T.C.

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MINKOWSKI 3-UZAYINDA BERTRAND EĞRİLERİNİN YENİ EŞLENİK EĞRİLERİ

Fatma GÖKCEK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Kazım İLARSLAN

KIRIKKALE-2022

T.C.

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MINKOWSKI 3-UZAYINDA BERTRAND EĞRİLERİNİN YENİ EŞLENİK EĞRİLERİ

Fatma GÖKCEK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Kazım İLARSLAN

KIRIKKALE-2022

Fatma GÖKCEK tarafından hazırlanan " **MINKOWSKI 3-UZAYINDA BERTRAND EĞRİLERİNİN YENİ EŞLENİK EĞRİLERİ** " adlı tez çalışması, aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ / OY ÇOKLUĞU ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Kazım İLARSLAN İmza..........................

Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Prof. Dr. İsmail GÖK İmza..........................

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Prof. Dr. Mehmet YILDIRIM İmza..........................

Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Tez Savunma Tarihi: 15 / 02 / 2022

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. Recep ÇALIN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYANI

Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

o Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,

o Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,

o Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

o Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,

o Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

İmza:

Fatma GÖKCEK

Tarih: 15 / 02 / 2022

Anneme ve babama…

ÖZET

MINKOWSKI 3-UZAYINDA BERTRAND EĞRİLERİNİN YENİ EŞLENİK EĞRİLERİ

GÖKCEK , Fatma

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Kazım İLARSLAN

2022 , 54 sayfa

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde tezde gerekli olan kavramlar ve tanımlar verilmiştir. Üçüncü bölümde 3-boyutlu Minkowski uzayında Cartan null Bertrand eğrileri ele alınmıştır. Bir Cartan null Bertrand eğrisinin Cartan null Bertrand eşleniğinin yanında, spacelike ve timelike eşlenikleri elde edilmiş ve ilgili örnekler verilmiştir. Dördüncü bölüm spacelike Bertrand eğrilerine ve beşinci bölüm de timelike Bertrand eğrilerine ayrılmıştır. Elde edilen teorem ve sonuçlar örneklerle desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Minkowski 3-uzayı, Bertrand eğrileri, 3- boyutlu Minkowski uzayında Bertrand eşlenik eğrileri, Cartan null eğriler, null eğriler, null olmayan eğriler.

ABSTRACT

NEW PAIRS OF BERTRAND CURVES IN MINKOWSKI 3-SPACE

GÖKCEK , Fatma
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, Master Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Kazım İLARSLAN
February , 54 pages

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction. The second chapter contains concepts and definitions which are needed throughout the thesis. In the third chapter, Cartan null Bertrand curves in 3-dimensional Minkowski Space are discussed. Besides the Cartan null Bertrand conjugate of a Cartan null Bertrand curve, spacelike and timelike conjugates are obtained and the related theorems and results are given. The fourth section is devoted to spacelike Bertrand curves in Minkowski 3-space and the fifth section is devoted to timelike Bertrand curves. All theorem and results obtained are supported with examples.

Key Words: Minkowski 3-space, Bertrand curves, Bertrand conjugate curves in Minkowski 3- space, Cartan null curves, null curves, non-null curves.

TEŞEKKÜR

İlk olarak yüksek lisans tez konumun belirlenmesinden, tezimin yazım aşamasına kadar her türlü desteğini esirgemeyen, saat ve gün ne olursa olsun ulaşabildiğim, her koşulda beni aydınlatmayı ihmal etmeyen, bilgi ve tecrübesi ile zaman ayırıp yüksek lisans çalışmamı tamamlamamda rehberliği ile ışık tutan, iyi ki var dediğim ve onunla çalışmaktan onure olduğum çok değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Kazım İLARSLAN'a teşekkürü borç bilirim.

Tez savunma sürecimde jüri üyelerinden biri olan, çalışmamı başarıyla destekleyerek beni onure eden, zaman kaybetmeden doktoraya başlamam için bana motivasyon kaynağı olan oturum başkanım Sayın Prof. Dr. İsmail GÖK'e, yüksek lisansım boyunca hem ders dönemimde hem de tez dönemimde başarımı destekleyerek beni gururlandıran, tez savunma sürecimde jüri üyelerimden biri olan Sayın Prof. Dr. Mehmet YILDIRIM'a teşekkürlerimi sunuyorum.

Tez sürecim boyunca hep yanımda bulunan, birlikte yayınımızın da bulunduğu ve kendi yoğunluğunda bile benden desteğini hiç esirgemeyen hep güler yüzlülüğü ile yol gösteren güzel dostum, canım ablam çok değerli Hatice ALTIN ERDEM'e, yüksek lisansımda tanıştığım ve iyi ki tanışmışım dediğim, benim bile vazgeçtiğim yerlerde beni tekrardan ayağa kaldıran, yapacağıma olan inancını asla kaybetmeyen, kıymetli dostum Selda YORULMAZ'a, her konuda desteğini hissettiğim, hem ders aşamasında hem de tez aşamasında her türlü nazımı çeken, ne zaman ihtiyaç duysam yardıma koşan güzel dostum, canım ablam sevgili Dr. Nihal KILIÇ ASLAN'a teşekkürlerimi iletiyorum.

Şu an çalışmakta olduğum ve iyi ki burada çalışıyorum dediğim, tezimin zorlu süreçlerinde desteklerini esirgemeyen, kurucumuz ve sevgili meslektaşım Yahya ÖZEN'e ve beni sürekli takdir eden, tezimin savunma aşamasını benimle birlikte yaşayan, başarıma ve bana olan inançlarını hiç eksik etmeyen sevgili çalışma arkadaşlarıma ve hep yanımda kalarak beni destekleyen çok değerli öğrencilerime teşekkürlerimi iletiyorum.

Ve en büyük teşekkürü bu yaşıma kadar bana olan inancını asla kaybetmeyen, bütün eğitim-öğretim hayatım boyunca beni destekleyen ve devam eden, kendime olan inancımı kaybettiğimde, ağlayarak ders çalıştığımda, geç saatlere kadar kütüphanede kaldığımda, biraz da kendine zaman ayır deyip yine de sen yaparsın kızım nidalarıyla beni sonsuz destekleyen canım annem Sabire GÖKCEK'e ve sürekli hasretini duyduğum, emekli olmasına rağmen hala çalışmaya devam eden, beni en güzel şekilde yetiştiren, maddi manevi hiçbir desteğini esirgemeyen canım babam Dursun GÖKCEK'e bana olan destekleri için sonsuz teşekkürlerimi iletiyorum.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar cismi
$\mathbb{E}^3$	3-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{E}^n$	n-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{E}_1^3$	Minkowski 3-Uzayı
$\|\|,\|\|$	Norm fonksiyonu
g	Non-dejenere metrik
T	$\mathbb{E}_1^3$ de bir eğrinin teğet vektör alanı
N	$\mathbb{E}_1^3$ de bir eğrinin normal vektör alanı
B	$\mathbb{E}_1^3$ de bir eğrinin binormal vektör alanı
k_1	Bir eğrinin 1.eğriliği
k_2	Bir eğrinin 2.eğriliği

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometrinin en önemli çalışma alanlarından birisi olan eğriler teorisinin tarihi Leibniz (1646-1716) ve Newton (1643-1727) un düzlemsel eğriler üzerine yaptıkları araştırmalara kadar dayanmaktadır.

Eğrilerin Frenet vektörleri yardımıyla karakterizasyonlarında, eğri çiftlerinin Frenet vektörleri arasındaki ilişkiler öne çıkmaktadır. 1845 yılında B. de Saint Venant tarafından ortaya konulan bir eğrinin asli normal vektör alanının bir başka eğrinin asli normal vektör alanı olup olamayacağı problemi 1850 yılında J. Bertrand tarafından yayınlanan bir makalede cevaplandırılmıştır. Böyle bir ikinci eğrinin var olması için gerek ve yeter şartın verilen eğrinin eğriliklerinin $\lambda k_1 + \mu k_2 = 1,\ \lambda \neq 0,\ \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ şartını sağlamasıdır. Bu tarihten itibaren bu şartı sağlayan eğriye Bertrand eğrisi ve ikinci eğriye de bu eğrinin Bertrand eşlenik eğrisi adı verilmiştir. Bu eğri çiftleri de Bertrand eğri çiftleri olarak adlandırılmıştır.

Bertrand eğrileri, Öklid uzayında yoğun bir şekilde çalışılmış ve bir çok özelliği ortaya konulmuştur. 1935 yılında L. R. Pears, Bertrand eğrilerini n-boyutlu $(n > 3)$ Öklid uzayında çalışmış ve bu eğrilerin dejenere eğriler olduğunu ispatlamıştır. Yani eğrinin eğriliklerinden bazılarının sıfır olması gerektiğini ispatlamıştır. Örneğin; 4-boyutlu uzayda bir Bertrand eğrisi için k_3 eğriliği sıfır olmak zorundadır.

Bu sonuçtan dolayı, Matsuda ve Yorozu ([12]) tarafından 4-boyutlu uzayda $(1, 3)$ Bertrand eğri kavramı ortaya konmuştur.

Bertrand eğrileri ile ilgili Öklid uzayında elde edilen sonuçlar ilk olarak Minkowski 3-uzayında genelleştirilmiştir. Bu uzaydaki ilk çalışma 2001 yılında Ekmekçi ve İlarslan tarafından yapılmış ve bu çalışmada timelike Bertrand eğrileri ele alınmıştır ([7]).

Yine aynı uzayda Cartan null Bertrand eğrileri Balgetir ve diğerleri tarafından çalışılmıştır ([3]).

2004 yılında null olmayan Bertrand eğriler için bir çalışma da Balgetir, Bektaş ve Ergüt tarafından yapılmıştır ([2]).

Yapılan tüm bu çalışmalarda Minkowski 3-uzayında Bertrand eğrisi ve eşlenik eğrisi aynı causal karakterli eğriler olarak ele alınmıştır. Bu durum farklı causal karaktere sahip eğrilerin Minkowski 3-uzayında Bertrand eğri çifti oluşturup oluşturamayacağı sorusunu akla getirmiştir.

Bu soruya ilk cevaplar ([18]) Uçum ve İlarslan, ([20]) İlarslan ve Kılıç Aslan tarafından gelmiştir.

([18]) nolu çalışmada Uçum ve İlarslan, bir timelike eğrinin asli normali (N) nin spacelike vektör olması gerçeğinden yola çıkarak Bertrand eşleniğinin timelike, asli normali spacelike olan spacelike eğri ve Cartan null eğri olabileceğini dikkate alarak timelike Bertrand eğrisinin farklı causal karakterli Bertrand eşleniklerini elde etmişlerdir.

([20]) nolu çalışmada İlarslan ve Kılıç Aslan tarafından bir spacelike eğrinin asli normali (N) nin spacelike veya timelike olmasına göre Bertrand eğrisinin farklı causal karakterlerde Bertrand eşlenikleri elde edilmiştir.

Bu tez çalışmasında yukarıda adı geçen çalışmalardaki sonuçlar detaylı olarak incelenmiş ve Cartan null Bertrand eğrisinin spacelike ve timelike Bertrand eşlenikleri elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar ([1]) de yayınlanmıştır.

1.1. Kaynak Özetleri

Birinci bölüm için B. O'Neill (1983), W. Kuhnel (1999), S. Montiel ve A. Ros (1998) un kitaplarının yanı sıra R. Lopez (2014), L. R. Pears (1935), H. Matsuda ve S. Yorozu (2003), N. Ekmekçi ve K. İlarslan (2001), H. Balgetir ve diğerleri (2004), F. Gökcek ve H. Altın Erdem (2021) makalelerinden yararlanılmıştır. Diğer bölümlerde yukarıda ifade edilen çalışmaların yanı sıra A. Uçum ve K. İlarslan (2016) ve N. Kılıç Aslan ve K. İlarslan (2017) makalelerinden ve referans listesinde adı geçen makaleler ve kitaplardan yararlanılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezde gerekli olan kavramlar ve tanımlar verilecektir.

