T.C.

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

UZUNLUK UZAYLARI ve GEODEZİK UZAYLAR

Metin MERCAN

Ocak 2021

ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalında Metin Mercan tarafından hazırlanan UZUNLUK UZAYLARI ve GEODEZİK UZAYLAR adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Ali OLGUN
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan	:	Prof. Dr. Kazım İLARSLAN	
Üye	:	Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN	
Üye	:	Prof. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ	

15/02/2021

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Recep ÇALIN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

UZUNLUK UZAYLARI ve GEODEZİK UZAYLAR

MERCAN, Metin

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Halit GÜNDOGAN

Ocak 2021, 72 sayfa

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır. İkinci bölümde, bir sonraki bölüm için kullanılacak temel kavramlar, metrik uzaylarda yol tanımı, yol uzunluğu ve bu yolların oluşturduğu uzaylar ele alınmıştır. Uzunluk uzayları ve geodezik uzaylar üçüncü bölümde incelenmiştir. Dördüncü bölüm tartışma ve sonuç için ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Geodezik uzay, metrik uzaylarda yol, uzunluk uzayı

ABSTRACT

LENGTH SPACE and GEODESIC SPACE

MERCAN, Metin

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, M. Sc. Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Halit GÜNDOGAN

January 2021, 72 pages

This thesis consists of four sections. The first section is reserved for introduction. In the second section, the basic concept that we use in the following section, the definition of the paths in metric space, the length of the path, and the space that formed these paths are discussed. The length space and geodesic space are examined in the third section. The fourth section is reserved for discussion and conclusion.

Key Words: Geodesic space, Path in metric space, length space

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde, değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman danışsam bana kıymetli zamanını ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle bana faydalı olabilmek için elinden gelenden fazlasını sunan, güler yüzünü ve samimiyetini benden esirgemeyen ve gelecekteki mesleki hayatımda da bana verdiği değerli bilgilerden faydalanacağımı düşündüğüm kıymetli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN' a ve beni bu günlere sevgi ve saygı kelimelerinin anlamlarını bilecek şekilde yetiştirerek getiren ve benden hiçbir zaman desteğini esirgemeyen bu hayattaki en büyük şansım olan aileme teşekkürü bir borç biliyor ve şükranlarımı sunuyorum.

İçindekiler

ŞEKİLLER DİZİNİ

ŞEKİL Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$\|\|.\|\|$	Norm fonksiyonu
A°	A kümesinin içi
$\bar{A}$	A kümesinin kapanışı
d	Metrik fonksiyonu
$\mathrm{diam}(A)$	A kümesinin çapı
d_{ℓ}	Uzunluk metriği
$\mathcal{B}(x, r)$	x merkezli ve r-yarıçaplı yuvar
$(X, \preceq)$	Kısmi sıralı küme
$\ell([a, b])$	Yolların kümesi
σ	$[a, b]$ kapalı aralığın alt bölümü
$\|\sigma\|$	σ' nın modülü
$\mathrm{card}(\sigma)$	σ' nın kardinalitesi
$L(\gamma)$	γ yolunun yol uzunluğu
$[x, y]$	x ve y noktalarını birleştiren geodezik parça
$(\gamma_n)_{n\geq 0}$	Yolların oluşturduğu dizi
$V_{\sigma}(\gamma)$	σ' ya bağlı γ' nın toplam değişimi
$X_1 \times X_2$	Çarpım uzayı
d_p, d_{∞}	Çarpım topolojisinden indirgenen metrik

1 GİRİŞ

Üzerindeki herhangi iki nokta çifti arasındaki uzaklık, bu iki noktayı birleştiren yolların yol uzunluklarının oluşturduğu kümenin en büyük alt sınırına eşit olan metrik uzaya uzunluk uzayı denir. (X, d) düzeltilebilir yollarla bağlanmış bir metrik uzay olsun. Bu uzay üzerindeki doğal metrik d_ℓ, (X, d) uzayı üzerinde bir metrik ise (X, d_ℓ) metrik uzayına uzunluk uzayı denir. Eğer (X, d) bir uzunluk uzayı ise uzunluk metriği d_ℓ ile orjinal metrik d çakışır.

Üzerindeki herhangi iki nokta çifti arasındaki uzaklık, bu iki noktayı birleştiren yollardan herhangi birinin yol uzunluğuna eşit olan bu metrik uzaya geodezik uzay denir. Metrik uzaylardaki geodezik yol uzunluğu, uç noktalar arasındaki uzaklığa eşittir. Bu bilgi ışığında geodezik uzay; üzerindeki herhangi iki noktayı geodezik yolla birleştiren metrik uzaydır.

Menger, arasındalık kavramını kullanarak metrik uzaylarda yeni bir konvekslik tanımı yapmıştır. X bir metrik uzay olsun. $\forall x, y \in X$ ve $x \neq y$ için x ve y noktaları arasında yer alan bir nokta varsa X' e Menger konveks uzay denir. X' de keyfi bir çift farklı nokta için, bu noktalar arasında yer alan başka bir noktanın varlığı ile bu noktaları birleştiren geodezik yolun varlığı denktir.

Bu çalışmada metrik uzaylar üzerindeki uzaklık kavramı kullanılarak düzeltilebilir yollar tanımlanmış, bu yolların yol uzunlukları tanımlanarak incelenmiş, uzunluk uzayları ve geodezik uzaylar tanımlanarak çeşitli örneklerle tanıtılmış, Menger konveksliği ve geodezik parça kavramları arasındaki ilişki incelenmiştir.

1.1 Kaynak Özetleri

Temel tanım ve teoremlerde; T. Başkan, O. Bizim, İ. N. Cangül (2006) " Metrik Uzaylar ve Genel Topolojiye Giriş " , M. Bayraktar, (2006) " Fonksiyonel Analiz " , Ratcliffe J. G. (1994) " Foundations of Hyperbolic Manifolds " , Stolzenberg G. ,(1970) " Review: Errett Bishop, Foundations of constructive analysis " , Maddox I.J. (1970) " Elements of Functional Analysis " , Yüksel Ş. ,(1995) " Genel Topoloji " , Özer O. ,(1997) " Metrik ve Topolojik Uzaylara Giriş " , Nesin A. ,(1997) " Analiz IV " düzeltilebilir yolların tanımı ve topolojik özelliklerinde; H. H. Hacısalihoğlu, (2000) " Diferensiyel Geometri I. Cilt " yolların oluşturduğu uzaylarda yakınsaklık ve süreklilik tanımları için; B. O' Neill, (1983) " Elemantary of Differential Geometry " , G. Walschap, (2004) " Metric Structures in Differential Geometry" geodezik örneğinde; S. Hartanto, Mhd. Furqan, Andysah P. U. Siahaan, W. Fitriani, "Haversine Method in Looking for the Nearest Masjid", Özlü M., "E-İmza Güvenliğinin Araştırılmasına Yönelik Konum Damgası Sistemi ve Uygulaması" Uzunluk uzayları ve Geodezik Uzaylar için; M.R. Bridson, A. Haefliger,(1999) " Metric Spaces of Non-positive Curvature " , Papadopoulos A. , (2005) " Metric Spaces, Convexity and Non-positive Curvature " ve Çoban H. Ü., (2011) " Geodezikler ve Geodezik Metrik Uzaylar " kaynakları referans alınmıştır.

1.2 Çalışmanın Amacı

Metrik uzay tanımı iki nokta arasındaki uzaklık kavramı ile elde edilir. Metrik uzaylarda düzeltilebilir yolların tanımlanması, bu yolların oluştuduğu uzayın topolojik özelliklerinin incelenmesi, yine bu yolların yardımıyla uzunluk uzayı ve geodezik uzayların ayrıntılı bir biçimde örneklerle aktarılması amaçlanmıştır.

2 MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölüm beş kısımdan oluşmaktadır.

İlk kısımda ileride bölümde kullanılmak üzere tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir. Bunlar sırasıyla sınırlı küme, infimum ve supremum, kapalı küme, konveks küme, metrik uzay, kompakt uzay, lokal kompakt uzay, tam metrik uzay, süreklilik, fonksiyon dizilerinde yakınsaklık, K-Lipschitz dönüşümü, Öklid uzay ve ayrılabilir uzay ve ara değer teoremi ile Bolzano-Weierstrass teoremidir.

İkinci kısımda metrik uzayda yol tanımı ve bu yolun uzunluğu tanımlanmıştır. Bu tanımlanan yolun bazı özellikleri önermeler ve örneklerle gösterilmiştir. Parametre değişimi ve modül tanımı ifade edilmiştir.

Üçüncü kısımda yol uzunluğu ile sonraki bölümde daha da anlam ve önem kazanacak olan parametrize edilmiş yol tanımı ve bu yolun bazı özellikleri önermelerle ifade edilmiştir.

Dördüncü kısımda Öklid uzayında diferensiyellenebilir yolun uzunluğu ifade edilmiş ve bu ifadenin ispatına yer verilmiştir.

Son kısımda yolların oluşturduğu uzay tanımlanmıştır. Uzunluk fonksiyonun süreksiz olduğu örneklerle gösterilmiştir. Uzunluk fonksiyonun alt-yarı sürekli olduğu gösterilmiştir. Ascoli teoremine yer verilmiştir. Minimal yolların varlığından bahsedilmiştir.

2.1 Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1 (Sınırlı Küme)**.**

$(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir küme $A \neq \varnothing \subset X$. $\forall x \in A$ için $u \preceq x$ olacak şekilde $u \in X$ varsa u' ya A' nın X' deki alt sınırı, $\forall x \in A$ için $x \preceq v$ olacak şekilde $v \in X$ varsa v' ye A' nın X'deki üst sınırı denir.

Üst sınırı olan kümeye üstten sınırlı, alt sınırı olan kümeye alttan sınırlı küme denir. Alttan ve üstten sınırlı bir kümeye sınırlı küme denir[3].

Tanım 2.1.2 (İnfimum ve Supremum)**.**

$(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir küme $A \neq \varnothing \subset X$ olsun. A' nın (X deki) alt sınırlarının kümesini A_1, üst sınırlarının kümesini A_2 ile gösterelim.

$\alpha \in A_1$ iken $\forall u \in A_1$ için $u \preceq \alpha$ ise α' ya A' nın en büyük alt sınırı veya A' nın infimumu denir ve $\inf A$ ile gösterilir.

$\beta \in A_2$ iken $\forall v \in A_2$ için $\beta \preceq v$ ise β' ya A' nın en küçük üst sınırı veya A' nın supremumu denir ve $\sup A$ ile gösterilir.

Tanımdan anlaşılacağı üzere infimum ve supremum değerleri o kümeye ait olmak zorunda değildir [9].

Tanım 2.1.3 (Kapalı Küme)**.**

(x, τ) topolojik uzayın bir alt kümesi V' yi gözönüne alalım. $X - V$ kümesi açık bir küme ise, V' ye X' de kapalı bir küme denir.

Başka bir tanım da eğer V' nin kapanışı kendisine eşit ise V' ye X' de kapalı bir küme denir[10].

Tanım 2.1.4 (Konveks Küme).

L bir lineer uzay $A \subset L$ ve $\forall q, p \in A$ olmak üzere;

$$\mathcal{B} = \{z \in L \quad : \quad z = \alpha p + (1-\alpha)q, \quad 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

ise A' ya konveks küme denir.

Eğer $z \in \mathbb{B}$ ise $z = \alpha p + (1-\alpha)q$ eşitliğindeki p ve q' nun katsayıları için $\alpha + (1-\alpha) = 1$ eşitliği her zaman sağlanır. Bu sebeple konveks küme tanımında α, $(1-\alpha)$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α ve β reel sayıları alınabilir.

Geometrik olarak $\mathcal{B}$ kümesi uç noktaları p ve q olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda, sezgisel olarak, konveks küme; boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir [4].

Tanım 2.1.5 (Metrik Uzay).

$x \neq \varnothing$ bir küme olmak üzere;
$d : X \times X \to \mathbb{R}$, $\forall x, y, z \in X$ için d fonksiyonu;

- *(i)* $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \quad d(x,y) \geq 0$
- *(ii)* $d(x,y) = d(y,x)$ *(simetri)*
- *(iii)* $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ *(üçgen eşitsizliği)*

özelliklerini gerçekleyen d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik, d metriği ile tanımlı olan X cümlesine de metrik uzay denir. (X,d) veya X_d ile gösterilir [11].

Tanım 2.1.6 (Kompakt Uzay).

Bir T topolojik uzayın her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, T' ye kompakt uzay denir [11].

Tanım 2.1.7 (Lokal Kompakt Uzay)**.**

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. $\forall x \in X$ noktası, X uzayında kompakt bir komşuluğa sahip ise X uzayına lokal kompakt uzay denir [11].

Tanım 2.1.8 (Tam Metrik Uzay)**.**

M metrik uzay olsun. Bu uzay üzerindeki her Cauchy dizisi (M' de bir noktaya) yakınsak ise M metrik uzayına tam metrik uzay denir [3].

Önerme 2.1.9.

Herhangi bir kompakt uzay tamdır [11].

Tanım 2.1.10 (Süreklilik)**.**

$a \in A \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eger $\forall \epsilon > 0$ için,

$$\forall x \in A \text{ için, } |x - a| < \delta \text{ ise } |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

koşullarını sağlayan bir $\delta > 0$ sayısı varsa, o zaman f fonksiyonuna a'da sürekli denir. Ayrıca $\forall a \in A$ için f sürekli ise f, A' da düzgün süreklidir denir.

Tanımı simgesel olarak aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A \quad (|x - a| < \delta \longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon \qquad [12]$$

Teorem 2.1.11 (Ara Değer Teoremi)**.**

$I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f : I \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon olsun. $c \in \mathbb{R}$ sayısı $f(a) \leq c \leq f(b)$ koşulunu sağlıyor ise öyle en az bir $x \in I$ vardır ki $f(x) = c$'dir [9].

Tanım 2.1.12 (Fonksiyon Dizilerinde Yakınsaklık)**.**

X herhangi bir küme ve Y metrik uzay olsun. $f_n : X \to Y$ bir $(f_n)_{n\geq 0}$ fonksiyon dizisi olsun. $\forall x \in X$ için $(f_n(x))_{n\geq 0}$ fonksiyon dizisinin limiti var ve $(f_n)_{n\geq 0}$ fonksiyon dizisinin, her $x \in X$ için,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

olarak tanımlanan $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna noktasal yakınsadığı söylenir. f 'ye $(f_n)_{n\geq 0}$ fonksiyon dizisinin noktasal limiti denir.

Tanımı daha açık şekilde ifade edecek olursak; $\forall x \in X$ ve $\forall \epsilon > 0$ için,

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

ve $n > N$ için N sayısı bulunabilirse $(f_n : X \to Y)_n$ fonksiyon dizisi $f : X \to Y$ fonksiyonuna yakınsaktır denir.

Tanımdan anlaşılacağı üzere belirli bir N' den büyük n sayıları yukarıdaki eşitsizliği $\forall x \in X$ noktaları için sağlar. Bu durumda f_n fonksiyon dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir [12].

Tanım 2.1.13 (K-Lipschitz Dönüşümü).

X ve Y metrik uzaylar ve K negatif olmayan reel sayı olmak üzere;

$$\forall x, y \in X \text{ için } |f(x) - f(y)| \leq K|x - y| \text{ olacak şekilde}$$

$f : X \to Y$ dönüşümüne K-Lipschitz dönüşümü denir.

Ayrıca f dönüşümü her K için K-Lipschitz dönüşümü koşulunu sağlıyorsa f dönüşümüne Lipschitz dönüşümü denir [7].

Teorem 2.1.14 (Bolzano-Weierstrass).

Herhangi reel (kompleks) sayı terimli sınırlı dizinin, yakınsak bir alt dizisi vardır [13].

Tanım 2.1.15 (Öklid Uzayı).

n-boyutlu Öklid uzayı; standart analitik model n-boyutlu reel vektör uzayı ile eşleşen $\mathbb{R}^n$ afin uzaydır.

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere bu iki nokta arasındaki uzaklık; $d_{\mathbb{E}} = \|x - y\|$ şeklinde tanımlanır. $\mathbb{R}^n$ uzayı üzerinde tanımlanan $d_{\mathbb{E}}$ metriğine Öklid metriği denir [7].

Tanım 2.1.16 (Ayrılabilir Uzay).

X topolojik uzay olsun. $A \subset X$ olacak şekilde sayılabilir yoğun bir A alt kümesi varsa, X' e ayrıştırılabilir uzay ya da ayrılabilir uzay denir [3].

2.2 Metrik Uzaylarda Yol Uzunluğu

X bir metrik uzay olsun. Bu uzay üzerindeki herhangi $x, y \in X$ noktaları arasındaki mesafe kavramından $d(x, y)$ ile bahsedebiliriz. Genelde $d(x, y) = |x - y|_x$ ve $d(x, y) = |x - y|_d$ gibi notasyonlar kullanılır. Bu çalışmada $d(x, y) = |x - y|$ görece basit olan notasyonu kullanmaya özen göstereceğiz.

