8 elemanlı doğrusal anten dizisi ile gürültülü tek kaynak kullanılmıştır. Kaynaktan ışılan sinyalin frekansı 1MHz'dir. Doğrusal anten dizisindeki elemanlar arasındaki mesafe 50m olarak alınmıştır. Sinyalin örnekleme frekansı 100Hz'dir.

Kaynaktan gelen sinyalin geliş açısı 30^0 'dir. Sinyalin sinyal gürültü oranı (SNR), 25 dB alınmıştır. Anten dizisinin rastgele seçilen 5. dizi elemanına gelen sinyalin MATLAB simülasyonu Şekil 6.5'de verildiği gibidir.



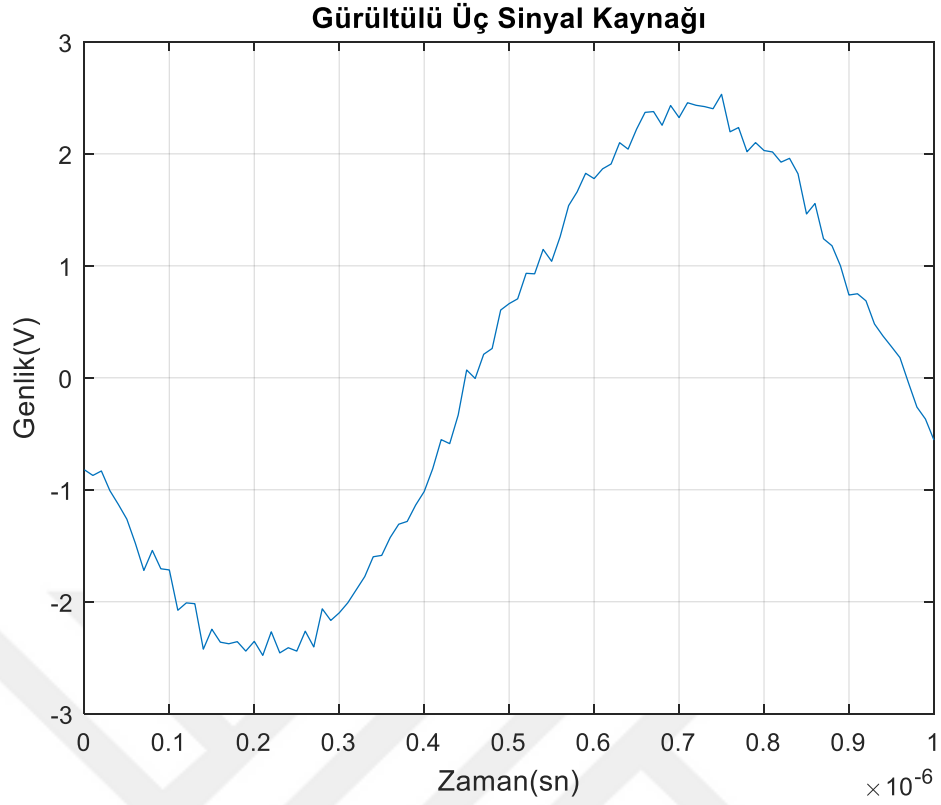
Şekil 6.5. Gürültülü tek sinyal kaynağından 5. dizi elemanına gelen sinyal

Kaynak sayısı ikiye çıkarılarak ikinci kaynağın geliş açısı 45^0 olarak ayarlanmıştır. Her iki kaynağın da sinyal gürültü oranı 25 dB olarak alınmıştır. Doğrusal anten dizisinin 5. elemanına gelen sinyallerin MATLAB simülasyonu Şekil 6.6'da gösterildiği gibidir.



