KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

4-BOYUTLU 2-İNDEKSLİ YARI-ÖKLİDYEN UZAYDA GENELLEŞTİRİLMİŞ NULL MANNHEIM EĞRİLER

Nihal KILIÇ ASLAN

OCAK 2021

Matematik Anabilim Dalında Nihal KILIÇ ASLAN tarafından hazırlanan 4-BOYUTLU 2-İNDEKSLİ YARI-ÖKLİDYEN UZAYDA GENELLEŞTİRİLMİŞ NULL MANNHEIM EĞRİLER adlı Doktora Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Ali OLGUN

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Doktora Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Kazım İLARSLAN

Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan	: Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN	_______________
Üye (Danışman)	: Prof. Dr. Kazım İLARSLAN	_______________
Üye	: Prof. Dr. Levent KULA	_______________
Üye	: Prof. Dr. Mehmet YILDIRIM	_______________
Üye	: Prof. Dr. İsmail GÖK	_______________

25/01/2021

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Doktora derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Recep ÇALIN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Oğluma ve kızıma…

ÖZET

4-BOYUTLU 2-İNDEKSLİ YARI-ÖKLİDYEN UZAYDA GENELLEŞTİRİLMİŞ NULL MANNHEIM EĞRİLER

KILIÇ ASLAN, Nihal
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı, Doktora Tezi
Danışman: Prof. Dr. Kazım İLARSLAN
Ocak 2021, 68 sayfa

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde tezde gerekli olan kavramlar ve tanımlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, 4-boyutlu 2-indeksli yarı-Öklidyen uzayda genelleştirilmiş null Mannheim eğrileri ile bu eğrilerin genelleştirilmiş Mannheim partner eğrilerinin Frenet çatıları ve eğrilik fonksiyonları arasındaki ilişkiler elde edilmiş ve bu eğriler ile ilgili örnekler şekilleri ile birlikte verilmiştir. Dördüncü bölümde, 4-boyutlu 2-indeksli yarı-Öklidyen uzayda genelleştirilmiş partially null Mannheim eğrilerin karakterizasyonları elde edilmiştir. Beşinci bölümde ise 4-boyutlu 2-indeksli yarı-Öklidyen uzayda genelleştirilmiş pseudo null Mannheim eğrilerin karakterizasyonları elde edilmiştir. Altıncı bölüm ise tartışma ve sonuç için ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Yarı-Öklidyen uzay, null eğri, partially null eğri, pseudo null eğri, spacelike düzlem, timelike düzlem, lightlike düzlem.

ABSTRACT

GENERALIZED NULL MANNHEIM CURVES IN SEMI-EUCLIDEAN 4-SPACE WITH INDEX 2

KILIÇ ASLAN, Nihal

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, Doctoral Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Kazım İLARSLAN

January 2021, 68 pages

This thesis consists of six chapters. The first chapter is devoted to the introduction. The second chapter contains concepts and definitions which are needed throughout the thesis. In the third chapter, the relations between the curvature functions and the frames of the generalized null Mannheim curves and generalized Mannheim partner curves of theirs are obtained and the examples of such curves are given with their projected images. In the fourth chapter Frenet frame and Frenet equations of generalized partially null Mannheim curves are obtained in semi-Euclidean 4-space with index 2. In the fifth chapter, characterizations of generalized pseudo null Mannheim curves are given in semi-Euclidean 4-space with index 2. The sixth chapter is devoted to the discussion and conclusion.

Key Words: Semi-Euclidean space, null curves, partially null curves, pseudo null curves, spacelike plane, timelike plane, lightlike plane.

TEŞEKKÜR

Doktora tez konumun belirlenmesinden, tezin yazım aşamasına kadar her türlü desteğini esirgemeyen, bilgi ve tecrübesi ile zaman ayırıp, doktora eğitimimi tamamlamamda rehberliği ile ışık tutan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Kazım İLARSLAN’a teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca doktora eğitimim boyunca bana her türlü desteği veren sevgili aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_0$	Sıfırdan farklı reel sayılar
$\mathbb{R}^+$	Pozitif reel sayılar
$\mathbb{E}^3$	3-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{E}^4$	4-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{E}^4_1$	4-boyutlu Minkowski uzayı (Minkowski uzay-zaman)
$\mathbb{E}^4_2$	4-boyutlu 2-indeksli yarı-Öklidyen uzay
g	Simetrik bilineer form
$\|\|,\|\|$	Norm fonksiyonu
$\langle\ ,\ \rangle$	İç çarpım fonksiyonu
k_i	Ana eğrinin $i-$yinci eğrilik fonksiyonu
k_i^*	Eşlenik eğrisinin $i-$yinci eğrilik fonksiyonu
T	Eğrinin teğet vektörü
N	Eğrinin asli normal vektörü
B_1	Eğrinin birinci binormal vektörü
B_2	Eğrinin ikinci binormal vektörü
T^*	Eşlenik eğrisinin teğet vektörü
N^*	Eşlenik eğrisinin asli normal vektörü
B_1^*	Eşlenik eğrisinin birinci binormal vektörü
B_2^*	Eşlenik eğrisinin ikinci binormal vektörü

1. GİRİŞ

Diferensiyel geometrinin önemli bir çalışma alanı olan eğrilerin geometrisi, 17. yüzyılda diferensiyel hesabın gelişmesiyle birlikte bilim insanları tarafından yoğun bir şekilde çalışılmaya başlanmıştır. Descartes (1596-1650) tarafından koordinat geometrinin (analitik geometri) inşası ile düzlemde bazı eğriler (spiral eğriler gibi) daha detaylı çalışılmıştır. Leibniz (1646-1716) tarafından 1686 yılında ilk olarak bir eğrinin bir noktasındaki eğriliği, eğrilik çemberleri (osculating circle) yardımıyla tanımlanmış ve bir eğrinin eğriliğinin $\kappa = \frac{1}{r}$ (r eğrilik çemberinin yarıçapı olup $r \in \mathbb{R}^+$ dır) olduğu gösterilmiştir. Öklid uzayında sabit eğrilikli eğrilerin doğrular, çemberler, helisler (dairesel helisler) olduğu bilinmektedir.

Eğrilik kavramı, diferensiyel hesap yardımıyla Newton (1642-1727) tarafından hesaplanmıştır. Uzay eğrilerinin eğriliklerinin bulunmasını sağlayan formül 18. yüzyılda Euler (1707-1783) tarafından verilmiştir.Uzay eğrilerinin diferensiyel geometrisinde önemli bir gelişme ise Frenet-Serret denklemlerinin elde edilmesidir. Bu denklemlerde eğrinin teğet (T), asli normal (N) ve binormal (B) vektörlerinin türevlerini; kendileri, eğrilik (κ) ve burulma (τ) fonksiyonları cinsinden ifade edilmektedir. Günümüzde bu denklemler Frenet denklemleri olarak bilinmektedir ([1]). Uzay eğrilerinin Frenet vektörleri arasındaki ilişkilerin incelenmesi, eğrilerin sınıflandırılmasında büyük bir öneme sahiptir. Bu sınıflandırmada öne çıkan eğri örneklerinden birisi Bertrand eğrileridir. 1845 yılında Venant tarafından ortaya konulan bir eğrinin asli normal vektör alanının bir başka eğrinin asli normal vektör alanı olup olamayacağı problemi 1850 yılında J. Bertrand tarafından yayınlanan bir makalede cevaplandırılmıştır ([2]). Böyle bir ikinci eğrinin var olması için gerek ve yeter şart verilen eğrinin eğriliklerinin ve sıfırdan farklı λ ve μ sabitlerinin $\lambda\kappa + \mu\tau = 1$ denklemini sağlamasıdır. Bu tarihten itibaren bu şartı sağlayan eğriye Bertrand eğrisi ve ikinci eğriye de bu eğrinin Bertrand eşlenik eğrisi adı verilmiştir ([3]).

Bir diğer önemli eğri örneğimiz Mannheim eğrilerdir. Diferensiyel geometride Bertrand eğri çiftinin karakterizasyonu iyi bilinirken, Mannheim eğri çifti üzerine nispeten daha az çalışma bulunmaktadır. 3-boyutlu Öklid uzayında Mannheim eğri kavramı Mannheim (1831-1906) tarafından çalışılmış ve bu eğrilere 'Mannheim eğri' adı Wölffing (1899) tarafından verilmiştir. Mannheim eğri tanımı 1878 yılında şu şekilde verilmiştir: $\mathbb{E}^3$, $\langle , \rangle$ standart iç çarpımı ile verilen üç boyutlu Öklid uzayı olsun. Bu uzayda bulunan bir α uzay eğrisinin asli normal doğrusu ile α^* eğrisinin binormal doğrusu lineer bağımlı ise α eğrisi bir Mannheim eğrisi, α^* eğrisi de α eğrisinin Mannheim eşlenik eğrisi ve (α, α^*) da Mannheim eğri çiftidir ([4]).

$\mathbb{E}^3$ uzayında yapılan bir diğer önemli çalışmayı 1960 yılında Eisenheart, Mannheim eğrinin parametrik denklemini vererek yapmıştır: Bir C eğrisi

$$X(u) = \left(\lambda \int h(u) \sin u \; du, \lambda \int h(u) \cos u \; du, \lambda \int h(u) \; g(u) \; du\right),$$

$u \in U \subset \mathbb{R}$ ile tanımlansın. Burada λ pozitif sabit sayı, $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesini göstermek üzere, $g : U \to \mathbb{R}$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon ve $h : U \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$h(u) = \frac{\left\{1 + (g(u))^2 + \left(g^{'}(u)\right)^2\right\}^3 + \left\{1 + (g(u))^2\right\}^3 \left\{g^{''}(u) + g(u)\right\}^2}{\left\{1 + (g(u))^2\right\}^{3/2} \left\{1 + (g(u))^2 + (g^{'}(u))^2\right\}^{5/2}}$$

denklemi ile verilir ve C eğrisinin eğriliği (κ) ve torsiyonu (τ), $\kappa = \lambda\left(\kappa^2 + \tau^2\right)$ denklemini sağlar ([5]). Matsuda ve Yorozu, Eisenheart'ın bu parametrik denklemini kullanarak 3-boyutlu Öklid uzayında aşağıdaki Mannheim eğri örneklerini vermişlerdir ([9]):

1) $g(u) = c$ (sabit) ise $h(u) = 1$ dir. Böylece C eğrisi bir dairesel helistir.

2) $g(u) = \tan u \left(-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}\right)$ ise α pozitif sabit sayı olmak üzere C Mannheim eğrisi

$$\begin{aligned} x(u) = \quad & (\alpha \int \frac{(5 + 3\cos^2 u) \cos u \sin u}{(1 + \cos^2 u)^{5/2}} du, \alpha \int \frac{(5 + 3\cos^2 u) \cos^2 u}{(1 + \cos^2 u)^{5/2}} du, \\ & \alpha \int \frac{(5 + 3\cos^2 u) \sin u}{(1 + \cos^2 u)^{5/2}} du) \end{aligned}$$

ile verilir.

3) $g(u) = \sinh u$ $(u \in \mathbb{R})$ ise α pozitif sabit sayı olmak üzere C Mannheim eğrisi

$$\begin{aligned} x(u) = \quad & (\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \int \frac{\left(1 + \cosh^2 u\right) \sin u}{\cosh^2 u} du, \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \int \frac{\left(1 + \cosh^2 u\right) \cos u}{\cosh^2 u} du, \\ & \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \int \frac{\left(1 + \cosh^2 u\right) \sinh u}{\cosh^2 u} du) \end{aligned}$$

ile verilir.

2008 yılında Liu ve Wang Mannheim eğri çiftlerini üç boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ ve üç boyutlu Minkowski uzayı $\mathbb{E}_1^3$ de çalışmışlar ve $\mathbb{E}^3$ uzayında şu önemli karakterizasyonu elde etmişlerdir: Bir α^* eğrisinin α nın Mannheim eşleniği olması için gerek ve yeter şart α^* eğrisinin eğriliği κ^*, burulması τ^* ve $\lambda \in \mathbb{R}_0$ olmak üzere aşağıdaki denklemi sağlamasıdır ([6]):

$$\tau' = \frac{\kappa^*}{\lambda}\left(1 + \lambda^2 \tau^{*2}\right).$$

Minkowski 3-uzayında null Mannheim eğrileri ilk olarak Öztekin ve Ergüt 2013 yılında çalışmıştır ([7]). 2014 yılında Grbovic, İlarslan ve Nesovic ise bu uzayda null Mannheim eğrilerin olmadığını, sadece pseudo null Mannheim eğrilerin varlığından söz edilebileceğini ortaya koymuşlardır ([8]). Ayrıca pseudo null Mannheim eğrilerin, eğri çifti pseudo null doğru olan, pseudo null doğru ve pseudo null çember olduğunu göstermişlerdir.

4-boyutlu Öklid uzayında yapılan çalışmalarda, 3-boyutlu uzayda olduğu gibi klasik anlamda bir Mannheim eğrinin olamayacağı Matsuda ve Yorozu tarafından 2009 yılında ispatlanmış ve genelleştirilmiş Mannheim eğri kavramı 4-boyutlu Öklid uzayında yine bu yazarlar tarafından şu şekilde tanımlanmıştır: α, $\mathbb{E}^4$ de özel bir Frenet eğrisi olsun. α eğrisinin her noktasındaki asli normal doğruları aynı uzayda bulunan başka bir özel Frenet eğrisi olan α^* eğrisinin φ dönüşümü altında karşılık gelen noktalarındaki birinci ve ikinci binormallerin gerdiği düzlemde yatıyorsa α eğrisine genelleştirilmiş Mannheim eğrisi adı verilir. Burada $\varphi : I \to I^*$ bir diffeomorfizmdir. α^* eğrisine α eğrisinin genelleştirilmiş Mannheim eşleniği adı verilir ([9]).

Minkowski uzay-zamanda ise ilk çalışma 2010 yılında Ersoy, Tosun ve Matsuda tarafından yapılmıştır ([10]). Bu uzayda genelleştirilmiş spacelike Mannheim eğriler, sadece null olmayan vektörler içeren Frenet çatısı ile karakterize edilmiştir. Devamında partially null Mannheim eğriler Grbovic ve Nesovic, spacelike ve timelike Mannheim eğriler ise Uçum, İlarslan ve Nesovic tarafından çalışılmıştır ([11-13]). 2016 yılında Grbovic, İlarslan ve Nesovic'in Minkowski uzay-zamanda null Mannheim eğriler ile ilgili çalışmasında Mannheim eğri çifti partially null veya pseudo null eğri olan null Mannheim eğri olmadığı ispatlanmıştır ([13]).

Doktora tezi olarak hazırladığımız bu çalışmamızda 4-boyutlu 2-indeksli yarı-Öklidyen uzay, $\mathbb{E}_2^4$ de genelleştirilmiş null Mannheim eğriler incelenmiştir. Bu eğriler ile genelleştirilmiş Mannheim eşlenik eğrileri arasında Frenet vektörleri ve eğrilik fonksiyonlarının sağlaması gerekli olan bağıntılar elde edilmiştir. İlgili örnekler inşaa edilerek verilen sonuçların doğruluğu pekiştirilmiştir. Örnek eğrilerin farklı 3-boyutlu alt uzaylara projeksiyonları alınarak Mathematica programı yardımıyla grafikleri çizilmiştir.

1.1. Kaynak Özetleri

Bu tez çalışmasında temel kavramlar için başlıca O'Neill (1983), Kuhnel (1999), Duggal ve Bejancu (1996) kitaplarının yanı sıra Mannheim eğriler için Grbovic, İlarslan ve Nesovic (2016) makalelerinden yararlanılmıştır. Diğer bölümlerde yukarıda ifade edilen çalışmaların yanı sıra referans listesinde adı geçen makaleler ve kitaplardan yararlanılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezde gerekli olan kavramlar ve tanımlar verilecektir.

Tanım 2.1. (Simetrik Bilineer Form) Bir reel vektör uzayı V için

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall u, v, w \in V$ için

i. $g(u, v) = g(v, u)$

ii. $g(au + bv, w) = ag(u, w) + bg(v, w)$

$g(u, av + bw) = ag(u, v) + bg(u, w)$

şartları sağlanıyorsa g dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde simetrik bilineer form denir ([17]).

Tanım 2.2. V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun.

(i) $0 \neq w \in V$ olmak üzere $\forall u \in V$ için

$$g(u, w) = 0$$

ise g ye V üzerinde dejeneredir denir. Aksi durumda g ye non-dejeneredir denir. Bu tanıma göre g nin non-dejenere olması için gerek ve yeter şart $\forall w \in V$ için

$$g(u, w) = 0 \text{ iken } u = 0$$

olmasıdır.

(ii) (Skalar çarpım) Non-dejenere simetrik bilineer form, skalar çarpım olarak adlandırılır.

(iii) Eğer her $0 \neq w \in V$ için $g(w, w) > 0$ ise g simetrik bilineer formu pozitif tanımlı, eğer her $0 \neq w \in V$ için $g(w, w) < 0$ ise g simetrik bilineer formu negatif tanımlıdır.

(iv) Eğer her $0 \neq w \in V$ için $g(w, w) \geq 0$ ise g simetrik bilineer formu yarı-pozitif tanımlı, eğer her $0 \neq w \in V$ için $g(w, w) \leq 0$ ise g simetrik bilineer formu yarı-negatif tanımlıdır.

(v) $g(v, v) > 0$ ve $g(w, w) < 0$ olacak biçimde $v, w \in V$ mevcut ise g ye indefinit denir ([18]).

Tanım 2.3. V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun. Bu durumda

$$g_W : W \times W \to \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna g nin indeksi denir ve q ile gösterilir. g skalar çarpımının indeksi, q ise $0 < q < boyV$ dir ([18]).

Tanım 2.4. V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun. V nin

$$RadV = \{\xi \in V : g(\xi, v) = 0, \forall v \in V\}$$

şeklinde tanımlı alt uzayına g ye göre V uzayının radikal (veya null) uzayı denir. $RadV$ nin boyutuna g nin nulluk derecesi denir ve $nullV$ ile gösterilir.

Eğer $nullV > 0$ ise g dejeneredir, eğer $nullV = 0$ ise non-dejeneredir ([18]).

Tanım 2.5. n-boyutlu q-indeksli yarı-Öklidyen uzay $\mathbb{R}^n_q$ uzayının bir dik koordinat sistemi $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ olmak üzere

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n-q} dx_i^2 - \sum_{i=n-q+1}^{n} dx_i^2$$

olarak tanımlanan non-dejenere metrik ile donatılmış n boyutlu Öklid uzayıdır. $\mathbb{R}^n_q$ uzayının skalar çarpımını $\langle\ ,\ \rangle$ ile gösterelim. Özel olarak $n = 4$ ve $q = 2$ alınırsa 4-boyutlu 2-indeksli yarı-Öklidyen uzay $\mathbb{E}^4_2$ elde edilir.