$a \leq b$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{R}$ ve $\gamma : [a, b] \to X$ dönüşümü sürekli bir dönüşüm olsun. $\gamma(a) = x$ ve $\gamma(b) = y$ olacak şekilde $x, y \in X$ noktalarına γ dönüşümünün uç noktaları ve γ' ya, x ve y noktalarını birleştiren yol denir.

σ, $[a, b]$ kapalı aralığının a ve b' yi içeren sonlu bir alt bölümü olsun. Eğer $n = card(\sigma)$ ise γ' nın yol uzunluğu n' dir. σ' nın boyu $n + 1$ ise üzerinde $a = t_0, t_1, t_2 \cdots, t_n = b$ olacak şekilde sonlu ve artan $(t_i)_{i=0,1,2\cdots,n}$ dizisi tanımlanabilir. Daha sonraki notasyonlarda $\sigma = (t_i)_{i=0,1,2\cdots,n}$ ve $a \neq b$ notasyonu kullanılacaktır.

Tanım 2.2.1 (Yol Uzunluğu)**.**

$\gamma : [a, b] \to X$ yolunun yol uzunluğu;

$$L_X(\gamma) = L(\gamma) = \sup_{\sigma} \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1})|$$

eşitliği ile hesaplanır. Bu denklemde supremum $[a, b]$ kapalı aralığının alt bölümünde(parçalanması) tanımlı olan $\sigma = (t_i)_{i=0,1,2\cdots,n}$ dizisi üzerinden alınır[6].

Tanım 2.2.2 (Düzeltilebilir Yol)**.**

Herhangi bir yolun, yol uzunluğu sonlu ise bu yola düzeltilebilir (rectifiable) yol denir[13].

Genel olarak yol uzunluğunun pozitif tanımlı olması dikkate alınırsa $0 \leq L(\gamma) \leq \infty$ eşitsizliği elde edilir.

Özel olarak $\sigma = \{a, b\}$ olacak şekilde seçilirse ve $x, y \in X$ için $\gamma(a) = x$ ve $\gamma(b) = y$ noktaları γ' nın uç noktaları olarak tanımlanırsa;

$$|x - y| \leq L(\gamma) \tag{1}$$

eşitsizliği elde edilir. Yol uzunluğu tanımından esinlenerek;

$$V_\sigma(\gamma) = \sum_{i=o}^{n-1} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1})|$$

yolun toplam değişimi tanımlanabilir. Bu tanımla beraber $\gamma : [a, b] \to X$ yolunun yol uzunluğu;

$$L(\gamma) = \sup V_\sigma(\gamma) \tag{2}$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada supremum $[a, b]$' nin σ alt bölümü üzerinden alınır.

Önerme 2.2.3.

$\gamma : [a, b] \to X$ olmak üzere;
γ' nın yol uzunluğu 0'dır ancak ve ancak γ sabit bir dönüşümdür.
Başka bir söylemle; $x_0 \in X$ olacak şekilde öyle bir x_0 vardır ki $\forall t \in [a, b]$ için $\gamma(t) = x_0$ ancak ve ancak $L(\gamma) = 0$' dır[1].

İspat.

$[a,b]$ aralığında alınan keyfi σ dizisi için $L(\gamma) = 0$ olsun. $t \in [a,b]$ olacak şekilde bir t elemanıyla birlikte $\sigma = \{a,t,b\}$ dizisini seçelim.

$$V_\sigma(\gamma) = |\gamma(a) - \gamma(t)| + |\gamma(t) - \gamma(b)| \leq L(\gamma) = 0$$

Bu eşitsizlikten yola çıkarak;

$|\gamma(a) - \gamma(t)| = 0$ yani $\forall t \in (a,b)$ için $\gamma(a) = \gamma(t)$ olduğundan γ yolu sabittir.

$\forall x \in [a,b]$ için $\gamma(x) = c$ olacak şekilde $c \in X$ olsun.

$[a,b]$ üzerinde $\sigma = (t_i)_{i=0,1,2,\cdots,n}$ dizisi tanımlayalım. $\forall t_i \in [a,b]$ için $\gamma(t_i) = c$' dir. Bu durumda;

$$V_\sigma(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1})| = 0$$

yazılabilir. Sonuç olarak $L(\gamma) = \sup\limits_{\sigma} V_\sigma(\gamma) = 0$' dır. □

Örnek 2.2.4.

X ayrık metrik uzay olsun.Bu üzerindeki metrik ;

$$|x-y| = \begin{cases} x = y & \text{ise } 0 \\ x \neq y & \text{ise } 1 \end{cases}$$

ile tanımlanır.Bu uzay üzerindeki noktalar izole noktalar olduğundan ve tanımlanabilecek bütün yollar sabit yol olacağından bu yolların yol uzunlukları da sıfır olacaktır.

Tanım 2.2.5 (Vektör Uzaylarda Afin Yol)**.**

$\mathbb{E}$ bir vektör uzayı olsun. $\gamma : [0,1] \to \mathbb{E}$ ve $\forall x, y \in [0,1]$ olmak üzere $\gamma(t) = (1-t)x + ty$ şeklinde tanımlansın. Bu şekilde tanımlanan γ dönüşümü $\mathbb{E}$ üzerinde tanımlanabilecek herhangi bir metrik için sürekli olduğundan γ afin yolu $\mathbb{E}$ üzerinde bir yoldur[6].

Önerme 2.2.6 (Normlu Vektör Uzaylarda Afin Yol Uzunluğu)**.**

$\mathbb{E}$ normlu vektör uzayı olsun. $\gamma : [0,1] \to \mathbb{E}$, $x, y \in \mathbb{E}$ olacak şekilde x ve y' yi birleştiren afin yol olsun. Böylece γ' nın yol uzunluğu $L(\gamma) = \|x - y\|$' dir[6].

İspat.

$0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$ olacak şekilde $t_1, t_2 \in [0,1]$ olsun.

$$\begin{aligned} |\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| &= \|(1-t_1)x + t_1 y - (1-t_2)x - t_2 y\| \\ &= \|(t_2 - t_1)x + (t_1 - t_2)y\| \\ &= (t_2 - t_1)\|x - y\| \end{aligned}$$

$[0,1]$ aralığı üzerinde $\sigma(t_i)_{i=0,1,2,\cdots,n}$ alt bölümünü alalım.

$$V_\sigma(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1})| = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)\|x - y\| = \|x - y\|$$

Böylece $L(\gamma) = \sup_{\sigma} V_\sigma(\gamma) = \|x - y\|$' dir. □

Örnek 2.2.7 ($\mathbb{R}$' de Düzeltilebilir Olmayan Yol)**.**

$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$, *$\mathbb{R}$ üzerindeki standart metrik ile;*

$$\gamma(t) = \begin{cases} 0 & ise\ t = 0 \\ t(\sin(\frac{1}{t})) & ise\ t \neq 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan γ yolu düzeltilebilir yol değildir. Bunu ispatlamak için:

$\forall n \geq 1$ için $[0,1]$ aralığı üzerindeki alt bölümü aşağıdaki gibi seçelim;

$$\sigma = \left\{ \frac{2}{\pi(2i+1)} \ , \ i = 0, 1, 2, \cdots, n \right\} \cup \{0, 1\}$$

Böylece $\forall n \geq 2$ için;

$$\begin{aligned} V_\sigma(\gamma) &= \left| 0 - \frac{2}{\pi(2n+1)} \frac{\sin \pi(2i+1)}{2} \right| + \sum_{i=0}^{n-1} \left| \frac{2}{\pi(2i+1)} \frac{\sin \pi(2i+1)}{2} - \frac{\sin \pi(2i+3)}{2} \right| \\ &+ \left| \frac{2}{\pi} \sin(\pi/2) - 1 \right| \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{2}{\pi(2i+1)} + \frac{2}{\pi(2i+3)} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi(2n+1)} + \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2i+1} \end{aligned}$$

Burada;

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2i+1}$$

ıraksak seri olduğundan $n \to \infty$ iken $V_\sigma(\gamma) \to \infty$' dir .

Sonuç olarak $L(\gamma) = \infty$ olduğundan γ yolu düzeltilebilir yol değildir.

Tanım 2.2.8 (Parametre Değiştirme)**.**

$\gamma : [a,b] \to X$ ve $\gamma' : [c,d] \to X$, X üzerinde iki yol olsun. Eğer $\gamma' = \gamma \circ \psi$ olacak şekilde $\psi : [c,d] \to [a,b]$ monoton ve örten dönüşümü bulunabiliyorsa γ'' ne γ nın parametre değiştirmesi ile elde edilmiş yol denir[2].

Burada ψ' nin homeomorfizm olmasına gerek yoktur. Ayrıca $\mathbb{R}$' nin iki kapalı aralığında monoton ve örten olarak tanımlandığından ψ sürekli dönüşümdür.

Önerme 2.2.9 (Parametre değişimi yol uzunluğundan bağımsızdır.).

$\gamma' : [c,d] \to X$ yolu $\gamma : [a,b] \to X$ yolunun parametre değiştirmesiyle elde edilen yol olsun. Bu durumda $L(\gamma') = L(\gamma)$' dır[2].

İspat.

Öncelikle $L(\gamma') \geq L(\gamma)$ olduğunu gösterelim. $\psi : [c,d] \to [a,b]$ parametre değişimi olsun.
$[a,b]$' nin herhangi bir alt bölümü $\sigma = (t_i)_{i=0,1,2,\cdots n}$ ile $\psi^{-1}(t_i)$ kümesinin herhangi $i = 0,1,2,\cdots n$ noktası için gerekirse yeniden sıralama yapılarak $[c,d]$' nin alt bölümü olan $\sigma' = (t_i{}')_{i=0,1,2,\cdots n}$ ile birebir eşleme yapılabilir. Bu durumda
$V_{\sigma'}(\gamma') \geq V_\sigma(\gamma)$' dir.
$[c,d]$' nin bütün alt bölümleri σ' üzerinden supremum alınırsa $L(\gamma') \geq V_\sigma(\gamma)$' dır.
Ayrıca $[a,b]$' nin bütün alt bölümleri σ üzerinden supremum alınırsa $L(\gamma') \geq L(\gamma)$ eşitsizliği elde edilir.

$L(\gamma) \geq L(\gamma')$ durumunu ispatlamak için $[c,d]$' nin alt bölümü σ' yı ele alalım.
ψ monoton olduğundan $\psi(\sigma) = \sigma'$ görüntüsü $[a,b]$' nin $V_\sigma(\gamma') = V'_\sigma(\gamma)$ koşulunu sağlayan bir alt bölümüdür.
$[c,d]$' nin bütün alt bölümleri σ' üzerinden supremum alınırsa $V_\sigma(\gamma') \leq L(\gamma)$ bulunur. Ayrıca $[a,b]$' nin bütün alt bölümleri σ üzerinden supremum alınırsa $L(\gamma') \leq L(\gamma)$ eşitsizliği elde edilir.
Sonuç olarak $L(\gamma') \geq L(\gamma)$ ve $L(\gamma) \geq L(\gamma')$ eşitsizlikleri ispatlandığından
$L(\gamma') = L(\gamma)$ eşitliği ispatlanmış olur. □

Önerme 2.2.10.

$\gamma : [a,b] \to X$ bir yol ve $\sigma \subset \sigma'$ olacak şekilde $[a,b]$' nin alt bölümleri olsun. Bu durumda $V_\sigma(\gamma) \leq V'_\sigma(\gamma)$' dır[6].

Tanım 2.2.11 (Modül)**.**

$\gamma : [a,b] \to X$ yol olsun. $[a,b]$' nin alt bölümü $\sigma = (t_i)_{i=0,1,2\cdots,n}$ olmak üzere σ' nın modülü;

$$|\sigma| = \sup_{i=0,1,2\cdots,n-1} (t_{i+1} - t_i) \text{ şekinde tanımlanır[13].}$$

Önerme 2.2.12.

Her $\gamma : [a,b] \to X$ yolunun yol uzunluğu aşağıdaki eşitlikteki gibidir:

$$L(\gamma) = \lim_{|\sigma| \to 0} V_\sigma(\gamma)$$

İspat.

$M \le L(\gamma)$ koşulunu sağlayan reel sayı olsun. Burada γ düzeltilebilir yol olmak zorunda değildir.

Bu önermeyi ispatlamak için; $[a,b]$' nin herhangi bir alt bölümü σ için $|\sigma| < \eta$ koşulunu sağlayan bir $\eta \in \mathbb{R}$ sayısının varlığını göstermek yeterlidir.

$$M \le V_\sigma(\gamma) \le L(\gamma) \tag{3}$$

eşitsizliğini ele alalım. Eşitsizliğin sağ tarafı $L(\gamma)$' nın tanımı gereği her zaman sağlanır. Eşitsizliğin sol tarafını ispatlayalım.

$$M + \epsilon < V_\tau(\gamma) \tag{4}$$

koşulunu sağlayan $\epsilon = \frac{(L(\gamma))}{2}$ ve $[a,b]$' nin bir alt bölümü $\tau = (t_i)_{i=0,1,2,\cdots,n}$ olsun.

$\gamma : [a,b] \to X$ dönüşümü düzgün sürekli olduğundan öyle bir η reel sayısı vardır ki $0 < \tau < \frac{1}{4}\left(\inf_{i=0,1,2,\cdots,n}(t_{i+1} - t_i)\right)$ olsun. Ayrıca
$|u - v| \leq \eta$ koşulunu sağlayan $\forall u, v \in [a,b]$ için $|\gamma(u) - \gamma(v)| \leq \frac{\epsilon}{2(n-1)}$' dir.

$|\sigma| < \eta$ koşulunu sağlayan $[a,b]$' nin alt bölülümü σ ve η reel sayısı bulunabilir. $\forall i = 1,2,3,\cdots,n-1$ için t'_i (aynı şekilde t''_i), σ' nın $t'_i \leq t_i$ (benzer şekilde $t_i < t''_i$) olacak şekilde t_i' ye yeterince yakın tepe noktası olsun.
$\forall i = 1,2,3,\cdots,n-1$ için $|\sigma| < \eta$ eşitsizliğine uygulanırsa $t_i < t''_i < t'_{i+1} \leq t_{i+1}$ eşitsizliği elde edilir.
Şimdi $[a,b]$' nin $\sigma \subset \tau$ alt bölümünü ele alalım.

$$\begin{aligned}
V_{\sigma\subset\tau} - V_\sigma(\gamma) &= \sum_{i=1}^{n-1} \left(|\gamma(t_i) - \gamma(t'_i)| + |\gamma(t_i) - \gamma(t''_i)| - |\gamma(t'_i) - \gamma(t''_i)|\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n-1} \left(|\gamma(t_i) - \gamma(t'_i)| + |\gamma(t_i) - \gamma(t''_i)|\right) \\
&\leq 2(n-1).\frac{\epsilon}{2(n-1)}
\end{aligned}$$

Bunun sonucunda aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$V_{\sigma\subset\tau} \leq V_\sigma(\gamma) + \epsilon \tag{5}$$

$\tau \subset \sigma \cup \tau$ olduğunda (2.2.10)' dan yola çıkarak $V_\tau \leq V_{\sigma\cup\tau}(\gamma)$ eşitsizliği yazılabilir. Son iki eşitsizlikten dolayı;

$$V_\tau(\gamma) \leq V_\sigma(\gamma) + \epsilon \tag{6}$$

eşitsizliği yazılabilir. (4) ve (6)' daki eşitsizlikler $M \leq V_\sigma(\gamma)$ eşitsizliğini ispatlamak için yeterlidir. Böylece $M \leq V_\sigma(\gamma) \leq L(\gamma)$ eşitsizliği ispatlanmış olur.

$\square$

Önerme 2.2.13 (Uzunluğun Toplanırlığı)**.**

$\gamma : [a,b] \to X$ yol olsun. $\forall c \in [a,b]$ için $L(\gamma) = L\left(\gamma[a,c]\right) + L\left(\gamma[c,b]\right)$' dir[6].

İspat.

$[a,b]$ aralığında $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ serisi $c \in \sigma_n$, $\forall n \geq 0$ için $n \to \infty$ iken $|\sigma_n| \to 0$ olsun. $\forall n \geq 0$ için $\sigma_n' = \sigma_n \cap [a,c]$ ve $\sigma_n'' = \sigma_n \cap [c,b]$ olsun. Bu durumda $V_{\sigma_n}(\gamma) = V_{\sigma_n'}\left(\gamma[a,c]\right) + V_{\sigma_n''}\left(\gamma[c,b]\right)$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} |\sigma_n'| = \lim\limits_{n\to\infty} |\sigma_n''| = 0$' dır. (2.2.12)'den bilindiği üzere;

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \lim_{n\to\infty} V_{\sigma_n}(\gamma) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(V_{\sigma_n'}\left(\gamma[a,c]\right) + V_{\sigma_n''}\left(\gamma[c,b]\right)\right) \\ &= L(\gamma[a,c]) + L(\gamma[c,b]) \end{aligned}$$

dir. $\square$

Bu önerme ile birlikte ilerideki bölümlerde notasyon açısından kolaylık sağlanması için aşağıdaki tanım yapılabilir.
Her $\gamma : [a,b] \to X$ yolu ve $t \in [a,b]$ olmak üzere $\gamma[a,t]$ notasyonu yerine γ_t notasyonu kullanılabilir.