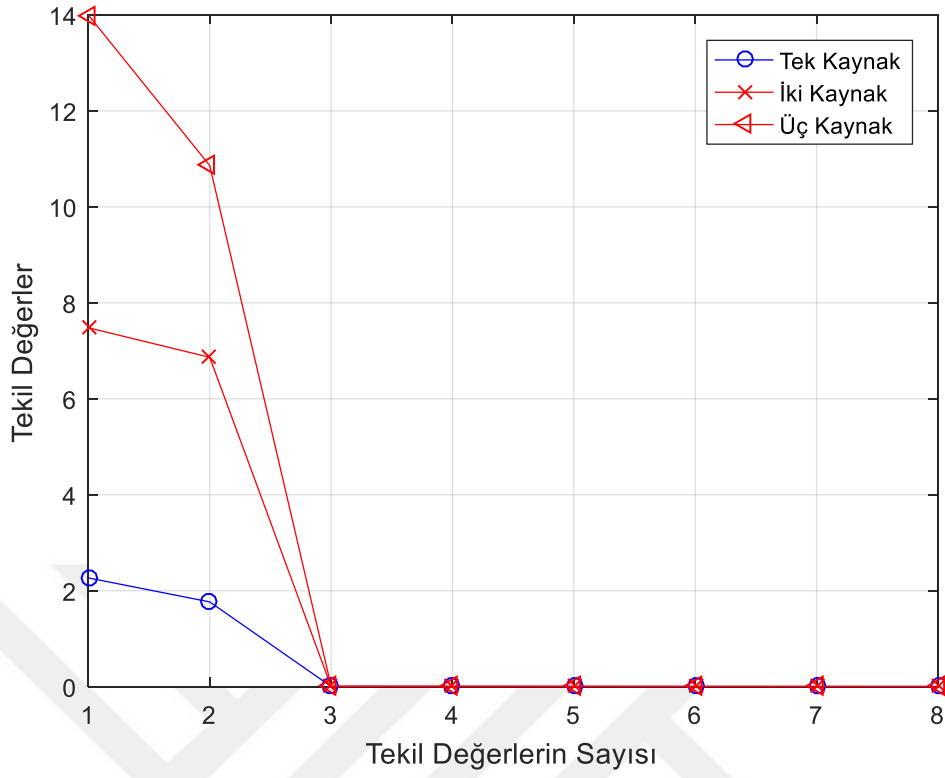
Şekil 6.6. Gürültülü iki sinyal kaynağından 5. dizi elemanına gelen sinyal

Kaynak sayısı üçe çıkarılarak üçüncü kaynağın geliş açısı 60^0 olarak ayarlanmıştır. Her üç kaynağın da sinyal gürültü oranı 25 dB olarak alınmıştır. Doğrusal anten dizisinin 5. elemanına gelen sinyallerin MATLAB simülasyonu Şekil 6.7'da gösterildiği gibidir.



Şekil 6.7. Gürültülü üç sinyal kaynağından 5. dizi elemanına gelen sinyal

Üç farklı kaynaktan gelen gürültülü sinyallerin yukarıda gösterildiği gibi modellenmesi yapıldıktan sonra özilinti matrisleri oluşturulmuştur. Her üç durum için de sinyallere Tekil Değer Ayrışımı yöntemi uygulanarak tekil değerler elde edilmiştir. Gürültülü kaynaklar ve 8 elemanlı doğrusal anten dizisine ait sistemin tekil değerleri Şekil 6.8’de gösterildiği gibidir. Çizelge 6.2’de değerler ayrıntılı olarak görülebilir.



Şekil 6.8. Gürültülü sinyallerin tekil değerlerinin grafiksel gösterimi

Çizelge 6.2. Gürültülü sinyallerin tekil değerleri

Tekil Değerler			
σ_n	Tek Kaynak	İki Kaynak	Üç Kaynak
σ_1	2,2665	7,4797	13,9953
σ_2	1,7662	6,8635	10,8595
σ_3	0,0038	0,0026	0,0119
σ_4	0,0031	0,0023	0,0115
σ_5	0,0030	0,0021	0,0094
σ_6	0,0027	0,0019	0,0076
σ_7	0,0025	0,0016	0,0068
σ_8	0,0023	0,0013	0,0054

6.3. Farklı Sinyal Gürültü Oranı İçeren Sinyal Kaynakları Kullanılarak Tekil Değerlerin Bulunması

İlk olarak tek sinyal kaynağının geliş açısı değiştirilmeden sinyal gürültü oranı 10 dB olarak ayarlanmıştır. Daha sonra sinyal gürültü oranı artırılarak 20 dB ve 30 dB yapılmıştır. Özilinti matrisi elde edildikten sonra Tekil Değer Ayrışımı uygulanarak sinyalin tekil değerleri bulunmuştur. Çizelge 6.3'de elde edilen tekil değerler verilmiştir.