Tanım 2.6. $v \in \mathbb{E}^4_2 \backslash \{0\}$ olmak üzere, eğer

i. $\langle v, v\rangle > 0$ ise, v spacelike (uzaysı) vektör

ii. $\langle v, v\rangle < 0$ ise, v timelike (zamansı) vektör

iii. $\langle v, v\rangle = 0$ ise, v null veya lightlike (ışıksı) vektör

olarak adlandırılır ([18]).

Tanım 2.7. $v \in \mathbb{E}^4_2 \backslash \{0\}$ olmak üzere, $\mathbb{E}^4_2$ uzayında v vektörünün normu

$$||v|| = \sqrt{|\langle v, v\rangle|}$$

olarak tanımlanır. $||v|| = 1$ ise v vektörüne birim vektör denir. ([18])

Tanım 2.8. v, $w \in \mathbb{E}^4_2$ olmak üzere, v ve w vektörlerinin dik olması için gerek ve yeter şart $\langle v, w\rangle = 0$ olmasıdır ([18]).

Tanım 2.9. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_2^4$ bir eğri olsun. Eğer α eğrisinin $\forall s \in I$ için hız vektörü $\alpha'(s)$ sırasıyla spacelike, timelike veya null vektör ise α eğrisi sırasıyla spacelike, timelike veya null eğri olarak adlandırılır ([17]).

Özel olarak bir null eğri için $k_2 = 0$ ise null kübik eğri adı verilir. Ayrıca $\mathbb{E}_2^4$ de bir spacelike eğri veya timelike eğrinin asli normal vektör alanı N ve ikinci binormal vektör alanı B_2 null vektör alanları ise eğriye pseudo null eğri, birinci ve ikinci binormal vektör alanları B_1 ve B_2 null vektör alanları ise eğriye partially null eğri adı verilir. Null, pseudo null ve partially null eğriler için inşa edilecek olan Frenet çatıları ortonormal çatı olmayıp quasi-ortonormal çatıdır. [17,18]

Tanım 2.10. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_2^4$ bir eğri olsun.

i. α null bir eğri olmak üzere, eğer $\forall s \in I$ için $\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle = \pm 1$ şartı sağlanıyorsa α eğrisine pseudo yay parametresi ile parametrelendirilmiştir denir.

ii. α null olmayan bir eğri olmak üzere, eğer $\forall s \in I$ için $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = \pm 1$ şartı sağlanıyorsa α eğrisine yay uzunluğu parametresi ile parametrelendirilmiştir denir ([19]).

Genel olarak, bir eğrinin karakteri I nın bütün noktalarında aynı değildir. Yani α eğrisinin spacelike, timelike, lightlike olduğu noktalar olabilir. Bununla beraber α eğrisinin spacelike ve timelike olduğu noktalar arasında, lightlike olduğu bir nokta da vardır. Eğer α; bir $s_0 \in I$ noktasında spacelike ya da timelike ise α eğrisinin aynı karaktere sahip olduğu bir $(s_0 - \delta, s_0 + \delta)$ açık aralığı vardır.

Lemma 2.1. Her spacelike ya da timelike eğri yay parametresi ile parametrelendirilebilir. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_2^4$ eğrisi için bir $\varphi : J \to I$ diffeomorfizmi vardır öyle ki $\beta = \alpha o \varphi$ bir eğri olmak üzere her $s \in J$ için α spacelike ise $\left\langle \beta'(s), \beta'(s) \right\rangle = 1$, α timelike ise $\left\langle \beta'(s), \beta'(s) \right\rangle = -1$ dir.

M; bağlantılı bir yüzey ve $x : M \to \mathbb{E}_2^4$ bir immersiyon öyle ki T_pM, $p \in M$ noktasındaki teğet düzlem olmak üzere x in p noktasındaki diferensiyeli $(dx)_p : T_pM \to \mathbb{E}_2^4$ olsun. Bu durumda $(dx)_p T_pM$, $\mathbb{E}_2^4$ de $T_pM \equiv (dx)_p T_pM$ şeklinde bir düzlem olur.

$$g_p(u, v) = \langle dx_p(u), dx_p(v) \rangle$$

metriği için $x : (M, g_p) \to \mathbb{E}_2^4$, M nin bir izometrik immersiyonudur. Bununla beraber M ye x ile beraber $\mathbb{E}_2^4$ de bir yüzey denir ([36]).

Tanım 2.11. Bir $x : M \to \mathbb{E}^4_2$ immersiyonu için p noktasındaki birinci esas form $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ metriğidir. T_pM üzerindeki metrik üç şekilde olabilir:

(i) T_pM, spacelike bir düzlem ise g_p pozitif tanımlıdır.

(ii) T_pM, timelike bir düzlem ise g_p non-dejenere bir metriktir.

(iii) T_pM, lightlike bir düzlem ise g_p dejenere bir metriktir.

2.1. Frenet Denklemleri

Eğrilerin diferensiyel geometrisini çalışmak için Frenet denklemleri ve eğrilik fonksiyonlarının büyük önem arz ettiğini biliyoruz. Tezimizde kullanılacak olan Frenet denklemleri için kaynaklarımız ([22-25]) olacaktır. α eğrisinin nedensel (causal) karakterine göre Frenet denklemleri şu şekilde verilebilir:

1. α eğrisi null olmayan eğri ise;

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_2 k_1 & 0 & 0 \\ -\epsilon_1 k_1 & 0 & \epsilon_3 k_2 & 0 \\ 0 & -\epsilon_2 k_2 & 0 & \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 k_3 \\ 0 & 0 & -\epsilon_3 k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

ile verilir ([25]). Aynı zamanda hepsi 1 veya -1 olmamak şartı ile; $\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4 = 1$, $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanır:

$$\begin{gathered} g(T,T) = \epsilon_1, \quad g(N,N) = \epsilon_2, \quad g(B_1,B_1) = \epsilon_3, \quad g(B_2,B_2) = \epsilon_4 \\ g(T,N) = g(T,B_1) = g(T,B_2) = g(N,B_1) = g(N,B_2) = g(B_1,B_2) = 0. \end{gathered} \tag{2.2}$$

2. α eğrisi null Cartan eğri ise;

α, $\mathbb{E}^4_2$ de bir null eğri olsun ($g(T,T) = 0$). α eğrisi $s(t) = \displaystyle\int_0^t \sqrt{\|\alpha''(u)\|}du$ pseudo-yay fonksiyonu s ile parametrelendirilmiş ise α eğrisi null Cartan eğri olarak adlandırılır. Bu durumda geodezik olmayan ($k_1(s) \neq 0$) null Cartan eğrisi boyunca bir tek Cartan çatısı $\{T, N, B_1, B_2\}$ vardır ve aşağıdaki denklemleri sağlarlar ([23,24]):

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -\epsilon_1 k_2 & 0 & -\epsilon_1 k_1 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & k_3 \\ -\epsilon_2 k_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Burada birinci Cartan eğrilik fonksiyonu $k_1(s) = 1$, ($k_1(s) = 0$ ise eğri bir doğrudur), ikinci ve üçüncü Cartan eğrilik fonksiyonları $k_2(s)$, $k_3(s)$ pseudo-yay parametresi s nin fonksiyonlarıdır. Eğer $k_2(s) = 0$ ise null Cartan eğrisi null kübik (null cubic) eğri olarak adlandırılır. Cartan çatısını oluşturan vektörler arasında $\epsilon_1\epsilon_2 = -1$ olmak üzere aşağıdaki ilişkiler vardır:

$$\begin{gathered} g(N,N) = \epsilon_1, \quad g(B_2,B_2) = \epsilon_2, \quad g(T,T) = g(B_1,B_1) = 0, \\ g(T,N) = g(T,B_2) = g(N,B_1) = g(N,B_2) = g(B_1,B_2) = 0, \\ g(T,B_1) = 1. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Tezimizin geri kalanında null Cartan eğri ifadesi yerine kısaca null eğri olarak bahsedilecektir.

3. α eğrisi pseudo null eğri ise:

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & -\epsilon_2 k_2 \\ -\epsilon_1 k_1 & 0 & -\epsilon_2 k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

olarak verilir ([22]). Burada α doğru ise birinci eğriliği $k_1(s) = 0$, diğer durumlarda $k_1(s) = 1$ dır ve $\epsilon_1\epsilon_2 = -1$ olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanır:

$$\begin{gathered} g(T,T) = \epsilon_1, \quad g(B_1,B_1) = \epsilon_2, \quad g(N,N) = g(B_2,B_2) = 0, \quad g(N,B_2) = 1 \\ g(T,N) = g(T,B_1) = g(T,B_2) = g(N,B_1) = g(B_1,B_2) = 0. \end{gathered} \tag{2.6}$$

4. α eğrisi partially null eğri ise:

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & -\epsilon_2 k_2 & 0 & -k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

olarak verilir ([22]). Burada üçüncü eğrilik $k_3 = 0$ dır ve $\epsilon_1\epsilon_2 = -1$ olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanır:

$$\begin{gathered} g(T,T) = \epsilon_1, \quad g(N,N) = \epsilon_2, \quad g(B_1,B_1) = g(B_2,B_2) = 0 \\ g(T,N) = g(T,B_2) = g(N,B_1) = g(N,B_2) = 0, \\ g(B_1,B_2) = 1. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Not. Null, pseudo null ve partially null eğrileri için k_1 eğriliği 0 (eğri bir doğru ise) veya 1 (diğer tüm durumlarda) dir. $k_1 = 1$ durumunda eğriye geodezik olmayan eğri adı da verilir.

3. 4-BOYUTLU 2-İNDEKSLİ YARI-ÖKLİDYEN UZAYDA GENELLEŞTİRİLMİŞ NULL MANNHEIM EĞRİLER

$\mathbb{E}_2^4$ uzayında $\forall s \in I \subset \mathbb{R}$ için bir null α eğrisinin üçüncü eğriliği $k_3(s) \neq 0$ olarak alınmıştır. $k_3(s)$ sıfırdan farklı olduğunda α eğrisinin ikinci eğriliği $k_2(s)$ sıfıra eşit veya sıfırdan farklı olabilir. Çalışmamızda bu iki durum ayrı ayrı ele alınarak sonuçlar elde edilmiştir. İlk olarak genelleştirilmiş null Mannheim eğriler için aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 3.1. 4-boyutlu 2-indeksli yarı-Öklidyen uzay, $\mathbb{E}_2^4$ de bulunan α null eğrisinin asli normal vektör alanı N, aynı uzayda bulunan bir α^* eğrisinin birinci binormal vektör alanı B_1^* ve ikinci binormal vektör alanı B_2^* ın gerdiği düzlemde yatıyorsa α eğrisi genelleştirilmiş null Mannheim eğrisi, α^* eğrisi de α eğrisinin genelleştirilmiş Mannheim eşlenik eğrisi adını alır. Bu durumda (α, α^*) eğri çifti de genelleştirilmiş Mannheim eğri çifti olarak adlandırılır.

$\mathbb{E}_2^4$ uzayında bulunan α genelleştirilmiş null Mannheim eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B_1, B_2\}$ ve onun genelleştirilmiş Mannheim eğri çifti olan α^* eğrisinin Frenet çatısı da $\{T^*, N^*, B_1^*, B_2^*\}$ olsun. α eğrisinin asli normal vektör alanı N; B_1^* ve B_2^* tarafından gerilen düzlemde yattığından $N(s) = a(s)B_1^*(s) + b(s)B_2^*(s)$ eşitliğini sağlar. Burada $a(s)$ ve $b(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. Bu noktada araştırmamızı $\mathrm{Span}\{B_1^*, B_2^*\}$ düzleminin nedensel (causal) karakterine bağlı olarak üç duruma ayıracağız:

(A) $\mathrm{Span}\{B_1^*, B_2^*\}$ spacelike düzlemdir,

(B) $\mathrm{Span}\{B_1^*, B_2^*\}$ timelike düzlemdir,

(C) $\mathrm{Span}\{B_1^*, B_2^*\}$ lightlike düzlemdir.

Şimdi bu üç durumu ayrı ayrı inceleyelim.

(A) $\mathrm{Span}\{B_1^*, B_2^*\}$ düzlemi bir spacelike düzlem olsun:

Teorem 3.1. $\alpha : I \to \mathbb{E}_2^4$ asli normal vektör alanı N, null olmayan Mannheim eşleniği $\alpha^* : I^* \to \mathbb{E}_2^4$ eğrisinin birinci ve ikinci binormal vektör alanları B_1^* ve B_2^* tarafından gerilen $\mathrm{Span}\{B_1^*, B_2^*\}$ spacelike düzleminde yatan genelleştirilmiş bir null Mannheim eğrisi olsun. Bu durumda $f(s) = \displaystyle\int_0^s \|\alpha^{*\prime}(t)\|\, dt$ olmak üzere α^* eğrisi

$$\alpha^*(f(s)) = \alpha(s) + \frac{1}{2k_2}N(s)$$

ilişkisini sağlayan timelike Frenet eğrisidir. $b, m, n = \pm 1$ olmak üzere α ve α^* eğrilerinin eğrilik fonksiyonları ve Frenet vektörleri arasında aşağıdaki şartlar sağlanır:

$$k_2 = \frac{1}{2\lambda}, \qquad |k_1^*| = |k_2^*| = |k_3| \neq 0, \qquad |k_3^*| = \frac{1}{\lambda}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}^+$$

ve

$$\begin{aligned} T^* = &\ \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}(T - 2\lambda B_1), \\ N^* = &\ nB_2, \\ B_1^* = &\ \frac{m}{2\sqrt{\lambda}}\left(T + 2\lambda B_1\right), \\ B_2^* = &\ bN. \end{aligned}$$

İspat. α eğrisinin asli normali N, Span$\{B_1^*, B_2^*\}$ spacelike düzleminde yattığından α^*; (2.1) denklemlerini sağlayan null olmayan bir eğridir. Burada $\epsilon_1^* = \epsilon_2^* = -1$, $\epsilon_3^* = \epsilon_4^* = 1$ dır. Buna göre, $N = aB_1^* + bB_2^*$ eşitliğinin kendisi ile skalar çarpılmasıyla

$$\begin{aligned} g(N,N) = &\ a^2 g(B_1^*, B_1^*) + 2ab g(B_1^*, B_2^*) + b^2 g(B_2^*, B_2^*) \\ g(N,N) = &\ a^2 + b^2 \end{aligned}$$

bulunur. $a^2 + b^2 > 0$ olacağından $g(N,N) = 1$, yani $\epsilon_1 = 1$ elde edilir. Dolayısıyla $\epsilon_2 = -1$ dir. Şimdi α^*;

$$\alpha^*(f(s)) = \alpha(s) + \lambda(s)N(s) \tag{3.1}$$

şeklinde parametrize edilebilir. Burada s, α eğrisinin pseudo yay uzunluğu parametresi; $s^* = f(s) = \int_0^s \left\|\alpha^{*'}(t)\right\| dt$, α^* eğrisinin yay uzunluğu parametresi; $f : I \subset \mathbb{R} \to I^* \subset \mathbb{R}$ ve λ düzgün fonksiyonlardır. α eğrisinin k_2 eğriliğine göre ispatımızı iki alt duruma ayırabiliriz: **(A.1)** $k_2 = 0$ ve **(A.2)** $k_2 \neq 0$.

(A.1) $k_2 = 0$ olsun.

(3.1) denkleminin s ye göre türevi alınır ve (2.3) eşitliğinden faydalanılırsa

$$T^* f' = T + \lambda' N - \lambda B_1 \tag{3.2}$$

bulunur. (3.2) denkleminin $N = aB_1^* + bB_2^*$ ile çarpılmasıyla $\lambda' = 0$ elde edilir. Bunu (3.2) denkleminde yerleştirirsek;

$$T^* f' = T - \lambda B_1, \;\; \lambda \in \mathbb{R}_0 \tag{3.3}$$

elde edilir. (3.3) denkleminden $g(T^* f', T^* f') = -f'^2 = -2\lambda$ bulunur ve böylelikle

$$f'^2 = 2\lambda = \text{sabit} \neq 0 \tag{3.4}$$

olduğu görülür. (3.3) denkleminin s ye göre türevinin alınmasıyla ve (2.1), (2.3) ve (3.4) denklemlerinin kullanılmasıyla, $-k_1^* N^* f'^2 = N - \lambda k_3 B_2$ elde edilir. Son eşitliğin $N = aB_1^* + bB_2^*$ ile çarpılmasıyla $g(N, N) = \epsilon_1 = 0$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir.

(A.2) $k_2 \neq 0$ olsun.