Önerme 2.2.14.

Her düzeltilebilir $\gamma : [a,b] \to X$ yolu için $\forall t \in [a,b]$ iken $t \to L(\gamma_t)$ olacak şekilde tanımlanan dönüşüm artan ve sürekli dönüşümdür[6].

İspat.

Bu dönüşümün artan olduğunu göstermek için $t_1 < t_2$ olacak şekilde
$\forall t_1, t_2 \in [a,b]$ için $t_1 \to L(\gamma_{t_1})$ ve $t_2 \to L(\gamma_{t_2})$' dir.

$$
\begin{aligned}
L(\gamma_{t_2}) - L(\gamma_{t_1}) &= L\left(\gamma[a, t_2]\right) - L\left(\gamma[a, t_1]\right) \\
&= \left(L\left(\gamma[a, t_1]\right) + L\left(\gamma[t_1, t_2]\right)\right) - L\left(\gamma[a, t_1]\right) \\
&= L\left(\gamma[t_1, t_2]\right) \\
&> 0
\end{aligned}
$$

Böylece $\forall t_1, t_2 \in [a, b]$ için $t_1 < t_2$ iken $L(\gamma_{t_1}) < L(\gamma_{t_2})$ olduğundan $t \to L(\gamma_t)$ dönüşümü artan dönüşümdür.

Bu dönüşümün sürekli olduğunu gösterelim.
$\epsilon > 0$ olsun. (2.2.9)' dan ve γ yolunun düzgün sürekli olmasından dolayı öyle bir $\eta > 0$ reel sayısı bulunabilir ki aşağıdaki iki özelliği sağlasın.

- $|\sigma| < \eta$ koşulunu sağlayan $[a, b]$' nin alt bölümü σ için;

$$L(\gamma) - V_\sigma(\gamma) \leq \epsilon \tag{7}$$

- $|u - v| < \eta$ koşulunu sağlayan $\forall u, v \in [a, b]$ için;

$$|\gamma(u) - \gamma(v)| \leq \epsilon \tag{8}$$

Şimdi $0 \leq u - v \leq \eta$ koşulunu sağlayan iki nokta $u, v \in [a, b]$, $|\sigma| < \eta$ ve $\sigma \cap [u, v] = \{u, v\}$ koşullarını sağlayan $[a, b]$' nin alt bölümü σ olsun.

Ayrıca $\sigma_1 = \sigma \cap [a,u]$ ve $\sigma_2 = \sigma \cap [v,b]$ olsun. Bu durumda ;

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= L(\gamma[a,u]) + L(\gamma[u,v]) + L(\gamma[v,b]) \\ &\leq V_\sigma(\gamma) + \epsilon \cdots \text{ ((7)' den dolayı)} \\ &= V_{\sigma_1}(\gamma[a,u]) + |\gamma(u) - \gamma(v)| + V_{\sigma_2}(\gamma[v,b]) + \epsilon \\ &\leq L(\gamma[a,u]) + \epsilon + L(\gamma[v,b]) + \epsilon \cdots \text{ ((8)' den dolayı)} \end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitsizlikten dolayı $L(\gamma[u,v]) \leq 2\epsilon$ eşitsizliğini elde edebiliriz. Sonuç olarak $t \to L(\gamma_t)$ dönüşümü sürekli dönüşümdür.

□

Tanım 2.2.15 (Yolların Birleştirilmesi)**.**

$a \leq c \leq b$ olacak şekilde $a, b, c \in \mathbb{R}$ olsun. $\gamma_1 : [a,c] \to X$ ve $\gamma_2 : [c,b] \to X$ yolları $\gamma_1(c) = \gamma_2(c)$ koşulunu sağlarsa $\gamma_1 * \gamma_2 : [a,b] \to X$ yolu γ_1 ve γ_2 yollarının birleşimi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\gamma_1 * \gamma_2 = \begin{cases} \gamma_1(t) \; ; & a \leq t \leq c \\ \gamma_2(t) \; ; & c \leq t \leq b \end{cases}$$

Ayrıca (2.2.13)' den bilindiği üzere $L(\gamma_1 * \gamma_2) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$ yazılabilir[6].

Önerme 2.2.16 (Uzunluk Fonksiyonunun Karakterizasyonu)**.**

ℓ, X üzerinde tanımlı yolların kümesi olsun ve $L : \ell \to [0,\infty]$ dönüşümü bu yolları yol uzunluğuna eşleyen dönüşüm olsun. $\mathcal{L} : \ell \to [0,\infty]$ dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlayan en küçük dönüşüm olsun.

(i) Her $\gamma : [a,b] \to X$ için $\mathcal{L}(\gamma) \geq |\gamma(a) - \gamma(b)|$

(ii) Eğer γ yolu γ_1 ve γ_2 yolunun birleşmesi ise $\mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}(\gamma_1) + \mathcal{L}(\gamma_2)$' dir[4].

İspat.

$\mathcal{L} : \ell \to [0, \infty)$ (i) ve (ii)' yi sağlayan bir dönüşüm olsun. $[a, b]$' nin alt bölümü $\sigma = (t_i)_{i=0,1,2,\cdots,n}$ olsun. Bu durumda;

$$\mathcal{L}(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} (\gamma[t_i, t_{i+1}]) \geq \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1})| \geq V_\sigma(\gamma)$$

Sonuç olarak $\mathcal{L} \geq L(\gamma)$' dır. $\mathcal{L}$ dönüşümü (i) ve (ii)' yi sağladığından ispat tamamlanmış olur. □

2.3 Parametre Olarak Yol Uzunluğu

Önerme 2.3.1.

$\gamma : [a, b] \to X$ düzeltilebilir yol olsun. Her bir $u \in [0, L(\gamma)]$ için $x = \gamma(t)$, $L(\gamma_t) = u$ koşullarını sağlayan $t \in [a, b]$ ve tek bir $x \in X$ noktası vardır. Ayrıca bu koşulları sağlayan u ile ilişkilendirilen t' lerin oluşturduğu küme $[a, b]$' nin kapalı bir alt aralığıdır. Son olarak γ bu alt aralıkta sabittir[13].

İspat.

(2.2.14)' den bilindiği üzere $t \to L(\gamma_t)$ dönüşümü süreklidir. (2.1.1)'den yola çıkarak;
$0 \leq u \leq L(\gamma)$ koşulunu sağlayan her u için öyle bir $t \in \mathbb{R}$ vardır ki
$L(\gamma_t) = u$' dur.

$a \leq t \leq t' \leq b$ ve $L(\gamma_t) = L(\gamma_{t'})$ koşullarını sağlayan t ve t' reel sayılarını alalım. (2.2.13)' den bilindiği üzere $L(\gamma[t, t']) = L(\gamma_{t'}) - L(\gamma_t) = 0$' dır.

$L(\gamma[t,t']) = 0$ olduğundan (2.2.3) gereğince γ yolu $[t,t']$ aralığında sabittir. Bu aynı zamanda u ile ilişkilendirilen t' lerin oluşturduğu kümenin $[a,b]$' nin alt aralığı olduğunu gösterir. Ayrıca $t \to L(\gamma_t)$ dönüşümü sürekli olduğundan bu alt aralık kapalıdır.

$\square$

Önerme 2.3.2.

$\gamma : [a,b] \to X$ düzeltilebilir yol olsun. $\lambda : [0, L(\gamma)] \to X$, $\lambda(u) = \gamma(t)$ dönüşümünü düşünelim. Burada (2.3.1)' den bilindiği üzere $L(\gamma_t) = u$ koşulunu sağlayan tek bir $\gamma(t) \in X$ noktası vardır. λ dönüşümü 1-lipschitz' dir. Bu nedenle sürekli bir yoldur. Ayrıca γ yolu, λ yolunun $\psi(t) = L(\gamma_t)$ ile tanımlanan $\psi : [a,b] \to [0, L(\gamma)]$ parametrizasyonu ile elde edilmiş yoldur[13].

İspat.

$u \leq u'$ koşulunu sağlayan $u, u' \in [0, L(\gamma)]$ ve $L(\gamma_t) = u$, $L(\gamma_{t'}) = u'$ koşullarını sağlayan $t, t' \in [a,b]$ olsun. $\lambda(u) = \gamma(t)$ ve $\lambda(u') = \gamma(t')$ eşitliklerini (2.1.1)' e uygulayalım:

$$\begin{aligned} |\lambda(u) - \lambda(u')| &= |\gamma(t) - \gamma(t')| \leq L(\gamma[t,t']) \\ &= L(\gamma_{t'}) - L(\gamma_t) = u' - u \end{aligned}$$

Bundan dolayı λ dönüşümü 1-Lipschitz' dir. ψ dönüşümü artan ve örten bir dönüşümdür. (2.3.1)' deki x noktasının tekliğinden dolayı $\gamma = \lambda \circ \psi$' dir. Bu bilgiler ispatı tamamlamak için yeterlidir.

$\square$

Önerme 2.3.3.

$\gamma : [a,b] \to X$ düzeltilebilir yol olsun. $\lambda : [0, L(\gamma)] \to X$ dönüşümü (2.3.2)' de tanımlanmış dönüşüm olsun. Bu durumda $\forall u \in [0, L(\gamma)]$ için $u = L(\gamma_u)$' dur[6].

İspat.

$u \in [0, L(\gamma)]$ ve $L(\gamma_t) = u$ olacak şekilde $t \in [a,b]$ olsun. $\lambda_u = \lambda_{[0,u]}$ ve $\gamma_t = \gamma_{[a,t]}$ yollarını ele alalım.
$\gamma_t = \lambda_u \circ \psi_t$ olacak şekilde $\psi_t : [0,t] \to [0,u]$ dönüşümü vardır. Burada γ_t yolu λ_u' nun parametre değişimi ile elde edilmiş halidir. (2.2.9)'dan dolayı aynı uzunluğa sahip bu yollar için $L(\lambda_u) = u$ yazılabilir. □

Tanım 2.3.4 (Yol Uzunluğu ile Parametrize Edilmiş Yol)**.**

$\gamma : [a,b] \to X$ yol olsun. $a \leq u \leq v \leq b$ koşulunu sağlayan $\forall u, v \in [a,b]$ için $v - u = L(\gamma[u,v])$ oluyorsa γ' ya yol uzunluğu ile parametrize edilmiş yol denir.

Özel olarak $\gamma : [a,b] \to X$ yol uzunluğu ile parametrize edilmiş yol olduğundan $L(\gamma) = b - a$ yazılabilir[6].

Önerme 2.3.5.

$\gamma : [a,b] \to X$ yol uzunluğu ile parametrize edilmiş yol olsun. $[a,b]$ aralığında tanımlı $t \to L(\gamma_t)$ dönüşümü artandır[6].

Önerme 2.3.6.

$\gamma : [a,b] \to X$ düzeltilebilir yol olsun. (2.3.2)' de tanımlanmış $\lambda : [0, L(\gamma)] \to X$ yol uzunluğu ile parametrize edilmiş yoldur[6].

İspat.

(2.3.3)' den $a \leq u \leq v \leq b$ koşulunu sağlayan $\forall u, v \in [0, L(\gamma)]$ için;

$$v - u = L(\lambda_{[o,v]}) - L(\lambda_{[o,u]}) = L(\lambda_{[u,v]})$$

olduğundan her $\gamma : [a, b] \to X$ düzeltilebilir yolu için tanımlanan λ yolu, yol uzunluğu ile parametrize edilmiş yoldur. □

Önerme 2.3.7 (Yol Uzunluğu ile Parametrize Edilmiş Yolların Birleştirilmesi)**.**

γ yolu; γ_1 ve γ_2 yol uzunluğu ile parametrize edilmiş yolların birleşimi ise γ da yol uzunluğu ile parametrize edilmiş yoldur[6].

İspat.

(2.2.15)' deki notasyonları kullanacak olursak; $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$' dir. $a \leq u \leq v \leq b$ koşulunu sağlayan $\forall u, v \in \mathbb{R}$ olsun.
Aşağıdaki üç durumu inceleyelim.

- (i) Eğer $a \leq u \leq v \leq c$ ise γ_1 yolu, yol uzunluğu ile parametrize edilmiş yol olduğundan;
$$v - u = L(\gamma_{1[u,v]}) = L(\gamma_1 * \gamma_{2[u,v]})$$

- (ii)Eğer $c \leq u \leq v \leq b$ ise γ_2 yolu, yol uzunluğu ile parametrize edilmiş yol olduğundan;
$$v - u = L(\gamma_{2[u,v]}) = L(\gamma_1 * \gamma_{2[u,v]})$$

- (iii) Eğer $a \leq u \leq c \leq v \leq b$ ise;

$$\begin{aligned} v - u &= (v-c) + (c-u) \\ &= L(\gamma_{1[u,c]}) + L(\gamma_{2[c,v]}) \\ &= L(\gamma_1 * \gamma_{2[u,c]}) = L(\gamma_1 * \gamma_{2[c,v]}) \\ &= L(\gamma_1 * \gamma_{2[u,v]}) \end{aligned}$$

yazılabilir.

□

Tanım 2.3.8 (Afin Yolla Parametrize Edilmiş Yol)**.**

$\gamma : [a,b] \to X$, $a < b$ yol olsun. γ sabit yol veya öyle bir $\gamma' : [c,d] \to X$ yol uzunluğu ile parametrize edilmiş yol vardır ki $\psi : [a,b] \to [c,d]$, $\psi(x) = (d-c)x + \frac{(bc-ad)}{b-a}$ şeklinde bu iki aralık arasında afin homeomorfizm olmak üzere $\gamma = \gamma' \circ \psi$ bulunabilsin. Bu durumda γ' ya afin yolla parametrize edilmiş yol denir[6].

Önerme 2.3.9.

$\gamma : [a,b] \to X$ afin yolla ile parametrize edilmiş yol olsun. Bu durumda γ bir $L(\gamma)$-Lipschitz' dir[6].

İspat.

Eğer $\gamma : [a,b] \to X$ sabit bir yol ise sonuç kolaylıkla görülebilir. Kabul edelim ki $\gamma = \gamma' \circ \psi$ olacak şekilde $\gamma' : [a,b] \to X$ yol uzunluğu ile parametrize edilmiş yol ve $\psi : [a,b] \to [c,d]$, $\psi(x) = (d-c)x + \frac{(bc-ad)}{b-a}$ olsun.

$0 \leq u \leq v \leq 1$ koşulunu sağlayan $\forall u, v \in [0,1]$ için;

$$\begin{aligned}
|\gamma(u) - \gamma(v)| &= |\gamma'(\psi(u)) - \gamma'(\psi(v))| \\
&= L(\gamma'_{[\psi(u),\psi(v)]}) \\
&= \psi(u) - \psi(v) \qquad (\ \gamma' \text{ yol uzunluğu ile parametrize edilmiş yol olduğundan }) \\
&= (d-c)(v-u) \\
&= L(\gamma')(v-u) \\
&= L(\gamma)(v-u)
\end{aligned}$$

□

2.4 Öklid Uzayda Diferensiyellenebilir Yollar

$\forall n \geq 1$ $\mathbb{E} = \mathbb{E}^n$ n-boyutlu Öklid uzayı tanımlanabilir. Yani

$$\|(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)\| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + \cdots + {x_n}^2}$$

normu ile yine bu normdan indirgenmiş metrik ile $\mathbb{R}^n$ uzayını düşünelim.

Önerme 2.4.1.

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{E}$, C^1 sınıfından yol olsun. Ayrıca $\gamma' : [a,b] \to \mathbb{E}$, γ yolunun türevi olsun. Bu durumda γ' nın yol uzunluğu;

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

dir[2].

İspat.

$\mathbb{E}$ uzayı kanonik baz ile donatılmış ve $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$; γ' nın temel bileşenleri olsun. Bu durumda;

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \gamma_j(t)^2} \tag{9}$$

dir. $\forall t \in [a,b]$ için $\gamma_t = \gamma_{[a,t]}$ olsun. $s(t) = L(t)$ şeklinde tanımlanan $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ dönüşümünü ele alalım. Bu dönüşümün diferensiyellenebilir olduğunu ve türevinin $\|\gamma'(t)\|$' ye eşit olduğunu gösterelim. (9)' daki denkleme göre $s(a) = 0$' dır.

$a \leq t \leq t' \leq b$ koşulunu sağlayan t ve t' reel sayıları için;

$$s(t') - s(t) = L(\gamma_{[t,t']}) \tag{10}$$

dır. $\epsilon > 0$ reel sayısı olsun. $\forall j = 0, 1, 2, \cdots, n$ için $\gamma'_j : [a,b] \to \mathbb{R}$ dönüşümü düzgün süreklidir. Bu durumda $a \leq t \leq t' \leq b$ koşulunu sağlayan $\forall t, t' \in \mathbb{R}$ için öyle bir $\eta > 0$ bulunabilir ki $t' - t < \eta$ ve $j = 1, 2, \cdots, n$, $\forall \tau \in [t, t']$ iken $\gamma'_j(\tau)^2 \leq \gamma'_j(t) + \epsilon$ eşitsizliği sağlanır.