Çizelge 6.3. Tek kaynağın farklı sinyal gürültü oranları için elde edilen tekil değerleri

Tekil Değerler			
σ_n	10 dB	20 dB	30 dB
σ_1	2,3459	2,2648	2,1960
σ_2	1,9837	1,8394	1,7519
σ_3	0,1291	0,0891	0,0015
σ_4	0,0931	0,0138	0,0011
σ_5	0,0870	0,0108	0,0009
σ_6	0,0720	0,0094	0,0008
σ_7	0,0590	0,0073	0,0008
σ_8	0,0218	0,0062	0,0007

Daha sonra sinyal geliş açısı 45° olan ikinci bir sinyal kaynağı eklenmiştir. Her iki kaynağın da ilk olarak sinyal gürültü oranı 10 dB olarak ayarlanıp ardından 20 dB ve 30 dB yapılmıştır. Özilinti matrisi elde edildikten sonra Tekil Değer Ayrışımı uygulanarak sinyalin tekil değerleri bulunmuştur. Çizelge 6.4'de elde edilen tekil değerler verilmiştir.

Çizelge 6.4. İki kaynağın farklı sinyal gürültü oranları için elde edilen tekil değerleri

Tekil Değerler			
σ_n	10 dB	20 dB	30 dB
σ_1	8,1039	7,5896	7,4282
σ_2	6,7491	6,8442	6,8005
σ_3	0,3065	0,0259	0,0025
σ_4	0,2372	0,0231	0,0021
σ_5	0,1953	0,0199	0,0020
σ_6	0,1754	0,0170	0,0020
σ_7	0,1668	0,0149	0,0018
σ_8	0,1571	0,0136	0,0014

Son olarak sinyal geliş açısı 60° olan üçüncü bir sinyal kaynağı eklenmiştir. Her üç kaynağın da ilk olarak sinyal gürültü oranı 10 dB olarak ayarlanıp ardından 20 dB ve 30 dB yapılmıştır. Özilinti matrisi elde edildikten sonra Tekil Değer Ayrışımı uygulanarak sinyalin tekil değerleri bulunmuştur. Çizelge 6.4’de elde edilen tekil değerler verilmiştir.

Çizelge 6.5. Üç kaynağın farklı sinyal gürültü oranları için elde edilen tekil değerleri

Tekil Değerler			
σ_n	10 dB	20 dB	30 dB
σ_1	14,9203	14,1521	14,0310
σ_2	11,5668	10,7814	10,7720
σ_3	0,4525	0,0433	0,0040
σ_4	0,3446	0,0363	0,0033
σ_5	0,2836	0,0326	0,0031
σ_6	0,2448	0,0264	0,0022
σ_7	0,1987	0,0225	0,0020
σ_8	0,1460	0,0169	0,0019

6.4. Gürültüsüz Sinyal Kaynakları Kullanılarak Matris Kalem Yöntemiyle Sinyalin Yönünün Bulunması

Gürültüsüz sinyal kaynağından gelen sinyalin yönünün Matris Kalem yöntemiyle bulunabilmesi için öncelikle L kalem parametresinin belirlenmesi gerekir. Algoritmanın en iyi sonucu verebilmesi için L değeri $N/2$ ile $N/3$ arasında seçilmelidir. Bu tez çalışmasında L değeri 4 olarak belirlenmiştir. Sisteme ait Hankel matrisi ve iki alt matris oluşturulmuştur. Eşitlik 5.18’de verilen denklemden özdeğerler elde edildikten sonra Eşitlik 5.19’da verilen formül yardımıyla sinyalin geliş yönü tahmin edilmiştir.