Tanım 2.1 ***(Simetrik Bilineer Form)***

Bir reel vektör uzayı V olmak üzere;

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall u, v, w \in V$ için,

i. $g(u, v) = g(v, u)$

ii. $g(au + bv, w) = ag(u, w) + bg(v, w)$

$g(u, av + bw) = ag(u, v) + bg(u, w)$

şartları sağlanıyorsa g dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde simetrik bilineer form denir.

Tanım 2.2 *V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun. $0 \neq w \in V$ olmak üzere $\forall u \in V$ için,*

$$g(u, w) = 0$$

ise g ye V üzerinde dejeneredir denir. Aksi durumda g ye non-dejeneredir denir. Bu tanıma göre g nin non-dejenere olması için gerek ve yeter şart $\forall w \in V$ için,

$$g(u, w) = 0 \text{ iken } u = 0$$

olmasıdır.

Tanım 2.3 *3-boyutlu afin uzay $\mathbb{R}^3$ de $X = (x_1, x_2, x_3)$ ve $Y = (y_1, y_2, y_3)$ iki vektör olmak üzere; $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$*

$$g(X, Y) = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

şeklinde indeksi 1 olan simetrik bilineer form tanımlansın. $(\mathbb{R}^3,\ g)$ ye 3-boyutlu Minkowski uzayı denir.

Tanım 2.4 *$v \in \mathbb{E}_1^3 \backslash \{0\}$ olmak üzere; eğer*

i. $g(v,v) > 0$ ise, v spacelike (uzaysı) vektör

ii. $g(v,v) < 0$ ise, v timelike (zamansı) vektör

iii. $g(v,v) = 0$ ise, v null veya lightlike (ışıksı) vektör

olarak adlandırılır.

Tanım 2.5 *$v \in \mathbb{E}_1^3 \backslash \{0\}$ olmak üzere; $\mathbb{E}_1^3$ uzayında v vektörünün normu*

$$||v|| = \sqrt{|g(v,v)|}$$

olarak tanımlanır. $||v|| = 1$ ise v vektörüne birim vektör denir.

Tanım 2.6 *$v,\ w \in \mathbb{E}_1^3$ olmak üzere; v ve w vektörleri diktir gerek ve yeter şart $g(v,v) = 0$ olmasıdır.*

Tanım 2.7 *$\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ bir eğri olsun. Eğer α eğrisinin $\forall s \in I$ için hız vektörü $\alpha'(s)$ sırasıyla spacelike, timelike veya null vektör ise α eğrisi sırasıyla spacelike, timelike veya null eğri olarak adlandırılır.*

Tanım 2.8 *$\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ bir eğri olsun.*

i. α null bir eğri olmak üzere; eğer $\forall s \in I$ için $g(\alpha''(s), \alpha''(s)) = 1$ şartı sağlanıyorsa α eğrisine pseudo yay parametresi ile parametrelendirilmiştir denir.

ii. α null olmayan bir eğri olmak üzere, eğer $\forall s \in I$ için $g(\alpha'(s), \alpha'(s)) = \pm 1$ şartı sağlanıyorsa α eğrisine yay uzunluğu parametresi ile parametrelendirilmiştir denir ([5]).

3- boyutlu Minkowski uzayı $\mathbb{E}_1^3$ de $\{T, N, B\}$ α eğrisi üzerinde hareketli Frenet çatısı ve $\{k_1, k_2\}$ α eğrisinin eğrilik fonksiyonları olsun. Burada T, N, B sırasıyla α eğrisinin teğet vektör alanı, asli normal vektör alanı, binormal vektör alanıdır.

Durum 2.1 *Eğer α eğrisi $\mathbb{E}_1^3$ de spacelike veya timelike bir eğri ise Frenet denklemleri,*

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_2 k_1 & 0 \\ -\epsilon_1 k_1 & 0 & \epsilon_3 k_2 \\ 0 & -\epsilon_2 k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

olarak verilir. Burada $g(T,T) = \epsilon_1$, $g(N,N) = \epsilon_2$, $g(B,B) = \epsilon_3$, $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$, $\epsilon_1.\epsilon_2.\epsilon_3 = -1$, $i \in \{1,2,3\}$ dir.

Ayrıca aşağıdaki durumlar sağlanır.

$$g(T,N) = g(T,B) = g(N,B) = 0$$

Eğer t parametresi ile verilen bir $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ eğrisi için $g(\dot{\alpha}, \dot{\alpha}) = 0$ ise $\left(\dot{\alpha} = \dfrac{d\alpha}{dt} \text{ dir.}\right)$ α bir null eğri olarak adlandırılır. $g(\dot{\alpha}, \dot{\alpha}) = 0$ eşitliğinin diferansiyeli alınırsa $g(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) = 0$ $\left(\ddot{\alpha} = \dfrac{d^2\alpha}{dt^2} \text{ dir.}\right)$ bulunur. Bunun anlamı $\ddot{\alpha}$ nın $Sp\{\dot{\alpha}\}^{\perp}$ elemanı olmasıdır.

Tez çalışmamızda, $\dot{\alpha}(t)$ ve $\ddot{\alpha}(t)$ vektörlerini lineer bağımsız kabul ettik (yani α bir doğru olamaz). Bu durumda $Sp\{\dot{\alpha}\}^{\perp} = Sp\{\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}\}^{\perp}$ ve $\ddot{\alpha}$ bir spacelike vektör olur. Eğer $t = \phi(s)$

$$\frac{d\phi}{ds} = \pm \frac{1}{\left|\ddot{\alpha} \circ \phi\right|}$$

denkleminin bir çözümü ise $v = \alpha \circ \phi$, $||v^{\cdot\cdot}|| = 1$ eşitliğini sağlar. Bu durumda s, α eğrisinin pseudo-yay parametresi olarak adlandırılır.

Kabul edelim ki, α null eğrisi s pseudo-yay parametresi ile verilsin. Bu durumda α Cartan null eğri olarak adlandırılır. α Cartan null eğrisinin Frenet denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ k_2 & 0 & -k_1 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Eğer α bir doğru ise $k_1 = 0$ olup, diğer tüm durumlarda $k_1(s) = 1$ dir.

Özel olarak α Cartan null eğrisinin eğrilikleri $k_1 = 1$, $k_2 = 0$ ise α eğrisine null kübik eğri adı verilir. Ayrıca aşağıdaki durumlar sağlanır.

$$g(T,T) = g(B,B) = 0, \quad g(N,N) = 1$$

$$g(T,N) = g(N,B) = 0, \quad g(T,B) = 1$$

Tanım 2.9 *P, $\mathbb{E}_1^3$ uzayının bir alt uzayı olsun. Eğer*

i. P üzerinde her sıfırdan farklı vektör spacelike vektör ise P ye spacelike altuzay,

ii. P üzerinde en az bir timelike vektör var ise P ye timelike altuzay,

iii. Diğer durumlarda P ye lightlike altuzay denir.

Notasyon 2.1 *Tez çalışmamızda,* $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ *ve* $\beta^* : I^* \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ *Minkowski* 3*-uzayında tanımlı eğriler olsun.* $\{T, N, B\}$ *ve* $\{k_1, k_2\}$*;* β *eğrisinin sırasıyla Frenet çatısı ve eğrilik fonksiyonları,* s *de* β *eğrisinin yay uzunluğu parametresi veya pseudo-yay uzunluğu parametresi olarak alınacaktır. Benzer şekilde* $\{T^*, N^*, B^*\}$ *ve* $\{k_1^*, k_2^*\}$*;* β^* *eğrisinin sırasıyla Frenet çatısı ve eğrilik fonksiyonları* s^* *da* β^* *eğrisinin yay parametresi veya pseudo-yay parametresi olarak alınacaktır.*

3. 3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA CARTAN NULL BERTRAND EĞRİLERİ

Bu bölümde 3-boyutlu Minkowski uzayında Cartan null Bertrand eğrileri incelenecek olup, bu bölüm için ana referansımız ([1]) ve ([3]) olacaktır. İlk olarak bu uzayda Cartan null Bertrand eğri tanımını verelim.

Tanım 3.1 *$\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında bir Cartan null eğri olsun. Eğer $\forall\ s \in I$ için, β eğrisinin her $\beta(s)$ noktasındaki asli normali başka bir $\beta^* : I^* \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ eğrisinin $\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s))$ noktasındaki asli normali ile lineer bağımlı ise β eğrisine Bertrand eğrisi, β^* eğrisine de β eğrisinin Bertrand eşlenik eğrisi denir. Burada $f : I \to I^*$ bir regüler C^∞ dönüşümüdür. Öyle ki, $\forall\ s \in I$ için β nın her $\beta(s)$ noktasına β^* ın bir $\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s))$ noktası karşılık gelmektedir.*

β nın asli normal vektör alanı (N), spacelike bir vektör alanı olduğundan β^* eşlenik eğrisi Cartan null eğri, asli normali spacelike olan spacelike eğri ve bir timelike eğri olabilir. Bu durumlar iki ayrı alt başlıkta incelenecektir.

3.1. Cartan Null Eşlenikli Cartan Null Bertrand Eğrileri

Cartan null Bertrand eğrileri ilk olarak 2004 yılında Balgetir, Bektaş ve Inoguchi tarafından çalışılmıştır ([3]). Bu çalışmada Balgetir ve diğerleri Cartan null Bertrand eğrisinin eşleniğini Cartan null eğri alarak yukarıda bahsettiğimiz üç durumdan birini göz önüne almışlardır. Yapılan bu çalışmada aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 3.1 *$\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ Cartan null bir eğri olsun. Bu durumda α Bertrand eğrisi ise α null geodezik veya k_2 ikinci eğriliği sabit bir Cartan null eğridir.*

İspat. *Kabul edelim ki, (α, α^*) $\mathbb{E}_1^3$ de bir Bertrand eğri çifti olsun. Bu durumda $\forall\ s^* \in I^*$ ve $\forall\ s \in I$ için α^* aşağıdaki gibi yazılabilir.*

$$\alpha^*(s^*) = \alpha(s) + \lambda(s)N(s) \tag{3.1}$$

burada $\lambda(s) \neq 0$ ve $s^* = s^*(s)$ dir. (3.1) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınırsa

$$(\alpha^*)' \frac{ds^*}{ds} = T + \lambda' N + \lambda (k_2 T - k_1 B) \tag{3.2}$$

elde edilir. (2.2) de verilen Frenet denklemleri kullanılarak

$$T^* f' = (1 + \lambda k_2) T + \lambda' N - \lambda k_1 B \tag{3.3}$$

bulunur. (3.3) eşitliği N ile çarpılırsa

$$\lambda' = 0$$

bulunur. Dolayısıyla $\lambda \neq 0$ ve $\lambda =$sabittir. (3.3) *tekrar düzenlenirse*

$$T^* f' = (1 + \lambda k_2) T - \lambda k_1 B \tag{3.4}$$

ve (3.4) *kendisiyle çarpılırsa*

$$k_1 (1 + \lambda k_2) = 0$$

elde edilir. Buradan ise $k_1 = 0$ veya $k_2 = -\dfrac{1}{\lambda}$ =sabit olduğu sonucuna varırız.

Durum 3.1 *$k_1 = 0$ dır. Bu durumda, α eğrisi bir null geodeziktir. Bundan dolayı,*

$$\alpha(s) = \alpha_0 + sT$$

ifade edilir. Burada α_0 sabit bir vektördür. Üstelik α nın Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ sabit vektörlerden oluşan bir çatıdır. Dolayısıyla $k_2 = 0$ dır. Böylece α^* eğrisi α dan yalnızca bir öteleme ile farklıdır. Bu yüzden α, α^* eğrileri denktir. Bu durumda iki eğrinin Frenet vektörleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} T^* &= \lambda_1 T \\ N^* &= N \\ B^* &= \lambda_1^{-1} B \end{aligned}$$

λ_1 bir sabittir.