Şimdi $a \leq t \leq t' \leq b$ ve $t' - t < \eta$ koşullarını sağlayan t ve t' reel sayılarını alalım. Ayrıca $[t, t']$ kapalı aralığının bir $\sigma = (t_i)_{i=0,1,2,\cdots,n}$ rastgele dizisi olsun. Böylece;

$$V_\sigma(\gamma_{[t,t']}) = \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1})| = \sum_{i=0}^{k} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\gamma_j(t_i) - \gamma_j(t_{i+1}))^2}$$

dir.

(2.1.11) Ara değer teoreminden; $\forall i = 1, 2, \cdots, k-1$ ve $\forall j = 1, 2, \cdots, n$ için;

$$\gamma_j(t_i) - \gamma_j(t_{i+1}) = \gamma'_j(\tau_{i,j})(t_{i+1} - t_i)$$

olacak şekilde $\tau_{i,j} \in [t_i, t_{i+1}]$ bulunur.

Bu eşitlik aşağıdaki gibi düzenlenebilir;

$$(\gamma_j(t_i) - \gamma_j(t_{i+1}))^2 = \gamma_j'(\tau_{i,j})^2(t_i t_{i+1} - t_i)^2$$

Bundan dolayı;

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} (\gamma_j(t_i) - \gamma_j(t_{i+1}))^2 &\leq \sum_{j=1}^{n} \left(\gamma_j'(t)^2 + \epsilon\right)(t_{i+1} - t_i)^2 \\
&= \left(n\epsilon + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j'(t)^2\right)(t_{i+1} - t_i)^2 \\
&= \left(n\epsilon + \|\gamma'(t)\|^2\right)(t_{i+1} - t_i)^2
\end{aligned}$$

İlk eşitlikten yola çıkarak;

$$V_\sigma(\gamma_{[t,t']}) \leq \sum_{i=0}^{k-1} \sqrt{n\epsilon + \|\gamma'(t)\|^2}(t_{i+1} - t_i) = \sqrt{n\epsilon + \|\gamma'(t)\|^2}(t' - t)$$

Yukarıdaki ifadeyi incelediğimizde eşitsizliğin sağ tarafının σ seçiminden bağımsız olduğu kolayca görülebilir. İfadeyi düzenleyecek olursak;

$$L(\gamma_{[t,t']}) \leq \sqrt{n\epsilon + \|\gamma'(t)\|^2}(t' - t)$$

(10)' dan yararlanarak;

$$\frac{s(t') - s(t)}{t' - t} \leq \sqrt{n\epsilon + \|\gamma'(t)\|^2} \tag{11}$$

yazılabilir. (1) ve (10)' dan yararlanarak;

$$\|\gamma(t') - \gamma(t)\| \leq |s(t') - s(t)|$$

ifadesi yazılabilir.

(2.2.14) ' den s' nin artan dönüşüm olduğu kolayca görülebilir;

$$\frac{|\gamma(t') - \gamma(t)|}{t' - t} \leq \frac{s(t') - s(t)}{t' - t}$$

yazılabilir. İfadeyi biraz daha düzenleyecek olursak;

$$\left\| \frac{\gamma(t') - \gamma(t)}{t' - t} \right\| \leq \frac{s(t') - s(t)}{t' - t} \tag{12}$$

yazmak mümkündür. $a \leq t \leq t' \leq b$ ile $t' - t \leq \eta$ için (11) ve (12) eşitlikleriyle $t \neq t'$ ve $t' - t \leq \eta$ koşulllarını sağlayan $t, t' \in [a, b]$ varlığını ispatlamış olduk. İfadenin limiti alınırsa;

$$\lim_{|t-t'|\to 0} \left\| \frac{\gamma(t') - \gamma(t)}{t' - t} \right\| = \|\gamma'(t)\|$$

dir. Böylece öyle bir $\eta' > 0$ bulunabilir ki $|t - t'| < \eta'$ ve;

$$\|\gamma'(t)\| - \epsilon \leq \frac{s(t') - s(t)}{t' - t}$$

sağlanır. Bu son ifade ve (11)' deki eşitlik birlikte düşünüldüğünde:
$\forall \epsilon > 0$ için $\forall t, t' \in [a, b]$ ve $|t - t'| < \inf\{\eta, \eta'\}$ alındığında;

$$\|\gamma'(t)\| - \epsilon \leq \frac{s(t') - s(t)}{t' - t} \leq \sqrt{n\epsilon + \|\gamma'(t)\|^2}$$

elde edilir. ϵ sayısı 0' a yeterince yaklaştığında $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$ eşitliği elde edilir ki bu da ispatı tamamlamak için yeterlidir.

$\square$

2.5 Yolların Oluşturduğu Uzay

Bu çalışmanın ilerleyen bölümlerinde yolların oluşturduğu uzaylardan bahsedebilmek adına gerekli bir takım bilgiler ve ileride kullanılacak notasyonlardan bahsetmek gerekmektedir.

X bir metrik uzay ve $[a, b]$ kapalı aralığı $\mathbb{R}$' nin kompakt bir aralığı olsun. X üzerindeki tanım kümesi $[a, b]$ olan yolların kümesini $\ell([a, b])$ ile gösterelim. Ayrıca bu küme üzerinde düzgün yakınsaklığın topolojisini düşünelim. Bu bahsedilen topoloji aşağıda verilen metrik tarafından üretilmiş olsun.

$$\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \ell([a, b], X)$$
$$|\gamma_1 - \gamma_2| = \sup_{t \in [a,b]} |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)|$$

L dönüşümünü $\ell([a, b], X)$' den $[0, \infty) \cup \{\infty\}$' a olacak şekilde tanımlayalım. X' den seçilen herhangi bir γ yolun uzunluğu $L(\gamma)$ genel olarak sürekli değildir. Bunu birkaç örnekle gösterelim.

Örnek 2.5.1 (Uzunluk Fonksiyonun Süreksizliği)**.**

- *(i) Her pozitif n sayısı için $F_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ parçalı afin dönüşümü aşağıda verilen nokta dizisini birleştiren afin parçaların oluşturduğu sürekli dönüşümlerdir. $\mathbb{R}^2$' deki bu nokta dizisi;*

  $$\left(\frac{p}{2^n}, \frac{\epsilon(p)}{2^n}\right), \quad (0 \leq p \leq 2^n)$$

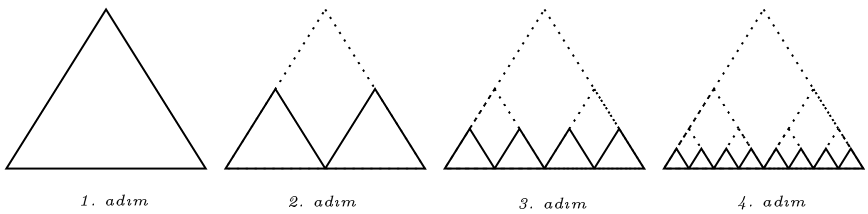
  Burada tanımlanan $\epsilon(p)$;

  $$\epsilon(p) = \begin{cases} \epsilon(p) = 0 \ ; & p \text{ tek sayı} \\ \epsilon(p) = 1 \ ; & p \text{ çift sayı} \end{cases}$$

$\forall n \geq 0$ ve $\forall t \in [0,1]$, için $\gamma_n : [0,1] \to \mathbb{E}^2$ olacak şekilde

$\gamma_n(t) = (t, F_n(t))$ dönüşümlerini tanımlayalım.

Böylece $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ve γ_4 dönüşümlerinin görüntüleri aşağıdaki gibidir.



Şekil 1 : $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ve γ_4 dönüşümlerinin görüntüleri

(γ_n) yolların dizisi, uzunluğu 1 olan $\gamma : [0,1] \to \mathbb{E}$, $\gamma(t) = (t,0)$ yoluna yakınsar. Ayrıca $\forall n \geq 0$ için $L(\gamma_n) = \sqrt{2}$' dir.

$\gamma_n \to \gamma$ iken $L(\gamma_n) \nrightarrow L(\gamma)$ olduğundan L dönüşümü sürekli değildir.

- *(ii) $\gamma_n(t) = (1/n)\cos(n^2 t)$ ile tanımlanan $\gamma_n : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ yolunu ele alalım.*

  t, $[0,\pi]$ aralığında değer aldığında $\cos(n^2 t)$ ifadesi n^2 kere 1 ve -1 değerlerini alır. Böylece yol uzunluğu;

$$L(\gamma_n) \geq \frac{1}{n} \times 2n^2 = 2n$$

  γ_n yolların dizisi, uzunluğu 0 olan $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $\forall t \in [0,\pi]$ için $\gamma(t) = 0$ yoluna düzgün yakınsar. Ayrıca $L(\gamma_n) \to \infty$' dur.

  $(\gamma_n) \to \gamma$ iken $L(\gamma_n) \nrightarrow L(\gamma)$ olduğundan L dönüşümü sürekli değildir.

- *(iii) Her $n \geq 1$ için $\gamma_n(t) = (t/n)\sin(1/t)$ ile tanımlanan $\gamma_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ yolların dizisini ele alalım.*

  (2.2.7)' den bildiğimiz üzere $L(\gamma_n) = \infty$' dur. Öte yandan

$\forall t \in [0,1]$ için $|\gamma_n(t)| \leq 1/n$ olduğundan (γ_n) yolların dizisi, yol uzunluğu 0 olan $\gamma(t) = 0$ sabit yoluna düzgün yakınsaktır.

$(\gamma_n) \to \gamma$ iken $L(\gamma_n) \not\to L(\gamma)$ olduğundan L dönüşümü sürekli değildir.

Buradaki bütün örneklerde $0 = L(\gamma) \leq \lim_{n\to\inf} \inf L(\gamma_n) = \infty$ olduğunu gördük. Bu uzunluk fonksiyonunun alt-yarı sürekli olmasıyla açıklanabilir.

Tanım 2.5.2 (Alt-yarı Süreklilik)**.**

$\mathbb{E}$ topolojik uzay ve x_0 bu uzay üzerindeki bir nokta olsun. $f : \mathbb{E} \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{-\infty, \infty\}$ dönüşümü tanımlansın. $m < f(x_0)$ koşulunu sağlayan herhangi bir m reel sayısı için öyle bir $\mathbb{E}$' de x_0' ın komşuluğu $\mathcal{W}$ vardır ki $\forall x \in \mathcal{W}$ için $m \leq f(x)$ olsun. Bu durumda f dönüşümüne x_0 noktasında alt-yarı süreklidir denir.

Eğer f dönüşümü $\mathbb{E}$' nin üzerindeki bütün noktalarda alt-yarı sürekli ise; f' ye $\mathbb{E}$ üzerinde alt-yarı sürekli dönüşüm denir[12].

Önerme 2.5.3 (Üst Limit)**.**

$(f_i)_{i\in I}$, $\mathbb{E}$' den $\overline{\mathbb{R}}$ 'ye tanımlı dönüşümlerin ailesi ve $f : \mathbb{E} \to \overline{\mathbb{R}}$, $\forall x \in \mathbb{E}$ olmak üzere $f(x) = \sup_{i\in I} f_i(x)$ dönüşümü bu ailenin üst-limiti olsun. $x_0 \in \mathbb{E}$ için bütün f_i dönüşümleri bu noktada alt-yarı sürekli ise f de x_0 noktasında alt-yarı süreklidir[12].

Teorem 2.5.4 (Uzunluk Fonksiyonunun Alt-yarı Sürekliliği)**.**

$L : \ell([a,b], X) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ uzunluk fonksiyonu alt-yarı süreklidir[6].

İspat.

$E = \ell([a,b],X)$ ve $t \in [a,b]$ olsun. $\forall\gamma,\gamma' \in \mathbb{E}$ için $|\gamma(t)-\gamma'(t)| \leq |\gamma-\gamma'|_E$' dir. Bu nedenle $\gamma \to \gamma(t)$, $\mathbb{E}$' den $\mathbb{R}$' ye tanımlanan dönüşüm süreklidir. $[a,b]$' nin her alt bölümü $\sigma = (t_i)_{i=0,\cdots,n}$ için $V_\sigma : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ şekinde tanımlanan;

$$\gamma \to V_\sigma(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|$$

dönüşümü sürekidir. Sonuç olarak (2.5.3)'ten $\gamma \to L(\gamma) = \sup_\sigma V_\sigma(\gamma)$ dönüşümü alt-yarı süreklidir.

□

Önerme 2.5.5.

$(\gamma_n : [a,b] \to X)_{n\geq 0}$ yolların dizisi $\gamma : [a,b] \to X$ yoluna düzgün yakınsak olsun. Bu durumda $L(\gamma) \leq \lim_{n\to\infty} \inf L(\gamma_n)$' dir[6].

Önerme 2.5.6.

$\mathbb{E}$ bir topolojik uzay ve $f : \mathbb{E} \to \overline{\mathbb{R}}$ dönüşümü $\mathbb{E}$ üzerinde x' e yakınsayan $(x_n)_{n\geq 0}$ noktalarında alt-yarı sürekli olsun.
Bu durumda $f(x) \leq \lim_{n\to\infty} \inf f(x_n)$' dir[12].

İspat.

f, x noktasında alt-yarı sürekli olsun. Bu durumda her $m < f(x)$ için x' in öyle bir komşuluğu $\mathcal{W}$ vardır ki $\forall y \in \mathcal{W}$ için $m \leq f(y)$' dir. $(x_n) \in \mathcal{W}$ için yeterince büyük her n için $n \to \infty$ iken $x_n \to x$ olduğundan $m \leq f(x_n)$' dir. Böylece $f(x) \leq \lim_{n\to\infty} \inf f(x_n)$ yazılabilir.

□

Önerme 2.5.7.

$(\gamma_n : [a,b] \to X)_{n \geq 0}$ düzeltilebilir yolların dizisi γ yoluna düzgün yakınsak olsun. $\forall n \geq 0$ için $L(\gamma_n) \leq M$ olacak şekilde M reel sayısı bulunabilirse γ düzeltilebilir yoldur[6].

Önerme 2.5.8.

M herhangi bir reel sayı olsun. $L(\gamma) \leq M$ koşulunu sağlayan $\gamma : [a,b] \to X$ yollarının kümesi $\ell([a,b], X)$' in kapalı bir alt kümesidir[6].

İspat.

Sürekli dönüşümler dizisinin limiti de süreklidir. $\gamma_n : [a,b] \to X$, $(n \geq 0)$ yolların dizisi, her n için $L(\gamma_n) \leq M$ olduğundan γ yoluna düzgün yakınsar. (2.5.5)' ten bilindiği üzere $L(\gamma) \leq M$ yazılabilir.

□

Yol dizilerinin limitleri ile ilgili diğer sonuçlara geçmeden önce yol dizisinin eşsüreklilik ve (2.5.11) Ascoli teoreminin notasyonlarını inceleyelim.

Tanım 2.5.9 (Düzgün Eşsüreklilik)**.**

X ve Y metrik uzaylar olsun. $(f_n)_{n \geq 0}$, X' den Y' ye dönüşümlerin dizisi olsun. $\forall \epsilon > 0$ için öyle bir $\eta > 0$ sayısı vardır ki $\forall n \geq 0$ ve $\forall x, y \in X$ için

$$|x - y| < \eta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon$$

koşulu sağlanırsa bu diziye düzgün eşsürekli denir[12].

n'den bağımsız K ile K-Lipschitz dönüşümler dizisi düzgün eşsürekli dizilere örnek olarak verilebilir. Tanımı genişletecek olursak;

$\forall n \geq 0$ ve $\forall x, y \in X$ için $|f_n(x) - f_n(y)| \leq K|x-y|^\alpha$ eşitsizliğini sağlayan $\alpha > 0$ ve $K > 0$ sabitleri bulunabilirse (f_n) dizisi düzgün eşsüreklidir.

Eşsüreklilik kavramının temelinde (2.5.11) Ascoli teoremi vardır. Aşağıda verilecek topolojik uzaylar arasındaki sürekli dönüşüm dizileriyle alakalı sonuçlar Ascoli ve Arzela teoremlerinin sonuçlarıdır. Ascoli fonksiyon uzaylarının kompakt olması için yeter koşulu, Arzela ise gerek koşulu ispatlamıştır. Ascoli-Arzela teoreminin metrik uzay uygulamalarına adapte edilmesi Fréchet tarafından yapılmıştır. Bu teoreme geçmeden önce birkaç tanım verelim.

Tanım 2.5.10 (Uygun (Proper) Uzay)**.**

X metrik uzay olsun. X' in kapalı ve sınırlı her alt kümesi kompakt ise X metrik uzayına uygun (proper) uzay denir[6].

Başka bir deyişle X' in noktalarının oluşturduğu her sonsuz ve sınırlı dizisinin yakınsak alt dizisi vardır. Uygun uzay ile $\mathbb{R}^n$' de Balzano-Weierstrass' ın diziler hakkındaki teoremiyle yani $\mathbb{R}^n$' deki herhangi sonsuz ve sınırlı dizisinin yakınsak alt dizisinin olmasıyla benzerdir. Örneğin $\mathbb{R}$ üzerindeki standart metrik ile donatılmış $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi uygun uzay değildir.