(3.1) denkleminin s ye göre türevinin alınmasıyla ve (2.3) Frenet çatısının kullanılmasıyla

$$T^* f' = (1 - \lambda k_2)T + \lambda' N - \lambda B_1 \tag{3.5}$$

buluruz. (3.5) denkleminin $N = aB_1^* + bB_2^*$ ile çarpılmasıyla

$$\lambda' = 0 \tag{3.6}$$

olduğu görülür. (3.6) eşitliğinin (3.5) de yerleştirilmesiyle

$$T^* f' = (1 - \lambda k_2)T - \lambda B_1 \tag{3.7}$$

bulunur. (3.7) denkleminin s ye göre türevinin alınmasıyla ve (2.1), (2.3) Frenet çatılarının kullanılmasıyla

$$-k_1^* N^* f'^2 + T^* f'' = (1 - \lambda k_2)' T + (1 - 2\lambda k_2) N - \lambda k_3 B_2 \tag{3.8}$$

yazılabilir. (3.8) denkleminin $N = aB_1^* + bB_2^*$ ile çarpılmasıyla

$$k_2 = \frac{1}{2\lambda} = \text{sabit}, \ \ \lambda \in \mathbb{R}_0 \tag{3.9}$$

bulunur. Ayrıca (3.7) denkleminden

$$g(T^* f', T^* f') = -f'^2 = -2\lambda(1 - \lambda k_2) \tag{3.10}$$

elde edilir. (3.9) in (3.10) de yerleştirilmesiyle

$$f'^2 = \lambda = \text{sabit}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+ \tag{3.11}$$

bulunur. Böylelikle,

$$f'(s) = \sqrt{\lambda} \tag{3.12}$$

elde edilir ve (3.9), (3.12) eşitlikleri (3.7) da yazılarak

$$T^* = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}(T - 2\lambda B_1) \tag{3.13}$$

bulunur. Ayrıca (3.8), (3.9), (3.11) ve (3.12) bağıntılarından $k_1^* N^* = k_3 B_2$ elde edilir. Bu da gösterir ki

$$k_1^* = nk_3, \quad N^* = nB_2. \tag{3.14}$$

Burada $n = \pm 1$ dir. $N^* = nB_2$ eşitliğinin s ye göre türevinin alınmasıyla ve (2.1), (2.3) Frenet denklemlerinin uygulanmasıyla aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$(k_1^* T^* + k_2^* B_1^*) f' = nk_3 T. \tag{3.15}$$

(3.15) nin $N = aB_1^* + bB_2^*$ ile çarpılmasıyla $ak_2^* f' = 0$ bulunur. $k_2^* = 0$ ise (3.15) bağıntısından görülür ki timelike T^* vektörü ile null T vektörü lineer bağımlıdır. Bu ise çelişkidir. Sonuç olarak $a = 0$ dır ve buradan

$$N = bB_2^* \tag{3.16}$$

elde edilir. $g(N, N) = 1$ şartından $b^2 = 1$ olarak elde edilir. (3.16) eşitliğinin s ye göre türevini alır ve (2.1), (2.3) Frenet denklemleri kullanılırsa $-k_2^* T - B_1 = -bf' k_3^* B_1^*$ elde edilir. Son denklem ile birlikte (3.9) ve (3.12) kullanılarak

$$B_1^* = \frac{b}{2\lambda\sqrt{\lambda}k_3^*}(T + 2\lambda B_1) \tag{3.17}$$

bulunur. Diğer taraftan (3.12), (3.13), (3.14) ve (3.15) kullanılarak

$$B_1^* = \frac{k_1^*}{2\sqrt{\lambda}k_2^*}(T + 2\lambda B_1) \tag{3.18}$$

elde edilir. (3.13), (3.14), (3.16), (3.18) eşitliklerinin kullanılmasıyla ve

$$det(T^*, N^*, B_1^*, B_2^*) = 1$$

şartıyla

$$k_1^* = mk_2^* \qquad m = \pm 1 \tag{3.19}$$

bulunur. (3.17) ve (3.19) birlikte ele alınırsa

$$\frac{b}{\lambda k_3^*} = \frac{k_1^*}{k_2^*} \tag{3.20}$$

elde edilir. (3.19) denkleminin (3.20) eşitliğinde yazılmasıyla

$$k_3^* = \frac{mb}{\lambda}, \qquad mb = \pm 1$$

sonucuna ulaşılır. Bu sonuç (3.17) de yazılırsa

$$B_1^* = \frac{m}{2\sqrt{\lambda}}\left(T + 2\lambda B_1\right)$$

bulunur. Bu sonuçla teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.2. α, $\mathbb{E}_2^4$ uzayında pozitif ve sabit k_2 ikinci eğriliğine sahip bir null eğri olsun. Eğer $\alpha^* : I^* \to \mathbb{E}_2^4$ eğrisi, $\alpha^* = \alpha + (1/2k_2)N$ ile tanımlanırsa, α genelleştirilmiş null Mannheim eğri ve α^*, α eğrisinin genelleştirilmiş timelike Mannheim eşlenik eğrisidir.

İspat. s, α eğrisinin pseudo-yay parametresi ve $s^* = f(s) = \int\limits_0^s \left\|\alpha^{*'}(t)\right\| dt$, α^* eğrisinin yay parametresi olmak üzere α^* eğrisinin

$$\alpha^* = \alpha + (1/2k_2)N \tag{3.21}$$

ile tanımlandığını düşünelim. $\lambda = 1/2k_2$ $(k_2 \in \mathbb{R}^+)$ olarak alırsak kolaylıkla görülür ki $g\left(\alpha^{*'}, \alpha^{*'}\right) = -\lambda$. Bu da α^* eğrisinin timelike eğri olduğu anlamına gelir. Ayrıca $f(s) = \sqrt{\lambda}s$ olarak elde edilir. (3.21) denkleminin türevi alınır ve $f^{'} = \sqrt{\lambda}$ kullanılırsa

$$T^* = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}(T - 2\lambda B_1) \tag{3.22}$$

olduğu görülür. (3.22) denkleminin türevi alınıp, (2.1), (2.3) Frenet denklemleri kullanılarak

$$k_1^* N^* = k_3 B_2 \tag{3.23}$$

bulunur. Buradan da

$$k_1^* = nk_3, \qquad N^* = nB_2, \qquad n = \pm 1 \tag{3.24}$$

olduğu görülür. $N^* = nB_2$ eşitliğinin türevinden

$$\left(k_1^* T^* + k_2^* B_1^*\right) f^{'} = nk_3 T \tag{3.25}$$

elde edilir. Son ifadeyi kendisiyle çarparsak $\left(-k_1^{*2} + k_2^{*2}\right) f^{'2} = 0$ bulunur. $f^{'2} \neq 0$ olduğundan gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$k_1^* = mk_2^*, \qquad m = \pm 1 \tag{3.26}$$

(3.22) denklemini (3.25) da yerleştirilip, (3.24) ve (3.26) denklemleri ve $f' = \sqrt{\lambda}$ kullanılırsa

$$B_1^* = \frac{m}{2\sqrt{\lambda}}\left(T + 2\lambda B_1\right) \qquad m = \pm 1 \tag{3.27}$$

bulunur. Son eşitliğin türevi alınır ve (2.1), (2.3), (3.24) denklemleri kullanılırsa

$$k_3^* \lambda B_2^* = mN \tag{3.28}$$

elde edilir. (3.22), (3.25), (3.27), (3.28) denklemleri kullanılır ve

$$det(T^*, N^*, B_1^*, B_2^*) = 1$$

şartı göz önünde bulundurulursa

$$k_3^* = \frac{n}{\lambda}, \qquad n = \pm 1$$

elde edilir. Son eşitlik (3.28) denkleminde yerleştirilirse

$$B_2^* = \pm N \tag{3.29}$$

olarak bulunur. (3.22), (3.25), (3.27), (3.29) denklemleri kullanılarak α ve α^* eğrilerinin çatıları arasındaki ilişki

$$\begin{aligned} T^* &= \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}(T - 2\lambda B_1), \\ N^* &= nB_2, \\ B_1^* &= \frac{m}{2\sqrt{\lambda}}\left(T + 2\lambda B_1\right), \\ B_2^* &= nmN, \end{aligned}$$

$m, n = \pm 1$ dır. α eğrisinin asli normal vektör alanı N, Span$\{B_1^*, B_2^*\}$ spacelike düzleminde yattığından α genelleştirilmiş null Mannheim eğri ve α^* da α eğrisinin genelleştirilmiş timelike Mannheim eşlenik eğrisidir.

Aşağıdaki sonuç Teorem 3.1 in A.1. şartından kolayca görülebilir:

Sonuç 3.1. $\mathbb{E}_2^4$ de null kübik genelleştirilmiş null Mannheim eğrisi bulunmamaktadır.

(B) Span$\{B_1^*, B_2^*\}$ düzlemi bir timelike düzlem olsun:

Bu durumda Span$\{B_1^*, B_2^*\}$ timelike düzleminin B_1^* ve B_2^* baz vektörlerinin nedensel karakterine bağlı olarak üç teorem elde ettik. Bilindiği gibi bir timelike düzlem; spacelike ve timelike ortogonal birim vektörler ya da iki lineer bağımsız null vektör tarafından gerilir. Buna göre aşağıdaki alt durumları ele alalım.

B.1) B_1^* spacelike, B_2^* timelike ise;

s; α eğrisinin pseudo-yay parametresi, $s^* = f(s) = \int\limits_0^s \left\| \alpha^{*'}(t) \right\| dt$; α^* eğrisinin yay uzunluğu parametresi ve $f : I \subset \mathbb{R} \to I^* \subset \mathbb{R}$ olmak üzere α^* eğrisi

$$\alpha^*(f(s)) = \alpha(s) + \lambda(s)N(s) \tag{3.30}$$

şeklinde parametrize edilebilir. Şimdi α eğrisinin ikinci eğriliğine göre **B.1.1)** $k_2 = 0$ ve **B.1.2)** $k_2 \neq 0$ şeklinde iki alt duruma daha ayıralım.

B.1.1) $k_2 = 0$ olsun.

(3.30) denkleminin s ye göre türevi alıp, (2.3) çatısından faydalanarak

$$T^* f' = T + \lambda^{'} N - \epsilon_1 \lambda B_1$$

bulunur. Son denklemin $N = aB_1^* + bB_2^*$ ile çarpılmasıyla $\lambda' = 0$ elde edilir ve tekrar düzenlenmesiyle

$$T^* f' = T - \epsilon_1 \lambda B_1, \qquad \lambda \in \mathbb{R}_0 \tag{3.31}$$

elde edilir. (3.31) denkleminden $g(T^* f', T^* f') = \epsilon_1^* f'^2 = -2\epsilon_1 \lambda$ bulunur. Böylelikle

$$f'^2 = -2\epsilon_1 \epsilon_1^* \lambda = \text{sabit} \neq 0 \tag{3.32}$$

olduğu görülür. (3.31) denkleminin s ye göre türevinin alınmasıyla ve (2.1), (2.3) ve (3.32) eşitliklerinin kullanılmasıyla $\epsilon_2^* k_1^* N^* f'^2 = N - \epsilon_1 \lambda k_3 B_2$ bulunur. Bu eşitliği de $N = aB_1^* + bB_2^*$ ile çarparsak $\epsilon_1 = 0$ elde edilir ki bu bir çelişkidir.

B.1.2) $k_2 \neq 0$ olsun.

(3.30) denkleminin s ye göre türevi alınıp (2.3) çatısından faydalanılırsa

$$T^* f' = (1 - \epsilon_1 \lambda k_2)\, T + \lambda^{'} N - \lambda \epsilon_1 B_1 \tag{3.33}$$

bulunur. Son denklemin $N = aB_1^* + bB_2^*$ ile çarpılmasıyla

$$\lambda' = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R}_0 \tag{3.34}$$

elde edilir ve (3.33) eşitliğinde yerleştirilirse

$$T^{*}f' = (1 - \epsilon_1 \lambda k_2)\, T - \lambda \epsilon_1 B_1 \tag{3.35}$$

bulunur. (3.35) denkleminin türevinden

$$\epsilon_2^{*} k_1^{*} N^{*} f'^{2} + T^{*} f'' = (1 - \epsilon_1 \lambda k_2)'\, T + (1 - 2\epsilon_1 \lambda k_2)\, N - \epsilon_1 \lambda k_3 B_2 \tag{3.36}$$

olduğu görülür. (3.36) denkleminin $N = aB_1^{*} + bB_2^{*}$ ile çarpılmasıyla ve (3.34) eşitliğinin de kullanılmasıyla

$$k_2 = \frac{\epsilon_1}{2\lambda}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}_0 \tag{3.37}$$

elde edilir. Ayrıca yine (3.35) denkleminden

$$g\left(T^{*}f', T^{*}f'\right) = \epsilon_1^{*} f'^{2} = -2\epsilon_1 \lambda \left(1 - \epsilon_1 \lambda k_2\right) \tag{3.38}$$

bulunur. (3.37), (3.38) denkleminde yerleştirilir ve düzenlenirse

$$f'^{2} = -\epsilon_1 \epsilon_1^{*} \lambda \tag{3.39}$$

oldugu görülür. Bulduğumuz (3.37) ve (3.39) eşitliklerinin (3.35) eşitliğinde yerleştirilmesiyle

$$T^{*} = \frac{1}{2\sqrt{-\epsilon_1 \epsilon_1^{*} \lambda}} \left(T - 2\epsilon_1 \lambda B_1\right) \tag{3.40}$$

elde edilir. Şimdi de **B.1.2.a)** $\epsilon_1 \epsilon_1^{*} = 1$, $\lambda < 0$ ve **B.1.2.b)** $\epsilon_1 \epsilon_1^{*} = -1$, $\lambda > 0$ olmak üzere iki durumu ayrı ayrı inceleyeceğiz.

B.1.2.a) $\epsilon_1 \epsilon_1^{*} = 1$ ve $\lambda < 0$ ise; bu şarta göre (3.39) ve (3.40) eşitlikleri sırasıyla

$$f'^{2} = -\lambda \tag{3.41}$$

ve

$$T^{*} = \frac{1}{2\sqrt{-\lambda}} \left(T - 2\epsilon_1 \lambda B_1\right) \tag{3.42}$$

olarak düzenlenir. (3.41) eşitliğini (3.36) denkleminde yerleştirirsek $-k_1^{*} N^{*} = k_3 B_2$ elde edilir ve

$$-k_1^{*} = m k_3, \qquad N^{*} = m B_2, \qquad m^2 = 1 \tag{3.43}$$

olarak yazılabilir. $N^* = mB_2$ eşitliğinin türevinden

$$\left(-\epsilon_1^* k_1^* T^* + k_2^* B_1^*\right) f^{'} = -m\epsilon_2 k_3 T \tag{3.44}$$

(3.44) denkleminin $N = aB_1^* + bB_2^*$ ile çarpımından $ak_2^* f^{'} = 0$ buluruz. $k_2^* = 0$ ise (3.44) eşitliğinde null T ile null olmayan T^* vektörlerinin kolineer olduğu görülür. $f^{'} = 0$ olması halinde de çelişki olacağından $a = 0$ dır. Bu durumda

$$N = bB_2^* \tag{3.45}$$

olarak yazabiliriz. $g(N, N) = \epsilon_1 = -b^2$ olduğundan $\epsilon_1 = -1$, dolayısıyla da $\epsilon_1^* = -1$ ve $\epsilon_2 = \epsilon_2^* = 1$ olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca $b^2 = 1$ dir. (3.45) denkleminin türevinden $k_2 T + B_1 = -bk_3^* B_1^* f^{'}$ elde edilir. Son denklem, (3.37) kullanılarak düzenlenirse

$$B_1^* = \frac{b}{2\lambda k_3^* \sqrt{-\lambda}} \left(T - 2\lambda B_1\right) \tag{3.46}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan (3.42), (3.43) ve (3.44) denklemleri düzenlenirse

$$B_1^* = \frac{k_1^*}{2k_3^* \sqrt{-\lambda}} \left(T - 2\lambda B_1\right) \tag{3.47}$$

elde edilir. (3.42), (3.43), (3.45), (3.47) eşitliklerinin $\det(T^*, N^*, B_1^*, B_2^*) = 1$ olması şartından

$$|k_1^*| = |k_2^*|$$

elde edilir. Ayrıca $g(B_1^*, B_1^*) = 1$ olduğunu (3.46) denkleminde göz önüne alırsak

$$k_3^{*2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

olarak bulunur.

B.1.2.b) $\epsilon_1 \epsilon_1^* = -1$ ve $\lambda > 0$ ise; benzer işlemler yapılarak

$$B_1^* = \frac{b}{2\lambda k_3^* \sqrt{\lambda}} \left(T - 2\lambda B_1\right)$$

elde edilir. Ancak $g(B_1^*, B_1^*) = 1$ şartını göz önünde bulundurursak $k_3^{*2} = -1/\lambda^2$ elde edilir ki bu ise çelişkidir.

Teorem 3.3. $\alpha : I \to \mathbb{E}_2^4$ eğrisinin timelike asli normal vektör alanı N; Mannheim eşleniği olan $\alpha^* : I^* \to \mathbb{E}_2^4$ eğrisinin sırasıyla birinci ve ikinci binormal vektör alanları B_1^* (spacelike) ve B_2^* (timelike) tarafından gerilen Span$\{B_1^*, B_2^*\}$ timelike düzleminde yatan genelleştirilmiş bir null Mannheim eğrisi olsun. Bu durumda α^* eğrisi timelike Frenet eğrisidir ve bu eğrilerin eğrilik fonksiyonları ile Frenet vektörleri arasında aşağıdaki şartlar sağlanır:

$$k_2 = -\frac{1}{2\lambda},\ |k_1^*| = |k_2^*| = |k_3| \neq 0,\ |k_3^*| = \left|\frac{1}{\lambda}\right|,\ \lambda \in \mathbb{R}_0^-$$

ve

$$\begin{aligned} T^* =& \ \frac{1}{2\sqrt{-\lambda}}(T + 2\lambda B_1), \\ N^* =& \ mB_2, \\ B_1^* =& \ \frac{b}{2\sqrt{-\lambda}}\left(T - 2\lambda B_1\right), \\ B_2^* =& \ bN. \end{aligned}$$

Burada $b, m = \pm 1$ dır.

B.2) B_1^* timelike, B_2^* spacelike ise;

B.1 de yapılan işlemlere benzer olarak aşağıdaki teoremler elde edilir. İspatlar benzer olduğu için burada verilmemiştir.

Teorem 3.4. $\alpha : I \to \mathbb{E}_2^4$ eğrisi spacelike asli normal vektör alanı N; Mannheim eşleniği olan $\alpha^* : I^* \to \mathbb{E}_2^4$ eğrisinin sırasıyla birinci ve ikinci binormal vektör alanları B_1^* (timelike) ve B_2^* (spacelike) tarafından gerilen Span$\{B_1^*, B_2^*\}$ timelike düzleminde yatan genelleştirilmiş bir null Mannheim eğrisi olsun. Bu durumda α^* eğrisi spacelike Frenet eğrisidir ve bu eğrilerin eğrilik fonksiyonları ile Frenet vektörleri arasında aşağıdaki şartlar sağlanır:

$$k_2 = \frac{1}{2\lambda},\ |k_1^*| = |k_2^*| = |k_3| \neq 0,\ |k_3^*| = \left|\frac{1}{\lambda}\right|,\ \lambda \in \mathbb{R}_0^-$$

ve

$$\begin{aligned} T^* =& \ \frac{1}{2\sqrt{-\lambda}}(T - 2\lambda B_1), \\ N^* =& \ mB_2, \\ B_1^* =& \ \frac{k_1^*}{k_2^*\sqrt{-\lambda}}\left(-\frac{1}{2\lambda}T + B_1\right), \\ B_1^* =& \ bN. \end{aligned}$$

Burada $b, m = \pm 1$ dır.

B.3) B_1^* ve B_2^* null ise;

$\alpha : I \to \mathbb{E}_2^4$ eğrisi genelleştirilmiş Mannheim eğrisi ve onun partially null eşlenik eğrisi de $\alpha^* : I^* \to \mathbb{E}_2^4$ ise α^*;

$$\alpha^*(f(s)) = \alpha(s) + \lambda(s)N(s) \tag{3.48}$$

olarak parametrize edilebilir. Burada s, α nın pseudo-yay parametresi; $s^* = f(s) = \int\limits_0^s \left\| \alpha^{*'}(t) \right\| dt$, α^* ın yay uzunluğu parametresi; $f : I \subset \mathbb{R} \to I^* \subset \mathbb{R}$ ve λ düzgün fonksiyondur. Şimdi α eğrisinin k_2 eğriliğine göre ispatımızı **B.3.1)** $k_2 = 0$ ve **B.3.2)** $k_2 \neq 0$ olmak üzere iki alt duruma daha ayıralım.