Durum 3.2 *$k_2 = -\dfrac{1}{\lambda}$ dır. Bu durumda, (3.4) den*

$$\begin{aligned} T^* &= -\mu B \\ \mu &= \lambda k_1 \frac{ds}{ds^*} \neq 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

ve

$$\begin{aligned} N^* &= N \\ B^* &= \mu s^{-1} T \end{aligned}$$

olarak elde edilir. (3.5) eşitliğinin türevi alınırsa

$$k_1^* N^* f' = -\mu' B - \mu \frac{1}{\lambda} N \tag{3.6}$$

ve N ve N^* lineer bağımlı olmasından dolayı, $\mu' = 0$ dır. Dolayısıyla, $\mu =$sabit ve (3.6) denklemini kullanarak

$$k_1^* = \frac{1}{f'}\left(-\frac{\mu}{\lambda}\right) \quad ve \quad k_2^* = \frac{1}{f'}\left(\frac{k_1}{\mu}\right)$$

elde edilir ve $\mu = \frac{1}{f'}\lambda k_1$ eşitliğinden

$$k_1 k_1^* = -\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \quad ve \quad k_2^* = -k_2 \equiv \frac{1}{\lambda}$$

elde edilir. Teoremin tersinin ispatı ise benzer şekilde gerçekleştirilir.

■

Sonuç 3.1 *(α, α^*) geodezik olmayan Cartan null bir Bertrand eğri çifti olsun. O zaman eğrilik fonksiyonları arasındaki ilişkiler aşağıdaki gibi verilebilir.*

$$k_1^* k_2 = sabit > 0 \quad , \quad k_2^* = k_2 = sabit \neq 0$$

$Teorem$ (1.1), her Cartan null çatılı helis eğrilerinin (helix) bir Bertrand eşleniğini meydana getirdiğini gösterir. Ayrıca sonucumuza göre Bertrand eşleniği de bir null helistir.

Örnek 3.1 *$\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ bir null eğri olmak üzere, aşağıdaki gibi tanımlansın.*

$$\alpha(s) = (\frac{1}{2}\sinh(2s), \frac{1}{2}\cosh(2s), s)$$

Buradan α eğrisinin Frenet denklemleri ve eğrilikleri,

$$\begin{aligned} T(s) &= (\cosh(2s), \sinh(2s), 1) \\ N(s) &= (\sinh(2s), \cosh(2s), 0) \\ B(s) &= (-\frac{1}{2}\cosh(2s), -\frac{1}{2}\sinh(2s), \frac{1}{2}) \\ k_1(s) &= 1 \quad , \quad k_2(s) = -1 \end{aligned}$$

elde edilir ve $\det(T, -N, B) < 0$ olup

$$s^* = (\frac{-2}{\mu} s) \tag{3.7}$$

olarak tanımlanırsa

$$\alpha^*(s^*) = (-\frac{1}{2}\sinh(2s), -\frac{1}{2}\cosh(2s), s)$$

elde edilir. Son eşitlikte (3.7) yerine yazılırsa α^* eğrisini aşağıdaki gibi elde ederiz.

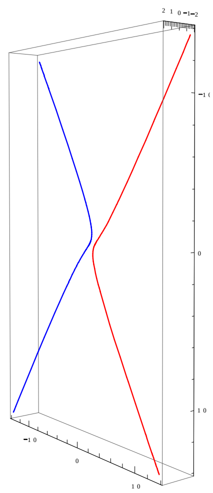
$$\alpha^*(s^*) = (-\frac{1}{2}\sinh(-\mu s^*), -\frac{1}{2}\cosh(-\mu s^*), \frac{1}{2}\mu s^*)$$

Buradan gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned} T^*(s^*) &= -\mu B(s) \\ N^*(s^*) &= N(s) \\ B^*(s^*) &= -\mu^{-1} T(s) \\ k_1^*(s^*) = \frac{\mu^2}{2} &\quad , \quad k_2^*(s^*) = -1 \end{aligned}$$

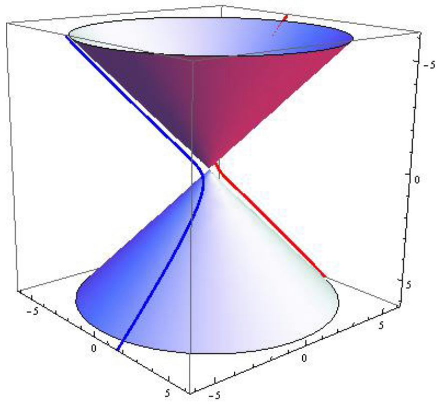
elde edilir.

Yukarıda verilen Cartan null eğri (kırmızı renkte) ve onun Cartan null Bertrand eşleniği (mavi renkte) eğrilerin grafikleri aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil-1.

Bu eğrilerin null koni ile birlikte grafikleri de aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil-2.

3.2. Null Olmayan Eşlenikli Cartan Null Bertrand Eğrileri

Teorem 3.2 *$\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ eğrisi sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları k_1, k_2 olan Cartan null bir eğri olsun. Bu durumda β nın bir Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartların sağlanmasıdır.*

(i) λ, $h \in \mathbb{R}$,

$$h < 0,\ 1 + \lambda k_2 = -h\lambda k_1,\ k_2 - h\lambda k_1 \neq 0,\ k_2 + hk_1 \neq 0 \tag{3.8}$$

Bu durumda β^*eşlenik eğrisi, $\mathbb{E}_1^3$ de bir timelike eğridir.

(ii) λ, $h \in \mathbb{R}$,

$$h > 0,\ 1 + \lambda k_2 = -h\lambda k_1,\ k_2 - h\lambda k_1 \neq 0,\ k_2 + hk_1 \neq 0 \tag{3.9}$$

Bu durumda β^*eşlenik eğrisi, $\mathbb{E}_1^3$ de asli normali spacelike olan spacelike bir eğridir.

İspat. $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ eğrisi sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları k_1, k_2 ve asli normal vektörü N olan bir Cartan null eğri olsun. Kabul edelim ki, β^* eğrisi β eğrisinin s^* parametresine göre kendisinden başka Bertrand eşlenik eğrisi olsun.

β eğrisinin asli normal vektörü N spacelike veya timelike vektör olduğundan,

(i) β^* eğrisi asli normal vektörü N^* olan timelike bir eğri olsun. Bu durumda $\forall\ s^* \in I^*$ ve $\forall\ s \in I$ için β^* aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s)) = \beta(s) + \lambda(s)N(s) \tag{3.10}$$

(3.10) denkleminde s ye göre türev alınır ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$T^* f' = (1 + \lambda k_2)\, T + \lambda' N - \lambda k_1 B \tag{3.11}$$

eşitliği elde edilir. (3.11) eşitliği N ile çarpılırsa

$$\lambda' = 0$$

bulunur. Dolayısıyla λ sıfırdan farklı bir sabittir. Buna göre, (3.11) denklemi yeniden düzenlenirse

$$T^* f' = (1 + \lambda k_2)\, T - \lambda k_1 B \tag{3.12}$$

olarak bulunur. (3.12) kendisi ile çarpılırsa

$$(f')^2 = 2\lambda k_1\,(1 + \lambda k_2) \tag{3.13}$$

elde edilir. (3.12) denkleminde

$$\delta = \frac{1 + \lambda k_2}{f'} \quad \text{ve} \quad \gamma = \frac{-\lambda k_1}{f'} \tag{3.14}$$

(3.14) yerine yazılırsa

$$T^* = \delta T + \gamma B \tag{3.15}$$

sağlanır. (3.15) denkleminin s parametresine göre türevi alınır ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$k_1^* N^* f' = \delta' T + (\delta k_1 - \gamma k_2)\, N + \gamma' B \tag{3.16}$$

elde edilir. (3.16) kendisiyle çarpılırsa

$$\delta' = 0 \quad \text{ve} \quad \delta' = 0 \tag{3.17}$$

bulunur. $\gamma \neq 0$ olduğundan $1 + \lambda k_2 = -h\lambda k_1$ olur. Buradan, $h = \dfrac{1 + \lambda k_2}{-\lambda k_1} = \dfrac{\delta}{\gamma}$ yazabiliriz. (3.17) denklemi (3.16) denkleminde yerine yazılırsa

$$k_1^* N^* f' = (\delta k_1 - \gamma k_2)\, N \tag{3.18}$$

elde edilir. (3.18) eşitliği kendisiyle çarpılarak (3.13) ve (3.14) kullanılırsa

$$(f')^2 (k_1^*)^2 = \frac{-(k_2 - hk_1)^2}{2h} \tag{3.19}$$

sağlanır. Buradan, $k_2 - hk_1 \neq 0$ ve $h < 0$ dır. Eğer $u = \dfrac{\delta k_1 - \gamma k_2}{f' k_1^*}$ yazılırsa

$$N^* = uN \tag{3.20}$$

elde edilir. (3.20) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınarak, (2.1) ve (2.2) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$k_2^* \left(\frac{1 + \lambda k_2}{f'} T - \frac{\lambda k_1}{f'} B \right) f' - k_1^* B^* f' = u' N + u k_2 T - u k_1 B$$

bulunur. Son eşitlik N ile çarpılırsa $u' = 0$ olup u sıfırdan farklı bir sabit olduğu sonucuna varırız. Böylece son eşitlikten

$$k_2^* B^* f' = u k_2 T - u k_1 B - k_1^* T^* f' \tag{3.21}$$

yazabiliriz ve (3.12) kullanılarak (3.21) tekrar yazılırsa

$$k_2^* B^* f' = P(s) T + Q(s) B$$

sağlanır. Buradan,

$$P(s) = \frac{\lambda k_1 (k_2 - hk_1)(k_2 + hk_1)}{2 (f')^2 k_1^*}$$
$$Q(s) = \frac{-\lambda k_1 (k_2 - hk_1)(k_2 + hk_1)}{2h (f')^2 k_1^*}$$

olup eşitlikler ise $k_2 + hk_1 \neq 0$ olduğunu ispatlar.

Tersine kabul edelim ki, β (3.8) şartlarını sağlayan eğrilikleri sırasıyla $k_1 \neq 0, k_2$ olan Cartan null bir eğri olsun. λ, $h \in \mathbb{R}$ olmak üzere, β^* eğrisini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$\beta^*(s^*) = \beta(s) + \lambda(s) N(s) \tag{3.22}$$

(3.22) eşitliğinin s ye göre türevi alınarak, (2.1) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\frac{d\beta^*}{ds} = \beta'(s) + \lambda'(s) N(s) + \lambda(s) N'(s) \tag{3.23}$$

bulunur. (3.23) eşitliği N ile çarpılırsa

$$\lambda' = 0$$

olup, λ sıfırdan farklı bir sabit olduğu sonucuna varırız. Bu durum (3.23) de yerine yazılırsa

$$\frac{d\beta^*}{ds} = -\lambda k_1(hT + B) \tag{3.24}$$

elde edilir. Böylece

$$f' = \sqrt{\left| g\left(\frac{d\beta^*}{ds}, \frac{d\beta^*}{ds}\right) \right|} = m_1 \lambda k_1 \sqrt{-2h}$$

buradan $m_1 = \mp 1$, öyle ki $m_1 \lambda k_1 > 0$ dır. Buradan, (3.24) yeniden yazılırsa

$$\begin{aligned} T^* &= \frac{-m_1}{\sqrt{-2h}}(hT + B) \\ g(T^*, T^*) &= -1 \end{aligned} \tag{3.25}$$

elde edilir.(3.25) denkleminin türevi alınır ve (2.1) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\frac{dT^*}{ds^*} = \frac{m_1(k_2 - hk_1)}{f'\sqrt{-2h}} N$$

bulunur. Son eşitlikten

$$k_1^* = \left\| \frac{dT^*}{ds^*} \right\| = \frac{m_2(k_2 - hk_1)}{f'\sqrt{-2h}} \tag{3.26}$$

yazılır. Buradan $m_2 = \pm 1$, öyle ki $m_2(k_2 - hk_1) > 0$ dır. Şimdi ise N^* ı aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$N^* = m_1 m_2 N \tag{3.27}$$

(3.27) denkleminin türevi alınarak, (3.25) ve (3.26) kullanılırsa

$$f' \frac{dN^*}{ds^*} = m_1 m_2 N'$$

$$\frac{dN^*}{ds^*} - k_1^* T^* = \frac{m_1 m_2 (k_2 + hk_1)}{2hf'}(hT - B)$$

elde edilir. Buradan,

$$k_2^* = g\left(\frac{dN^*}{ds^*}, \frac{dN^*}{ds^*}\right) = \frac{m_3(k_2 + hk_1)}{f'\sqrt{-2h}}$$

yazabiliriz ve $m_3 = \pm 1$, öyle ki $m_3(k_2 + hk_1) > 0$ dır. Böylece, B^* ı aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\begin{aligned} B^* &= \frac{m_1 m_2 m_3 \sqrt{-2h}}{2}(T - \frac{1}{h}B) \\ g(B^*, B^*) &= 1 \end{aligned}$$

O zaman β^* bir timelike eğri ve β nın bir Bertrand eşleniğidir. Böylece β bir Bertrand eğridir.