Teorem 2.5.11 (Ascoli)**.**

Y ayrılabilir uzay, X uygun uzay olsun. $(f_n)_{n\geq 0}$, Y' den X' e dönüşümlerin düzgün eşsürekli dizisi için $\forall y \in Y$ için $(f_n(y))_{n\geq 0}$ dizisi sınırlı olsun. Y'nin bütün kompakt kümelerinde $f : Y \to \mathbb{R}$ dönüşümüne düzgün yakınsayan (f_n)' nin bir alt dizisi vardır. Ayrıca f limit dönüşümü düzgün yakınsaktır[6].

Önerme 2.5.12.

X bir kompakt metrik uzay olsun. M negatif olmayan reel sayı ve $\forall n \geq 0$ için $\gamma_n : [a,b] \to X$, $L(\gamma_n) \leq M$ koşulunu sağlayan yol uzunluğu ile parametrize edilmiş yollar olsun. $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ dizisinin düzgün yakınsak bir alt dizisi vardır ve limit yolunun uzunluğu M' den küçük eşittir[6].

İspat.

$\forall n \geq 0$ için $\gamma_n : [a,b] \to X$, M-Lipschitz ve $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ yolların dizisi düzgün eşsüreklidir. Ayrıca $\forall t \in [a,b]$ için X kompakt olduğundan $(\gamma_n(t))_{n\geq 0}$ dizisi sınırlıdır.

Yakınsak alt dizinin varlığı (2.5.11)Ascoli teoreminden, limit yolun uzunluğunun M' den küçük olması ise (2.5.8)' den söylemek mümkündür.

□

Önerme 2.5.13.

X uygun uzay ve M negatif olmayan reel sayı ve $\forall n \geq 0$ için $\gamma_n : [0,1] \to X$, $L(\gamma_n) \leq M$ koşulunu sağlayan yol uzunluğu ile parametrize edilmiş yollar olsun. X' in $\{\gamma_n(0), n \geq 0\}$ alt kümesinin sınırlı olduğunu varsayalım. $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ yolların dizisinin $L(\gamma) \leq M$ olan γ yoluna düzgün yakınsayan bir alt dizisi vardır[6].

Önerme 2.5.14 (Minimal Yolların Varlığı)**.**

X uygun uzay, $x, y \in X$ olsun. x ve y' yi birleştiren düzeltilebilir yolun var olduğunu kabul edelim. Yol uzunluğu x ve y' yi birleştiren yolların yol uzunluklarının infimumuna eşit olan bir yol vardır[12].

3 ARAŞTIRMA ve BULGULAR

Bu bölüm altı kısma ayrılmıştır.

İlk kısımda düzeltilebilir yollarla bağlanmış uzay ve uzunluk uzayı tanımına yer verilmiştir. Uzunluk uzayı örnekleri ve uzunluk uzayı özellikleri taşımayan örneklere yer verilmiştir. Hopf-Rinow teoremi ifade edilmiş ve bu teoremin koşullarını sağlamayan örneklere yer verilmiştir.

İkinci kısımda geodezik yol, geodezik çizgi, geodezik ışın ve geodezik parça tanımlanmıştır. Arasındalık kavramı ve bazı özelliklere yer verilmiştir. Arasındalık kavramı ile geodezik parça arasındaki ilişki gösterilmiştir. Rota ve konum hesaplarında kullanılan Havarsine formülü tanıtılmış ve örneklerle açıklanmıştır.

Üçüncü kısımda geodeziklerin oluşturduğu dizilerin yakınsaklığı incelenmiştir. Bu yakınsamanın düzgün yakınsaklık olduğu ifade edilmiştir.

Dördüncü kısımda geodezik uzay tanımı ve geodezik uzay örneklerine yer verilmiştir. Uzunluk uzayı ile geodezik uzay arasındaki ilişki gösterilmiştir. Geodezik uzayların bazı özelliklerine yer verilmiştir. Hopf-Rinow teoremin özel bir hali ifade edilmiştir.

Beşinci kısımda geodeziksel konveks alt uzay ve geodeziksel alt küme tanımına yer verilmiştir. Bu alt kümenin sağladığı özellikler önermelerle ifade edilmiştir.

Son kısımda Menger konveksliği tanıtılmıştır. Geodezik uzay ile olan ilişki gösterilmiştir. Çarpım metriği tanımlanmıştır. Çarpım uzayı üzerinde tanımlı afin yolla parametrize edilmiş geodezik yolun, yol uzunluğu gösterilmiştir.

3.1 Uzunluk Uzayı

Tanım 3.1.1 (Düzeltilebilir Yollarla Bağlanmış Uzay).

X bir metrik uzay olsun. $\forall x, y \in X$ için $\gamma : [a,b] \to X$, $\gamma(a) = x$ ve $\gamma(b) = y$ olacak şekilde γ düzeltilebilir yolu varsa X metrik uzayına düzeltilebilir yollarla bağlanmış uzay denir[13].

Tanım 3.1.2 (Uzunluk Uzayı).

X bir metrik uzay olsun. $\forall x, y \in X$ olmak üzere;

$$|x - y| = \lim_{\gamma} L(\gamma)$$

burada infimum x ve y' yi birleştiren yollar kümesi üzerinden alınarak tanımlanır.

Yukarıdaki koşulları sağlayan metrik uzaya uzunluk uzayı denir. Bu uzay üzerinde tanımlanan metriğe ise uzunluk metriği denir[6].

(3.1.1)' den yola çıkarak uzunluk uzayının aynı zamanda düzeltilebilir yollarla bağlanmış uzay olduğunu söylemek mümkündür. Devam eden bölümlerde uzunluk uzayı örnekleri ve uzunluk uzayı özellikleri taşımayan ters örneklere yer verilecektir.

Örnek 3.1.3 (Öklid Uzay).

$\forall n \geq 1$ için $\mathbb{E}^n$, n-boyutlu Öklid uzayı yani $\mathbb{R}^n$ Öklid metriği ile donatılmış uzay olsun. Klasik Öklid geometrisinden bilindiği üzere, Öklid uzay üzerindeki herhangi iki nokta arasındaki uzaklık yine bu noktaları birleştiren afin yolun uzunluğuna eşit olduğundan $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayı bir uzunluk uzayıdır.

Benzer şekilde, $\mathbb{E}^n$' nin konveks bir altkümesi (Bu altküme üzerinde bulunan herhangi iki noktayı birleştiren yol yine bu kümeye aittir.) $\mathbb{E}^n$' den indirgenmiş metrik ile donatılmış bir uzunluk uzayıdır.

$\forall n \geq 2$ için $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayından sınırlı sayıda nokta çıkarılması ile oluşan uzay yine uzunluk uzayıdır.

Aksine; $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayından pozitif r-yarıçaplı açık-yuvar $\mathcal{B}$' nin çıkarılması ile oluşan uzay bir uzunluk uzayı değildir.
Bu iddiayı kanıtlamak için $\mathcal{B}$ yuvarının sınırları üzerinde karşılıklı iki nokta x ve y olsun. Kapalı $\overline{\mathcal{B}}$ yuvarına ait projeksiyon dönüşümünün Lipschitz sürekli olduğunu biliyoruz. Bu durumda $x, y \in \mathbb{E}^n/\mathcal{B}$ için x ve y noktalarını birleştiren herhangi bir yolun uzunluğu $S = \partial B$ küre yüzeyinin uzunluğu ile alttan sınırlıdır. Daha açık bir şekilde ifade edecek olursak x ve y noktalarını birleştiren herhangi bir $\gamma : [a, b] \to \mathbb{E}^n/\mathcal{B}$ yolunun $L(\gamma) \geq \pi r$ olacak şekilde alttan sınırlıdır ancak $|x - y| = 2r$' dir. Bundan dolayı $\mathbb{E}^n/\mathcal{B}$ uzayı uzunluk uzayı değildir.

Ayrıca $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayından pozitif r-yarıçaplı kapalı $\mathcal{B}$ yuvarının çıkarılması ile elde edilen uzay da uzunluk uzayı değildir.

Örnek 3.1.4 (Normlu Vektör Uzayı)**.**

Normlu vektör uzayları uzunluk uzayları için geniş bir örnek sınıfı oluştururlar.

$\forall x, y \in X$ için $d(x, y) = \|x - y\|$ metriği ile düşünüldüğünde (X, d) metrik uzayı üzerinde bulunan herhangi iki nokta arasındaki uzaklık; yine bu noktaları birleştiren afin yolun uzunluğuna eşit olduğundan (X, d) normlu vektör uzayı bir uzunluk uzayıdır.

Genel olarak; normlu vektör uzayı X' den indirgenmiş metrik d ile bu uzayın konveks bir altkümesini düşünülürse $A \subset X$, konveks altkümesi ve d metriği ile elde edilen bu (A, d) uzayı da bir uzunluk uzayıdır.

Örnek 3.1.5 (Küre).

$\forall n \geq 3$ için $\mathbb{S} = \mathbb{S}^{n-1}$, $\mathbb{E}^n$ üzerinde birim küre olsun ve d metriği $\mathbb{E}^n$' den indirgenmiş metrik olsun. Burada tanımlanan $(\mathbb{S}, d)$ metrik uzayı bir uzunluk uzayı değildir.

Temel geometri bilgileri ışığında küreden seçilen herhangi iki nokta arasındaki uzaklık $d(x, y) = 2\sin(\alpha/2)$, $\alpha \in [0, \pi]$, α orijin ile x ve y' den geçen iki ışın arasındaki açıdır.

Öte yandan herhangi bir $\gamma : [a, b] \to \mathbb{S}$ yolunun yol uzunluğu kürede bulunan en büyük çemberin en küçük yayından daha büyüktür. Yani;

$$\forall x, y \in \mathbb{S} \quad \textit{ve} \quad d(x, y) \neq 0 \quad \textit{için} \quad L(\gamma) \geq \alpha > 2\sin(\alpha/2)$$

dir. Bunun sonucu olarak $d(x, y) \neq 0$ olacak şekilde $\forall x, y \in \mathbb{S}$ için;

$$\inf_{\gamma} L(\gamma) > d(x, y)$$

dir. Sonuç olarak $(\mathbb{S}, d)$ metrik uzayı bir uzunluk uzayı değildir.

Aksine x ile y arasındaki uzaklığın α' ya eşit olduğu metrik ile $(\mathbb{S}, d)$ metrik uzayı bir uzunluk uzayıdır.

Genel olarak metrik uzaylara geri dönecek olursak; (X, d) metrik uzay üzerinde $d_\ell : X \times X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ kuralı aşağıda verilen metriği tanımlayalım:

$$d_\ell(x, y) = \inf_{\gamma} L(\gamma)$$

burada infimum değeri x ve y' yi birleştiren yolların kümesi üzerinden alınır.

Önerme 3.1.6.

X bir uzunluk uzayı olsun. $x, y \in X$ ve $\alpha + \beta \geq |x-y|$ koşulunu sağlayan α, β negatif olmayan reel sayılar olsun. $\epsilon > 0$ için öyle bir $z \in X$ noktası bulunabilir ki $|x-z| \leq \alpha$ ve $|z-y| \leq \beta + \epsilon$' dur[13].

İspat.

$L(\gamma) \leq |x-y| + \epsilon$ koşulunu sağlayan $\gamma : [a,b] \to X$, x ve y' yi birleştiren γ yolunu ele alalım. Genelliği kaybetmeden $\alpha \leq L(\gamma)$ olduğunu varsayabiliriz. (2.3.2)' den yararlanarak ve γ' nın yol uzunluğu ile parametrelendirilmiş yol olduğunu düşünelim. $z = \gamma(a+\alpha)$ olarak seçildiğinde;

$$|x-z| \leq L\left(\gamma_{|[a,a+\alpha]}\right) = \alpha$$

ve

$$|z-y| \leq L\left(\gamma_{|[a+\alpha,b]}\right) = L(\gamma) - \alpha \leq |x-y| + \epsilon - \alpha \leq \beta + \epsilon$$

dir.

□

Önerme 3.1.7 (d_ℓ metriği).

(X,d) düzeltilebilir yollarla bağlanmış metrik uzay olsun. d_ℓ, X üzerinde bir metriktir ve $\forall x, y \in X$ için $|x-y|_d \leq d_\ell(x,y)$' dir[6].

İspat.

x ve y, X üzerinde herhangi iki nokta olsun ve $\gamma : [a,b] \to X$, x ile y' yi birleştiren yol olsun. (1)' den kolayca görülebileceği üzere $|x-y|_d \leq L(\gamma)$' dır. x ve y' yi birleştiren yolların kümesi üzerinden infimum alınırsa $|x-y|_d \leq d_\ell(x,y)$ elde edilir.

$d_\ell(x,y)$' nin X üzerinde bir metrik olduğunu ispatlayalım.

$\gamma : [a,b] \to X$ olacak şekildeki tüm yollar $\gamma'(t) = \gamma(a+b-t)$, $t \in [a,b]$ şeklinde tanımlanan $\gamma' : [a,b] \to X$ yoluyla ilişkilendirilebilir. Tanımdan kolayca görülebileceği üzere γ' yolu, x ve y' yi birleştiren yoldur ve $L(\gamma') = L(\gamma)$' dir. $\forall x, y \in X$ için $d_\ell(x,y) \leq d_\ell(y,x)$ olduğunu biliyoruz. Böylece d_ℓ metrik olmanın simetri şartını sağlar. Yani $d_\ell(x,y) = d_\ell(y,x)$' dir.

$d_\ell(x,y) = 0$ olduğunu kabul edelim. $|x-y| \leq d_\ell(x,y)$ eşitsizliğinden yola çıkarak $|x-y| = 0$ eşitliği elde edilir. Böylece $x = y$ bulunur.

Son olarak d_ℓ' nin X üzerinde metrik olduğunu göstermek için üçgen eşitsizliğini sağladığı ispatlanmalıdır. x, y ve z noktaları X üzerinde rastgele noktalar olsun. $k = d_\ell(x,y)$ ve $k' = d_\ell(y,z)$ olsun. $\forall \epsilon > 0$ için $L(\gamma) \leq d_\ell(x,y) + \epsilon/2$ koşulunu sağlayan x ve y' yi birleştiren $\gamma : [a,b] \to X$ yolu ve $L(\gamma') \leq d_\ell(y,z) + \epsilon/2$ koşulunu sağlayan y ile z' yi birleştiren $\gamma' : [a,b] \to X$ yolu olsun.

$$\gamma''(t) = \begin{cases} \gamma(t) \ ; \ \ t \in [a,b] \\ \gamma'(t-b+a') = 1 \ ; \ \ t \in [b, b+b'-a'] \end{cases}$$

koşulunu sağlayan $\gamma'' : [a, b+b'-a'] \to X$ yolunu tanımlayalım. Tanımdan yola çıkarak $L\left(\gamma''_{[a,b]}\right) = L(\gamma)$ eşitliği yazılabilir. Öte yandan $\gamma''_{[b,b+b'-a']}$ yolu; $\psi(t) = t+a'-b$ ile tanımlanan $\psi : [b, b+b'-a'] \to [a', b']$ yolunun parametrizasyonu ile elde edilebilir. Bu nedenle $L\left(\gamma''_{[b,b+b'-a']}\right) = L(\gamma')$' dür. Böylece aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$L(\gamma'') = L(\gamma) + L(\gamma') \leq d_\ell(x,y) + d_\ell(y,z) + \epsilon$$

x ile z' yi birleştiren γ''' ler üzerinden infimum alınırsa;

$$d_\ell(x,z) \leq d_\ell(x,y) + d_\ell(y,z) + \epsilon$$

$\forall \epsilon > 0$ için bu eşitsizlik sağlandığından;

$$d_\ell(x,z) \leq d_\ell(x,y) + d_\ell(y,z)$$

yazılır. Sonuç olarak metrik olma koşullarını sağladığından d_ℓ , X üzerinde bir metriktir. □

Tanım 3.1.8 (Uzunluk Metriği).

(3.1.7)' de belirtilen d_ℓ metriğine (X,d) uzayının uzunluk metriği denir[13].

Önerme 3.1.9.

(X,d) düzeltilebilir yollarla bağlanmış uzay olsun.
$(X,d_\ell) \to (X,d)$ birim dönüşümü süreklidir[6].

Önerme 3.1.10.

(X,d) metrik uzay ve $\gamma : [a,b] \to (x,d)$ düzeltilebilir yol olsun. Bu durumda γ dönüşümü d_ℓ metriği ile süreklidir. Başka bir söylemle $\gamma : [a,b] \to (x,d_\ell)$ dönüşümü yoldur[6].

İspat.

$\forall t_0, t \in [a,b]$ için (2.2.13)' ten;

$$d_\ell\left(\gamma(t_0),\gamma(t)\right) \leq L\left(\gamma_{[t_0,t]}\right) = \left|L\left(\gamma_{[a,t]}\right) - L\left(\gamma_{[a,t_0]}\right)\right|$$

ayrıca (2.2.14)' ten $t \to t_0$ iken $d_\ell\left(\gamma(t_0),\gamma(t)\right) \to 0$ olduğu aşikardır.