İlk olarak gürültüsüz tek sinyal kaynağı kullanılmış ve geliş açısı 30^0 ’den başlanarak 85^0 ’ye kadar çeşitli açılarda ayarlanmıştır. Sonra sinyal kaynağı sayısı artırılarak bir sinyal kaynağı daha eklenmiştir. MATLAB simülasyon sonucunda elde edilen yön verileri Çizelge 6.6’da verilmiştir.

Çizelge 6.6. Matris Kalem yöntemiyle bulunan gürültüsüz sinyal kaynaklarının yön verileri

Kaynağın Yönü		Matris Kalem ile Tahmin Edilen Yön	
1.Kaynak	2.Kaynak	1.Kaynak	2.Kaynak
30 ⁰	85 ⁰	29,9970 ⁰	84,9998 ⁰
45 ⁰	75 ⁰	44,9983 ⁰	74,9995 ⁰
55 ⁰	65 ⁰	54,9988 ⁰	64,9992 ⁰
65 ⁰	55 ⁰	64,9992 ⁰	54,9988 ⁰
75 ⁰	45 ⁰	74,9995 ⁰	44,9983 ⁰
85 ⁰	30 ⁰	84,9998 ⁰	29,9970 ⁰

6.4. Gürültülü Sinyal Kaynakları Kullanılarak Matris Kalem Yöntemiyle Sinyalin Yönünün Bulunması

Gürültülü sinyal kaynağından gelen sinyalin yönünün Matris Kalem yöntemiyle bulunabilmesi için ilk olarak Tekil Değer Ayırımı yöntemiyle gürültünün filtrelenmesi gerekir. Filtrelenen sinyale Matris Kalem yöntemi uygulanabilir. Yine öncelikle L kalem parametresinin belirlenmesi gerekir. Algoritmanın en iyi sonucu verebilmesi için L değeri $N/2$ ile $N/3$ arasında seçilmelidir. Gürültülü sinyallerin analizinde de L değeri 4 olarak belirlenmiştir. Sisteme ait Hankel matrisi ve iki alt matris oluşturulmuştur. Eşitlik 5.27’de verilen denklemden özdeğerler elde edildikten sonra yine Eşitlik 5.19’da verilen formül yardımıyla sinyalin geliş yönü tahmin edilmiştir.

Burada tek sinyal kaynağı kullanılmıştır. Öncelikle kaynağın yönü değiştirilmeden 30⁰’ye ayarlanmış ve sinyal gürültü oranı 10 dB ile 35 dB arasında değiştirilmiştir. MATLAB simülasyon sonucunda elde edilen yön verileri Çizelge 6.7’de verilmiştir.

Çizelge 6.7. Matris Kalem yöntemiyle bulunan farklı sinyal gürültü oranına sahip sinyal kaynaklarının yön verileri

Kaynağın Yönü	SNR	Matris Kalem ile Tahmin Edilen Yön
30°	10	29,9585°
	20	31,1899°
	25	30,4395°
	30	30,0782°
	35	30,6471°

Daha sonra sinyal kaynağının açısı 45° ile 85° arasında değiştirilerek 10 dB ve 30 dB sinyal gürültü oranı için yön tahmini yapılmıştır. MATLAB simülasyon sonucunda elde edilen yön verileri Çizelge 6.8’de verilmiştir.

Çizelge 6.8. Matris Kalem yöntemiyle bulunan farklı geliş açlarına sahip gürültülü sinyal kaynaklarının yön verileri

Kaynağın Yönü	SNR	Matris Kalem ile Tahmin Edilen Yön
45°	10	46,0161°
55°		55,7930°
65°		64,8528°
75°		76,9522°
85°		87,0050°
45°	30	45,0649°
55°		54,9217°
65°		64,9531°
75°		75,0911°
85°		84,1284°

7. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bir anten dizisine gelen sinyalin yönünü bulmak için sinyalin analizinin yapılması gerekir. Analiz sonucunda elde edilen verilerden, uygun algoritmalar kullanılarak yön bilgisine ulaşılır. Bu tez çalışmasında, bir anten dizisine gelen sinyalin yönünü bulmak için Tekil Değer Ayırımı ve Matris Kalem yöntemi kullanılmıştır. Bir veya birden fazla kaynaktan gelen sinyalin gürültülü olup olmamasına göre analizle elde edilen birçok durum değerlendirilip ve karşılaştırılmıştır.