B.3.1) $k_2 = 0$ olsun.

(3.48) denkleminin s ye göre türevi alınır ve (2.3) çatısından faydalanılırsa

$$T^* f' = T + \lambda' N - \lambda \epsilon_1 B_1$$

bulunur. Son denklemin $N = aB_1^* + bB_2^*$ ile çarpılmasıyla $\lambda' = 0$ elde edilir ve tekrar düzenlenmesiyle

$$T^* f' = T - \epsilon_1 \lambda B_1, \qquad \lambda \in \mathbb{R}_0 \tag{3.49}$$

elde edilir. (3.49) denkleminden $g(T^* f', T^* f') = \epsilon_1^* f'^2 = -2\epsilon_1 \lambda$ bulunur. Böylelikle

$$f'^2 = -2\epsilon_1 \epsilon_1^* \lambda = \text{sabit} \neq 0 \tag{3.50}$$

olduğu görülür. (3.49) denkleminin s ye göre türevinin alınmasıyla ve (2.3), (2.7) ve (3.50) denklemlerinin kullanılmasıyla $k_1^* N^* f'^2 = N - \epsilon_1 \lambda k_3 B_2$ bulunur. Bu eşitliği de $N = aB_1^* + bB_2^*$ ile çarparsak $\epsilon_1 = 0$ elde edilir ki bu bir çelişkidir.

B.3.2) $k_2 \neq 0$ olsun.

(3.48) denkleminin s ye göre türevi alınır ve (2.3) çatısından faydalanılırsa

$$T^* f' = (1 - \epsilon_1 \lambda k_2)\, T + \lambda' N - \epsilon_1 \lambda B_1$$

bulunur. Son denklemin $N = aB_1^* + bB_2^*$ ile çarpılmasıyla $\lambda' = 0$ elde edilir ve tekrar düzenlenmesiyle

$$T^* f' = (1 - \epsilon_1 \lambda k_2)\, T - \epsilon_1 \lambda B_1, \qquad \lambda \in \mathbb{R}_0 \tag{3.51}$$

bulunur. (3.51) denkleminin tekrar türevini alır ve (2.3), (2.7) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$k_1^* N^* f'^2 + T^* f'' = (1 - \epsilon_1 \lambda k_2)' T + (1 - 2\epsilon_1 \lambda k_2) N - \epsilon_1 \lambda k_3 B_2 \tag{3.52}$$

olduğu görülür. (3.52) denklemi $N = aB_1^* + bB_2^*$ ile çarpılırsa

$$k_2 = \frac{\epsilon_1}{2\lambda} = sabit, \qquad \lambda \in \mathbb{R}_0 \tag{3.53}$$

elde edilir. Ayrıca (3.51) eşitliğinden

$$g(T^* f', T^* f') = \epsilon_1^* f'^2 = -2\epsilon_1 \lambda (1 - \epsilon_1 \lambda k_2) \tag{3.54}$$

olduğu görülür. (3.53), (3.54) denkleminde yerine yazılırsa; $f'^2 = -\lambda \epsilon_1 \epsilon_1^*$ elde edilir. (3.52), (3.53) ve son eşitlikten

$$\epsilon_1^* k_1^* N^* = k_3 B_2$$

bulunur. Son eşitlik gösterir ki;

$$\epsilon_1^* k_1^* = m B_2, \qquad N^* = m B_2, \tag{3.55}$$

$m = \pm 1$ dır. $N^* = mB_2$ denkleminin türevinden

$$(k_1^* T^* + k_2^* B_1^*) f' = m(-\epsilon_2 k_3 T) \tag{3.56}$$

elde edilir. (3.56) denklemi, $N = aB_1^* + bB_2^*$ ile çarpılırsa $bk_2^* f' = 0$ yazılabilir. Eğer $k_2^* = 0$ ise; (3.56) denkleminden görülür ki null olmayan T^* vektörü, null T vektörü ile kolineerdir. Bu bir çelişkidir. Şayet $b = 0$ ise $N = aB_1^*$ dır. Null olmayan N vektörü, null B_1^* vektörü ile kolineer olduğu görülür ki bu da bir çelişkidir. Buna göre aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 3.5. $\mathbb{E}_2^4$ de Mannheim eğri çifti partially null olan genelleştirilmiş null Mannheim eğrisi bulunmamaktadır.

Örnek 3.1. $\mathbb{E}_2^4$ de aşağıda denklemi verilen bir null eğrisini ele alalım:

$$\beta(s) = \left(\frac{\sinh(As)}{\sqrt{2}A}, \frac{\cosh(Bs)}{\sqrt{2}B}, \frac{\cosh(As)}{\sqrt{2}A}, \frac{\sinh(Bs)}{\sqrt{2}B} \right)$$

β eğrisinin Frenet çatısı

$$\begin{aligned}
T(s) &= \left(\frac{\cosh(As)}{\sqrt{2}}, \frac{\sinh(Bs)}{\sqrt{2}}, \frac{\sinh(As)}{\sqrt{2}}, \frac{\cosh(Bs)}{\sqrt{2}}\right), \\
N(s) &= \left(\frac{A}{\sqrt{2}}\sinh(As), \frac{B}{\sqrt{2}}\cosh(Bs), \frac{A}{\sqrt{2}}\cosh(As), \frac{B}{\sqrt{2}}\sinh(Bs)\right), \\
B_1(s) &= \left(-\frac{\cosh(As)}{\sqrt{2}}, \frac{\sinh(Bs)}{\sqrt{2}}, -\frac{\sinh(As)}{\sqrt{2}}, \frac{\cosh(Bs)}{\sqrt{2}}\right), \\
B_2(s) &= \left(\frac{B}{\sqrt{2}}\sinh(As), \frac{A}{\sqrt{2}}\cosh(Bs), \frac{B}{\sqrt{2}}\cosh(As), \frac{A}{\sqrt{2}}\sinh(Bs)\right)
\end{aligned}$$

ile verilir. Burada $A = \sqrt{-1+\sqrt{2}}$ ve $B = \sqrt{1+\sqrt{2}}$ ve β eğrisinin eğrilikleri; $k_1(s) = 1$, $k_2(s) = \sqrt{2}$, $k_3(s) = -1$ dir. Kolaylıkla görülür ki β eğrisi asli normali timelike olan bir null eğridir. Teorem 3.3. den $\lambda = \frac{-\sqrt{2}}{4}$ elde edilir. β eğrisinin Mannheim eğri çifti β^* aşağıda verilen timelike eğri olarak elde edilir:

$$\beta^*(s) = \beta(s) - \frac{\sqrt{2}}{4}N(s)$$

yani;

$$\begin{aligned}
\beta^*(s) = \ &(\frac{2\sqrt{2}-A^2}{4A}\sinh(As), \frac{2\sqrt{2}-B^2}{4B}\cosh(Bs), \\
&\frac{2\sqrt{2}-A^2}{4A}\cosh(As), \frac{2\sqrt{2}-B^2}{4B}\sinh(Bs)).
\end{aligned}$$

β^* eğrisinin Frenet çatısı:

$$\begin{aligned}
T^*(s) = \ &(\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt[4]{2}}\cosh(As), \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt[4]{2}}\sinh(Bs), \\
&\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt[4]{2}}\sinh(As), \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt[4]{2}}\cosh(Bs)),
\end{aligned}$$

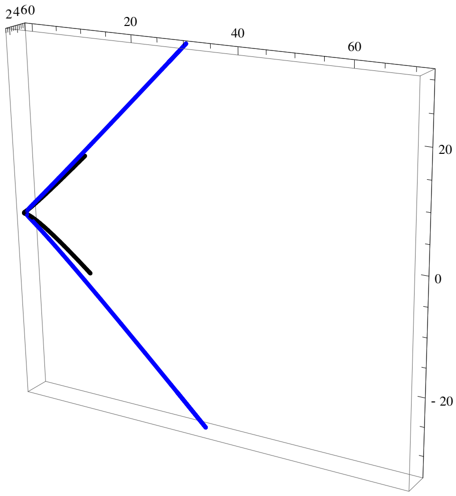
$$N^*(s) = (\frac{B}{\sqrt{2}}\sinh(As), \frac{A}{\sqrt{2}}\cosh(Bs), \frac{B}{\sqrt{2}}\cosh(As), \frac{A}{\sqrt{2}}\sinh(Bs)),$$

$$\begin{aligned}
B_1^*(s) = \ &(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt[4]{2}}\cosh(As), \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt[4]{2}}\sinh(Bs), \\
&\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt[4]{2}}\sinh(As), \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt[4]{2}}\cosh(Bs))
\end{aligned}$$

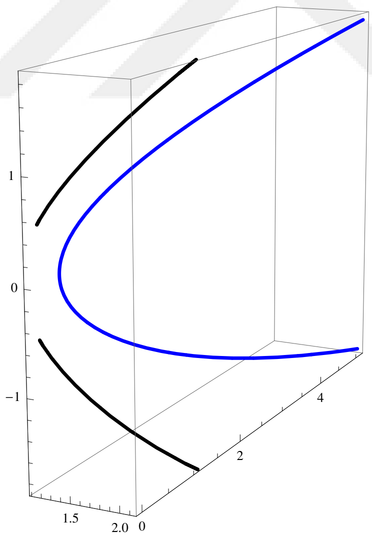
$$B_2^*(s) = (\frac{A}{\sqrt[4]{2}}\sinh(As), \frac{B}{\sqrt[4]{2}}\cosh(Bs), \frac{A}{\sqrt[4]{2}}\cosh(As), \frac{B}{\sqrt[4]{2}}\sinh(Bs))$$

dır. β^* eğrisinin eğrilikleri; $k_1^*(s) = k_2^*(s) = 1$, $k_3^*(s) = 2\sqrt{2}$ olarak bulunur.

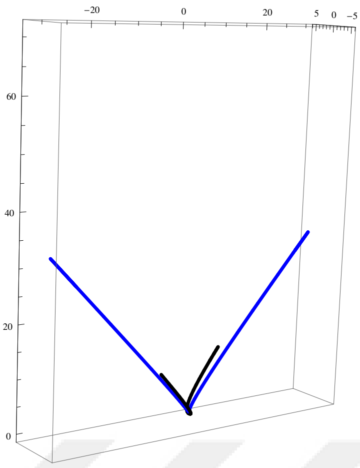
Örnekteki genelleştirilmiş null Mannheim eğri ve onun timelike eşlenik eğrisinin sırasıyla $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ ve $x_4 = 0$ uzaylarındaki izdüşümleri aşağıda verilmiştir.



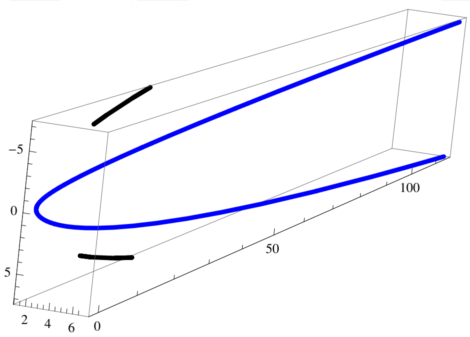
Şekil 3.1. Genelleştirilmiş null Mannheim β eğrisi (mavi) ve onun timelike Mannheim eşleniği β^* eğrisinin (siyah) $x_1 = 0$ uzayına izdüşümü



Şekil 3.2. Genelleştirilmiş null Mannheim β eğrisi (mavi) ve onun timelike Mannheim eşleniği β^* eğrisinin (siyah) $x_2 = 0$ uzayına izdüşümü



Şekil 3.3. Genelleştirilmiş null Mannheim β eğrisi (mavi) ve onun timelike Mannheim eşleniği β^* eğrisinin (siyah) $x_3 = 0$ uzayına izdüşümü



Şekil 3.4. Genelleştirilmiş null Mannheim β eğrisi (mavi) ve onun timelike Mannheim eşleniği β^* eğrisinin (siyah) $x_4 = 0$ uzayına izdüşümü

Örnek 3.2. $\mathbb{E}_2^4$ de aşağıda denklemi verilen bir null eğrisini ele alalım:

$$\theta(s)=\left(\frac{\sinh(As)}{\sqrt{2}A},\frac{\cosh(Bs)}{\sqrt{2}B},\frac{\cosh(As)}{\sqrt{2}A},\frac{\sinh(Bs)}{\sqrt{2}B}\right).$$

θ eğrisinin Frenet çatısı

$$\begin{aligned}
T(s) &= \left(\frac{\cosh(As)}{\sqrt{2}},\frac{\sinh(Bs)}{\sqrt{2}},\frac{\sinh(As)}{\sqrt{2}},\frac{\cosh(Bs)}{\sqrt{2}}\right),\\
N(s) &= \left(\frac{A}{\sqrt{2}}\sinh(As),\frac{B}{\sqrt{2}}\cosh(Bs),\frac{A}{\sqrt{2}}\cosh(As),\frac{B}{\sqrt{2}}\sinh(Bs)\right),\\
B_1(s) &= \left(-\frac{\cosh(As)}{\sqrt{2}},\frac{\sinh(Bs)}{\sqrt{2}},-\frac{\sinh(As)}{\sqrt{2}},\frac{\cosh(Bs)}{\sqrt{2}}\right),\\
B_2(s) &= \left(\frac{B}{\sqrt{2}}\sinh(As),\frac{A}{\sqrt{2}}\cosh(Bs),\frac{B}{\sqrt{2}}\cosh(As),\frac{A}{\sqrt{2}}\sinh(Bs)\right)
\end{aligned}$$

ile verilir. Burada $A=\sqrt{1+\sqrt{2}}$ ve $B=\sqrt{-1+\sqrt{2}}$ ve θ eğrisinin eğrilikleri; $k_1(s)=1$, $k_2(s)=-\sqrt{2}$, $k_3(s)=1$ dir. Kolaylıkla görülür ki θ eğrisi asli normali spacelike olan bir null eğridir. Teorem 3.4. den $\lambda=\frac{-\sqrt{2}}{4}$ elde edilir. θ eğrisinin Mannheim eğri çifti θ^* aşağıda verilen spacelike eğri olarak elde edilir:

$$\theta^*(s)=\theta(s)-\frac{\sqrt{2}}{4}N(s)$$

yani;

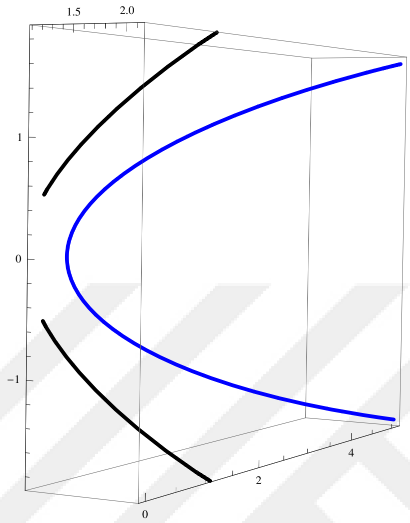
$$\begin{aligned}
\theta^*(s)= &\ \Big(\frac{\sqrt{2}-1}{4A}\sinh(As),\frac{\sqrt{2}+1}{4B}\cosh(Bs),\\
&\qquad \frac{\sqrt{2}-1}{4A}\cosh(As),\frac{\sqrt{2}+1}{4B}\sinh(Bs)\Big).
\end{aligned}$$

θ^* eğrisinin Frenet çatısı:

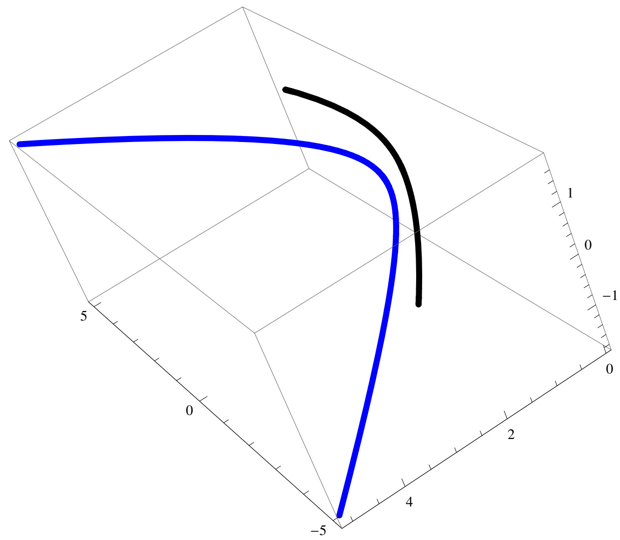
$$\begin{aligned}
T^*(s)= &\ \Big(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt[4]{2}}\cosh(As),\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt[4]{2}}\sinh(Bs),\\
&\qquad \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt[4]{2}}\sinh(As),\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt[4]{2}}\cosh(Bs)\Big),\\
N^*(s)= &\ \Big(\frac{B}{\sqrt{2}}\sinh(As),\frac{A}{\sqrt{2}}\cosh(Bs),\frac{B}{\sqrt{2}}\cosh(As),\frac{A}{\sqrt{2}}\sinh(Bs)\Big),\\
B_1^*(s)= &\ -\Big(\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt[4]{2}}\cosh(As),\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt[4]{2}}\sinh(Bs),\\
&\qquad \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt[4]{2}}\sinh(As),\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt[4]{2}}\cosh(Bs)\Big),\\
B_2^*(s)= &\ \Big(\frac{A}{\sqrt{2}}\sinh(As),\frac{B}{\sqrt{2}}\cosh(Bs),\frac{A}{\sqrt{2}}\cosh(As),\frac{B}{\sqrt{2}}\sinh(Bs)\Big)
\end{aligned}$$

dır. θ^* eğrisinin eğrilikleri; $k_1^*(s) = -1$, $k_2^*(s) = 1$, $k_3^*(s) = 2\sqrt{2}$ olarak bulunur.

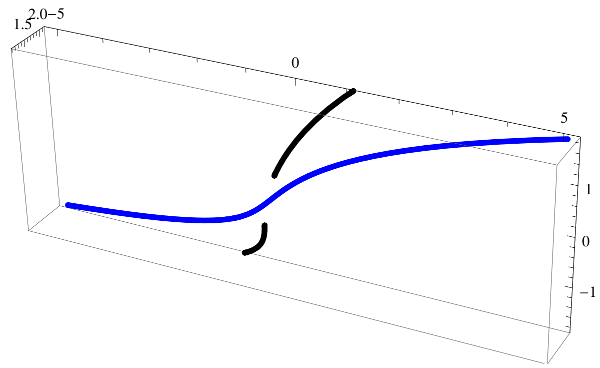
Örnekteki genelleştirilmiş null Mannheim eğri ve onun spacelike eşlenik eğrisinin sırasıyla $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ ve $x_4 = 0$ uzaylarındaki izdüşümleri aşağıda verilmiştir.