Sonuç olarak γ dönüşümü d_ℓ metriği ile süreklidir. □

Önerme 3.1.11.

(X,d) düzeltilebilir yollarla bağlanmış uzay olsun. (X,d) uzayı uzunluk uzayıdır ancak ve ancak $d_\ell = d$' dir[6].

Önerme 3.1.12.

(X,d) metrik uzay olsun. $\gamma : [a,b] \to X$, d_ℓ uzunluk metriği ile donatılmış (X,d_ℓ) metrik uzayında tanımlı bir yol olsun. Bu durumda γ, (X,d) uzayında da bir yoldur ve ayrıca $L_{d_\ell}(\gamma) = L_d(\gamma)$' dir[6].

İspat.

$(X,d_\ell) \to (X,d)$ birim dönüşümünün sürekli olduğunu (3.1.9)' da göstermiştik. Bu iki uzay üzerinde tanımlanacak yolların yol uzunluğunun eşit olduğunu göstermek için $[a,b]$' nin bir alt bölümü $\sigma(t_i)_{i=0,1,2,\cdots,n}$ olsun.

(3.1.7)' den $d \leq d_\ell$ olduğunu biliyoruz. Bu nedenle;

$$V_\sigma{}^d(\gamma) \leq V_\sigma{}^{d_\ell}(\gamma)$$

yazılabilir. Bütün alt bölümler σ' lar üzerinden supremum alınırsa;

$$L_d(\gamma) \leq L_{d_\ell}(\gamma)$$

yazılır. Öte yandan;

$$V_\sigma^{d_\ell}(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} d_\ell\left(\gamma\left(t_i\right), \gamma\left(t_{i+1}\right)\right) \leq \sum_{i=0}^{n-1} L_d\left(\gamma_{|[t_i,t_{i+1}]}\right) = L_d(\gamma)$$

olduğundan dolayı $L_{d_\ell}(\gamma) \leq L_d(\gamma)$ yazılabilir.

Sonuç olarak $L_{d_\ell}(\gamma) = L_d(\gamma)$ eşitliği elde edilir. □

Önerme 3.1.13.

(X, d) düzeltilebilir yollarla bağlanmış uzay olsun. Bu durumda (X, d_ℓ) uzunluk uzayıdır[13].

İspat.

$\forall x, y \in X$ için;

$$d_\ell(x, y) = \inf_\gamma L_d(\gamma)$$

Yukarıdaki eşitlik uzunluk metriğinin tanımının doğal bir sonucudur. Burada infimum değeri γ yollarının kümesi üzerinden alınır. Genelliği bozmadan; düzeltilebilir yolların sınırlandırılabileceğini varsayabiliriz. (3.1.10)' dan d metriği baz alınarak elde edilen γ yolunu d_ℓ metriği için de elde edebiliriz.

Eğer γ yolu d_ℓ metriği için düzeltilebilir yol ise (3.1.12)' den γ yolu d metriği için de yoldur ve $L_{d_\ell}(\gamma) = L_d(\gamma)$ eşitliği söz konusudur. Böylece;

$$d_\ell(x, y) = \inf_\gamma L_{d_\ell}(\gamma)$$

burada infimum değeri x ve y' yi birleştiren d_ℓ için sürekli ve düzeltilebilir γ' lardan oluşan küme üzerinden alınır. □

Tanım 3.1.14 (Altuzaya Ait Doğal Metrik)**.**

X', (X, d) metrik uzayının alt uzayı olsun. X' üzerinde tanımlı doğal metrik; d metriğinden indirgenmiş metriktir. Eğer X' uzayı düzeltilebilir yollarla bağlanmış uzay ise bu indirgenmiş metrik uzunluk metriğidir[13].

Tanım 3.1.15 (Metrik Uzayın Çapı).

(X, d) bir metrik uzay olsun. Bu uzayın çapı;

$$diam(X) = \sup_{x,y \in X} d(x, y)$$

şeklinde tanımlanır. Metrik uzayın sınırlı alt kümesi indirgenmiş metrikle birlikte sonlu bir çapa sahiptir[6].

Teorem 3.1.16 (Hopf-Rinow).

X lokal kompakt ve tam uzunluk uzayı olsun. X' in kompakt alt kümeleri, bu uzayın kapalı ve sınırlı alt kümeleridir[13].

İspat.

diam$(X) = \infty$ olsun. $x \in X$ için merkezi x ve r-yarıçaplı $\mathcal{B}(x, r)$ kapalı yuvarı olsun. X lokal kompakt olduğundan dolayı yeteri kadar küçük r için $\mathcal{B}(x, r)$ kompakttır.

Kanıtlanması gereken ifade $\forall r > 0$ için $\mathcal{B}(x, r)$ yuvarının kompakt olmasıdır. İspata devam etmeden önce aşağıdaki önermeyi incelemek gerekir.

Önerme 3.1.17.

X tam uzunluk uzayı olsun. $x \in X$ için $\mathcal{B}(x, r)$ kapalı yuvarı kompakt olsun. $r < p$ olacak şekilde p reel sayısı için $\mathcal{B}(x, p)$ kapalı yuvarı da kompakttır[13].

İspat.

Genelliği bozmadan $p - (\epsilon/3) > 0$ koşulunu sağlayacak şekilde $\epsilon > 0$ sayısı seçilebilir. $p - (\epsilon/3) < r < p$ koşulunu sağlayan r sayısını alalım.

$\mathcal{B}(x, r)$' nin kompakt olmasından dolayı öyle bir $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \in X$ sonlu dizisi bulunabilir ki $\mathcal{B}(x, r)$, $\mathcal{B}(x_i, \epsilon/3)$ kapalı yuvarların birleşiminde bulunur.

$y \in \mathcal{B}(x,p)$ olsun. X uzunluk uzayı olduğundan (3.1.6)' dan öyle bir $z \in X$ vardır ki $|x-z| \leq p - \epsilon/3$ ve $|z-y| \leq p - 2\epsilon/3$ koşullarını sağlasın. Bu nedenle $z \in \mathcal{B}(x,r)$' dir. Ayrıca $z \in \mathcal{B}(x_i, \epsilon/3)$ olacak şekilde $i \in \{1,2,3,\cdots,n\}$ tam sayısı vardır.

$|y-z| \leq 2\epsilon/3$ eşitsizliği ile;

$$|y-x_i| \leq |y-z| + |z-x_i| \leq \epsilon$$

eşitsizliği elde edilir. Bundan dolayı $\mathcal{B}(x,r)$' nin , $\mathcal{B}(x_i,\epsilon)$ kapalı yuvarlarının birleşiminde bulunduğunu söylemek mümkündür. Sonuç olarak $\mathcal{B}(x,p)$ kapalı yuvarı kompakttır. $\square$

Kanıta devam ederken; herhangi bir $x \in X$ ve

$$I_x = \{\mathcal{B}(x,r) \quad \text{kapalı yuvarının kompakt olmasını sağlayan} \quad r \geq 0\}$$

Yukarıda tanımlanan küme için $r = 0 \in I_x$ olduğu açıktır. I_x' de öyle bir t noktası vardır ki $[0,t]$ aralığındaki noktalar I_x' in elemanıdır. Kompakt bir kümenin kapalı alt kümesinin kompakt olduğunu biliyoruz. I_x, $[0,\infty]$' nin 0 bitiş noktasına sahip bir aralığıdır. (3.1.17)' den I_x' in kapalı olduğu aşikardır. I_x, $p < \infty$ iken $[0,p]$ formunda ya da $[0,\infty)$ formundadır. Eğer I_x' in ilk formda olamayacağı ispatlanırsa teorem kanıtlanmış olur.

Çelişki elde edebilmek için I_x' in $p < \infty$ iken $[0,p]$ formunda olduğunu kabul edelim.

$\forall y \in X$ için $\mathcal{B}(y,r_y)$ kapalı yuvarının kompakt olmasını sağlayan r_y pozitif reel sayısı olsun.

X lokal kompakt uzay olduğundan böyle bir r_y vardır. $\forall r \geq 0$ için y merkezli ve r-yarıçaplı $\overset{o}{\mathcal{B}}(x,p)$ açık yuvarı tanımlanabilir. Böylece,

$$\mathcal{B}(x,p) \subset \bigcup_{y \in \mathcal{B}(x,p)} \overset{o}{\mathcal{B}}(y, r_y/2)$$

yazılabilir. $\mathcal{B}(x,p)$ kompakt olduğundan öyle sonlu bir küme $F \subset \mathcal{B}(x,p)$ vardır ki

$$\mathcal{B}(x,p) \subset \bigcup_{y \in F} \overset{o}{\mathcal{B}}(y, r_y/2)$$

olsun. $r_0 = \min\limits_{y \in F} \quad r_y/2$ olarak seçilsin. Tanımından dolayı $r_0 > 0$' dır. $\mathcal{B}(x, p + r_0/2)$ yuvarının kompakt olduğu kanıtlanırsa istenilen çelişki elde edilir.

z, $\mathcal{B}(x, p + r_0/2)$ yuvarının herhangi bir noktası olsun. $|x - z| \leq p + r_0/2$ yazılabilir. X uzunluk uzayı olduğundan ve (3.1.6)' dan öyle bir $u \in X$ vardır ki $|x - u| \leq p$ ve $|u - z| \leq r_0$ özelliklerini sağlasın. $u \in \mathcal{B}(x,p)$ olduğu aşikardır ve bu nedenle öyle bir $y \in F$ elamanı vardır ki $u \in \overset{o}{\mathcal{B}}(y, r_y/2)$' dir. Öte yandan $|z - u| \leq r_0 \leq p + r_0/2$ eşitsizliğinden;

$$|z - y| \leq |z - u| + |u - y| \leq r_y/2 + r_y/2 = r_y$$

eşitsizliği yazılabildiğinden $z \in \mathcal{B}(y, r_y)$' dir.

$$\mathcal{B}(x, p + r_0) \subset \bigcup_{y \in F} \mathcal{B}(y, r_y/2)$$

olduğundan $\mathcal{B}(x, p + r_0)$ yuvarı kompakttır. □

Örnek 3.1.18 (Hopf-Rinow'a Ters Örnekler).

Hopf-Rinow teoreminin koşullarını sağlamayan üç örneği inceleyelim.

- *(i)* $\delta(x,y) = \min \quad (1, |x-y|)$ *koşulunu sağlayan* δ *metriği ile donatılmış* $\mathbb{R}$*' yi ele alalım.* δ*' dan indirgenmiş topolojinin alışılmış standart topoloji olduğu aşikardır.* $(\mathbb{R}, \delta)$ *tam ve lokal kompakt uzaydır.*

  $|x-y| > 1$ *koşulunu sağlayan* $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *için* $\delta(x,y) = 1$*' dir. Fakat* $\delta_\ell(x,y) = |x-y| > 1$ *olduğundan* $(\mathbb{R}, \delta)$ *uzunluk uzayı değildir.*

  $(\mathbb{R}, \delta)$ *uzayı kendisinin kapalı ve sınırlı alt kümesi olmasına karşın kompakt değildir.*

- *(ii)* $(0,1)$ *açık aralığı alışılmış metrik ile lokal kompakt ve tam olmayan uzunluk uzayıdır. Bu uzay kendisinin kapalı ve sınırlı alt kümesi olmasına karşın kompakt değildir.*

- *(iii)* X *sonsuz boyutlu Banach uzayı olsun. Herhangi normlu uzay gibi* X *de bir uzunluk uzayıdır. Bu uzay lokal kompakt olmadığından*
  $\mathcal{B}(0,1) \subset X$ *birim yuvarı,* X*' in kapalı ve sınırlı alt kümesi olması karşın kompakt değildir.*

Önerme 3.1.19.

X bir uzunluk uzayı olsun. $x \in X$ ve $r \in \mathbb{R}^+$ olsun. Merkezi x ve r-yarıçaplı $\mathcal{B}(x,r)$ açık yuvarına ait her y ve z için yol uzunluğu $2r$' den daha az olan y ve z' yi birleştiren $\gamma : [a,b] \to X$ yolu vardır. Ayrıca böyle bir yolun görüntüsü x merkezli ve $2r$-yarıçaplı $\mathcal{B}(x,2r)$ açık yuvarının içinde bulunur[6].

İspat.

Üçgen eşitsizliğinden;

$$|y - z| \leq |y - x| + |z - x| < 2r$$

yazılabilir. X uzunluk uzayı olduğundan dolayı y ve z' yi birleştiren, yol uzunluğu $2r$' den daha az olan $\gamma : [a, b] \to X$ yolu vardır. Böyle bir yolun görüntüsünün $\mathcal{B}(x, 2r)$ açık yuvarında olması gerektiğini gösterelim.

Çelişki elde edebilmek adına öyle bir $t \in [a, b]$ için $\gamma(t)$' nin $\mathcal{B}(x, 2r)$' de olmadığını varsayalım. Bundan dolayı;

$$|y - \gamma(t)| \geq |x - \gamma(t)| - |x - y| > r$$

ve

$$|z - \gamma(t)| \geq |x - \gamma(t)| - |x - z| > r$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Böylece;

$$L(\gamma) = L\left(\gamma_{|[a,t]}\right) + L\left(\gamma_{|[t,b]}\right) \geq |y - \gamma(t)| + |z - \gamma(t)| > 2r$$

eşitliğinin yazılabilmesi ile $\gamma(t)$' nin $\mathcal{B}(x, 2r)$' de olması ile çelişir.

Sonuç olarak $\gamma(t)$' nin $\mathcal{B}(x, 2r)$' de olduğu kanıtlanmış olur. $\square$

3.2 Geodezikler

Tanım 3.2.1 (Geodezik Yol, Geodezik Çizgi, Geodezik Işın).

X metrik uzay olsun. $\forall t_1, t_2 \in [a,b]$ için $|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| = |t_1 - t_2|$ koşulunu sağlayan uzaklığı koruyan $\gamma : [a,b] \to X$ yoluna geodezik yol denir.

$\gamma : [0, \infty) \to X$ uzaklığı koruyan dönüşüme geodezik ışın denir.

$\gamma : \mathbb{R} \to X$ uzaklığı koruyan dönüşüme geodezik çizgi denir[14].

Geodezik yol, geodezik ışın ve geodezik çizgi tanımlarından kolayca görülebileceği üzere bu dönüşümler birebirdir. Geodezik bir yolun tanım kümesinin kapalı bir alt aralığa kısıtlanmışı da geodezik yoldur.

Tanım 3.2.2 (Geodezik Parça).

X bir metrik uzay olsun. X' de bulunan bir geodezik yolun görüntüsüne yine X' de bir geodezik parça denir.

Eğer $\gamma : [a,b] \to X$ yolu x ve y' yi birleştiren bir yol ise geodezik parça $\gamma([a,b])$' nin bu noktaları birleştirdiği söylenir[14].

Geodezik parça üzerindeki $[x_0, x_1]$ noktalarının doğal parametrizasyonu $[0,1]$ aralığı kullanılarak yapılır. $[x_0, x_1]$ aralığındaki x_t ya da $(1-t)x_0 + tx_1$ şeklinde tanımlanan nokta ile x_0 arasındaki uzaklık $t|x_0 - x_1|$'dir.

Önerme 3.2.3.

$[x, y]$, X metrik uzayında geodezik parça olsun. Görüntüleri $[x, y]$ olan $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to X$ ve $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to X$ olan geodezik yollar olsun.

$\mathbb{R}$' nin iki aralığı olan $[a_1, b_1]$ ve $[a_2, b_2]$ aralıkların boyları eşittir. Ayrıca öyle bir tek $\alpha \in \mathbb{R}$ vardır ki $t \in [a_2, a_1]$ için $\gamma_2(t) = \gamma_1(t + \alpha)$' dır.
Son olarak γ_1 ve γ_2' nin yol uzunlukları eşittir[13].

İspat.

Geodezik dönüşüm birebir olduğundan $\gamma'_1 : [x, y] \to [a, b]$ ve $\gamma'_1 \circ \gamma_1 = \text{ıd}_{[x,y]}$ koşullarını sağlayan γ'_1 dönüşümü vardır.

Geodezik dönüşümler uzaklığı koruduğundan $\gamma'_1 \circ \gamma_1 : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ dönüşümü de geodezik dönüşüm olduğundan bu aralıkların boyları eşittir.

$t \in [a_2, b_2]$ için öyle bir $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $\gamma_2(t) = \gamma_1(t + \alpha)$ olsun. α' nın tekliğini ispatlamak üzere $\beta \neq\in \mathbb{R}$ elemanı $\gamma_2(t) = \gamma_1(t + \beta)$ eşitliğini sağlasın.

$$\gamma_2(t) = \gamma_1(t + \alpha) = \gamma_1(t + \beta)$$

olduğundan;

$$\gamma_1(t + \alpha) = \gamma_1(t + \beta)$$

eşitliği elde edilir. γ_1 birebir dönüşüm olduğundan $t + \alpha = t + \beta$' dır.

Sonuç olarak $\alpha = \beta$ eşitliği elde edildiğinden çelişki elde edilir. $\square$

Tanım 3.2.4 (Geodezik Parçanın Uzunluğu).