(ii) β^* eğrisi asli normal vektörü spacelike olan spacelike bir eğri olsun. Bu durumda $\forall\ s^* \in I^*$ ve $\forall\ s \in I$ için β^* aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\beta^*(s^*) = \beta(s) + \lambda(s)N(s) \tag{3.28}$$

(3.28) denkleminde s parametresine göre türevi alınır ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$T^* f' = (1 + \lambda k_2)\, T + \lambda' N - \lambda k_1 B \tag{3.29}$$

eşitliği elde edilir. (3.29) N ile çarpılırsa

$$\lambda' = 0 \tag{3.30}$$

bulunur. Dolayısıyla λ sıfırdan farklı bir sabittir. Buna göre, (3.30) denklemi (3.29) de yerine yazılırsa

$$T^* f' = (1 + \lambda k_2)\, T - \lambda k_1 B \tag{3.31}$$

elde edilir. (3.31) kendisi ile çarpılırsa

$$(f')^2 = -2\lambda k_1\, (1 + \lambda k_2) \tag{3.32}$$

bulunur. (3.31) eşitliğinden

$$\delta = \frac{1 + \lambda k_2}{f'} \quad \text{ve} \quad \gamma = \frac{-\lambda k_1}{f'} \tag{3.33}$$

sağlanır ve (3.33) eşitliği (3.31) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$T^* = \delta T + \gamma B \tag{3.34}$$

elde edilir. (3.34) denkleminin s parametresine göre türevi alınarak, (2.1) ve (2.2) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$k_1^* N^* f' = \delta' T + (\delta k_1 - \gamma k_2)\, N + \gamma' B \tag{3.35}$$

elde edilir. (3.35) kendisiyle çarpılırsa

$$\delta' = 0 \quad \text{ve} \quad \gamma' = 0 \tag{3.36}$$

$\gamma \neq 0$ olduğundan $1 + \lambda k_2 = -h\lambda k_1$ dir. Buradan $h = \dfrac{1+\lambda k_2}{-\lambda k_1} = \dfrac{\delta}{\gamma}$ yazılır. (3.36) denklemi (3.35) de yerine yazılırsa

$$k_1^* N^* f' = (\delta k_1 - \gamma k_2) N \tag{3.37}$$

bulunur. (3.37) kendisiyle çarpılarak (3.34) ve (3.36) kullanılırsa

$$(f')^2 (k_1^*)^2 = \frac{-(k_2 - hk_1)^2}{2h} \tag{3.38}$$

elde edilir. Öyle ki, $k_2 - hk_1 \neq 0$ ve $h > 0$ dır. Eğer $u = \dfrac{\delta k_1 - \gamma k_2}{f' k_1^*}$ denilirse

$$N^* = uN \tag{3.39}$$

yazılır. (3.39) denkleminin s ye göre türevi alınır, (2.1) ve (2.2) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$-k_1^* \left(\frac{1+\lambda k_2}{f'} T - \frac{\lambda k_1}{f'} B \right) f' - k_2^* B^* f' = u' N + u k_2 T - u k_1 B$$

sağlanır. Son eşitlik N ile çarpılırsa, $u' = 0$ bulunur. Buradan u sıfırdan farklı bir sabittir. O halde son eşitlikten

$$-k_2^* B^* f' = u k_2 T - u k_1 B + k_1^* T^* f' \tag{3.40}$$

elde edilir. (3.40) eşitliğinde (3.34) yerine yazılırsa

$$k_2^* B^* f' = P(s) T + Q(s) B$$

sağlanır. Buradan,

$$P(s) = -\left(u k_2 + (1 + \lambda k_2) k_1^*\right)$$
$$Q(s) = u k_1 - (\lambda k_1) k_1^*$$

olup, eşitlikler ise $k_2 + hk_1 \neq 0$ olduğunu ispatlar.

Tersine, kabul edelim ki β (3.29) şartlarını sağlayan eğrilikleri sırasıyla $k_1 \neq 0$, k_2 olan s parametresine göre Cartan null bir eğri olsun. λ, $h \in \mathbb{R}$ olmak üzere β^* eğrisini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$\beta^*(s^*) = \beta(s) + \lambda(s) N(s) \tag{3.41}$$

(3.41) denkleminin s parametresine göre türevi alınır ve (2.2) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\frac{d\beta^*}{ds} = \beta^{'}(s) + \lambda^{'}(s) N(s) + \lambda(s) N^{'}(s) \tag{3.42}$$

elde edilir. (3.42) eşitliği N ile çarpılırsa

$$\lambda^{'} = 0 \tag{3.43}$$

bulunur ve buradan λ sıfırdan farklı bir sabittir. (3.43) eşitlliği (3.42) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\frac{d\beta^*}{ds} = -\lambda k_1(hT + B) \tag{3.44}$$

elde edilir. Buradan $m_1 = \mp 1$, öyle ki $m_1 \lambda k_1 > 0$ dir. (3.44) eşitliği yeniden yazılırsa

$$T^* = \frac{m_1}{\sqrt{-2h}}(hT + B) \tag{3.45}$$

sağlanır. (3.45) denkleminin s ye göre türevi alınır ve (2.2) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$f'\frac{dT^*}{ds^*} = \left(\frac{m_1}{\sqrt{-2h}}\right)^{'}(hT + B) + \left(\frac{m_1}{\sqrt{-2h}}\right)(h'T + hT' + B')$$

$$\frac{dT^*}{ds^*} = \frac{-m_1(k_2 - hk_1)}{f'\sqrt{-2h}}N$$

bulunur. Son eşitlikten,

$$k_1^* = \left\|\frac{dT^*}{ds^*}\right\| = \frac{m_2(k_2 - hk_1)}{f'\sqrt{-2h}} \tag{3.46}$$

elde edilir. Buradan $m_2 = \pm 1$, öyle ki $m_2(k_2 - hk_1) > 0$.dır. Şimdi biz N^* ı şu şekilde yazabiliriz.

$$N^* = m_1 m_2 N \tag{3.47}$$

(3.47) denkleminin s parametresine göre türevi alınarak, (3.45) ve (3.46) kullanılırsa

$$f'\frac{dN^*}{ds^*} = m_1 m_2 N'$$

$$\frac{dN^*}{ds^*} - k_1^* T^* = \frac{m_1 m_2(k_2 + hk_1)}{2hf'}(hT - B)$$

$$k_2^* = g\left(\frac{dN^*}{ds^*}, \frac{dN^*}{ds^*}\right) = \frac{m_3(k_2 + hk_1)}{f'\sqrt{-2h}}$$

bulunur ve burada $m_3 = \pm 1$, öyle ki $m_3(k_2 + hk_1) > 0$ dır. O halde B^* ı şu şekilde yazabiliriz.

$$B^* = \frac{m_1 m_2 m_3 \sqrt{-2h}}{2}(T - \frac{1}{h}B)$$

O zaman β^* asli normali spacelike olan spacelike eğri ve β nın bir Bertrand eşleniğidir. Böylece β bir Bertrand eğrisidir.

Aşağıdaki sonuçlarda Cartan Null Bertrand Eğrisinin Frenet vektörleri ve eğrilik fonksiyonları ile Bertrand eşlenik eğrisi arasındaki ilişkiler verilmiştir. ■

Sonuç 3.2 *$\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ ve eğrilikleri k_1, k_2 olan bir Cartan null Bertrand eğrisi olsun. $\beta^* : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ Frenet çatısı $\{T^*, N^*, B^*\}$ ve k_1^*, k_2^* eğrilikli β nın Bertrand eşlenik eğrisi β^* bir timelike eğri olmak üzere β ve β^* ın eğrilikleri;*

$$k_1^* = \frac{\lambda\left(k_2 - h\right)}{\left(f'\right)^2} \tag{3.48}$$

$$k_2^* = \frac{1}{\left(f'\right)^3}\sqrt{2\left(h\lambda\left(\lambda k_2 - h\lambda\right) + k_2\left(f'\right)^2\right)\left(\lambda\left(\lambda k_2 - h\lambda\right) - \left(f'\right)^2\right)} \tag{3.49}$$

ve

$$T^* = \left(\frac{-h\lambda}{f'}\right)T - \left(\frac{\lambda}{f'}\right)B \tag{3.50}$$

$$N^* = N \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned} B^* \; = \; & \left(\frac{h\lambda\left(\lambda k_2 - h\lambda\right) + k_2\left(f'\right)^2}{\sqrt{2\left(h\lambda\left(\lambda k_2 - h\lambda\right) + k_2\left(f'\right)^2\right)\left(\lambda\left(\lambda k_2 - h\lambda\right) - \left(f'\right)^2\right)}}\right)T + \\ & \left(\frac{\lambda\left(\lambda k_2 - h\lambda\right) - \left(f'\right)^2}{\sqrt{2\left(h\lambda\left(\lambda k_2 - h\lambda\right) + k_2\left(f'\right)^2\right)\left(\lambda\left(\lambda k_2 - h\lambda\right) - \left(f'\right)^2\right)}}\right)B \end{aligned} \tag{3.52}$$

$\left(f'\right)^2 = -2\lambda^2 h$ ve $1 + \lambda k_2 = -h\lambda$, $h < 0$, $\lambda \neq 0$ dır.

İspat. Kabul edelim ki β eğrisi, $\mathbb{E}_1^3$ de Cartan null Bertrand bir eğri ve β^* eğrisi timelike bir eğri olsun. Bu durumda $\forall\ s^* \in I^*$ ve $\forall\ s \in I$ için β^* ı aşağıdaki gibi yazılabiliriz.

$$\beta^*\left(s^*\right) = \beta\left(s\right) + \lambda N\left(s\right) \tag{3.53}$$