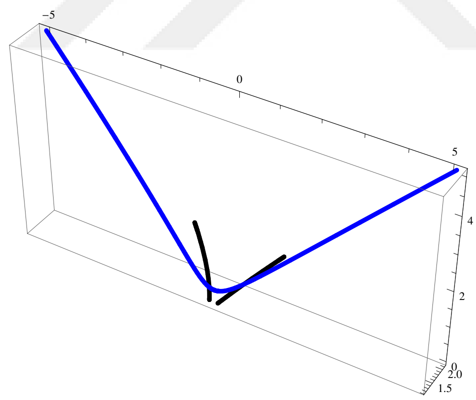
Şekil 3.5. Genelleştirilmiş null Mannheim β eğrisi (mavi) ve onun spacelike Mannheim eşleniği β^* eğrisinin (siyah) $x_1 = 0$ uzayına izdüşümü



Şekil 3.6. Genelleştirilmiş null Mannheim β eğrisi (mavi) ve onun spacelike Mannheim eşleniği β^* eğrisinin (siyah) $x_2 = 0$ uzayına izdüşümü



Şekil 3.7. Genelleştirilmiş null Mannheim β eğrisi (mavi) ve onun timelike Mannheim eşleniği β^* eğrisinin (siyah) $x_3 = 0$ uzayına izdüşümü



Şekil 3.8. Genelleştirilmiş null Mannheim β eğrisi (mavi) ve onun timelike Mannheim eşleniği β^* eğrisinin (siyah) $x_4 = 0$ uzayına izdüşümü

(C) Span$\{B_1^*, B_2^*\}$ düzlemi bir lightlike düzlem olsun:

Bu durumda da Span$\{B_1^*, B_2^*\}$ lightlike düzleminin B_1^* ve B_2^* baz vektörlerinin nedensel karakterine bağlı olarak dört teorem elde ettik. Bilindiği gibi bir lightlike düzlem; spacelike ve null birim vektörler tarafından gerilir. İlk teoremimizde B_1^* spacelike, B_2^* null vektörler olarak ele alındı.

Teorem 3.6. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_2^4$ genelleştirilmiş null Mannheim eğrisi ve $\alpha^* : I^* \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_2^4$ eğrisi de α eğrisinin genelleştirilmiş Mannheim eşlenik eğrisi olmak üzere α nın spacelike asli normal vektör alanı N, α^* eğrisinin spacelike B_1^* ve null B_2^* vektörleri tarafından gerilen Span$\{B_1^*, B_2^*\}$ lightlike düzleminde yatsın. Bu durumda α^* bir pseudo null eğri olup aşağıdaki iki durumdan birisi sağlanır:

i) $k_2 = 0$ ise α ve α^* eğrisinin eğrilik fonksiyonları ve Frenet vektörleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir:

$$k_3 = \frac{c_1}{\lambda}, \qquad k_2^* = \frac{c_2}{2\lambda^2}, \qquad k_3^* = 0$$

ve

$$\begin{aligned} T^* &= \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\left(T - \lambda B_1\right), \\ N^* &= \frac{1}{2\lambda}\left(N - c_1 B_2\right), \\ B_1^* &= \frac{c_2}{\sqrt{2\lambda}}\left(T + \lambda B_1\right), \\ B_2^* &= \lambda\left(N + c_1 B_2\right) \end{aligned}$$

dır. Burada $c_1, c_2 = \pm 1$ dır.

ii) k_2 =sabit$\neq 0$ ise α ve α^* eğrisinin eğrilikleri ve Frenet vektörleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir:

$$|k_3| = \left|\frac{1 - 2\lambda k_2}{\lambda}\right|, \qquad |k_2^*| = \left|\frac{1 - 2\lambda k_2}{2\lambda^2\left(1 - \lambda k_2\right)}\right|,$$

$$k_3^* = \frac{1}{4\lambda\left(1 - \lambda k_2\right)k_2^*}\left(-\left(\zeta + \eta k_2\right)^2 + \eta^2 k_3^2\right)$$

ve

$$
\begin{aligned}
T^* &= \frac{1}{\sqrt{2\lambda\left(1-\lambda k_2\right)}}\left[\left(1-\lambda k_2\right)T-\lambda B_1\right],\\
N^* &= \frac{1}{2\lambda\left(1-\lambda k_2\right)}\left[\left(1-2\lambda k_2\right)N-\lambda k_3 B_2\right],\\
B_1^* &= \left(\frac{-dk_2+ek_3}{k_2^*\sqrt{2\lambda\left(1-\lambda k_2\right)}}\right)T-\left(\frac{d}{k_2^*\sqrt{2\lambda\left(1-\lambda k_2\right)}}\right)B_1,\\
B_2^* &= \frac{1}{k_2^* f'}[(k_3^* d\sqrt{2\lambda\left(1-\lambda k_2\right)}-\zeta-\eta k_2)N+\\
&\qquad (k_3^* e\sqrt{2\lambda\left(1-\lambda k_2\right)}-\eta k_3)B_2]
\end{aligned}
$$

ile verilir.

İspat. $\mathbb{E}_2^4$ uzayında genelleştirilmiş null Mannheim eğrisi α ve onun Mannheim eşleniği de α^* eğrisi olsun. α^* eğrisi

$$
\alpha^*(f(s))=\alpha(s)+\lambda(s)N(s), \tag{3.57}
$$

şeklinde parametrize edilebilir. Burada s; α eğrisinin pseudo-yay uzunluğu parametresi, $s^*=f(s)=\int\limits_0^s\left\|\alpha^{*\prime}(t)\right\|dt$; α^* eğrisinin yay uzunluğu parametresi, $f:I\subset\mathbb{R}\rightarrow I^*\subset\mathbb{R}$ ve λ düzgün fonksiyonlardır. α eğrisinin k_2 eğriliğine göre ispatımızı iki alt duruma ayırabiliriz: **(C.1)** $k_2=0$ ve **(C.2)** $k_2\neq 0$.

(C.1) $k_2=0$ olsun.

(3.57) denkleminin s ye göre türevi alınır ve (2.3) Frenet denlemleri kullanılırsa

$$
T^*f'=T+\lambda' N-\lambda B_1
$$

bulunur. Son denkleminin $N=\pm B_1^*+bB_2^*$ ile çarpılmasıyla $\lambda'=0$ elde edilir. Kolaylıkla

$$
T^*f'=T-\lambda B_1,\;\; \lambda\in\mathbb{R}_0 \tag{3.58}
$$

olduğu görülür. Burada $\mathbb{R}_0$, $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ olarak ifade edilir. (3.58) denkleminden $g(T^*f',T^*f')=-f'^2=-2\lambda$ bulunur ve böylelikle

$$
f'^2=2\lambda=\text{sabit}\neq 0 \tag{3.59}
$$

yazılabilir. (3.58) denkleminin s ye göre türevinin alınmasıyla ve (2.3), (2.5), (3.59) denklemlerinin kullanılmasıyla;

$$N^* f'^2 = N - \lambda k_3 B_2 \tag{3.60}$$

elde edilir. Son eşitliğin gösterir ki; $g\left(N^* f'^2, N^* f'^2\right) = 1 - \lambda^2 k_3^2 = 0$ dır. Buradan

$$k_3 = \frac{c_1}{\lambda}, \qquad c_1 = \pm 1 \tag{3.61}$$

elde edilir. (3.59) ve (3.61) eşitliklerini (3.60) denkleminde yerleştirirsek

$$N^* = \frac{1}{2\lambda} N - \frac{c_1}{2\lambda} B_2$$

bulunur. Son eşitliğin s ye göre türevi alınıp, (2.3), (2.5) ve (3.61) denklemlerinin kullanılmasıyla

$$B_1^* = -\frac{1}{2\lambda k_2^* f'} \left(\frac{1}{\lambda} T + B_1\right) \tag{3.62}$$

elde edilir. $g\left(B_1^*, B_1^*\right) = 1$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$k_2^* = \frac{c_2}{2\lambda^2}, \qquad c_2 = \pm 1 \tag{3.63}$$

bulunur. (3.62) denkleminin s ye göre türevi alınıp, (2.3) ve (2.5) denklemlerinin kullanılmasıyla

$$k_3^* N^* - k_2^* B_2^* = -\frac{1}{2\lambda k_2^* f'} \left(\frac{1}{\lambda} N + \frac{c_1}{\lambda} B_2\right)$$

elde edilir. Son eşitliğin kendisiyle çarpılmasıyla $-2k_2^* k_3^* = 0$ olduğu görülür. (3.63) eşitliğinden k_2^* sıfır olamayacağından

$$k_3^* = 0$$

bulunur. Böylelikle

$$B_2^* = \lambda \left(N + c_1 B_2\right)$$

olduğu görülür. Bu da *i)* şıkkını ispatlar.

(C.2) $k_2 \neq 0$ olsun.

(3.57) denkleminin s ye göre türevi alınır ve (2.3) eşitliğinden faydalanılırsa $T^* f' = (1 - \lambda k_2) T + \lambda' N - \lambda B_1$ bulunur. Son eşitliğin $N = \pm B_1^* + b B_2^*$ ile çarpılmasıyla $\lambda' = 0$ elde edilir. Bu durumda

$$T^* = \left(\frac{1 - \lambda k_2}{f'}\right) T - \frac{\lambda}{f'} B_1, \qquad \lambda \in \mathbb{R}_0 \tag{3.64}$$

olduğu görülür. $g\left(T^{*},T^{*}\right)=-1$ şartından

$$f'^{2}=2\lambda\left(1-\lambda k_{2}\right) \tag{3.65}$$

elde edilir. $f'^{2}>0$ olduğundan λ sabiti ve k_2 eğriliği arasındaki ilişki aşağıdaki durumları sağlar:

a) $\lambda\neq\dfrac{1}{k_{2}}$,

b) $\lambda>0$ ise $\lambda k_{2}<1$,

c) $\lambda<0$ ise $\lambda k_{2}>1$.

(3.64) eşitliğinin s ye göre türevi alınıp, (2.3), (2.5) ve (3.65) denklemlerinin kullanılmasıyla

$$N^{*}=-\frac{\lambda k_{2}'}{2f'^{2}}T+\left(\frac{1-2\lambda k_{2}}{f'^{2}}\right)N-\frac{\lambda^{3}k_{2}'}{f'^{4}}B_{1}-\frac{\lambda k_{3}}{f'^{2}}B_{2} \tag{3.66}$$

elde edilir. k_2 eğriliğinin sabit olup olmamasına göre **(C.2.1)** $k_2\neq$sabit ve **(C.2.2)** $k_2=$sabit$\neq 0$ olmak üzere iki alt duruma ayırıp inceleyelim.

(C.2.1) $k_2\neq$sabit ise:

(3.66) ve $g(N^{*},N^{*})=0$ şartı gösterir ki:

$$k_{3}^{2}=\frac{-\lambda^{4}k_{2}'^{2}+f'^{2}\left(1-2\lambda k_{2}\right)^{2}}{\lambda^{2}f'^{2}}$$

dır. (3.65) eşitliği son denklemde yerleştirilirse

$$k_{3}^{2}=\frac{-\lambda^{3}k_{2}'^{2}+2\left(1-2\lambda k_{2}\right)^{2}\left(1-\lambda k_{2}\right)}{2\lambda^{2}\left(1-\lambda k_{2}\right)} \tag{3.67}$$

olarak elde edilir. (3.66) denkleminde

$$m=-\frac{\lambda k_{2}'}{2f'^{2}},\quad n=\frac{1-2\lambda k_{2}}{f'^{2}}\quad p=-\frac{\lambda^{3}k_{2}'}{f'^{4}}\quad q=-\frac{\lambda k_{3}}{f'^{2}} \tag{3.68}$$

alınır ve yerleştirilirse $N^{*}=mT+nN+pB_{1}+qB_{2}$ haline gelir. Bu eşitliğin türevini alırsak;

$$\begin{aligned}k_{2}^{*}B_{1}^{*}f'=&\left(m'-nk_{2}+qk_{3}\right)T+\left(m+n'+pk_{2}\right)N\\&+\left(p'-n\right)B_{1}+\left(pk_{3}+q'\right)B_{2}\end{aligned} \tag{3.69}$$

elde edilir. Son eşitliğin $N=\pm B_{1}^{*}+bB_{2}^{*}$ ile çarpılmasıyla $\pm k_{2}^{*}f'=m+n'+pk_{2}$ bulunur. Şimdi $k_{2}^{*}f'=m+n'+pk_{2}$ olduğunu farzedelim. Böylelikle (3.69) eşitliğinden

$$B_{1}^{*}=\left(\frac{m'-nk_{2}+qk_{3}}{k_{2}^{*}f'}\right)T+N+\left(\frac{p'-n}{k_{2}^{*}f'}\right)B_{1}+\left(\frac{pk_{3}+q'}{k_{2}^{*}f'}\right)B_{2}$$

bulunur. $g(B_1^*, B_1^*) = 1$ şartı göz önüne alınırsa

$$2\left(m^{'} - nk_2 + qk_3\right)\left(p^{'} - n\right) - \left(pk_3 + q^{'}\right)^2 = 0 \tag{3.70}$$

elde edilir. (3.67) ve (3.68) eşitliklerinin kullanılmasıyla

$$m^{'} - nk_2 + qk_3 = \frac{-k_2^{''}\lambda^2\left(1-\lambda k_2\right) - 2\lambda^3 k_2^{'2} - 2\left(1-\lambda k_2\right)^2\left(1-2\lambda k_2\right)}{4\lambda^2\left(1-\lambda k_2\right)^2} \tag{3.71}$$

ve

$$p^{'} - n = \frac{-k_2^{''}\lambda^2\left(1-\lambda k_2\right) - 2\lambda^3 k_2^{'2} - 2\left(1-\lambda k_2\right)^2\left(1-2\lambda k_2\right)}{4\lambda\left(1-\lambda k_2\right)^3} \tag{3.72}$$

olduğu görülebilir. Bu iki eşitliğin arasında

$$m^{'} - nk_2 + qk_3 = -\frac{\left(1-\lambda k_2\right)}{\lambda}\left(p^{'} - n\right) \tag{3.73}$$

şeklinde bir ilişki vardır. (3.73), (3.70) denkleminde yerleştirilirse

$$-2\left(\frac{1-\lambda k_2}{\lambda}\right)\left(p^{'} - n\right)^2 - \left(pk_3 + q^{'}\right)^2 = 0$$

bulunur. $k_2 \neq 0$ olduğundan son eşitlikten görülür ki

$$p^{'} - n = 0 \tag{3.74}$$

ve

$$pk_3 + q^{'} = 0. \tag{3.75}$$

(3.67) ve (3.68) eşitliklerinin kullanılmasıyla

$$pk_3 + q^{'} = \frac{k_2^{'}\left[k_2^{''}\lambda^2\left(1-\lambda k_2\right) + 2\lambda^3 k_2^{'2} - \left(1-\lambda k_2\right)\left(1-2\lambda k_2\right)\left(1+2\lambda k_2\right)\right]}{-4\lambda k_3\left(1-\lambda k_2\right)^3} \tag{3.76}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca (3.72) ve (3.74) den

$$-k_2^{''}\lambda^2\left(1-\lambda k_2\right) - 2\lambda^3 k_2^{'2} - 2\left(1-\lambda k_2\right)^2\left(1-2\lambda k_2\right) = 0 \tag{3.77}$$

ve benzer olarak (3.75) ve (3.76) eşitliklerinden

$$k_2^{'}\left[k_2^{''}\lambda^2\left(1-\lambda k_2\right) + 2\lambda^3 k_2^{'2} - \left(1-\lambda k_2\right)\left(1-2\lambda k_2\right)\left(1+2\lambda k_2\right)\right] = 0 \tag{3.78}$$

elde edilir. (3.77) ve (3.78) den görülür ki $k_2 = \dfrac{1}{2\lambda}$ =sabit ve $k_2 = \dfrac{1}{\lambda}$ =sabittir. Bu da $k_2 \neq$ sabit şartımızla çelişir.

(C.2.2) $k_2 =$ sabit$\neq 0$ ise:

$k_2 =$ sabit$\neq 0$ olduğundan (3.66) eşitliği

$$N^* = \left(\frac{1-2\lambda k_2}{f'^2}\right) N - \frac{\lambda k_3}{f'^2} B_2 \tag{3.79}$$

olarak düzenlenebilir. $g\left(N^*, N^*\right) = 0$ olduğundan

$$k_3^2 = \frac{\left(1-2\lambda k_2\right)^2}{\lambda^2} = sabit \tag{3.80}$$

elde edilir. (3.79) eşitliğinde

$$d = \frac{1-2\lambda k_2}{f'^2}, \qquad e = -\frac{\lambda k_3}{f'^2} \tag{3.81}$$

alırsak

$$N^* = dN + eB_2 \tag{3.82}$$

haline gelir. Açıktır ki d ve e sabittir. (3.82) eşitliğinin türevi alınırsa $k_2^* B_1^* f' = \left(-dk_2 + ek_3\right) T - dB_1$ bulunur. Son eşitlik düzenlenirse

$$B_1^* = \left(\frac{-dk_2 + ek_3}{k_2^* f'}\right) T - \frac{d}{k_2^* f'} B_1 \tag{3.83}$$

olduğu görülür. $g(B_1^*, B_1^*) = 1$ şartından

$$2d^2 k_2 - 2edk_3 = k_2^{*2} f'^2$$

elde edilir. (3.65), (3.80) ve (3.81) eşitlikleri göz önünde bulundurularak gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$k_2^{*2} = \frac{\left(1-2\lambda k_2\right)^2}{4\lambda^4 \left(1-\lambda k_2\right)^2}$$

bulunur. (3.83) denkleminde

$$\zeta = \frac{-dk_2 + ek_3}{k_2^* f'}, \quad \eta = -\frac{d}{k_2^* f'} \qquad \zeta, \eta = \text{sabit}$$

olarak alırsak $B_1^* = \zeta T + \eta B_1$ haline dönüşür. Son eşitliğin türevinden

$$\left(k_3^* N^* - k_2^* B_2^*\right) f' = \left(\zeta + \eta k_2\right) N + \eta k_3 B_2 \tag{3.84}$$

elde edilir. (3.84) kendisiyle çarpılırsa kolaylıkla

$$k_3^* = \frac{1}{4\lambda\left(1-\lambda k_2\right) k_2^*} \left(-\left(\zeta + \eta k_2\right)^2 + \eta^2 k_3^2\right)$$

olduğu görülür. (3.82) eşitliği (3.84) de yerleştirilirse

$$B_2^* = \frac{1}{k_2^* f'} \left(\left(k_3^* d f' - \zeta - \eta k_2 \right) N + \left(k_3^* e f' - \eta k_3 \right) B_2 \right)$$

elde edilir. Böylelikle (ii) şartı da ispatlanır.