X metrik uzayında bulunan $[x, y]$ geodezik parçanın uzunluğu, görüntüsü $[x, y]$ olan herhangi bir geodezik yolun yol uzunluğuna eşittir[6].

Önerme 3.2.5.

X metrik uzay ve $\gamma : [a, b] \to X$ geodezik yol olsun. γ yol uzunluğu ile parametrize edilmiştir[6].

İspat.

$a \leq u \leq v \leq b$ olacak şekilde $u, v \in \mathbb{R}$ olsun. $\sigma = (t_i)_{i=0,1,2,\cdots,n}$ dizisi $[a, b]$' nin bir alt bölümü olsun. Bu durumda;

$$V_\sigma\left(\gamma_{[u,v]}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1})| = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = v - u$$

dir. Ayrıca aşağıdaki eşitlik yazılabilir;

$$L\left(\gamma_{[u,v]}\right) = \sup_\sigma V_\sigma\left(\gamma_{|[u,v]}\right) = v - u$$

Sonuç olarak γ yol uzunluğu ile parametrize edilmiş yoldur. □

Önerme 3.2.6.

X metrik uzay ve $\gamma : [a, b] \to X$ yol uzunluğu ile parametrize edilmiş yol olsun. Bu durumda aşağıdaki üç önerme denktir[14].

- *(i) γ geodeziktir.*
- *(ii) Her u ve v reel sayısı için $a \leq u \leq v \leq b$ olsun. Bu durumda;*

$$|\gamma(a) - \gamma(v)| = |\gamma(a) - \gamma(u)| + |\gamma(u) - \gamma(v)|$$

- *(iii) $L(\gamma) = |\gamma(a) - \gamma(b)|$*

Tanım 3.2.7 (Afin Yolla Parametrize Edilmiş Geodezik)**.**

X metrik uzay ve $\gamma : [a,b] \to X$ bu uzay üzerinde yol olsun. γ sabit yol veya öyle bir $\gamma' : [c,d] \to X$ geodezik yol vardır ki $\psi : [a,b] \to [c,d]$, $\psi(x) = (d-c)x + \frac{(bc-ad)}{b-a}$ şeklinde bu iki aralık arasında tek afin homeomorfizm olmak üzere $\gamma = \gamma' \circ \psi$ bulunabilsin. Bu durumda γ' ya afin yolla parametrize edilmiş geodezik denir[6].

Önerme 3.2.8.

$\gamma : [0,1] \to X$ afin yolla parametrize edilmiş geodezik olsun. $0 \leq u \leq v \leq 1$ koşulunu sağlayan $\forall u, v \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $\gamma(u) - \gamma(v) = L(\gamma)|u-v|$' dir[6].

Önerme 3.2.9.

X bir metrik uzay ve $\gamma : [0,1] \to X$ bir yol olsun. $\forall u, v \in [0,1]$ için $|\gamma(u) - \gamma(v)| = K|u-v|$ koşulunu sağlayan K negatif olmayan reel sayı olsun. Bu durumda γ afin yolla parametrize edilmiş yol ve $K = L(\gamma)$' dır[6].

Önerme 3.2.10.

X bir metrik uzay ve $[x,y]$ ve $[y,z]$ bu uzay üzerinde iki geodezik parça olsun. $[x,y] \cup [y,z]$ geodezik parçadır ancak ve ancak $|x-z| = |x-y| + |y-z|$' dir[13].

Tanım 3.2.11 (Arasındalık Kavaramı)**.**

X bir metrik uzay olsun. Çiftler halinde birbirinden farklı $x, y, z \in X$ noktaları olsun. Bu durumda;

$$|x-z| = |x-y| + |y-z|$$

eşitliği varsa y noktası x ve z noktalarının arasındadır denir[6].

Önerme 3.2.12 (Arasındalık Kavramının Geçişkenliği)**.**

X bir metrik uzay olsun. x, y, z ve t noktaları bu uzayın ikişerli olarak birbirinden farklı noktaları olsun.

$$y,\ x \text{ ve } z\text{' nin arasındadır} \quad \text{ve} \quad z,\ x \text{ ve } t\text{' nin arasındadır.}$$
$$\Updownarrow$$
$$y,\ x \text{ ve } t\text{' nin arasındadır} \quad \text{ve} \quad z,\ y \text{ ve } t\text{' nin arasındadır[6].}$$

İspat.

Eğer y, x ve z' nin arasında ve z, x ve t' nin arasında ise;

$$|x-y|+|y-z|=|x-z|$$

ve

$$|x-z|+|z-t|=|x-t|$$

dir.

$$|x-t|=|x-z|+|z-t|=|x-y|+|y-z|+|z-t|$$

eşitliğinden dolayı;

$$|x-t| \geq |x-y|+|y-z| \geq |x-t|$$

eşitsizliği yazılabilir. Sonuç olarak;

$$|x-y|+|y-t|=|x-t| \qquad \text{ve} \qquad |y-z|+|z-t|=|y-t|$$

dir. Bu eşitlik sayesinde y, x ve t' nin arasındadır ve z, y ve t' nin arasındadır. Bu önermenin tersi de doğrudur.

$\square$

Önerme 3.2.13 (Arasındalık Kavramı ve Geodezik Parça)**.**

X metrik uzay ve $x, y, z \in X$ olsun. y, x ve z' nin arasındadır ancak ve ancak bu üç nokta çiftler halinde birbirinden farklı ve $y \in [x, z]$ olacak şekilde geodezik parça vardır[6].

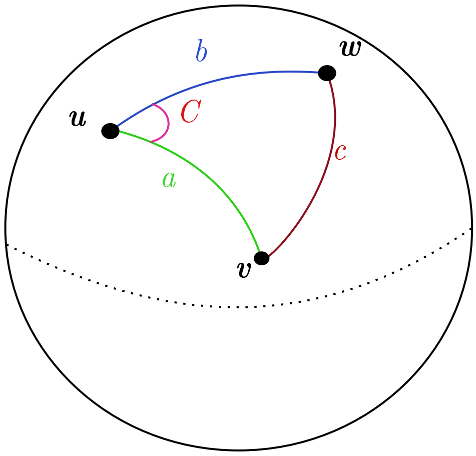
Önerme 3.2.14.

X metrik uzay ve $x \in X$, $r \in \mathbb{R}^+$ olsun. y ve z, x merkezli ve r-yarıçaplı açık(kapalı) yuvarın elemanı ve $\gamma : [a, b] \to X$ geodezik yolu y ve z' yi birleştiriyorsa; γ' nın görüntüsü x merkezli ve $2r$-yarıçaplı açık(kapalı) yuvardadır[13].

Örnek 3.2.15 (Rota ve Konum Hesabı)**.**

Dünya geoid bir şekle sahip olduğundan üzerinde belirlenen iki koordinat arasındaki mesafeyi hesaplamak oldukça zordur. Günümüzde hava araçlarının(Uçak, helikopter ve İHA gibi) belirlenen koordinatlara en kısa rota hesaplanarak ulaşılması gerek maliyet gerek uçuş güvenliği açısından kritik önem arz etmektedir. Belirlenen bu rota ve dünya üzerinde iki konum arasındaki yol geodezik yol örneğidir.

Haversin dünyanın geoid şeklini de hesaba katacak şekilde yeni bir ölçüm formülü geliştirmiştir. Küresel üçgenin açılarını ve kenar uzunluklarını çözmek için çeşitli teoremler kullanılır. Haversin formülü küresel kosinüs formülü yardımıyla elde edilir[16].



Şekil2 : Küre

$$\cos(c) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\cos(C)$$

Burada a, b, c sırasıyla u ile v, u ile w ve v ile w noktalarını birleştiren büyük çember yaylarıdır. Birim küre üzerindeki a, b ve c uzunlukları merkez açılar ile hesaplanabilir.

Haversin fonksiyonu bu formüle uygulandığında;

$$\mathrm{hav}(c) = \mathrm{hav}(a-b) + \sin(a)\sin(b)\,\mathrm{hav}(C)$$

Haversin formülünde dünya üzerinde iki nokta arasındaki mesafeyi kolayca hesaplamak için kosinüs formülünde özel bir durum olarak; u noktasını kuzey kutubu olarak alınır. v ile w noktaları arasındaki mesafe d ile hesaplanır. r dünyanın yarıçap uzunluğudur. v ile w arasındaki merkezi açı:

$$\Theta = \frac{d}{r}$$

Dünya üzerinde verilen iki nokta arasındaki mesafeyi %0,5' lik hata ile bulan Haversin formülü;

$$\operatorname{hav}(\Theta) = \operatorname{hav}(\varphi_2 - \varphi_1) + \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2)\operatorname{hav}(\lambda_2 - \lambda_1)$$

hav :	*Havarsine fonksiyonu*
d :	*İki nokta arasındaki uzaklık*
r :	*Dünyanın yarıçapı*
φ_1, φ_2 :	1. *ve* 2. *noktaların enlemlerinin radyan cinsinden değerleri*
λ_1, λ_2 :	1. *ve* 2. *noktaların boylamlarının radyan cinsinden değerleri*

Haversine fonksiyonu aşağıdaki gibi olduğundan;

$$\operatorname{hav}(\theta) = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos(\theta)}{2}$$

d uzunluğunu elde edebilmek için hav fonkisiyonun tersini bulmamız gerekir;

$$d = r\operatorname{archav}(\operatorname{hav}(\Theta)) = 2r\arcsin\Big(\sqrt{\operatorname{hav}(\Theta)}\Big)$$

eşitlitlikte hav fonksiyonu yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} d &= 2r\arcsin\left(\sqrt{\operatorname{hav}(\varphi_2 - \varphi_1) + \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2)\operatorname{hav}(\lambda_2 - \lambda_1)}\right) \\ &= 2r\arcsin\left(\sqrt{\sin^2\left(\tfrac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right) + \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2)\sin^2\left(\tfrac{\lambda_2-\lambda_1}{2}\right)}\right) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir[15].

Bu formül ile hesaplanmış iki örnek aşağıdaki gibidir.

$$Miami\ \ (25^0 47' N, 80^0 13' W)\ \ ,\ Manila\ \ (14^0 35' N, 120^0 58' N) \rightarrow d = 9,308$$

$$Chicago\ \ (41^0 53' N, 87^0 38' W)\ \ ,\ Tokyo\ \ (35^0 41' N, 139^0 42' E) \rightarrow d = 6,306$$

3.3 Geodeziklerin Limitleri

Önerme 3.3.1 (Geodezik Yolların Limiti).

X metrik uzay ve $\forall n \geq 0$ tamsayısı için $\gamma_n : [a,b] \rightarrow X$ geodezik (afin yolla parametrize edilmiş geodezik) olsun. Eğer (γ_n) dizisi $\gamma : [a,b] \rightarrow X$ dönüşümüne noktasal olarak yakınsıyor ise γ geodeziktir(afin yolla parametrize edilmiş geodezik)[13].

İspat.

γ' nın afin yolla parametrize edilmiş geodezik olduğu durum uygun afin dönüşümler tanımlanarak kanıtlanabilir. Burada γ' nın herhangi bir geodezik olduğu durumu kanıtlayacağız.

(γ_n) geodeziklerin dizisi olduğundan ve geodeziklerin uzaklığı koruyan dönüşüm olmalarından dolayı $\forall t_1, t_2 \in [a,b]$ ve $\forall n = 1, 2, 3, \cdots, n$ için $|\gamma_n(t_1) - \gamma_n(t_2)| = |t_1 - t_2|$' dir. Ayrıca uzaklık fonksiyonunun sürekli olmasından;

$$\lim_{n \to \infty} |\gamma_n(t_1) - \gamma_n(t_2)| = |\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| = |t_1 - t_2|$$

γ uzaklığı koruyan dönüşüm olduğundan geodeziktir. $\square$

Önerme 3.3.2.

X kompakt metrik uzay ve $\forall n \geq 0$ tamsayısı için $\gamma_n : [a, b] \to X$ afin yolla parametrize edilmiş geodezik olsun. $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ dizisinin bir afin yolla parametrize edilmiş geodeziğe düzgün yakınsayan bir alt dizisi vardır[6].

İspat.

$\forall n \geq 0$ için $L(\gamma_n) = |\gamma_n(a) - \gamma_n(b)|$' dir. X kompakt olduğundan sınırlı bir çapa sahiptir. (diam$(X) < \infty$)
$(L(\gamma_n))_{n\geq 0}$ dizisi n' den bağımsız olarak üstten sınırlıdır. Böylece $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ dizisinin γ yoluna düzgün yakınsak olan bir alt dizisi bulunabilir. (3.3.1)' den γ afin yolla parametrize edilmiş geodezik yoldur.

□

Önerme 3.3.3.

X metrik uzay ve $\forall n \geq 0$ tamsayısı için $\gamma_n : [a, b] \to X$ afin yolla parametrize edilmiş geodezik olsun. $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ dizisi $\gamma : [0, 1] \to X$ afin yolla parametrize edilmiş geodeziğe noktasal yakınsak ise bu yakınsama, düzgün yakınsamadır[6].

İspat.

Çelişki elde edebilmek için (γ_n)' nin γ' ya olan yakınsaklığının düzgün yakınsaklık olmadığını varsayalım.

$\forall n_0 \geq 0$ için öyle bir $\epsilon > 0$ sayısı bulunabilir ki $n \geq n_0$ tamsayısı vardır ve $|\gamma_n(t_n) - \gamma(t_n)| \geq \epsilon$, $t \in [a, b]$ koşulu sağlansın.
Böylece $i \to \infty$ iken $(n_i)_{i\geq 0}$ tamsayı dizisi sonsuza gider.

$\forall n_i \leq 0$ için $|\gamma_{n_i}(t_{n_i}) - \gamma(t_{n_i})| \geq \epsilon$ olacak şekilde $[a,b]$' nin reel sayı terimli dizisi $(t_{n_i})_{i\geq 0}$' dır. $[a,b]$ aralığı kompakt olduğundan (t_{n_i}) dizisi $i \to \infty$ iken herhangi $t \in [a,b]$ noktasına yakınsar. $\forall i \geq 0$ için γ_{n_i} yolu geodezik yoldur. Böylece $L(\gamma_{n_i}) = |\gamma_{n_i}(0) - \gamma_{n_i}(1)|$' dir ve $i \to \infty$ iken $(\gamma_{n_i})_{i\geq 0}$ dizisi γ' ya noktasal yakınsak olduğundan $(L(\gamma_{n_i}))_{i\geq 0}$ dizisi $L(\gamma) = |\gamma(0) - \gamma(1)|$' e yakınsar.
$M = L(\gamma) + 1$ olsun.

$\forall n_i \geq N$ koşulunu sağlayan öyle bir $N > 0$ tamsayısı vardır ki aşağıdaki üç koşulu sağlanır.

$$\begin{aligned} L(\gamma_{n_i}) &\leq M \\ |\gamma_{n_i}(t) - \gamma(t)| &\leq \tfrac{\epsilon}{4M} \\ |t_{n_i} - t| &\leq \tfrac{\epsilon}{4} \end{aligned}$$

$\forall n_i \geq 0$ için;

$$\begin{aligned} \epsilon &\leq |\gamma_{n_i}(t_{n_i}) - \gamma(t_{n_i})| \\ &\leq |\gamma_{n_i}(t_{n_i}) - \gamma_{n_i}(t)| + |\gamma_{n_i}(t) - \gamma(t)| + |\gamma(t) - \gamma(t_{n_i})| \\ &= L(\gamma_{n_i})\,|t_{n_i} - t| + |\gamma_{n_i}(t) - \gamma(t)| + L(\gamma_{n_i})\,|t_{n_i} - t| \\ &\leq M\,|t_{n_i} - t| + |\gamma_{n_i}(t) - \gamma(t)| + M\,|t_{n_i} - t| \\ &= \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{3\epsilon}{4} \end{aligned}$$

Böylece çelişki elde edildiğinden (γ_n) dizisi γ' ya düzgün yakınsaktır. $\square$

3.4 Geodezik Uzay

Tanım 3.4.1 (Geodezik Uzay)**.**

X metrik uzayı üzeriden seçilen herhangi iki nokta için bu noktaları birleştiren geodezik yol varsa X metrik uzayına geodezik uzay denir[13].

Örnek 3.4.2 (Öklid Uzay).

$\forall n \geq 1$ için $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayı üzerindeki noktalar x ve y olsun. $\forall x, y \in \mathbb{E}^n$ ve $t \in [0,1]$ için $\gamma : [0,1] \to \mathbb{E}^n$, $\gamma(t) = (1-t)x + ty$ şeklinde tanımlanan afin yol aynı zamanda $\mathbb{E}^n$' de x ve y' yi birleştiren geodezik yol olduğundan $\mathbb{E}^n$ geodezik uzaydır. Buradaki geodezik tek geodezik olduğundan $\mathbb{E}^n$ tek geodezik uzaydır.

$\mathbb{E}^n$' nin herhangi konveks alt kümesi de geodezik uzaydır.

Örnegin; $\mathbb{E}^2$' nin alt kümesi olan herhangi bir çember geodezik uzay değildir. Fakat $\mathbb{E}^2$' nin alt kümesi olan herhangi bir disk konveks olduğundan geodezik uzaydır.