(3.53) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınır ve (2.2) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$T^* f' = (1 + \lambda k_2)T + \lambda' N - \lambda B \tag{3.54}$$

elde edilir. (3.54) denklemi N^* ile çarpılırsa

$$\lambda^{'} = 0 \tag{3.55}$$

bulunur. Dolayısıyla λ sıfırdan farklı bir sabittir. Buna göre (3.55) denklemi (3.54) de yerine yazılırsa

$$T^* f^{'} = (1 + \lambda k_2)T - \lambda B \tag{3.56}$$

bulunur. (3.56) eşitliği kendisi ile çarpılırsa

$$f^{'} = \sqrt{2\lambda(1 + \lambda k_2)} \tag{3.57}$$

elde edilir. (3.56) eşitliğinden

$$T^* = \frac{(1 + \lambda k_2)}{f'} T - \frac{\lambda}{f'} B$$

elde edilir. $1 + \lambda k_2 = -h\lambda$ dır ve son eşitlikte yerine yazılırsa

$$T^* = \frac{-h\lambda}{f'} T - \frac{\lambda}{f'} B \tag{3.58}$$

elde edilir. (3.58) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınırsa

$$k_1^* N^* f^{'} = \left(\frac{-h\lambda}{f'}\right)^{'} T + \left(\frac{\lambda k_2 - h\lambda}{f'}\right) N + \left(-\frac{\lambda}{f'}\right)^{'} B \tag{3.59}$$

bulunur ve $g(N, N^*) = 1$ kullanılarak (3.59) denklemi N ile çarpılırsa

$$k_1^* = \frac{\lambda k_2 - h\lambda}{(f')^2} \tag{3.60}$$

elde edilir. (3.59) denklemi kullanılarak, $\left(\frac{-h\lambda}{f'}\right)^{'} = 0$, $\left(-\frac{\lambda}{f'}\right)^{'} = 0$ olup (3.59) de yerine yazılırsa

$$k_1^* N^* f^{'} = \left(\frac{\lambda k_2 - h\lambda}{f'}\right) N \tag{3.61}$$

ve (3.60) eşitliği (3.61) denkleminde yerine yazılırsa

$$N^* = N \tag{3.62}$$

kolayca elde edilir. (3.62) denkleminin s parametresine göre türevi alınırsa

$$k_2^* B^* f^{'} = \left(\frac{(\lambda k_2 - h\lambda)\, h\lambda}{(f')^2} + k_2\right) T + \left(\frac{(\lambda k_2 - h\lambda)\, \lambda}{(f')^2} - 1\right) B \tag{3.63}$$

bulunur. (3.63) eşitliği kendisi ile çarpılırsa

$$k_2^{*2} = \frac{1}{(f')^2} 2 \left(\frac{(\lambda k_2 - h\lambda) h\lambda}{(f')^2} + k_2 \right) \left(\frac{(\lambda k_2 - h\lambda) \lambda}{(f')^2} - 1 \right) \tag{3.64}$$

elde edilir. (3.63) denkleminden B^* çekilirse

$$B^* = \frac{1}{k_2^* f'} \left(\frac{(\lambda k_2 - h\lambda) h\lambda}{(f')^2} + k_2 \right) T + \frac{1}{k_2^* f'} \left(\frac{(\lambda k_2 - h\lambda) \lambda}{(f')^2} - 1 \right) B \tag{3.65}$$

bulunur. Ayrıca (3.64) eşitliği (3.65) eşitliğinde yerine yazılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned} B^* \;=\; & \left(\frac{h\lambda (\lambda k_2 - h\lambda) - k_2 (f')^2}{\sqrt{-2 \left(h\lambda (\lambda k_2 - h\lambda) - k_2 (f')^2 \right) \left(\lambda (\lambda k_2 - h\lambda) + (f')^2 \right)}} \right) T + \\ & \left(\frac{\lambda (\lambda k_2 - h\lambda) + (f')^2}{\sqrt{-2 \left(h\lambda (\lambda k_2 - h\lambda) - k_2 (f')^2 \right) \left(\lambda (\lambda k_2 - h\lambda) + (f')^2 \right)}} \right) B \end{aligned} \tag{3.66}$$

elde edilir. ■

Örnek 3.2 *$\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ de bir Cartan null eğri düşünelim.*

$$\beta(s) = (\sinh s, \cosh s, s)$$

ve β nın Frenet çatısını ve eğriliklerini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{aligned} T &= (\cosh s, \sinh s, 1) \\ N &= (\sinh s, \cosh s, 0) \\ B &= \left(-\frac{\cosh s}{2}, -\frac{\sinh s}{2}, \frac{1}{2} \right) \\ k_1(s) = 1 \quad &, \quad k_2(s) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Eğer *Teorem* (3.1) de $h = -\frac{3}{2}$ ve $\lambda = 1$ yerleştirilirse, β^* eğrisini aşağıdaki gibi elde ederiz.

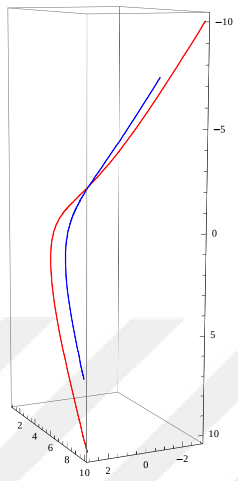
$$\beta^*(s) = \beta(s) + N(s) = (2\sinh s, 2\cosh s, s)$$

Buradan uygun hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned} T^* &= \left(\frac{2\cosh s}{\sqrt{3}}, \frac{2\sinh s}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\ N^* &= (\sinh s, \cosh s, 0) \\ B^* &= \left(-\frac{\cosh s}{\sqrt{3}}, -\frac{\sinh s}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \\ k_1^* = \frac{2}{3} \quad &, \quad k_2^* = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

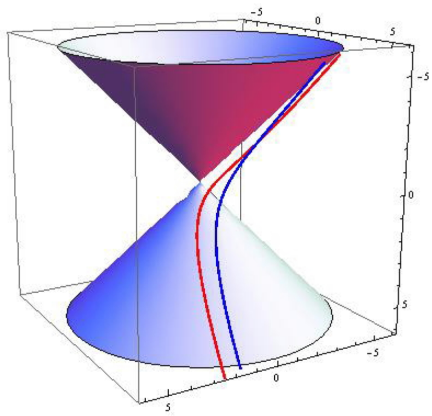
elde edilir. Buradan β^* ın, β nın bir timelike Bertrand eşlenik eğrisi olduğu kolayca görülebilir.

Yukarıda verilen Cartan null eğri (kırmızı renkte) ve onun timelike Bertrand eşleniği (mavi renkte) eğrilerin grafikleri aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil-3.

Bu eğrilerin null koni ile birlikte grafikleri de aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil-4.

Sonuç 3.3 $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ *Frenet çatısı* $\{T, N, B\}$ *ve eğrilikleri* k_1, k_2 *olan bir Cartan null Bertrand eğrisi olsun.* $\beta^* : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ *Frenet çatısı* $\{T^*, N^*, B^*\}$ *ve* k_1^*, k_2^* *eğrilikli* β *nın asli normali spacelike olan bir spacelike Bertrand eşlenik eğrisi olmak üzere* β *ve* β^* *ın eğrilikleri;*

$$k_1^* = \frac{\lambda (k_2 - h)}{(f')^2} \tag{3.67}$$

$$k_2^* = \frac{1}{(f')^2} \sqrt{-2 \left(h\lambda (\lambda k_2 - h\lambda) - k_2 (f')^2 \right) \left(\lambda (\lambda k_2 - h\lambda) + (f')^2 \right)} \tag{3.68}$$

ve

$$T^* = \left(\frac{(h\lambda)}{f'} \right) T - \left(\frac{\lambda}{f'} \right) B \tag{3.69}$$

$$N^* = N \tag{3.70}$$

$$\begin{aligned} B^* = & \left(\frac{h\lambda (\lambda k_2 - h\lambda) - k_2 (f')^2}{\sqrt{-2 \left(h\lambda (\lambda k_2 - h\lambda) - k_2 (f')^2 \right) \left(\lambda (\lambda k_2 - h\lambda) + (f')^2 \right)}} \right) T + \\ & \left(\frac{\lambda (\lambda k_2 - h\lambda) + (f')^2}{\sqrt{-2 \left(h\lambda (\lambda k_2 - h\lambda) - k_2 (f')^2 \right) \left(\lambda (\lambda k_2 - h\lambda) + (f')^2 \right)}} \right) B \end{aligned} \tag{3.71}$$

$(f')^2 = 2\lambda^2 h$ ve $1 + \lambda k_2 = -h\lambda$, $h > 0$, $\lambda \neq 0$ dır.

İspat. Kabul edelim ki, β eğrisi $\mathbb{E}_1^3$ de Cartan null bir Bertrand eğri ve β^* eğrisi asli normal vektörü spacelike olan spacelike bir eğri olsun. Bu durumda $\forall\ s^* \in I^*$ ve $\forall\ s \in I$ için β^* aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\beta^* (s^*) = \beta (s) + \lambda N (s) \tag{3.72}$$

(3.72) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınır ve (2.2) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$T^* f^{'} = (1 + \lambda k_2)T + \lambda^{'} N - \lambda B \tag{3.73}$$

elde edilir. (3.73) denklemi N^* ile çarpılırsa

$$\lambda^{'} = 0 \tag{3.74}$$

bulunur. Dolayısıyla λ sıfırdan farklı bir sabittir. Buna göre (3.74) denklemi (3.73) de yerine yazılırsa

$$T^* f^{'} = (1 + \lambda k_2)T - \lambda B \tag{3.75}$$

sağlanır ve (3.75) eşitliği kendisi ile çarpılırsa

$$f^{'} = \sqrt{-2\lambda(1+\lambda k_2)} \tag{3.76}$$

elde edilir. (3.75) eşitliğinden

$$T^{*} = \frac{(1+\lambda k_2)}{f'}T - \frac{\lambda}{f'}B$$

ve $1+\lambda k_2 = -h\lambda$ yazılarak son eşitlikte düzenlenirse

$$T^{*} = \frac{-h\lambda}{f'}T - \frac{\lambda}{f'}B \tag{3.77}$$

elde edilir.(3.77) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınırsa

$$k_1^{*}N^{*}f^{'} = \left(\frac{-h\lambda}{f'}\right)^{'}T + \left(\frac{\lambda k_2 - h\lambda}{f'}\right)N + \left(-\frac{\lambda}{f'}\right)^{'}B \tag{3.78}$$

bulunur. $g(N, N^{*}) = 1$ kullanılarak, (3.78) denklemi N ile çarpılırsa

$$k_1^{*} = \frac{\lambda k_2 - h\lambda}{(f')^2} \tag{3.79}$$

ve (3.78) kullanılarsa $\left(\frac{-h\lambda}{f'}\right)^{'} = 0$, $\left(-\frac{\lambda}{f'}\right)^{'} = 0$ elde edilir. (3.78) denkleminde yerine yazılırsa

$$k_1^{*}N^{*}f^{'} = \left(\frac{\lambda k_2 - h\lambda}{f'}\right)N \tag{3.80}$$

ve (3.79) denklemi (3.80) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$N^{*} = N \tag{3.81}$$

bulunur. (3.81) denkleminin s parametresine göre türevi alınırsa

$$k_2^{*}B^{*}f^{'} = \left(\frac{(\lambda k_2 - h\lambda)\,h\lambda}{(f')^2} - k_2\right)T + \left(\frac{(\lambda k_2 - h\lambda)\,\lambda}{(f')^2} + 1\right)B \tag{3.82}$$

elde ediler ve (3.82) eşitliği kendisi ile çarpılırsa

$$k_2^{*2} = -\frac{1}{(f')^2}2\left(\frac{(\lambda k_2 - h\lambda)\,h\lambda}{(f')^2} - k_2\right)\left(\frac{(\lambda k_2 - h\lambda)\,\lambda}{(f')^2} + 1\right) \tag{3.83}$$

bulunur. (3.82) denkleminden B^{*} çekilirse

$$B^{*} = \frac{1}{k_2^{*}f'}\left(\frac{(\lambda k_2 - h\lambda)\,h\lambda}{(f')^2} - k_2\right)T + \frac{1}{k_2^{*}f'}\left(\frac{(\lambda k_2 - h\lambda)\,\lambda}{(f')^2} + 1\right)B \tag{3.84}$$

elde edilir. Ayrıca (3.83) eşitliği, (3.84) de yerine yazılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned} B^* &= \left(\frac{h\lambda\left(\lambda k_2 - h\lambda\right) - k_2\left(f'\right)^2}{\sqrt{-2\left(h\lambda\left(\lambda k_2 - h\lambda\right) - k_2\left(f'\right)^2\right)\left(\lambda\left(\lambda k_2 - h\lambda\right) + \left(f'\right)^2\right)}}\right) T + \\ &\quad \left(\frac{\lambda\left(\lambda k_2 - h\lambda\right) + \left(f'\right)^2}{\sqrt{-2\left(h\lambda\left(\lambda k_2 - h\lambda\right) - k_2\left(f'\right)^2\right)\left(\lambda\left(\lambda k_2 - h\lambda\right) + \left(f'\right)^2\right)}}\right) B \end{aligned}$$

bulunur. ■

Örnek 3.3 *Örnek (3.2) deki $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ de bir Cartan null eğrisi için eğer Sonuç (3.1) de $h = 3/2$ ve $\lambda = -1/2$ yerleştirilirse, β^* aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.*

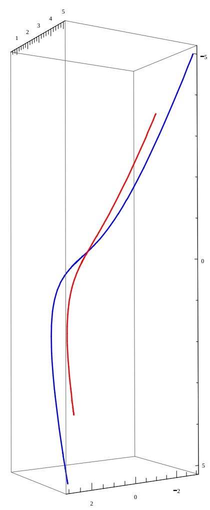
$$\beta^*(s) = \beta(s) - \frac{1}{2}N(s) = \left(\frac{\sinh s}{2}, \frac{\cosh s}{2}, s\right)$$

Buradan uygun hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned} T^* &= \left(\frac{\cosh s}{\sqrt{3}}, \frac{\sinh s}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \\ N^* &= (\sinh s, \cosh s, 0) \\ B^* &= \left(-\frac{2\cosh s}{\sqrt{3}}, -\frac{2\sinh s}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ k_1^* &= \frac{2}{3} \quad , \quad k_2^* = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

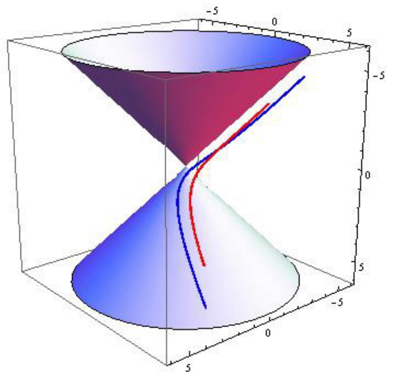
eğrinin bir β^* spacelike Bertrand eşlenik eğrisi olduğu kolayca görülebilir.