Bu ispatın (C.2.1) durumuna göre şu sonucu söyleyebiliriz:

Sonuç 3.2. $\mathbb{E}_2^4$ uzayında spacelike asli normal vektör alanı N, pseudo null eşleniğine ait spacelike B_1^* ve null B_2^* vektörleri tarafından gerilen Span$\{B_1^*, B_2^*\}$ lightlike düzleminde yatan genelleştirilmiş null Mannheim eğrisinin, ikinci eğriliği (k_2) sabit olmalıdır.

Asli normali timelike olan genelleştirilmiş null Mannheim eğrisi için aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.7. $\mathbb{E}_2^4$ uzayında timelike asli normal vektör alanı N, pseudo null eşleniğine ait spacelike B_1^* ve null B_2^* vektör alanları tarafından gerilen Span$\{B_1^*, B_2^*\}$ lightlike düzleminde yatan genelleştirilmiş null Mannheim eğrisi bulunmamaktadır.

İspat. Bir eğrinin asli normal vektör alanı N, Span$\{B_1^*, B_2^*\}$ düzleminde yatıyorsa $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $N = aB_1^* + bB_2^*$ olarak yazılır. N timelike vektör olduğundan (2.4) ve (2.6) eşitliklerinden $g(N, N) = a^2 = -1$ olarak hesaplanır. Bu ise çelişkidir.

Aşağıdaki teoremlerimizde null B_1^* ve spacelike B_2^* vektörleri tarafından gerilen Span$\{B_1^*, B_2^*\}$ lightlike düzlemini ele aldık. İspatı Teorem 3.6 ile benzer olarak yapılabilir.

Teorem 3.8. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_2^4$ asli normal vektör alanı N spacelike olan bir genelleştirilmiş null Mannheim eğrisi ve $\alpha^* : I^* \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_2^4$ eğrisi de α eğrisinin genelleştirilmiş Mannheim eşlenik eğrisi olmak üzere α eğrisinin asli normal vektör alanı N, α^* eğrisinin null B_1^* ve spacelike B_2^* vektör alanları tarafından gerilen lightlike Span$\{B_1^*, B_2^*\}$ düzleminde yatsın. Bu durumda α^* bir null eğri olup aşağıdaki iki durumdan birisi sağlanır:

i) $k_2^* = 0$ ise α ve α^* eğrisinin eğrilikleri

$$k_2 = \frac{1-\sinh^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)}{\cosh^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)}, \qquad |k_3| = \cosh^6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right) \ , \qquad |k_3^*| = \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)},$$

Frenet vektörleri arasındaki ilişki;

$$\begin{aligned} T^* = & \ \frac{\sinh^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)}{\cosh^4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)}T + \frac{\sqrt{2}\sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)}{\cosh^3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)}N - \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)}B_1, \\ N^* = & \ -sgn(k_3^*)B_2, \\ B_1^* = & \ \cosh^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)T, \\ B_2^* = & \ -sgn(k_3^*)\left(-\frac{\sqrt{2}\sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)}{\cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)}T - N\right) \end{aligned}$$

dir. Burada $c_1, c_2 = \pm 1$ dır.

ii) $k_2^* \neq 0$ ise α ve α^* eğrisinin eğrilikleri;

$$k_2 = \frac{2\lambda - \lambda'^2}{2\lambda^2} \neq 0, \qquad k_2^* = -\frac{X}{\lambda\lambda'^2 f'^2} \neq 0, \qquad |k_3| = \frac{\sqrt{\lambda^2 f'^4 + X^2}}{\lambda^2},$$

$$|k_3^*| = \frac{\left(\frac{\lambda' X}{2\lambda^2 f'^2}\right)' + \frac{-2\left(\lambda^2 f'^4 + X^2\right) + \lambda X}{2\lambda^3 f'^2} + \left(\left(\frac{X}{\lambda' f'^2}\right)' - \frac{X}{\lambda'^2 f'^2}\right)\left(\frac{2\lambda - \lambda'^2}{2\lambda^2}\right)}{f'^2}$$

olarak verilebilir. Burada $X(s) = \lambda\lambda'' - \lambda'^2 - \lambda$, $f' = e^{\int \frac{\lambda\lambda'' - \lambda'^2 - \lambda}{\lambda\lambda'} ds}$ dır ve $\lambda(s)$ sabitten farklı olmak üzere aşağıdaki diferensiyel denklemi sağlar:

$$2\left[\left(\frac{\lambda' X}{2\lambda^2 f'^2}\right)' + \frac{-2\left(\lambda^2 f'^4 + X^2\right) + \lambda X}{2f'^2\lambda^3}\right]\left[\left(\frac{X}{\lambda' f'^2}\right)' - \frac{X}{\lambda^2 f'^2}\right]$$

$$-\frac{X^2\left[\lambda^2 f'^4 + \lambda\lambda' X' - \left(3\lambda\lambda'' + 2\lambda'^2 - 3\lambda\right)X\right]^2}{\lambda^4\lambda'^2 f'^4\left(\lambda^2 f'^4 - X^2\right)} = 0.$$

α ve α^*eğrilerinin Frenet vektörleri arasındaki ilişki

$$
\begin{aligned}
T^* = & \quad \frac{\lambda'^2}{2\lambda f'} T + \frac{\lambda'}{f'} N - \frac{\lambda}{f'} B_1, \\
N^* = & \quad -sgn(k_3^*) \left(\frac{\lambda' \left(\lambda\lambda'' - \lambda'^2 - \lambda \right)}{2\lambda^2 f'^2} \right) T + \quad \frac{\lambda\lambda'' - \lambda - \lambda\lambda'}{\lambda' f'^2} \Bigg) B_1 \\
& \qquad\qquad - \frac{\sqrt{\lambda^2 f'^4 + \left(\lambda\lambda'' - \lambda'^2 - \lambda \right)^2}}{\lambda f'^2} B_2, \\
B_1^* = & \quad xT + yB_1 + zB_2, \\
B_2^* = & \quad \frac{sgn(k_3^*)}{f' k_3^*} [\left(x' + zk_3 - k_2^* u f' \right) T + \left(x + yk_2 \right) N \\
& \qquad\qquad + \left(y' - k_2^* \upsilon f' \right) B_1 + \left(yk_3 + z' - k_2^* w f' \right) B_2]
\end{aligned}
$$

olarak verilir. Burada x, y, z

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{f'} \left(\left(\frac{\lambda' X}{2\lambda^2 f'^2} \right)' + \frac{-2\left(\lambda^2 f'^4 + X^2 \right) + \lambda X}{2\lambda^3 f'^2} \right), \\
y &= \frac{1}{f'} \left(\left(\frac{X}{\lambda' f'^2} \right)' - \frac{X}{\lambda'^2 f'^2} \right), \\
z &= \frac{1}{f'} \left(\frac{X \left[\lambda^2 f'^4 + \lambda\lambda' X' - \left(3\lambda\lambda'' + 2\lambda'^2 - 3\lambda \right) X \right]}{\lambda^2 \lambda' f'^2 \sqrt{\lambda^2 f'^4 - X^2}} \right)
\end{aligned}
$$

ve u, υ, w

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{\lambda\lambda'\lambda'' - \lambda\lambda' - \lambda'^3}{2\lambda^2 f'^2}, \\
\upsilon &= \frac{\lambda\lambda'^2 + \lambda\lambda'\lambda'' - \lambda^2\lambda' - 2\lambda\lambda'^2}{\lambda\lambda' f'^2}, \\
w &= \lambda'^2 \left(\lambda' - 2\lambda\lambda'\lambda'' + 2\lambda \right)
\end{aligned}
$$

ile verilir.

Genelleştirilmiş null Mannheim eğrisinin asli normali N timelike ise aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.9. $\mathbb{E}_2^4$ uzayında timelike asli normal vektör alanı N, pseudo null eşleniğine ait null B_1^* ve spacelike B_2^* vektörleri tarafından gerilen Span$\{B_1^*, B_2^*\}$

lightlike düzleminde yatan genelleştirilmiş null Mannheim eğrisi bulunmamaktadır.

İspat. İspatı Teorem 3.7 ye benzer şekilde yapılabilir.

Örnek 3.3. $\mathbb{E}_2^4$ de aşağıda denklemi verilen bir null eğriyi ele alalım:

$$\gamma(s) = \left(\sin s, \cos s, \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\sqrt{2}s\right), \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\sqrt{2}s\right)\right)$$

γ eğrisinin Frenet çatısı

$$\begin{aligned}
T(s) &= \left(\cos s, -\sin s, \cos\left(\sqrt{2}s\right), -\sin\left(\sqrt{2}s\right)\right),\\
N(s) &= \left(-\sin s, -\cos s, -\sqrt{2}\sin\left(\sqrt{2}s\right), -\sqrt{2}\cos\left(\sqrt{2}s\right)\right),\\
B_1(s) &= \left(-\frac{1}{2}\cos s, \frac{1}{2}\sin s, \frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{2}s\right), -\frac{1}{2}\sin\left(\sqrt{2}s\right)\right),\\
B_2(s) &= \left(-\sqrt{2}\sin s, -\sqrt{2}\cos u, -\sin\left(\sqrt{2}s\right), -\cos\left(\sqrt{2}s\right)\right)
\end{aligned}$$

eğrilikleri de $k_1(s) = 1,\ k_2(s) = \frac{3}{2},\ k_3(s) = -\sqrt{2}$ olarak verilebilir. Kolaylıkla görülür ki γ eğrisi asli normali spacelike olan bir null eğridir.

$$\gamma^*(s) = \gamma(s) + \frac{3+\sqrt{2}}{7}N(s)$$

olacak biçimde bir $\gamma^* : I^* \to E_2^4$ eğrisi tanımlayalım. Buna göre

$$\gamma^*(s) = \left(\frac{4-\sqrt{2}}{7}\right)\left(\sin s, \cos s, -\frac{1}{2}\sin\left(\sqrt{2}s\right), -\frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{2}s\right)\right)$$

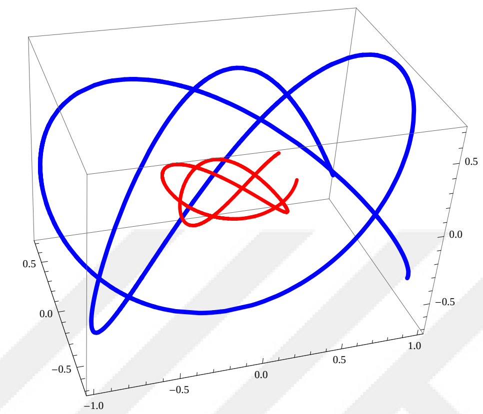
olarak verilebilir. Teorem 3.6, (ii) şartından γ^* eğrisinin Frenet çatısı

$$\begin{aligned}
T^*(s^*) &= \left(\sqrt{2}\cos s, -\sqrt{2}\sin s, -\cos\left(\sqrt{2}s\right), \sin\left(\sqrt{2}s\right)\right),\\
N^*(s^*) &= \left(-\sqrt{2}-4\right)\left(\sin s, \cos s, -\sin\left(\sqrt{2}s\right), -\cos\left(\sqrt{2}s\right)\right),\\
B_1^*(s^*) &= \left(-\cos s, \sin s, \sqrt{2}\cos\left(\sqrt{2}s\right), -\sqrt{2}\sin\left(\sqrt{2}s\right)\right),\\
B_2^*(s^*) &= \left(\frac{4-\sqrt{2}}{28}\right)\left(\sin s, \cos s, \sin\left(\sqrt{2}s\right), -\cos\left(\sqrt{2}s\right)\right)
\end{aligned}$$

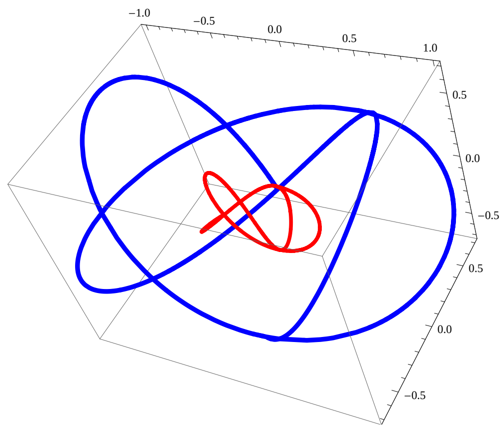
ve eğrilikleri $k_1^*(s) = 1,\ k_2^*(s) = 9\sqrt{2}+8,\ k_3^*(s) = -\frac{3}{4}\sqrt{2}$ olarak hesaplanılabilir. $g(T^*,T^*) = -1,\ g(N^*,N^*) = g(B_2^*,B_2^*) = 0$ ve $g(B_1^*,B_1^*) = 1$ olarak bulunur ki bu da γ^* eğrisinin pseudo null eğri olduğunu gösterir. Teoreme göre γ

genelleştirilmiş null Mannheim eğri ve γ^* eğrisi de onun pseudo null Mannheim eşleniğidir.

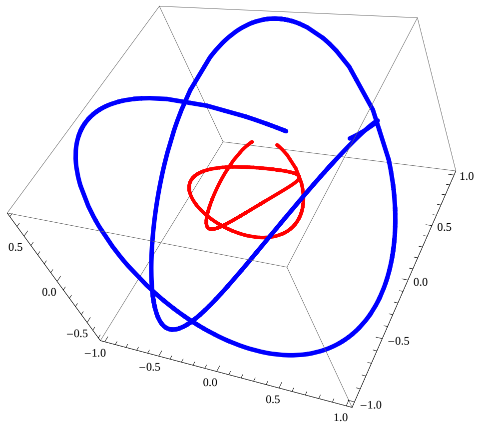
Örnekteki genelleştirilmiş null Mannheim eğri ve onun pseudo null eşlenik eğrisinin sırasıyla $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ ve $x_4 = 0$ uzaylarındaki izdüşümleri aşağıda verilmiştir.



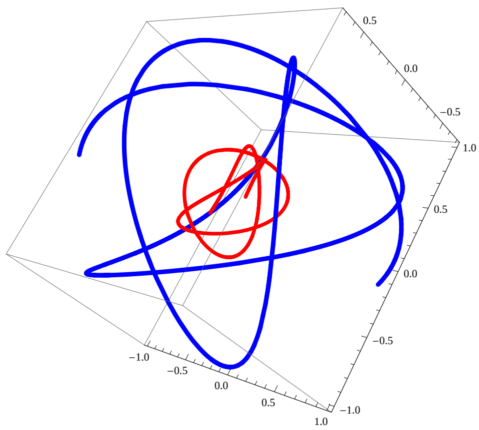
Şekil 3.9. Genelleştirilmiş null Mannheim γ eğrisi (mavi) ve onun pseudo null Mannheim eşleniği γ^* eğrisinin (kırmızı) $x_3 = 0$ uzayına izdüşümü



Şekil 3.10. Genelleştirilmiş null Mannheim γ eğrisi (mavi) ve onun pseudo null Mannheim eşleniği γ^* eğrisinin (kırmızı) $x_4 = 0$ uzayına izdüşümü



Şekil 3.11. Genelleştirilmiş null Mannheim γ eğrisi (mavi) ve onun pseudo null Mannheim eşleniği γ^* eğrisinin (kırmızı) $x_3 = 0$ uzayına izdüşümü



Şekil 3.12. Genelleştirilmiş null Mannheim γ eğrisi (mavi) ve onun pseudo null Mannheim eşleniği γ^* eğrisinin (kırmızı) $x_4 = 0$ uzayına izdüşümü

4. 4-BOYUTLU 2-İNDEKSLİ YARI-ÖKLİDYEN UZAYDA GENELLEŞTİRİLMİŞ PARTIALLY NULL MANNHEIM EĞRİLER

Bu bölümde 4-boyutlu 2-indeksli yarı-Öklidyen uzayda genelleştirilmiş partially null Mannheim eğriler incelenecektir. Öncelikle birinci eğriliği sıfırdan farklı geodezik olmayan eğriler ve onların geodezik olmayan Mannheim eşlenikleri ele alınacaktır. Şimdi genelleştirilmiş partially null Mannheim eğri tanımını verelim.

Tanım 4.1. $\alpha : I \to \mathbb{E}_2^4$ bir partially null eğri olsun. Eğer $\phi : I \to I^*$ dönüşümü altında α nın her noktasındaki asli normal vektör alanı N, başka bir eğrinin birinci binormal vektör alanı B_1^* ve ikinci binormal vektör alanı B_2^* ın gerdiği düzlemde yatacak şekilde $\alpha^* : I \to \mathbb{E}_2^4$ eğrisi bulunuyorsa α eğrisine genelleştirilmiş partially null Mannheim eğrisi denir. α^* eğrisi ise α eğrisinin genelleştirilmiş Mannheim eşlenik eğrisi adını alır. Bu durumda (α, α^*) eğri çifti de genelleştirilmiş Mannheim eğri çifti olarak adlandırılır.

Daha önce belirttiğimiz gibi $\alpha : I \to \mathbb{E}_2^4$ genelleştirilmiş partially null Mannheim eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B_1, B_2\}$ ve onun genelleştirilmiş Mannheim eğri çifti olan $\alpha^* : I^* \to \mathbb{E}_2^4$ eğrisinin Frenet çatısı da $\{T^*, N^*, B_1^*, B_2^*\}$ olsun. α eğrisinin asli normal vektör alanı N; B_1^* ve B_2^* tarafından gerilen düzlemde yattığından $N(s) = a(s)B_1^*(s) + b(s)B_2^*(s)$ eşitliğini sağlar. Burada $a(s)$ ve $b(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. Araştırmamızı yine Span$\{B_1^*, B_2^*\}$ düzleminin nedensel (causal) karakterine bağlı olarak yine üç duruma ayırarak yapacağız.

(A) Span$\{B_1^*, B_2^*\}$ spacelike düzlemdir,

(B) Span$\{B_1^*, B_2^*\}$ timelike düzlemdir,

(C) Span$\{B_1^*, B_2^*\}$ lightlike düzlemdir.

Bu üç durumu da ayrı ayrı inceleyelim.

(A) Span$\{B_1^*, B_2^*\}$ düzlemi bir spacelike düzlem olsun:

Teorem 4.1. 4-boyutlu 2-indeksli yarı-Öklidyen uzay, $\mathbb{E}_2^4$ de geodezik olmayan ve null olmayan genelleştirilmiş Mannheim eşleniğe sahip geodezik olmayan genelleştirilmiş partially null Mannheim eğrisi yoktur.