Örnek 3.4.3 (Normlu Vektör Uzayı).

V reel vektör uzayı olsun. $\alpha : V \to \mathbb{R}$ dönüşümü $\alpha(V) = \|V\|$ olacak şekilde tanımlı olsun. $\forall v \in V$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$ ve $d(v, w) = \|v - w\|$ koşulunu sağlayan d metriği olsun. $\forall v, w \in V$ için $\|u + w\| \leq \|u\| + \|w\|$ üçgen eşitsizliğini sağlayan normdan üretilmiş metrik ile V normlu vektör uzayıdır.

Her $d(v, w) = \|v - w\|$ metriği ile donatılmış normlu vektör uzayı geodezik uzaydır. $\gamma : [0,1] \to V$, $\gamma(t) = (1-t)v + tw$ afin yol ile parametrize edilmiş yoldur.

Önerme 3.4.4.

Geodezik uzay bir uzunluk uzayıdır[6].

İspat.

X bir geodezik uzay olsun. x ve y, X uzayı üzerindeki herhangi iki nokta olsun.

X bir geodezik uzay olduğundan x ve y' yi birleştiren $\gamma : [a, b] \to X$ geodezik yolu vardır. γ uzaklığı koruyan bir dönüşüm olduğundan $|a - b| = |x - y|$ ve γ yol uzunluğu ile parametrize edilmiş yol olduğundan $|a - b| = L(\gamma)$ yazılabilir.

Bu durumda $|x - y| = L(\gamma)$ eşitliği yazılabileceğinden X uzunluk uzayıdır.

□

Örnek 3.4.5 (Geodezik Uzay Olmayan Uzunluk Uzayı)**.**

$\forall n \geq 2$ için $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayından, bu uzayın bir elemanı olan p noktasının çıkarılması ile oluşan $\mathbb{E}^n/p$ uzayı uzunluk uzayıdır ancak geodezik uzay değildir.

x ve y, $\mathbb{E}^n/p$ uzayında iki nokta olsun. $[x, y]$, p noktasını içeren bir aralık olsun. Bundan dolayı $\mathbb{E}^n/p$ uzayında x ve y' yi birleştiren bir geodezik yol bulunamaz.

Önerme 3.4.6.

X lokal kompakt uzunluk uzayı olsun. $x \in X$ için x' in öyle bir $\mathcal{U} = \mathcal{U}(x)$ komşuluğu vardır ki $\forall y, z \in \mathcal{U}$ için bu noktaları birleştiren geodezik yol vardır[6].

İspat.

$x \in X$ olsun. X lokal kompakt uzay olduğundan öyle bir $r \in \mathbb{R}^+$ vardır ki merkezi x ve $2r$-yarıçaplı $\mathcal{B}(x, 2r)$ açık yuvarının kapanışı kompakttır.

$\mathcal{U}$, $\mathcal{B}(x, r)$ açık yuvarı olsun. y ve z, $\mathcal{U}$' nun herhangi iki elemanı olsun. X uzunluk uzayı olduğundan X' de y ve z' yi birleştiren yolların dizisi $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ vardır ki $n \to \infty$ iken $L(\gamma_n) \to |y - z|$' dir. Yeterince büyük seçilen n için $L(\gamma_n) < 2r$ ve (3.1.19)' dan γ_n' in görüntüsü $\mathcal{B}(x, 2r)$ yuvarının kapanışında bulunur. Bu kapanış kompakt ve tam olduğundan ve (2.5.11) Ascoli teoreminden γ' ya yakınsayan $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ dizisinin alt dizisi $(\gamma_{n_i})_{n\geq 0}$ vardır. z ile y' yi birleştiren γ yolunun uzunluğu $|y - z|$ ve genelliği kaybetmeden yol uzunluğu ile parametrize edilmiştir. (3.2.6)' dan γ geodezik yol ve (3.2.14)' den γ' nın görüntüsü $\mathcal{B}(x, 2r)$ yuvarındadır. □

NOT: Hopf-Rinow (3.1.16) teoreminin özel bir hali aşağıda (3.4.7) ile verilmiştir.

Teorem 3.4.7 (Hopf-Rinow: Uygun Uzunluk Uzayı Geodezik Uzaydır.).

X uygun(proper) uzay olsun. $\forall x, y \in X$ *için bu noktaları birleştiren geodezik yol vardır[13].*

Önerme 3.4.8.

X lokal kompakt uzunluk uzayı olsun. Aşağıdaki üç önerme denktir.

- *(i) X' de bulunan kapalı yuvarlar kompakttır.*
- *(ii) X tam uzaydır.*
- *(iii)* $\forall \gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uzaklığı koruyan* γ *dönüşümü* $\gamma' : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uzaklığı koruyan dönüşüme genişletilebilir[14].*

Tanım 3.4.9 (Lokal Geodezik).

X metrik uzay ve $\gamma : [a, b] \to X$ *yol olsun.* $\forall t \in [a, b]$ *için öyle bir t' yi içeren bir kapalı aralık* $I(t)$ *vardır ki* γ*' nın* $I(t) \cap [a, b]$*' ye kısıtlanmışı geodezik olsun. Bu durumda* γ*' ya lokal geodezik denir[6].*

Önerme 3.4.10.

$\gamma : [a, b] \to X$ *lokal geodezik olsun.* γ *yolu yol uzunluğu ile parametrize edilmiş yoldur[6].*

Tanım 3.4.11 (Afin Yolla Parametrize Edilmiş Lokal Geodezik).

$\gamma : [a,b] \to X$ yol olsun. γ sabit dönüşüm veya $\psi : [a,b] \to [c,d]$ bu iki aralık arasında tek afin homeomorfizm olmak üzere $\gamma = \gamma' \circ \psi$ olcak şekilde $\gamma' : [c,d] \to X$ lokal geodeziği varsa γ' ya afin yolla parametrize edilmiş lokal geodezik denir[6].

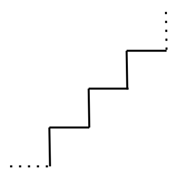
Tanım 3.4.12 (Tek Geodezik Uzay).

X metrik uzay olsun. $\forall x, y \in X$ için bu noktaları birleştiren tek geodezikler varsa X metrik uzayına tek geodezik uzay denir[13].

Örnek 3.4.13 (Lokal Tek Olmayan Geodezik Uzay).

$\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ şeklinde tanımlanan L^1 normundan üretilmiş metrikle donatılmış $\mathbb{R}^2$ vektör uzayını düşünelim.

Bu uzaydaki herhangi bir yolun görüntüsü merdiven şeklindedir. Ayrıca bu uzayda herhangi monoton fonksiyonun görüntüsü geodezik parçadır. Birinci ve ikinci koordinatları farklı olma koşuluyla bu noktaları birleştiren sonsuz sayıda geodezik parça vardır.



Şekil 3 : Merdiven

3.5 Geodezik Konvekslik

Tanım 3.5.1 (Geodeziksel Konveks Alt Uzay).

X tek geodezik uzay ve A, X' in alt uzayı olsun. $\forall x, y \in A$ için geodezik parça $[x, y]$ A' ya ait ise bu alt uzaya geodeziksel konveks alt uzay denir[6].

Tanım 3.5.2 (Geodeziksel Konveks Alt küme).

X tek geodezik uzay ve A, X' in alt kümesi ve $f : X \to X$ izometri ise $f(A)$ geodeziksel konveks alt küme denir[6].

Önerme 3.5.3 (Arakesit ve Birleşim).

X tek geodezik uzay olsun. X' in herhangi geodeziksel konveks alt kümesinin ailesinin arakesiti geodeziksel konveks ve X' in herhangi geodeziksel konveks alt kümesinin ailesinin birleşimi geodeziksel konvekstir[6].

Önerme 3.5.4 (Kapanış).

X uygun tek geodezik uzay ve A, X' in geodeziksel konveks alt kümesi olsun. A' nın kapanışı $\overline{A}$ geodezik konvekstir[6].

Tanım 3.5.5 (Geodeziksel Konveks Örtü).

X tek geodezik uzay ve $A \subset X$ olsun. A' yı içeren X' in tüm geodeziksel konveks alt kümelerinin arakesitine A' nın geodezik konveks örtüsü denir[6].

Önerme 3.5.6.

X tek geodezik uzay ve $A \subset X$ olsun. $\forall n \geq 0$ tamsayısı için $C_n(A) = A$ ve $C_{n+1}(A)$, $C_n(A)$' da bulunan nokta çiftlerini birleştiren geodezik parçaların birleşimi olsun. Böylece A' nın geodezik örtüsü $C(A)$ için aşağıdaki eşitlik verilebilir[6].

$$C(A) = \bigcup_{n \geq 0} C_n(A)$$

3.6 Menger Konveksliği

Tanım 3.6.1 (Menger Konveks)**.**

X metrik uzay olsun. X' in her x ve y birbirinden farklı noktaları için x ve y arasında bu noktalardan farklı bir $z \in X$ için;

$$|x - z| + |z - y| = |x - y|$$

eşitliği sağlanıyorsa X' e Menger konveks denir[13].

Önerme 3.6.2 (Menger Konveksliği ve Geodezik Metrik)**.**

X uygun uzay olsun. Aşağıdaki dört önerme denktir.

- *(i) X uzayı Menger konveks*
- *(ii) $\forall x, y \in X$ için öyle bir $z \in X$ vardır ki*

  $$|x - z| = |y - z| = (1/2)|x - y| \text{' dir.}$$

- *(iii) $\forall x, y \in X$ ve $d_1 + d_2 = |x - y|$ koşulunu sağlayan $\forall d_1, d_2 \in \mathbb{R}^+$ için öyle bir $z \in X$ vardır öyle ki $|x - z| = d_1$ ve $|y - z| = d_2$' dir.*
- *(iv) X geodezik uzaydır[14].*

Önerme 3.6.3.

X uygun geodezik uzay x ve y, X'in herhangi ik noktası ve $d_1+d_2+d_3+\cdots+d_n = |x-y|$ koşulunu sağlayan pozitif reel dizisi $d_1, d_2, d_3, \cdots, d_n$ olsun.

Her $i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ için $|x_i - x_{i+1}| = d_i$ ve $x_0 = x$ koşullarını sağlayan X' in noktalarından oluşan $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ dizisi vardır[6].

Önerme 3.6.4 (Minkowski Eşitsizliği)**.**

$\forall n \geq 1$ tam sayısı için $\mathbb{R}^n$ herhangi koordinatları negatif olmayan iki vektör $(a_1, \cdots, a_n)$ ve $(b_1, \cdots, b_n)$ olsun. $p \in [1, \infty)$ için;

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

dır. Herhangi $p > 1$ değeri için bu eşitsizlik eşitliğe dönüşür ancak ve ancak $(a_1, \cdots, a_n)$ ve $(b_1, \cdots, b_n)$ vektörleri kolineerdir.

$p = 1$ değeri için eşitsizlik eşitliğe dönüşür[13].

Önerme 3.6.5 (Çarpım Metriği)**.**

$[0, \infty) \cup \{\infty\}$ aralığındaki herhangi bir p için d_p dönüşümü $X_1 \times X_2$ uzayında metriktir[14].

Önerme 3.6.6.

X_1 ve X_2 uygun (geodezik) uzay olsun. Bu durumda $p \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$ için herhangi d_p metriği ile donatılmış $X_1 \times X_2$ çarpım uzayı uygun (geodezik) uzaydır[6].

Önerme 3.6.7.

X_1 ve X_2 geodezik uzay ve $p \in [0,\infty) \cup \{\infty\}$ için herhangi d_p metriği ile donatılmış $X = X_1 \times X_2$ çarpım uzayı olsun. x_1 ve y_1 X_1 uzayının, x_2 ve y_2 X_2 uzayının herhangi iki elemanı olsun.

$\gamma_1 : [0,1] \to X_1$, x_1 ve y_1 noktalarını birleştiren afin yolla parametrize edilmiş geodezik olsun. $\gamma_2 : [0,1] \to X_2$, x_2 ve y_2 noktalarını birleştiren afin yolla parametrize edilmiş geodezik olsun.

Bu durumda $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ şeklinde tanımlanan $\gamma : [0,1] \to X$ (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktalarını birleştiren afin yolla parametrize edilmiş geodeziktir. $p \in [0,\infty)$ olduğu durumda;

$$L(\gamma) = (L(\gamma_1)^p + L(\gamma_2)^p)^{\frac{1}{p}}$$

$p = \infty$ olduğu durumda;

$$L(\gamma) = \max\left(L(\gamma_1), L(\gamma_2)\right) \text{ ' } dir[6].$$

İspat.

(x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktalarını birleştiren γ yolu sürekli dönüşümdür. Bu dönüşümün afin yola parametrize edilmiş geodezik olduğunu gösterelim.
$p \in [0,\infty)$ olduğu durumda $\forall u, v \in [0,1]$ için;

$$\begin{aligned} d_p(\gamma(u), \gamma(v)) &= (|\gamma_1(u) - \gamma_1(v)|^p + |\gamma_2(u) - \gamma_2(v)|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(L\left(\gamma_1\right)^p |u - v|^p + L\left(\gamma_2\right)^p |u - v|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(L\left(\gamma_1\right)^p + L\left(\gamma_2\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} |u - v| \end{aligned}$$

(3.2.9)' dan γ, $\left(L\left(\gamma_1\right)^p + L\left(\gamma_2\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$ uzunluğunda afin yolla parametrize edilmiş geodeziktir.

$p = \infty$ olduğu durumda;

$$
\begin{aligned}
d_\infty(\gamma(u), \gamma(v)) &= \max\left(\left|\gamma_1(u) - \gamma_1(v)\right|, \left|\gamma_2(u) - \gamma_2(v)\right|\right) \\
&= \max\left(L\left(\gamma_1\right)|u - v|, L\left(\gamma_2\right)|u - v|\right) \\
&= \max\left(L\left(\gamma_1\right), L\left(\gamma_2\right)\right)|u - v|
\end{aligned}
$$

(3.2.9)' dan $\max\left(L\left(\gamma_1\right), L\left(\gamma_2\right)\right)$ uzunluğunda afin yolla parametrize edilmiş geodeziktir.

$\square$

4 TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada; düzeltilebilir yol ve bu yolların oluşturduğu uzay üzerinde yakınsaklık ve süreklilik kavramları incelenmiştir. Uzunluk uzaylarının genel özellikleri incelenmiş, tam ve lokal kompakt uzunluk uzayının kompakt alt kümeleri ile $\mathbb{R}^{n}$' in kompakt alt kümelerinin karakterizasyonun benzer olduğu gösterilmiştir. Uzunluk uzayı ile geodezik uzay arasındaki ilişki gösterilmiştir. Geodezik uzay tanımı ve bu uzaya ait örneklere yer verilmiştir. Geodezik uzay ile Menger arasındalık kavramları arasındaki ilişki gösterilmiştir.

Çalışmanın devamı olarak geodezik uzaylar üzerinde yakınsaklık kavramı incelenebilir.

Kaynaklar

[1] B. O' Neill, Elemantary of Differential Geometry, Academic Press, New York, 1983

[2] H. H. Hacısalihoğlu, Diferensiyel Geometri I. Cilt, Nobel Basımevi, Ankara, 2000

[3] T. Başkan, O. Bizim, İ. N. Cangül, Metrik Uzaylar ve Genel Topolojiye Giriş, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 2006

[4] M. Bayraktar, Fonksiyonel Analiz, Gazi Kitabevi, Ankara, 2006

[5] G. Walschap, Metric Structures in Differential Geometry, Springer-Verlag, New York, 2004

[6] Papadopoulos A. , Metric Spaces, Convexity and Nonpositive Curvature, European Mathematical Society Publishing House, Zürich, 2005

[7] Ratcliffe J.G. "Foundations of Hyperbolic Manifolds", Springer-Verlag, Berlin, 36(1994)

[8] Stolzenberg G. , Review: Errett Bishop, Foundations of constructive analysis. Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970), no. 2, 301-323

[9] Maddox I.J. ,Elements of Functional Analysis, Cambridge Universty Press, London, 1970

[10] Yüksel Ş. , "Genel Topoloji" , Selçuk Üniversitesi Yayınları, Konya, 1995

[11] Özer O. , "Metrik ve Topolojik Uzaylara Giriş" Eğitim, Sağlık ve Bilimsel Araştırma Çalışmaları Vakfı Yayınları no.131 , 1997

[12] Nesin A. , "Analiz lV", Nesin Yayıncılık Ltd. S.ti. ,2014

[13] M.R. Bridson, A. Haefliger, Metric Spaces of Non-positive Curvature, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1999.

[14] Çoban H. Ü., Geodezikler ve Geodezik Metrik Uzaylar, Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ocak 2011

[15] S. Hartanto, Mhd. Furqan, Andysah P. U. Siahaan3, W. Fitriani, Haversine Method in Looking for the Nearest Masjid,Volume 03, Issue 08; August - 2017 [ISSN: 2455-1457]

[16] Özlü M., E-İmza Güvenliğinin Araştırılmasına Yönelik Konum Damgası Sistemi ve Uygulaması, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ocak 2011