İlk olarak frekansı 1MHz olan gürültüsüz ve anten dizisine göre geliş açıları 30^0 , 45^0 , 60^0 olan üç kaynak kullanılmıştır. Bu kaynaklardan gelen sinyallerin, anten dizisinde rastgele seçilmiş 5. dizi elemanı üzerindeki analizleri yapılmıştır. Çizelge 6.1'deki sonuçlar, anten dizisine ışına yapan sinyal kaynağı sayısının artmasıyla sistemin tekil değerlerinin de arttığını göstermiştir. Gürültüsüz kaynak kullanılması nedeniyle, sinyal alt uzayına ait tekil değerler sıfırdan farklı bulunurken, gürültü alt uzayına ait tekil değerler ise sıfır olarak bulunmuştur. O halde bir anten dizisine gelen kaynağı belirsiz sinyalin gürültü içermediği bu yöntem ile belirlenmiştir.

Gürültülü sinyal kaynaklarından gelen sinyalin tekil değerleri bulunurken yine frekansı 1MHz, sinyal gürültü oranı 25dB ve anten dizisine göre geliş açıları 30^0 , 45^0 , 60^0 olan üç kaynak kullanılmıştır. Bu kaynaklardan gelen sinyallerin, anten dizisinde rastgele seçilmiş 5. dizi elemanı üzerindeki analizleri yapılmıştır. Çizelge 6.2'deki sonuçlar, anten dizisine ışına yapan sinyal kaynağı sayısının artmasıyla sistemin tekil değerlerinin de arttığını göstermiştir. Ayrıca gürültüsüz sinyal kaynakları ile karşılaştırıldığında, gürültülü sinyal kaynaklarından gelen sinyallerin hem sinyal alt uzayına hem de gürültü alt uzayına ait tekil değerlerinin sıfırdan farklı olduğu görülmüştür. Bu sonuçlar ile bir anten dizisine gelen kaynağı belirsiz sinyalin gürültü içerdiği belirlenmiştir.

Farklı sinyal gürültü oranı içeren sinyal kaynakları kullanılarak tekil değerleri bulmak için anten dizisine göre geliş açısı 30^0 olan kaynağa 10dB, 20dB ve 30dB sinyal gürültü oranına sahip sinyaller gönderilmiştir. Daha sonra sinyal geliş açısı 45^0 olan

ikinci bir sinyal kaynağı eklenmiştir. Her iki kaynağın da ilk olarak sinyal gürültü oranı 10 dB olarak ayarlanıp ardından 20 dB ve 30 dB yapılmıştır. Bu sinyallerin özilinti matrisi elde edildikten sonra Tekil Değer Ayrışımı uygulanarak sinyalin tekil değerleri bulunmuştur. Son olarak sinyal geliş açısı 60^0 olan üçüncü bir sinyal kaynağı eklenmiştir. Her üç kaynağın da ilk olarak sinyal gürültü oranı 10 dB olarak ayarlanıp ardından 20 dB ve 30 dB yapılmıştır. Yine özilinti matrisi elde edildikten sonra Tekil Değer Ayrışımı uygulanarak sinyalin tekil değerleri bulunmuştur. Çizelge 6.3, Çizelge 6.4 ve Çizelge 6.5'deki sonuçlar, kaynaktan gelen sinyalin sinyal gürültü oranının artmasıyla sistemin tekil değerlerinin azaldığını göstermiştir. Ayrıca anten dizisine ışına yapan sinyal kaynağı sayısı arttıkça sistemin tekil değerlerinin de arttığı görülmüştür.