İspat. $\alpha : I \to \mathbb{E}_2^4$ geodezik olmayan genelleştirilmiş partially null Mannheim eğrisi ve onun geodezik olmayan genelleştirilmiş Mannheim eşleniği $\alpha^* : I^* \to \mathbb{E}_2^4$

eğrisi de null olmayan Frenet eğrisi olsun. O halde α eğrisinin asli normal vektör alanı N, spacelike B_1^* ve B_2^* vektörlerinin gerdiği spacelike düzlemde yatar. Bu sebepten N; $N(s) = a(s)B_1^*(s) + b(s)B_2^*(s)$ şeklinde yazılabilir. Burada $a(s)$ ve $b(s)$ türevlenebilir fonksiyonlardır. α^*eğrisinin parametrizasyonu

$$\alpha^*(f(s)) = \alpha(s) + \lambda(s)N(s) \tag{4.1}$$

ile verilir. Burada s ve $s^* = f(s) = \int\limits_0^s \left\|\alpha^{*'}(t)\right\| dt$, sırasıyla α ve α^* eğrilerinin pseudo-yay parametresi ve $f : I \subset \mathbb{R}$ ile λ diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. (4.1) denkleminin s ye göre türevinin alınmasıyla

$$T^* f^{'} = (1 + \lambda k_1)\, T + \lambda^{'} N + \lambda k_2 B_1 \tag{4.2}$$

elde edilir. (4.2) denkleminin $N = aB_1^* + bB_2^*$ ile çarpımıyla görülürki;

$$\lambda^{'} = 0$$

Böylelikle,

$$\lambda = \text{sabit} \neq 0$$

dır. Son denkleminin (4.2) de yerleştirilmesiyle,

$$T^* f^{'} = (1 + \lambda k_1)\, T + \lambda k_2 B_1 \tag{4.3}$$

bulunur. (4.3) denkleminin s ye göre türevinin alınmasıyla

$$-k_1^* N^* f^{'2} + T^* f^{''} = (1 + \lambda k_1)^{'}\, T + (1 + \lambda k_1)\, k_1 N + \lambda k_2^{'} B_1 \tag{4.4}$$

elde edilir. (4.4) denkleminin $N = aB_1^* + bB_2^*$ ile çarpımıyla görülürki;

$$1 + \lambda k_1 = 0. \tag{4.5}$$

Üstelik (4.3) denkleminden

$$g\left(T^* f^{'}, T^* f^{'}\right) = -f^{'2} = \epsilon_1 (1 + \lambda k_1)^2 \tag{4.6}$$

elde edilir. (4.5) denkleminin (4.6) de yerleştirilmesiyle,

$$f^{'} = 0$$

bulunur ki bu ise çelişkidir.

(B) Span$\{B_1^*, B_2^*\}$ düzlemi bir timelike düzlem olsun:

Bu durumda B_1^* ve B_2^* vektörlerinin nedensel karakterlerine bağlı olarak iki teorem elde ettik. Her timelike düzlem spacelike ve timelike ortogonal iki vektör tarafından veya lineer bağımsız iki null vektör tarafından gerilir. Bu durumda B_1^* ve B_2^* vektörlerinin nedensel karakterlerine bağlı olarak üç teorem elde ettik.

Teorem 4.2. 4-boyutlu 2-indeksli yarı-Öklidyen uzay, $\mathbb{E}_2^4$ de spacelike birinci binormal ve timelike ikinci binormale sahip, null olmayan, geodezik olmayan genelleştirilmiş Mannheim eşlenik eğriye sahip geodezik olmayan genelleştirilmiş partially null Mannheim eğrisi yoktur.

İspat. $\alpha : I \to \mathbb{E}_2^4$ geodezik olmayan genelleştirilmiş partially null Mannheim eğri ve onun geodezik olmayan genelleştirilmiş Mannheim eşleniği $\alpha^* : I^* \to \mathbb{E}_2^4$ eğrisinin de null olmayan bir eğri olduğunu farz edelim. O halde α eğrisinin asli normal vektör alanı N, spacelike B_1^* ve timelike B_2^* vektörlerinin gerdiği timelike düzlemde yatar. $a(s)$ ve $b(s)$ türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere N; $N(s) = a(s)B_1^*(s) + b(s)B_2^*(s)$ şeklinde yazılabilir. α^*eğrisinin parametrizasyonu

$$\alpha^*(f(s)) = \alpha(s) + \lambda(s)N(s) \tag{4.7}$$

ile verilir. Burada s ve $s^* = f(s) = \int\limits_0^s \left\|\alpha^{*'}(t)\right\| dt$, sırasıyla α ve α^* eğrilerinin pseudo-yay parametresi ve $f : I \subset \mathbb{R}$ ile λ düzgün fonksiyonlardır. (4.7) denkleminin s ye göre türevi alınmasıyla

$$T^* f^{'} = (1 + \lambda k_1)\, T + \lambda^{'} N + \lambda k_2 B_1 \tag{4.8}$$

elde edilir. (4.8) denkleminin $N = aB_1^* + bB_2^*$ ile çarpımıyla görülürki;

$$\lambda^{'} = 0. \tag{4.9}$$

Böylelikle,

$$\lambda = \text{sabit} \neq 0$$

dır. (4.9) denkleminin (4.8) de yerleştirilmesiyle

$$T^* f^{'} = (1 + \lambda k_1)\, T + \lambda k_2 B_1 \tag{4.10}$$

bulunur. (4.10) denkleminin s ye göre türevinin alınmasıyla

$$\epsilon_2^* k_1^* N^* f'^2 + T^* f'' = (1 + \lambda k_1)' T + (1 + \lambda k_1) k_1 N + \lambda k_2' B_1 \tag{4.11}$$

ve kendisiyle çarpılmasıyla

$$g\left(T^* f', T^* f'\right) = \epsilon_1^* f'^2 = \epsilon_1 (1 + \lambda k_1)^2 \tag{4.12}$$

elde edilir. (4.11) denkleminin $N = aB_1^* + bB_2^*$ ile çarpımıyla görülürki;

$$1 + \lambda k_1 = 0 \tag{4.13}$$

elde edilir. (4.13) denkleminin (4.12) de yerleştirilmesiyle,

$$f' = 0$$

bulunur. Bu ise çelişkidir.

Teorem 4.3. 4-boyutlu 2-indeksli yarı-Öklidyen uzay, $\mathbb{E}_2^4$ de timelike birinci binormal ve spacelike ikinci binormale sahip, null olmayan, geodezik olmayan genelleştirilmiş Mannheim eşlenik eğriye sahip geodezik olmayan genelleştirilmiş partially null Mannheim eğrisi yoktur.

İspat. İspatı Teorem 4.2'ye benzer olarak yapılabilir.

Teorem 4.4. 4-boyutlu 2-indeksli yarı-Öklidyen uzay, $\mathbb{E}_2^4$ de geodezik olmayan partially null genelleştirilmiş Mannheim eşlenik eğrisine sahip geodezik olmayan genelleştirilmiş partially null Mannheim eğrisi yoktur.

İspat. $\alpha : I \to \mathbb{E}_2^4$ geodezik olmayan genelleştirilmiş partially null Mannheim eğri ve onun geodezik olmayan genelleştirilmiş Mannheim eşleniği $\alpha^* : I^* \to \mathbb{E}_2^4$ eğrisi partially null olsun. O halde α eğrisinin asli normal vektör alanı N, lineer bağımsız null B_1^* ve B_2^* vektörlerinin gerdiği timelike düzlemde yatar. Bu sebepten N; $N(s) = a(s)B_1^*(s) + b(s)B_2^*(s)$ şeklinde yazılabilir. Burada $a(s)$ ve $b(s)$ türevlenebilir fonksiyonlardır. α^*eğrisinin parametrizasyonu

$$\alpha^*(f(s)) = \alpha(s) + \lambda(s)N(s) \tag{4.14}$$

ile verilir. Burada s ve $s^* = f(s) = \int\limits_0^s \left\|\alpha^{*\prime}(t)\right\| dt$, sırasıyla α ve α^* eğrilerinin pseudo-yay parametresi ve $f : I \subset \mathbb{R}$ ile λ diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

(4.14) denkleminin s ye göre türevi alınmasıyla

$$T^{*}f^{'}=(1+\lambda k_{1})\,T+\lambda^{'}N+\lambda k_{2}B_{1} \tag{4.15}$$

elde edilir. (4.15) denkleminin $N=aB_1^*+bB_2^*$ ile çarpımıyla $\lambda^{'}=0$ bulunur. Buradan λ =sabit$\neq 0$ olduğu görülür. (4.15) denkleminin düzenlenmesiyle,

$$T^{*}f^{'}=(1+\lambda k_{1})\,T+\lambda k_{2}B_{1} \tag{4.16}$$

bulunur. (4.16) denkleminin s ye göre türevinin alınmasıyla

$$k_1^*N^*f^{'2}+T^*f^{''}=(1+\lambda k_1)^{'}\,T+(1+\lambda k_1)\,k_1N+\lambda k_2^{'}B_1 \tag{4.17}$$

ve kendisiyle çarpılmasıyla

$$g\left(T^*f^{'},T^*f^{'}\right)=\epsilon_1^*f^{'2}=\epsilon_1\,(1+\lambda k_1)^2 \tag{4.18}$$

elde edilir. (4.17) denkleminin $N=aB_1^*+bB_2^*$ ile çarpımıyla görülürki;

$$1+\lambda k_1=0$$

elde edilir. Son denkleminin (4.18) de yerleştirilmesiyle,

$$f^{'}=0$$

bulunur. Bu bir çelişkidir.

(C) Span$\{B_1^*,B_2^*\}$ düzlemi bir lightlike düzlem olsun:

Bu durumda her lightlike düzlem null B_1^* ve spacelike B_2^* veya spacelike B_1^* ve null B_2^* tarafından gerildiğinden, B_1^* ve B_2^* vektörlerinin nedensel karakterlerine bağlı olarak iki teorem elde ettik.

Teorem 4.5. $\mathbb{E}_2^4$ uzayında geodezik olmayan genelleştirilmiş null Mannheim eşlenik eğrisine sahip geodezik olmayan genelleştirilmiş partially null Mannheim eğrisi yoktur.

İspat. $\alpha:I\to\mathbb{E}_2^4$ geodezik olmayan genelleştirilmiş partially null Mannheim eğri ve onun geodezik olmayan genelleştirilmiş Mannheim eşleniği $\alpha^*:I^*\to\mathbb{E}_2^4$ eğrisinin null olduğunu farz edelim. α eğrisinin asli normal vektör alanı N; null B_1^* ve spacelike B_2^* tarafından gerilen Span$\{B_1^*,B_2^*\}$ lightlike düzleminde yattığından α^*; (2.3) denklemlerini sağlayan bir null eğridir. Burada B_1^* null, B_2^* spacelike olduğundan $N(s) = a(s)B_1^*(s) + b(s)B_2^*(s)$ kendi ile çarpıldığında $g(N, N) = b^2$ elde edilir. $b^2 > 0$ olacağından N spacelike vektördür. α^*eğrisinin parametrizasyonu

$$\alpha^*(f(s)) = \alpha(s) + \lambda(s)N(s) \tag{4.19}$$

ile verilir. Burada s ve $s^* = f(s)$, sırasıyla α ve α^* eğrilerinin pseudo-yay parametresi ve $f : I \subset \mathbb{R}$ ile λ düzgün fonksiyonlardır.(4.19) denkleminin s ye göre türevi alınmasıyla

$$T^*f' = (1 + \lambda k_1)\, T + \lambda' N + \lambda k_2 B_1 \tag{4.20}$$

elde edilir. (4.20) denkleminin $N = aB_1^* + bB_2^*$ ile çarpımıyla

$$af' = \lambda' \tag{4.21}$$

elde edilir. (4.20) eşitliğinin kendisiyle çarpımından

$$\lambda' = m\,(1 + \lambda k_1) \tag{4.22}$$

bulunur. Burada $m = \pm 1$dir. (4.21) ve (4.22) eşitliklerinden

$$af' = m\,(1 + \lambda k_1) \tag{4.23}$$

olduğu görülür. (4.20) denkleminin tekrar türevi alındığında

$$N^*f'^2 + T^*f'' = (1 + \lambda k_1)'\, T + (1 + \lambda k_1)\, k_1 N + \lambda'' N + \lambda' (k_1 T + k_2 B_1) + (\lambda k_2)' B_1$$

elde edilir. Son eşitlikte (4.23) denklemi yerleştirilirse

$$N^*f'^2 + T^*f'' = \left(maf'' + af'k_1\right) T + \left(mak_1 f' + af''\right) N + \left(2ak_2 f' + \lambda k_2'\right) B_1 \tag{4.24}$$

bulunur. (4.24) denklemi $N = aB_1^* + bB_2^*$ ile çarpıldığında

$$mak_1 f' = 0$$

elde edilir. $a = 0$ ise (4.24) denklemi $N^*f'^2 + T^*f'' = \lambda k_2' B_1$ haline gelir. Son eşitliği kendisiyle çarparsak $f' = 0$ bulunur ki bu bir çelişkidir. $k_1 = 0$ ise geodezik olmayan eğri olamayacağından bu durum da çelişkilidir.

Teorem 4.6. $\mathbb{E}_2^4$ uzayında geodezik olmayan pseudo null genelleştirilmiş Mannheim eşlenik eğrisine sahip geodezik olmayan genelleştirilmiş partially null Mannheim eğrisi yoktur.

İspat. $\alpha : I \to \mathbb{E}_2^4$ geodezik olmayan genelleştirilmiş partially null Mannheim eğri ve onun geodezik olmayan genelleştirilmiş Mannheim eşleniği $\alpha^* : I^* \to \mathbb{E}_2^4$ eğrisinin pseudo null olduğunu farz edelim. α eğrisinin asli normal vektör alanı N, spacelike B_1^* ve null B_2^* tarafından gerilen Span$\{B_1^*, B_2^*\}$ lightlike düzleminde yattığından α^*; (2.5) denklemlerini sağlayan bir pseudo null eğridir. α^* eğrisinin parametrizasyonu

$$\alpha^*(f(s)) = \alpha(s) + \lambda(s)N(s) \tag{4.25}$$

ile verilir. (4.25) denkleminin s ye göre türevi alınmasıyla

$$T^* f' = (1 + \lambda k_1)\, T + \lambda' N + \lambda k_2 B_1 \tag{4.26}$$

elde edilir. (4.26) denkleminin $N = aB_1^* + bB_2^*$ ile çarpımıyla

$$\lambda' = 0$$

elde edilir. Son eşitliği (4.26) de yerleştirirsek

$$T^* f' = (1 + \lambda k_1)\, T + \lambda k_2 B_1 \tag{4.27}$$

bulunur. (4.27) denklemini kendisiyle çarparsak

$$g\left(T^* f', T^* f'\right) = -f'^2 = -\left(1 + \lambda k_1\right)^2$$

olduğu görülür. Böylece kolayca

$$f'^2 = \left(1 + \lambda k_1\right)^2 \tag{4.28}$$

ve

$$f' = m\left(1 + \lambda k_1\right), \qquad m = \pm 1 \tag{4.29}$$

yazılabilir. (4.29) kullanılarak (4.28) eşitliğinin türevinden

$$f'' = m\lambda k_1' \tag{4.30}$$

elde edilir. Diğer yandan (4.27) denkleminin türevinden

$$N^* f'^2 + T^* f'' = \left(1 + \lambda k_1\right)' T + \left(1 + \lambda k_1\right) k_1 N + \lambda k_2' B_1 \tag{4.31}$$

olduğu görülür. (4.31) denkleminin kendisiyle çarpımından

$$f''^2 = \lambda^2 k_1'^2 - (1 + \lambda k_1)^2 k_1^2 \tag{4.32}$$

elde edilir. (4.30), (4.32) eşitliğinde yerleştirilirse

$$(1 + \lambda k_1)^2 k_1^2 = 0.$$

bulunur. Son eşitliğe göre α geodezik olmayan eğri olduğundan $k_1 \neq 0$ dır. Dolayısıyla $(1 + \lambda k_1) = 0$ yazılabilir. Buradan açıktır ki $\lambda = -\dfrac{1}{k_1}$ dir. Bu değeri (4.28) denkleminde yerleştirirsek $f' = 0$ olduğu görülür. Bu ise çelişkidir.

5. 4-BOYUTLU 2-İNDEKSLİ YARI-ÖKLİDYEN UZAYDA GENELLEŞTİRİLMİŞ PSEUDO NULL MANNHEIM EĞRİLER

Bu bölümde $\mathbb{E}_2^4$ uzayında genelleştirilmiş pseudo null Mannheim eğrileri incelenecektir. Önce genelleştirilmiş pseudo null Mannheim eğri tanımını verelim.

Tanım 5.1. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_2^4$ bir pseudo null eğri olsun. Eğer $\phi : I \rightarrow I^*$ dönüşümü altında α nın her noktasındaki asli normal vektör alanı N, başka bir eğrinin birinci binormal vektör alanı B_1^* ve ikinci binormal vektör alanı B_2^* ın gerdiği düzlemde yatacak şekilde $\alpha^* : I \rightarrow \mathbb{E}_2^4$ eğrisi bulunuyorsa α eğrisine genelleştirilmiş pseudo null Mannheim eğrisi denir. α^* eğrisi ise α eğrisinin genelleştirilmiş Mannheim eşlenik eğrisi adını alır. Bu durumda (α, α^*) eğri çifti de genelleştirilmiş Mannheim eğri çifti olarak adlandırılır.

$\mathbb{E}_2^4$ uzayında bulunan α genelleştirilmiş pseudo null Mannheim eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B_1, B_2\}$ ve onun genelleştirilmiş Mannheim eğri çifti olan α^* eğrisinin Frenet çatısı da $\{T^*, N^*, B_1^*, B_2^*\}$ olsun. α eğrisinin asli normal vektör alanı N; B_1^* ve B_2^* tarafından gerilen düzlemde yattığından $N(s) = a(s)B_1^*(s) + b(s)B_2^*(s)$ eşitliğini sağlar. Burada $a(s)$ ve $b(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. Span$\{B_1^*, B_2^*\}$ düzleminin nedensel karakterine bağlı olarak yine üç duruma ayıracağız:

(A) Span$\{B_1^*, B_2^*\}$ spacelike düzlemdir,

(B) Span$\{B_1^*, B_2^*\}$ timelike düzlemdir,

(C) Span$\{B_1^*, B_2^*\}$ lightlike düzlemdir.

Şimdi üç durumu da ayrı ayrı inceleyelim.