Yukarıda verilen Cartan null eğri (kırmızı renkte) ve onun spacelike Bertrand eşleniği (mavi renkte) eğrilerin grafikleri aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil-5.

Bu eğrilerin null koni ile birlikte grafikleri de aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil-6.

4. 3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA SPACELIKE BERTRAND EĞRİLERİ

Bu bölümde 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike Bertrand eğrileri incelenecektir. İlk olarak bu uzayda spacelike Bertrand eğri tanımını verelim. Spacelike eğrilerin $\mathbb{E}_1^3$ de Bertrand eğrileri olması için gerekli ve yeterli koşulları elde ederek ilgili örnekleri verilecektir.

Tanım 4.1 *$\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında $k_1(s) \neq 0$ spacelike bir Bertrand eğri olsun. Eğer $\forall\ s \in I$ için, β eğrisinin her $\beta(s)$ noktasındaki asli normali başka bir $\beta^* : I^* \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ eğrisinin $\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s))$ noktasındaki asli normali ile lineer bağımlı ise β eğrisine Bertrand eğrisi, β^* eğrisine de β eğrisinin Bertrand eşlenik eğrisi denir. Burada $f : I \to I^*$ bir regüler C^∞ dönüşümüdür. Öyle ki, $\forall\ s \in I$ için β nın her $\beta(s)$ noktasına β^* ın bir $\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s))$ noktası karşılık gelmektedir.*

β nın asli normal vektör alanı N spacelike veya timelike olabileceğinden β^* eşlenik eğrisi Cartan null eğri, non-null eğri olabilir. Bu durumlar iki ayrı alt başlıkta incelenecektir.

4.1. Null Olmayan Eşlenikli Spacelike Bertrand Eğrileri

Teorem 4.1 *$\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ eğrisi sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları k_1, k_2 ve asli normali spacelike olan spacelike bir eğri olsun. Bu durumda β nın bir Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartların sağlanmasıdır.*

(i) λ, $h \in \mathbb{R}$,

$$h^2 < 1,\ 1 - \lambda k_1 = -h\lambda k_2,\ k_2 - hk_1 \neq 0,\ hk_2 - k_1 \neq 0 \tag{4.1}$$

Bu durumda β^*eşlenik eğrisi, $\mathbb{E}_1^3$ de bir timelike eğridir.

(ii) λ, $h \in \mathbb{R}$,

$$h^2 > 1,\ 1 - \lambda k_1 = -h\lambda k_2,\ k_2 - hk_1 \neq 0,\ hk_2 - k_1 \neq 0 \tag{4.2}$$

Bu durumda β^*eşlenik eğrisi, $\mathbb{E}_1^3$ de asli normali spacelike olan spacelike bir eğridir.

İspat. $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ eğrisi sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları k_1, k_2 ve asli normal vektörü N spacelike olan bir spacelike eğri olsun. Kabul edelim ki, β^* eğrisi β eğrisinin s^* parametresine göre kendisinden başka Bertrand eşlenik eğrisi olsun. β eğrisinin asli normal vektörü N spacelike veya timelike vektör olduğundan,

(i) β^* eğrisi, asli normal vektörü N^* olan timelike bir eğri olsun. Bu durumda $\forall\ s^* \in I^*$ ve $\forall\ s \in I$ için β^* ı aşağıdaki gibi yazılabiliriz.

$$\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s)) = \beta(s) + \lambda(s)N(s) \tag{4.3}$$

(4.3) denkleminde s parametresine göre türev alınır ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$T^* f' = (1 - \ \lambda\epsilon_1 k_1)\, T + \lambda' N + \lambda\epsilon_3 k_2 B \tag{4.4}$$

elde edilir. (4.4) denklemi N ile çarpılırsa

$$\lambda' = 0 \tag{4.5}$$

bulunur. Dolayısıyla λ sıfırdan farklı bir sabittir. Buna göre, (4.5) denklemi (4.4) de yerine yazılırsa

$$T^* f' = (1 - \ \lambda\epsilon_1 k_1)\, T + \lambda\epsilon_3 k_2 B \tag{4.6}$$

elde edilir. (4.6) denklemi kendisiyle çarpılırsa

$$(f')^2 = (1 - \ \lambda\epsilon_1 k_1)^2 + (\lambda\epsilon_3 k_2) \tag{4.7}$$

bulunur. (4.6) eşitliği düzenlenerek tekrar yazılırsa

$$T^* = \left(\frac{1 - \ \lambda\epsilon_1 k_1}{f'}\right) T + \left(\frac{\lambda\epsilon_3 k_2}{f'}\right) B \tag{4.8}$$

elde edilir. (4.8) denkleminden

$$\delta = \left(\frac{1 - \ \lambda\epsilon_1 k_1}{f'}\right) \quad \text{ve} \quad \gamma = \left(\frac{\lambda\epsilon_3 k_2}{f'}\right) \tag{4.9}$$

bulunur ve (4.9) denklemi (4.8) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$T^* = \delta T + \gamma B \tag{4.10}$$

elde edilir. (4.10) denkleminin türevi alınar ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$f'k_1^*N^* = \delta'T + (\delta\epsilon_2 k_1 - \gamma\epsilon_2 k_2)\,N + \gamma' B \tag{4.11}$$

bulunur. (4.11) denklemi kendisiyle çarpılırsa

$$\delta' = 0 \quad \text{ve} \quad \gamma' = 0 \tag{4.12}$$

olur. Öyle ki, $\gamma \neq 0$, $1 - \lambda k_1 = -h\lambda k_2$ dir. Buradan $h = \dfrac{\delta}{\gamma}$ bulunur ve (4.12) denklemi (4.11) denkleminde yerine yazılırsa

$$\epsilon_2^* f' k_1^* N^* = (\delta\epsilon_2 k_1 - \gamma\epsilon_2 k_2)\,N \tag{4.13}$$

elde edilir. (4.13) denklemi kendisiyle çarpılarak (4.7) ve (4.9) eşitlikleri kullanılırsa

$$\epsilon_2^* \left(f'\right)^2 \left(k_1^*\right)^2 = \frac{\left(k_2 - hk_1\right)^2}{1 - h^2} \tag{4.14}$$

elde edilir. Buradan $k_2 - hk_1 \neq 0$ ve $h^2 < 1$ dir. Eğer $u = \dfrac{(\delta\epsilon_2 k_1 - \gamma\epsilon_2 k_2)}{\epsilon_2^* f' k_1^*}$ ifadesi (4.13) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$N^* = uN \tag{4.15}$$

elde edilir. (4.15) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınır ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$-\epsilon_1^* f' k_1^* T^* + \epsilon_3^* f' k_2^* B^* = u'N + (-\epsilon_1 k_1 T + \epsilon_3 k_2 B)$$

yazılır. Son eşitlik N ile çarpılırsa

$$u' = 0$$

bulunur. Buradan, u sıfırdan farklı bir sabittir. Dolayısıyla son eşitliğimiz düzenlenirse

$$\epsilon_3^* f' k_2^* B^* = u\,(-\epsilon_1 k_1 T + \epsilon_3 k_2 B) + \epsilon_1^* f' k_1^* T^* \tag{4.16}$$

elde edilir. (4.8) denklemini kullanarak, (4.16) eşitliği yeniden yazılırsa

$$\epsilon_3^* f' k_2^* B^* = P(s)T + Q(s)B \tag{4.17}$$

sağlanır. Buradan

$$P(s) = -\left(u\epsilon_1 k_1 - \epsilon_1^* k_1^* \left(1 - \lambda\epsilon_1 k_1\right)\right)$$
$$Q(s) = u\epsilon_3 k_2 + \epsilon_1^* k_1^* \left(\lambda\epsilon_3 k_2\right)$$

olup, bu eşitlikler ise $hk_2 - k_1 \neq 0$ olduğunu gösterir.

Tersine kabul edelim ki, β eğrisi eğrilikleri sıfırdan farklı k_1, k_2, asli normali spacelike olan ve (4.1) şartlarını sağlayan bir spacelike eğri olsun. β^* eğrisini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$\beta^*(s^*) = \beta(s) + \lambda(s)N(s) \tag{4.18}$$

(4.18) denkleminin s parametreine göre türevi alınır ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\frac{d\beta^*}{ds} = -\lambda k_2 \left[hT + B\right] \tag{4.19}$$

bulunur.

$$f' = \sqrt{\left|g\left(\frac{d\beta^*}{ds}, \frac{d\beta^*}{ds}\right)\right|} = m_1 \lambda k_2 \sqrt{1 - h^2}$$

ve buradan $m_1 = \mp 1$, öyle ki $m_1 \lambda k_2 > 0$ dır. (4.19) denklemi yeniden yazılırsa

$$\begin{aligned} T^* &= \frac{-m_1}{\sqrt{1-h^2}} \left[hT + B\right] \\ g(T^*, T^*) &= \epsilon_1^* = -1 \end{aligned} \tag{4.20}$$

(4.20) denkleminin s parametresine göre türevi alınarak, (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\frac{dT^*}{ds^*} = -\frac{m_1(hk_1 - k_2)}{f'\sqrt{1-h^2}} N \tag{4.21}$$

elde edilir. (4.21) denkleminden

$$k_1^* = \left\|\frac{dT^*}{ds^*}\right\| = \frac{m_2(hk_1 - k_2)}{f'\sqrt{1-h^2}} \tag{4.22}$$

bulunur. Buradan $m_2 = \pm 1$, öyle ki $m_2(hk_1 - k_2) > 0$ dır. Şimdi N^* ı şu şekilde yazabiliriz.

$$\begin{aligned} N^* &= -m_1 m_2 N \\ g(N^*, N^*) &= \epsilon_2^* = 1 \end{aligned} \tag{4.23}$$

(4.23) denkleminin s parametresine göre türevi alınarak, (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\frac{dN^*}{ds^*} = \frac{m_1 m_2 \left(k_1 - hk_2\right)}{\left(f'\right)^2 \left(1 - h^2\right)} \left[T + hB\right] + \frac{k_1^* T^*}{f'} \tag{4.24}$$

elde edilir. (4.20) denklemi (4.24) denkleminde yerine yazılırsa

$$k_2^* = g\left(\frac{dN^*}{ds^*}, \frac{dN^*}{ds^*}\right) = \frac{m_3\,(k_1 - hk_2)}{f'\sqrt{1-h^2}}$$

bulunur. Buradan $m_3 = \pm 1$, öyle ki $m_3\,(k_1 - hk_2) > 0$ dır. B^* ise şu şekilde tanımlanır.

$$\begin{aligned} B^* &= \frac{m_1 m_2 m_3}{(1-h^2)}\,[T + hB] \\ g(B^*, B^*) &= \epsilon_3^* = 1 \end{aligned} \tag{4.25}$$

O zaman β^* timelike bir eğri ve β nın Bertrand eşlenik eğrisidir. Böylece β bir Bertrand eğridir. ■

4.2. Cartan Null Eşlenikli Spacelike Bertrand Eğrileri

Teorem 4.2 *$\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ de asli normali spacelike ve eğrilikleri k_1, $k_2 \neq 0$ bir birim hızlı spacelike bir eğri olsun. β nın Bertrand eğrisi olması için gerekli ve yeterli şart $\lambda \in \mathbb{R}$, $h = \pm 1$ olmak üzere, aşağıdaki şartların sağlanmasıdır.*

$$1 - \lambda k_1 = h\lambda k_2$$

ve

$$hk_1 + k_2 \neq 0$$

dır. Bu durumda β^* Bertrand eşlenik eğrisi bir Cartan null eğridir.