Gürültüsüz sinyal kaynağı kullanılarak Matris Kalem yöntemiyle sinyalin yönünü bulmak için L kalem parametresi 4 olarak belirlenmiştir. Bir adet Hankel matrisi ve bu matristen iki alt matris oluşturulmuştur. Bu matrisler kullanılarak Eşitlik 5.18'de verilen denklemden özdeğerler elde edildikten sonra Eşitlik 5.19'da verilen formülle sinyalin geliş yönü bulunmuştur. Gürültüsüz tek sinyal kaynağı kullanılarak geliş açısı 30^0 'den başlayarak 85^0 'ye kadar çeşitli açılarda ayarlanmıştır. Sinyal kaynağı sayısı artırılarak bir sinyal kaynağı daha eklenmiştir. Çizelge 6.6'daki sonuçlar, kaynaklardan anten dizisine gelen gürültüsüz sinyallerin açılarının gerçeğe oldukça yakın değerlerle tahmin edildiğini göstermiştir.

Gürültülü sinyal kaynağı kullanılarak Matris Kalem yöntemiyle sinyalin yönünü bulmak için bu simülasyonda tek sinyal kaynağı kullanılmıştır. Öncelikle kaynağın yönü değiştirilmeden 30^0 'ye ayarlanmış ve sinyal gürültü oranı 10 dB ile 35 dB arasında değiştirilmiştir. L kalem parametresi yine 4 olarak belirlenmiştir. Tekil Değer Ayrışımı uygulandıktan sonra M değerini belirlemek için Eşitlik 5.23 kullanılmıştır. Bu tez çalışmasında M değeri 2 olarak alınmıştır. Bu iki tekil değerlerin ötesindeki tüm tekil değerler, sinyalin gürültü alt uzayını göstermektedir ve ilk iki tekil değere oranla oldukça küçük değerdedir. Çizelge 6.7'de görüldüğü gibi anten dizisine gelen farklı gürültü oranlarına sahip sinyallerin açıları gerçeğe oldukça yakın değerlerle tahmin edilmiştir. Ayrıca elde edilen sonuçlar, sinyalin 30 dB sinyal gürültü oranına sahip

olması durumunda Matris Kalem yöntemiyle gerçeğe en yakın açı tahmini yapıldığını da göstermiştir.

Son olarak, sinyal kaynağının açısı 45^0 ile 85^0 arasında değiştirilerek 10 dB ve 30 dB sinyal gürültü oranı için yön tahmini yapılmıştır. Böylece hem sinyalin geliş açısı hem de sinyal gürültü oranları değiştirilmiştir. Çizelge 6.8'deki sonuçlar, bu anten dizisine gelen farklı açılara sahip sinyal kaynaklarının sinyal gürültü oranı, 30 dB değerine yaklaştığında gerçek açı değerine en yakın açı tahmini yapıldığını göstermiştir.

Bu tez çalışmasının sonuçlarına göre, kaynağı belirsiz bir veya birden fazla sinyalin Tekil Değer Ayrışımı ve Matris Kalem yöntemiyle analizi yapılarak yönünün bulunabileceği görülmektedir. Bu yöntemler sayesinde sinyallere gürültü filtresi uygulanarak sinyalden gerekli veriler elde edilip hem askeri hem de sivil uygulamalarda kullanılabilir. Kaynağı belirsiz tüm sinyal kaynaklarından anten dizilerine gelen sinyallerin kaynak sayısından bağımsız olarak geliş açılarının bulunması için algoritmaların geliştirilmesi ise bu çalışmanın devamı olarak önerilmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] Schmidt, R. O., Multiple emitter location and signal parameter estimation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 34 (3): 276 - 280, 1986.
- [2] Alıcıoğlu, B., Alınan işaretin yönünü bulma. Yüksek Lisans Tezi. Hacettepe Üniversitesi, Ankara, 2003.
- [3] Chen, J.C., Yao, K., Hudson, R.E., Source localization and beamforming. *IEEE Signal Processing Magazine*. 19 (2): 30 - 39, 2002.
- [4] Saraç, U., Harmancı, F.K., Akgül, T., Telsiz vericilerinin çoklu yansımali ortamlarda sayısının ve yerlerinin tespit edilmesi. 14. IEEE Sinyal İşleme ve Uygulama Kurultayı. 14 (1): 17-19, 2006.
- [5] Yong, G., Ci, X., Zong, Z., Erasing false-location of two stations direction-finding cross location in multi-path and multiple sources environments. *Radar, CIE International Conference on Proceedings*, 2001.
- [6] Gething, P., High-frequency direction finding. *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*. 113 (1): 49-61, 1966.
- [7] Lipsky, S. E., *Microwave passive direction finding*, Wiley Interscience Publication, 1988.
- [8] Haykin S., *Advances in spectrum analysis and array processing*. Prentice-Hall Signal Processing Series, 1991.
- [9] Capon J., High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis. *Proceedings of the IEEE*. 57 (8): 1408-1418, 1969.
- [10] Burg, J. P., Maximum entropy spectral analysis. *Proc. of the 37.th Meeting of the Society of Exploration Geophysicists*, 1967.
- [11] Pisarenko, V. F., The retrieval of harmonics from a covariance function. *Geophysical Journal International*. 33 (3): 347-366, 1973.
- [12] Schmidt, R. O., Multiple source DF signal processing: an experimental system. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 34 (3): 281-290, 1986.
- [13] T. K. R. Roy, R., Kailath, T., ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. 37 (7): 984-995, 1989.