(A) Span$\{B_1^*, B_2^*\}$ düzlemi bir spacelike düzlem olsun:

Teorem 5.1. $\mathbb{E}_2^4$ uzayında α eğrisinin asli normal vektör alanı N, null olmayan ve geodezik olmayan $\alpha^* : I^* \rightarrow \mathbb{E}_2^4$ Mannheim eşlenik eğrisine ait spacelike birinci ve ikinci binormal vektörleri B_1^* ve B_2^* tarafından gerilen Span$\{B_1^*, B_2^*\}$ spacelike düzleminde yatan geodezik olmayan genelleştirilmiş pseudo null Mannheim eğrisi yoktur.

İspat. Bilindiği üzere Span$\{B_1^*, B_2^*\}$ spacelike düzlemi, her ikisi de spacelike B_1^* ve B_2^* vektörleri tarafından gerildiğinden $\alpha : I \to \mathbb{E}_2^4$ genelleştirilmiş pseudo null Mannheim eğrisinin Mannheim eşleniği $\alpha^* : I^* \to \mathbb{E}_2^4$ eğrisi null olmayan Frenet eğrisidir. α eğrisinin asli normal vektör alanı N; $N(s) = a(s)B_1^*(s) + b(s)B_2^*(s)$ şeklinde yazılabilir. (2.1) ve (2.5) denklemleri kullanılarak $g(N, N) = a^2 + b^2 = 0$ elde edilir. Bu ise çelişkidir.

(B) Span$\{B_1^*, B_2^*\}$ düzlemi bir timelike düzlem olsun:

Her timelike düzlem spacelike ve timelike ortogonal iki vektör tarafından veya lineer bağımsız iki null vektör tarafından gerildiğinden, B_1^* ve B_2^* vektörlerinin nedensel karakterlerine bağlı olarak bu durumda iki teorem elde ettik.

Teorem 5.2. $\mathbb{E}_2^4$ uzayında α eğrisinin asli normali N, null olmayan ve geodezik olmayan $\alpha^* : I^* \to \mathbb{E}_2^4$ Mannheim eşlenik eğrisine ait spacelike B_1^* ve timelike B_2^* (veya timelike B_1^* ve spacelike B_2^*) vektörleri tarafından gerilen Span$\{B_1^*, B_2^*\}$ timelike düzleminde yatan geodezik olmayan genelleştirilmiş pseudo null Mannheim eğrisi yoktur.

İspat. $\alpha : I \to \mathbb{E}_2^4$ genelleştirilmiş pseudo null Mannheim eğrisi ve onun genelleştirilmiş Mannheim eşleniği $\alpha^* : I^* \to \mathbb{E}_2^4$ eğrisi de null olmayan Frenet eğrisi olduğunu düşünelim. Bu durumda α eğrisinin asli normal vektör alanı N, spacelike B_1^* ve timelike B_2^* (veya timelike B_1^* ve spacelike B_2^*) vektörlerinin gerdiği timelike düzlemde yatar. Buna göre N asli normali $N(s) = a(s)B_1^*(s) + b(s)B_2^*(s)$ şeklinde yazılabilir. Burada $a(s)$ ve $b(s)$ türevlenebilir fonksiyonlardır. Ayrıca (2.1) çatısına göre $\epsilon_1^*\epsilon_2^* = -1$ ve $\epsilon_3^*\epsilon_4^* = -1$ dir. α^* eğrisinin parametrizasyonu

$$\alpha^*(f(s)) = \alpha(s) + \lambda(s)N(s) \tag{5.1}$$

ile verilir. Burada s ve $s^* = f(s)$, sırasıyla α ve α^* eğrilerinin pseudo-yay parametresi ve $f : I \subset \mathbb{R}$ ile λ diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. (5.1) denkleminin s ye göre türevi alınmasıyla ve (2.1) ve (2.5) denklemleri kullanılarak

$$T^* f^{'} = T + \lambda^{'} N + \lambda k_2 B_1 \tag{5.2}$$

elde edilir. (5.2) denkleminin kendisiyle çarpılmasıyla

$$g\left(T^* f^{'}, T^* f^{'}\right) = \epsilon_1^* f^{'2} = \epsilon_1 + \epsilon_2 \lambda^2 k_2^2 \tag{5.3}$$

ve tekrar s ye göre türevi alınmasıyla

$$\epsilon_2^* k_1^* N^* f'^2 + T^* f'' = \left(k_1 + \lambda'' + \lambda k_2 k_3\right) N + \left(2\lambda' k_2 + \lambda k_2'\right) B_1 - \epsilon_2 \lambda k_2^2 B_2 \quad (5.4)$$

bulunur. Son denklemin $N = aB_1^* + bB_2^*$ ile çarpımıyla görülürki;

$$-\epsilon_2 \lambda k_2^2 = 0$$

dır. $\epsilon_2 \neq 0$ olduğu açıktır. $\lambda = 0$ ise (5.1) denkleminden $\alpha^* = \alpha$ elde edilir bu ise mümkün değildir. $k_2 = 0$ ise (5.3) eşitliğinden $f'^2 = \pm 1$ bulunur. Dolayısıyla $f'' = 0$ dır. Buna göre (5.4) düzenlenirse $\pm \epsilon_2^* k_1^* N^* = \left(k_1 + \lambda''\right) N$ elde edilir. N^* null olmayan vektörü ile N null vektörü kolineer olduğundan çelişkidir.

Teorem 5.3. $\mathbb{E}_2^4$ uzayında α eğrisinin asli normal vektör alanı N, geodezik olmayan partially null $\alpha^* : I^* \to \mathbb{E}_2^4$ Mannheim eşlenik eğrisine ait null B_1^* ve B_2^* vektörlerinin gerdiği $\mathrm{Span}\{B_1^*, B_2^*\}$ timelike düzleminde yatan geodezik olmayan genelleştirilmiş pseudo null Mannheim eğrisi yoktur.

İspat. $\alpha : I \to \mathbb{E}_2^4$ genelleştirilmiş pseudo null Mannheim eğrisi ve onun genelleştirilmiş Mannheim eşleniği $\alpha^* : I^* \to \mathbb{E}_2^4$ eğrisi de partially null Frenet eğrisi olsun. Bu durumda α eğrisinin asli normal vektör alanı N, null B_1^* ve B_2^* vektörlerinin gerdiği timelike düzlemde yatar. α^*eğrisinin parametrizasyonunu

$$\alpha^*(f(s)) = \alpha(s) + \lambda(s) N(s) \quad (5.5)$$

ile verelim. Burada s ve $s^* = f(s)$, sırasıyla α ve α^* eğrilerinin pseudo-yay parametresi ve $f : I \subset \mathbb{R}$ ile λ diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. (5.5) denkleminin s ye göre türevinin alınmasıyla

$$T^* f' = T + \lambda' N + \lambda k_2 B_1 \quad (5.6)$$

bulunur. Buradan

$$g\left(T^* f', T^* f'\right) = \epsilon_1^* f'^2 = \epsilon_1 + \epsilon_2 \lambda^2 k_2^2 \quad (5.7)$$

elde edilir. a ve b diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere $N(s) = a(s)B_1^*(s) + b(s)B_2^*(s)$ olduğundan. (2.5) ve (2.7) Frenet denklemlerinin kullanılmasıyla

$$g(N, N) = 2ab = 0$$

olarak elde edilir. Bu yüzden i) $a = 0$ ve ii) $b = 0$ durumlarını ele alalım.

i) $a = 0$ ise; $N = bB_2^*$ dir.

(5.6) eşitliğinden

$$T^* = \frac{1}{f'}T + \frac{\lambda'}{f'}N + \frac{\lambda k_2}{f'}B_1$$

elde edilir. Son eşitliğin türevinden

$$\begin{aligned} k_1^* N^* f' = & \left(\frac{1}{f'}\right)' T + \left[\frac{k_1}{f'}T + \left(\frac{\lambda'}{f'}\right)' + \frac{\lambda k_2 k_3}{f'}\right] N \\ & + \left[\left(\frac{\lambda k_2}{f'}\right)' + \frac{\lambda'}{f'}k_2\right] B_1 - \frac{\epsilon_2 \lambda k_2^2}{f'} B_2 \end{aligned} \tag{5.8}$$

olduğu görülür. (5.8) eşitliği $N = bB_2^*$ ile çarpıldığında

$$-\epsilon_2 \lambda k_2^2 = 0$$

olduğu görülür. $\epsilon_2 \neq 0$ dır. $\lambda \neq 0$ olacağından $k_2 = 0$ ise (5.7) eşitliğinden $f'^2 = \pm 1$ bulunur. Buna göre (5.8) düzenlenirse N^* null olmayan vektörü ile N null vektörünün kolineer olduğu görülür. Bu ise çelişkidir.

ii) $b = 0$ ise; $N = aB_1^*$ dir.

(5.8) eşitliği $N = aB_1^*$ ile çarpıldığında $k_2 = 0$ elde edilir. *i)* durumu ile benzer şekilde çelişki olduğu görülür.

(C) Span$\{B_1^*, B_2^*\}$ düzlemi bir lightlike düzlem olsun:

Teorem 5.4. $\mathbb{E}_2^4$ uzayında α eğrisinin asli normal vektör alanı N, $\alpha^* : I^* \to \mathbb{E}_2^4$ geodezik olmayan null Mannheim eşlenik eğrisine ait null B_1^* ve spacelike B_2^* vektörleri tarafından gerilen Span$\{B_1^*, B_2^*\}$ lightlike düzleminde yatan geodezik olmayan genelleştirilmiş pseudo null Mannheim eğrisi yoktur.

İspat. $\alpha : I \to \mathbb{E}_2^4$ genelleştirilmiş pseudo null Mannheim eğrisi ve onun genelleştirilmiş Mannheim eşleniği null $\alpha^* : I^* \to \mathbb{E}_2^4$ eğrisi olsun. α eğrisinin asli normal vektör alanı N, null B_1^* ve spacelike B_2^* vektörlerinin gerdiği lightlike düzlemde yatar. Bu sebepten $N(s)$; $N(s) = a(s)B_1^*(s) + b(s)B_2^*(s)$ şeklinde yazılabilir. (2.3) ve (2.5) Frenet denklemlerinin kullanılmasıyla $g(N, N) = b^2 = 0$ olarak elde edilir. O halde

$$N = aB_1^*$$

şeklinde yazılabilir. α^*eğrisinin parametrizasyonunu

$$\alpha^*(f(s)) = \alpha(s) + \lambda(s)N(s) \tag{5.9}$$

ile verelim. Burada s ve $s^* = f(s)$, sırasıyla α ve α^* eğrilerinin pseudo-yay parametresi ve $f : I \subset \mathbb{R}$ ile λ diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. (5.9) denkleminin s ye göre türevi alınmasıyla

$$T^* f^{'} = T + \lambda^{'} N + \lambda k_2 B_1$$

bulunur. Son denklemin $N = aB_1^*$ ile çarpılmasıyla $af^{'} = 0$ elde edilir. Bu ise çelişkidir.

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında 4-boyutlu 2-indeksli yarı-Öklidyen uzayda sırasıyla null, partially null ve pseudo null Mannheim eğriler ele alınmıştır. Üçüncü bölümde genelleştirilmiş null Mannheim eğrileri çalışırken Mannheim eğri çifti spacelike, timelike, null ve pseudo null eğriler olabiliyorken eğri çifti partially null olan genelleştirilmiş null Mannheim eğrisi bulunmadığı görülmüştür. Genelleştirilmiş null Mannheim eğri ve eşlenik eğrilerine uygun örnekler verilip, bu örneklerin izdüşümlerine ait şekiller verilmiştir.

Dördüncü bölümde genelleştirilmiş partially null Mannheim eğriler, birinci eğrilikleri sıfırdan farklı geodezik olmayan eğriler olarak ele alınmıştır. Ana eğrinin asli normalinin yattığı düzlemin nedensel karakterine göre durumlar incelendiğinde böyle bir eğri çiftinin olmadığı görülmüştür. Yine beşinci bölümde pseudo null Mannheim eğriler incelendiğinde benzer sonuçlar elde edilmiştir.

Bundan sonraki çalışmalarda Mannheim eğri çiftleri benzer şekilde ana eğrinin nedensel karakteri spacelike ve timelike eğri olacak şekilde çalışılarak karakterizasyonlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

[1] www.britannica.com/science/differential-geometry/curvature-of-surface (Erişim tarihi: 30.11.2020)

[2] Saint Venant, B., Memoire sur les lignes courbes non planes. Journal de l'Ecole Polytechnique. 18: 1-76, 1845.

[3] Bertrand, J. M., Memoire sur la theorie des courbes a double courbure. Comptes Rendus. 15: 332-350, 1850.

[4] Mannheim, A., Paris C. R, 86, 1254-1256, 1878.

[5] Eisenheart, L.P., A Traise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces. Dover, New York, 1960.

[6] Liu, H. L., Wang, F., Mannheim partner curves in 3-space. J. Geom. 88, 120-126, 2008.

[7] Öztekin, H., Ergüt, M., Null Mannheim curves in the Minkowski 3-space. Turkish Journal of Mathematics. 35(1), 107-114, 2011.

[8] Grbovic, M., İlarslan, K. and Nešovic, E., On null and pseudo null Mannheim curves in Minkowski 3-space. Journal of Geometry. 105, 177–183, 2014.

[9] Matsuda, H., Yorozu, S., On Generalized Mannheim Curves in Euclidean 4-Space. Nihonkai Math. J. 20, 33-56, 2009.

[10] Ersoy, S., Tosun, M., Yorozu, S., Generalized Mannheim curves in Minkowski space-time $\mathbb{E}_1^4$. Hokkaido Mathematical Journal. 41:441–461, 2012.

[11] İlarslan, K., Uçum, A., Nešovic, E., On generalized spacelike Mannheim curves in Minkowski space-time. Proceedings of the National Academy of Sciences, India-Section A. 86:2, 249–258, 2016.

[12] Uçum, A., Nešovic, E., İlarslan, K., On generalized timelike Mannheim curves in Minkowski space-time. Proceedings of the National Academy of Sciences. 13(1), 71–94, 2015.

[13] Grbovic, M., İlarslan, K., Nešovic, E., On generalized null Mannheim curves in Minkowski space-time. Pub De l'Institut Mathematique. 99, 77-98, 2016.

[14] Grbovic, M., Nešovic E., On generalized partially null Mannheim curves in Minkowski space-time. Novi Sad Journal of Mathematics. 105, 159-170, 2014.

[15] İlarslan, K., Nešovic, E., On Bishop frame of a null Cartan curve in Minkowski space-time. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. 15-8, 2018.

[16] İlarslan, K., Nešovic, E., Some characterizations of null osculating curves in the Minkowski space-time. Proceedings of the Estonian Academy of Sciences. 61(1): 1-8, 2012.

[17] Duggal, K. L., Bejancu, A., Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications. 1-76. Kluwer Academic Publisher, London, 1996.

[18] O'Neill, B., Semi-Riemannian geometry with applications to relativity. Academic Press, New York, 1983.

[19] Chen, B. Y., When does the position vector of a space curve always lie in its rectifying plane?. Amer. Math. Montly. 110: 147-152, 2003.

[20] Chen, B. Y., Pseudo-Riemannian Geometry, δ- Invariants and Applications. World Sci. 2011.

[21] Lopez, R., Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space. International Electronic Journal of Geometry. 7(1): 44-107, 2014.

[22] Petrovic-Torgasev, M., İlarslan, K., Nesovic, E., On partially null and pseudo null curves in the semi-Euclidean space $\mathbb{R}^4_2$. J. Geom. 84: 106-116, 2005.

[23] Sakaki M., Null Cartan Curves in $\mathbb{R}^4_2$. Toyama Mathematical Journal. 32, 31–39, 2009.

[24] Duggal K.L, Jin D.H., Null curves and hypersurfaces of semi-Riemann manifolds. World Scientific, Singapore, 2007.

[25] İlarslan, K., Nešovic, E., Spacelike and timelike normal curves in Minkowski space-time. Pub De l'Institut Mathematique. 85:111-118, 2009.

[26] Carmo M., Differential geometry of curves and surfaces. Prentice Hall, İnc. Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1976.

[27] Kuhnel, W., Differential geometry: Curves-surfaces-manifolds. Braunschweig, Wiesbaden, 1999.

[28] Duggal, K.L., Jin, D.H., Geometry of null curves. Mathematics Journal of Toyama University. 22, 95–120, 1999.

[29] Duggal, K. L., A report on canonical null curves and screen distributions for lightlike geometry. Acta Appl. Math. 95:135-149, 2007.

[30] Walrave, J., Curves and surfaces in Minkowski space. Doktora tezi. K. U. Leuven, Fac. of Science, Leuven, 1995.

[31] Izumiya, S., Takeuchi, N., New special curves and developable surfaces. Turkish J. Math. 28: 531–537, 2004.

[32] Choi, J.H., Kang, T.H. ve Kim Y.H., Mannheim curves in 3-dimensional space forms. Bulletin of the Korean Mathematical Society. 50-4, 1099–1108, 2013.

[33] Pei, D.H., Kong, L.L., Sun, J.G. ve Wang, Q., Singularities of lightlike hypersurface in semi-Euclidean 4-space with index 2. Science China Mathematics. 53-12, 3243–3254, 2010.

[34] Sakaki, M., Notes on null curves in Minkowski spaces. Turkish Journal of Mathematics. 34:417-424, 2010.

[35] Tandoğan, F., Minkowski uzayında eğriler ve elastik olmayan hareketleri. Doktora Tezi. Beykent Üniversitesi, İstanbul, 2009.

[36] Demir, E., Lorentz uzayında umbilik yüzeyler. Yüksek Lisans Tezi. Ankara Üniversitesi, Ankara, 2010.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Nihal KILIÇ ASLAN

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise : Ayşe Melahat Erkin Anadolu Lisesi, Haziran 2005

Lisans : Ahi Evran Üniversitesi, Matematik Bölümü, Haziran 2010

Yüksek Lisans : Kırıkkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Eylül 2012

Çalıştığı Kurum ve Yıl : Çaka Özel Öğretim Kurumu (2015-…)

Yayınlar:

1. İlarslan, K., Aslan, N.K., On generalized null Mannheim curves in $\mathbb{E}_2^4$. Mathematical Methods in the Applied Sciences. doi: 10,1002/mma.6375, 2019.
2. Aslan, N.K, İlarslan, K., Some characterizations of generalized null Mannheim curves in semi-Euclidean space. Journal of Geometry and Symmetry in Physics. 55, 1-20, 2020.
3. Aslan, N.K, İlarslan, K., Non-existence of generalized partially null Mannheim curves in $\mathbb{E}_2^4$. İncelemede.