İspat. Kabul edelim ki, β s parametresine göre asli normali spacelike olan bir spacelike eğri ve β^* s^* parametresi ile Cartan nul Betrand eşlenik eğrisi olsun. Bu durumda $\forall\ s^* \in I^*$ ve $\forall\ s \in I$ için, β^* aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\beta^*(s^*) = \beta(s) + \lambda(s)N(s) \tag{4.26}$$

(4.26) denkleminin s parametresine göre türevi alınır ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$T^* f' = (1 - \lambda\epsilon_1 k_1)\,T + \lambda' N + \lambda\epsilon_3 k_2 B \tag{4.27}$$

elde edilir. (4.27) denklemi N ile çarpılırsa

$$\lambda' = 0 \tag{4.28}$$

bulunur. Dolayısıyla λ sıfırdan farklı bir sabittir. Buradan (4.28) denklemi (4.27) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$T^* f' = (1 - \lambda \epsilon_1 k_1)\, T + \lambda \epsilon_3 k_2 B \tag{4.29}$$

elde edilir. (4.29) denklemi kendisiyle çarpılırsa

$$(\lambda \epsilon_3 k_2)^2 = (1 - \lambda \epsilon_1 k_1)^2 \tag{4.30}$$

bulunur. (4.30) kullanılarak (4.29) denklemi tekrar yazılırsa

$$T^* f' = \lambda \epsilon_3 k_2\, (hT - B)\,, \quad h = \pm 1 \tag{4.31}$$

elde edilir. $\delta = \dfrac{\lambda k_2}{f'}$ eşitliğini yerine koyarak, (4.31) denkleminin s ye göre türevi alınır ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$N^* f' = \delta\, (h k_1 + k_2)\, N \tag{4.32}$$

bulunur. Bu ise $hk_1 + k_2 \neq 0$ olduğunu gösterir.

Tersine, β eğrilikleri sıfır olmayan k_1, k_2, yay uzunluğu s ile parametrik hale getirilmiş asli normali spacelike olan spacelike bir eğri ve $\lambda \in \mathbb{R}$, $h = \pm 1$, $1 - hk_1 = \lambda k_2$ ve $hk_1 + k_2 \neq 0$ olduğunu varsayalım. O zaman β^* ı aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$\beta^*(s^*) = \beta(s) + \lambda(s) N(s) \tag{4.33}$$

(4.33) denkleminin s parametresine göre türevi alınır ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\frac{d\beta^*}{ds} = \lambda k_2\, [hT - B] \tag{4.34}$$

bulunur.(4.34) denkleminin s parametresine göre türevi alınarak, (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\frac{d^2\beta^*}{ds^2} = \lambda k_2\, (hk_1 + k_2)\, N \tag{4.35}$$

elde edilir. Buradan,

$$f' = \left| g\left(\frac{d\beta^*}{ds}, \frac{d\beta^*}{ds} \right) \right|^{\frac{1}{4}} = \sqrt{m_1 m_2 \lambda k_2\, (hk_1 + k_2)} \tag{4.36}$$

sağlanır. Buradan $m_1 = \mp 1$, öyle ki $m_1 \lambda k_2 > 0$ ve $m_2 = \pm 1$, $m_2 (hk_1 + k_2) > 0$ dır. (4.34) ve (4.35) denklemleri yeniden yazılırsa

$$T^* = \frac{\lambda k_2}{\sqrt{m_1 m_2 \lambda k_2 (hk_1 + k_2)}} [hT - B] \qquad g(T^*, T^*) = \epsilon_1^* = 0 \tag{4.37}$$

ve

$$N^* = m_1 m_2 N \qquad g(N^*, N^*) = \epsilon_2^* = 1, \quad k_1^* = 1 \tag{4.38}$$

elde edilir. Buradan,

$$k_2^* = -\frac{1}{2} g\left(\frac{dN^*}{ds}, \frac{dN^*}{ds}\right)$$

dir. Böylece

$$k_2^* = \frac{k_2^2 - k_1^2}{2 m_1 m_2 \lambda k_2 (hk_1 + k_2)} \tag{4.39}$$

elde edilir. Böylece, B^* ise aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$B^* = k_2^* T^* - \frac{dN^*}{ds^*} = \frac{\lambda k_2 h (hk_1 + k_2)^2}{2 (m_1 m_2 \lambda k_2 (hk_1 + k_2))^{\frac{3}{2}}} [T + hB] \qquad g(B^*, B^*) = \epsilon_3^* = 0$$

Bu ise ispatı tamamlar.

Aşağıda verilen asli normali timelike olan spacelike bir Bertrand eğri teoremi için de aynı ispat tamamlanır. ∎

Teorem 4.3 *$\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ de asli normali timelike ve eğrilikleri k_1, $k_2 \neq 0$ bir birim hızlı spacelike bir eğri olsun. β nın Bertrand eğrisi olması için gerekli ve yeterli şart $\lambda \in \mathbb{R}$, $h^2 < 1$ olmak üzere, aşağıdaki şartların sağlanmasıdır.*

$$1 - \lambda k_1 = h \lambda k_2 \tag{4.40}$$

ve

$$k_2 - hk_1 \neq 0 \text{ ve } hk_2 + k_1 \neq 0 \tag{4.41}$$

dır. Bu durumda β^* Bertrand eşlenik eğrisi asli normali timelike olan spacelike bir eğridir.

İspat. Kabul edelim ki, β s parametresine göre asli normali timelike olan bir spacelike eğri ve β^* s^* parametresi ile Betrand eşlenik eğrisi olsun. Bu durumda $\forall\ s^* \in I^*$ ve $\forall\ s \in I$ için β^* aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\beta^*(s^*) = \beta(s) + \lambda(s) N(s) \tag{4.42}$$

(4.42) denkleminin s parametresine göre türevi alınır ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$T^* f' = (1 - \lambda\epsilon_1 k_1) T + \lambda^{'} N + \lambda\epsilon_3 k_2 B \tag{4.43}$$

elde edilir. (4.43) denklemi N ile çarpılırsa

$$\lambda' = 0 \tag{4.44}$$

bulunur. Dolayısıyla λ sıfırdan farklı bir sabittir. Buna göre, (4.44) denklemi (4.43) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$T^* f' = (1 - \lambda\epsilon_1 k_1) T + \lambda\epsilon_3 k_2 B \tag{4.45}$$

elde edilir. (4.45) denklemi kendisiyle çarpılırsa

$$(\lambda\epsilon_3 k_2)^2 = (1 - \lambda\epsilon_1 k_1)^2 \tag{4.46}$$

ve (4.46) kullanılarak, (4.45) tekrar yazılırsa

$$T^* f' = \lambda\epsilon_3 k_2 (hT - B), h = \pm 1 \tag{4.47}$$

bulunur. $\delta = \dfrac{\lambda k_2}{f'}$ eşitliğini yerine koyarak, (4.47) denkleminin s ye göre türevi alınır ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$N^* f' = \delta (hk_1 + k_2) N \tag{4.48}$$

bulunur. Bu ise $hk_1 + k_2 \neq 0$ olduğunu gösterir.

Teoremin tersinin ispatı ise benzer şekilde gerçekleştirilir. ■

Örnek 4.1 *$\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ de asli normali spacelike olan spacelike bir eğri düşünelim.*

$$\beta(s) = (\sinh s, \cosh s, \sqrt{2}s)$$

Buradan β eğrisinin Frenet denklemleri ve eğrilikleri,

$$\begin{aligned} T(s) &= (\cosh s, \sinh s, \sqrt{2}) \\ N(s) &= (\sinh s, \cosh s, 0) \\ B(s) &= (-\sqrt{2}\cosh s, -\sqrt{2}\sinh s, -1) \end{aligned}$$

$$k_1(s) = 1 \quad , \quad k_2(s) = \sqrt{2}$$

yazılır. Eğer Teorem (4.1) *in* (i) *de* $h = -\sqrt{2}/2$ *ve* $\lambda = 1/2$ *seçilirse,* β^* *eğrisini aşağıdaki gibi elde edebiliriz.*

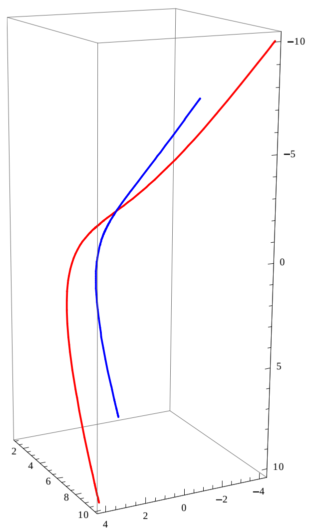
$$\beta^* = \beta(s) + \frac{1}{2}N(s) = (\frac{3}{2}\sinh s, \frac{3}{2}\cosh s, \sqrt{2}s)$$

Buradan uygun hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned} T^* &= (3\cosh s, 3\sinh s, 2\sqrt{2}) \\ N^* &= (\sinh s, \cosh s, 0) \\ B^* &= (-2\sqrt{2}\cosh s, -2\sqrt{2}\sinh s, -3) \\ k_1^* &= 6 \quad ve \quad k_2^* = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

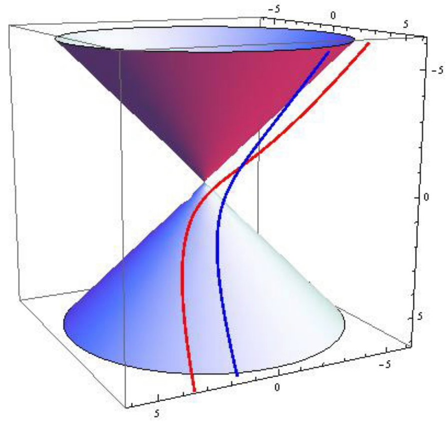
elde edilir. Eğrinin, timelike bir Bertrand eşlenik eğrisi olduğu kolayca görülebilir.

Yukarıda verilen asli normali spacelike olan spacelike bir eğri (kırmızı renkte) ve onun timelike Bertrand eşleniği (mavi renkte) eğrilerin grafikleri aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil-7.

Bu eğrilerin null koni ile birlikte grafikleri de aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil-8.

Örnek 4.2 *Örnek (4.1) deki $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ spacelike bir eğri için, eğer Teorem (4.1) in (ii) de $\lambda = 1/3$ ve $h = -\sqrt{2}$ seçilirse, β^* eğrisini aşağıdaki gibi elde ederiz.*

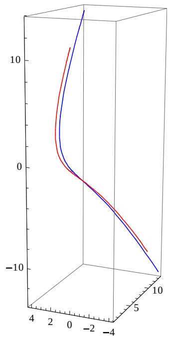
$$\beta^*(s) = \beta(s) + \frac{1}{3}N(s) = (\frac{4}{3}\sinh s, \frac{4}{3}\cosh s, \sqrt{2}s)$$

Buradan uygun hesaplamalar yapılırsa β^* eğrisinin Frenet denklemleri ve eğrilikleri,

$$\begin{aligned} T^* &= (2\sqrt{2}\cosh s, 2\sqrt{2}\sinh s, 3) \\ N^* &= (\sinh s, \cosh s, 0) \\ B^* &= (3\cosh s, 3\sinh s, 2\sqrt{2}) \\ k_1^*(s) = 6 \quad &, \quad k_2^*(s) = \frac{-9}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

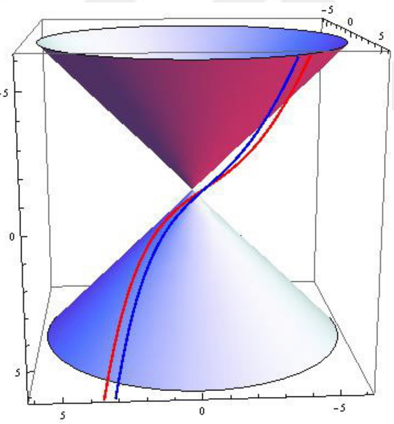
elde edilir. Bu durumda eğrinin spacelike bir Bertrand eşlenik eğrisi olduğu kolayca görülebilir.