- [14] Sibul, L., Application of singular value decomposition to adaptive beamforming. Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE International Conference on ICASSP. USA, 1984.
- [15] Hua, Y., Sarkar, T., K., Matrix Pencil method for estimating parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise. IEEE Transactions Acoust. Speech, Signal Process. 38 (1): 814-824, 1990.
- [16] Sarkar, T., K., Pereira, O., Using the matrix pencil method to estimate the parameters of a sum of complex exponentials. IEEE Antennas and Propagation Magazine. 37 (1): 48-55, 1995.
- [17] Yang, H., Ingram, M., A., Design of partially adaptive arrays using the singular-value decomposition. IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 45 (5): 843-850, 1997.
- [18] Sarkar, T., K., Yilmazer, N., Salazar-Palma, M., DOA Estimation using Matrix Pencil and ESPRIT methods using single and multiple snapshots. Electromagnetic Theory (EMTS), URSI International Symposium. Berlin, Germany, 2010.
- [19] Ihedrane, M., Matrix Pencil for direction of arrival using smart antenna. International Journal of Engineering and Technology (IJET), 2017.
- [20] Cheng, D. K., Fundamentals of engineering electromagnetics. USA, Addison Wesley Publishing Company , 1994.
- [21] Balanis, C. A., Antenna theory analysis and design. USA, John Wiley & Sons Publication, 1997.
- [22] Balanis, C. A., Ioannides, P. I., Introduction to smart antennas. USA, Morgan & Claypool Publishers, 2007.
- [23] Moernaut, G., Orban, D., The basics of antenna arrays. Orban Microwave Products. www.orbanmicrowave.com.
- [24] Golub, G. H., Van Loan, C. F., Matrix computations. The Johns Hopkins University Press, 1996.
- [25] Vaccaro, R. J., SVD and signal processing, II : algorithms, analysis, and applications. New York, Elsevier Science Pub. Co., 1991.
- [26] Elma, İ., Anten dizileri kullanarak sinyal kaynaklarının tespiti. Yüksek Lisans Tezi. Zonguldak Karaelmas Üniversitesi, Zonguldak, 2007.
- [27] Orul, T., Akıllı anten sistemleri için işaret geliş açısı kestirim yöntemleri, Yüksek Lisans Tezi. Gazi Üniversitesi, Ankara, 2012.

- [28] Kutay, F., Kısa dalga linkerinde MUSIC Algoritması kullanılarak sinyallerin geliş yönlerinin belirlenmesi. Yüksek Lisans Tezi. Gazi Üniversitesi, Ankara, 2011.
- [29] Sarkar, T. K., Wicks, M. C., Salazar-Palma, M., Smart antennas. John Willey & IEEE Press, 2003.
- [30] Wax, M., Detection and estimation of superimposed signals. Stanford, California, Ph.D. Dissertation Stanford Univ., 1985.