Yukarıda verilen asli normali spacelike olan spacelike bir eğri (kırmızı renkte) ve onun spacelike Bertrand eşleniği (mavi renkte) eğrilerin grafikleri aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil-9.

Bu eğrilerin null koni ile birlikte grafikleri de aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil-10.

Örnek 4.3 *Örnek* (4.1) *deki* $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ *spacelike bir eğri için eğer Teorem* (4.2) *de* $\lambda = -1 - \sqrt{2}$ *seçilirse,* β^* *eğrisini aşağıdaki gibi yazabiliriz.*

$$\beta^*(s) = (-\sqrt{2}\sinh s, -\sqrt{2}\cosh s, \sqrt{2}s)$$

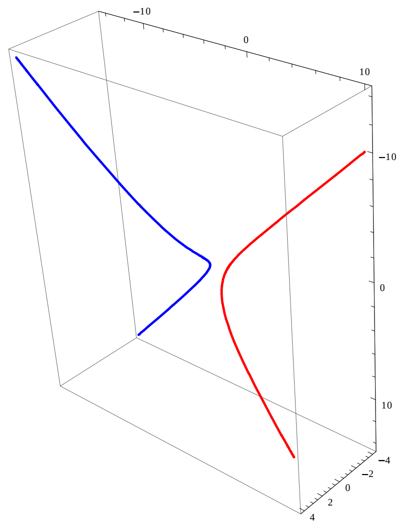
Buradan uygun hesaplamalar yapılırsa β^* *eğrisinin Frenet denklemleri ve eğrilik-*

leri,

$$
\begin{aligned}
T^* &= (-\sqrt[4]{2}\cosh s, -\sqrt[4]{2}\sinh s, \sqrt[4]{2}) \\
N^* &= (-\sinh s, -\cosh s, 0) \\
B^* &= \frac{1}{2\sqrt[4]{2}}(\cosh s, \sinh s, 1) \\
k_1^*(s) = 1 \quad &, \quad k_2^*(s) = \frac{1}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

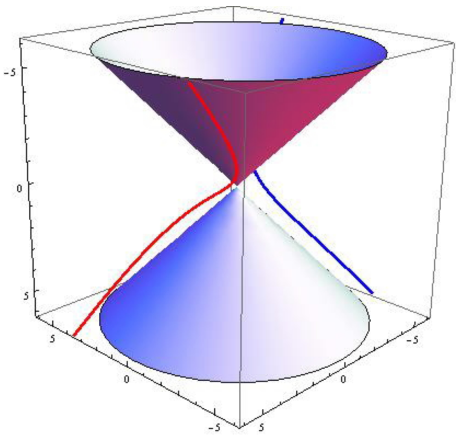
elde edilir. O halde bu eğrinin cartan null Bertrand eşlenik eğrisi olduğu kolayca görülebilir.

Yukarıda verilen asli normali spacelike olan spacelike bir eğri (kırmızı renkte) ve onun Cartan null Bertrand eşleniği (mavi renkte) eğrilerin grafikleri aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil-11.

Bu eğrilerin null koni ile birlikte grafikleri de aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil-12.

Örnek 4.4 *$\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ de asli normali timelike olan spacelike bir eğri düşünelim.*

$$\beta(s) = (\frac{\cosh s}{\sqrt{2}}, \frac{\sinh s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}})$$

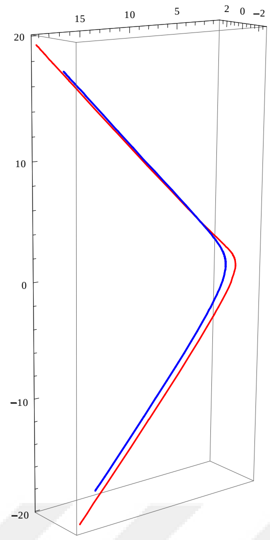
Buradan Teorem (4.3) de eğer $\lambda = 1$ ve $h = 1 + \sqrt{2}$ seçilirse,

$$\beta^*(s) = (\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cosh s, \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \sinh s, \frac{s}{\sqrt{2}})$$

elde edilir.

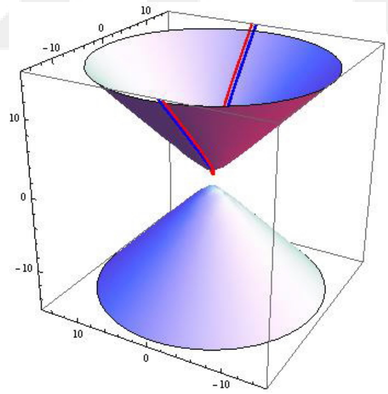
Benzer şekilde eğrinin Bertrand eşlenik eğrisi asli normali timelike olan bir spacelike eğri olduğu kolayca görülebilir.

Yukarıda verilen asli normali timelike olan spacelike bir eğri (kırmızı renkte) ve onun timelike olan spacelike Bertrand eşleniği (mavi renkte) eğrilerin grafikleri aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil-13.

Bu eğrilerin hiperbolik küre ile birlikte grafikleri de aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil-14.

5. 3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA TIMELIKE BERTRAND EĞRİLERİ

Bu bölümde 3-boyutlu Minkowski uzayında timelike Bertrand eğrileri incelenecektir. İlk olarak bu uzayda timelike Bertrand eğri tanımını verelim. Timelike eğrilerin $\mathbb{E}_1^3$'de Bertrand eğrileri olması için gerekli ve yeterli koşulları elde ederek ilgili örnekleri verilecektir.

Tanım 5.1 *$\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında $k_1(s) \neq 0$ timelike bir Bertrand eğri olsun. Eğer $\forall\ s \in I$ için β eğrisinin her $\beta\,(s)$ noktasındaki asli normali başka bir $\beta^* : I^* \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ eğrisinin $\beta^*\,(s^*) = \beta^*\,(f\,(s))$ noktasındaki asli normali ile lineer bağımlı ise β eğrisine Bertrand eğrisi, β^* eğrisine de β eğrisinin Bertrand eşlenik eğrisi denir. Burada $f : I \to I^*$ bir regüler C^∞ dönüşümüdür. Öyle ki, $\forall\ s \in I$ için β nın her $\beta(s)$ noktasına β^* ın bir $\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s))$ noktası karşılık gelmektedir.*

5.1. Null Olmayan Eşlenikli Timelike Bertrand Eğrileri

Teorem 5.1 *$\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ eğrilik fonksiyonları sıfırdan farklı k_1, k_2 olan birim hızlı timelike bir eğri olsun. Bu durumda β nın bir Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartların sağlanmasıdır.*

(i) $h,\ \lambda \in \mathbb{R}$,

$$h^2 > 1,\ 1 + \lambda k_1 = h\lambda k_2,\ hk_1 - k_2 \neq 0,\ hk_2 - k_1 \neq 0 \qquad (5.1)$$

Bu durumda β^* eşlenik eğrisi, $\mathbb{E}_1^3$ de bir timelike eğridir.

(ii) $h,\ \lambda \in \mathbb{R}$,

$$h^2 < 1,\ 1 + \lambda k_1 = h\lambda k_2,\ hk_1 - k_2 \neq 0,\ hk_2 - k_1 \neq 0 \qquad (5.2)$$

Bu durumda β^* eşlenik eğrisi, $\mathbb{E}_1^3$ de asli normali spacelike olan spacelike bir eğridir.

İspat. Kabul edelim ki, β s parametresine bağlı eğrilikleri sıfırdan farklı k_1, k_2 olan timelike bir Bertrand eğri ve β nın s^* parametresine bağlı Bertrand eşlenik eğrisi β^* olsun.

(**ii**) Kabul edelim ki, β^* eğrisi asli normali spacelike olan spacelike bir eğri olsun. Bu durumda $\forall\ s^* \in I^*$ ve $\forall\ s \in I$ için, β^* aşağıdaki formda yazılabilir.

$$\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s)) = \beta(s) + \lambda(s)N(s) \tag{5.3}$$

(5.3) denkleminde s parametresine göre türev alınır ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$T^* f' = (1 - \lambda\epsilon_1 k_1)\, T + \lambda^{'} N + \lambda\epsilon_3 k_2 B \tag{5.4}$$

ve (5.4) denklemi N ile çarpılırsa

$$\lambda' = 0 \tag{5.5}$$

bulunur. Dolayısıyla λ sıfırdan farklı bir sabittir. Buradan (5.5) denklemi (5.4) de yerine yazılırsa

$$T^* f' = (1 - \lambda\epsilon_1 k_1)\, T + \lambda\epsilon_3 k_2 B \tag{5.6}$$

elde edilir. (5.6) denklemi kendisiyle çarpılırsa

$$-\left(f'\right)^2 = (1 - \lambda\epsilon_1 k_1)^2 + (\lambda\epsilon_3 k_2)^2 \tag{5.7}$$

bulunur. (5.6) denklemi düzenlenerek yazılırsa

$$T^* = \left(\frac{1 - \lambda\epsilon_1 k_1}{f'}\right) T + \left(\frac{\lambda\epsilon_3 k_2}{f'}\right) B \tag{5.8}$$

elde edilir. (5.8) denkleminden

$$\delta = \left(\frac{1 - \lambda\epsilon_1 k_1}{f'}\right) \quad \text{ve} \quad \gamma = \left(\frac{\lambda\epsilon_3 k_2}{f'}\right) \tag{5.9}$$

bulunur ve (5.9) denklemi (5.8) de yerine yazılırsa

$$T^* = \delta T + \gamma B \tag{5.10}$$

elde edilir. (5.10) eşitliğinin türevi alınır ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$f' k_1^* N^* = \delta' T + (\delta\epsilon_2 k_1 - \gamma\epsilon_2 k_2)\, N + \gamma' B \tag{5.11}$$

bulunur. (5.11) denklemi kendisiyle çarpılırsa

$$\delta' = 0 \quad , \quad \gamma' = 0 \tag{5.12}$$

bulunur. Buradan $\gamma \neq 0$, $1+\lambda k_1 = h\lambda k_2$ ve $h = \dfrac{\delta}{\gamma}$ elde edilir. (5.12) eşitliği (5.11) de yerine yazılırsa

$$\epsilon_2^* f' k_1^* N^* = (\delta \epsilon_2 k_1 - \gamma \epsilon_2 k_2)\, N \tag{5.13}$$

elde edilir. (5.13) denklemi kendisiyle çarpılarak, (5.7) ve (5.9) denklemleri kullanılırsa

$$\epsilon_2^* (f')^2 (k_1^*)^2 = \frac{(hk_1 - k_2)^2}{1-h^2} \tag{5.14}$$

elde edilir. Buradan $hk_1 - k_2 \neq 0$ ve $h^2 < 1$ dir. Eğer $u = \dfrac{(\delta\epsilon_2 k_1 - \gamma\epsilon_2 k_2)}{\epsilon_2^* f' k_1^*}$ ifadesi (5.7) de yerine yazılırsa

$$N^* = uN \tag{5.15}$$

elde edilir. (5.15) denkleminin s parametresine göre türevi alınır ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$-\epsilon_1^* f' k_1^* T^* + \epsilon_3^* f' k_2^* B^* = u' N + u\left(-\epsilon_1 k_1 T + \epsilon_3 k_2 B\right) \tag{5.16}$$

yazılır. (5.16) eşitliği N ile çarpılırsa

$$u' = 0$$

bulunur. Buradan, u sıfırdan farklı bir sabittir. (5.16) eşitliği düzenlenirse

$$\epsilon_3^* f' k_2^* B^* = u\left(-\epsilon_1 k_1 T + \epsilon_3 k_2 B\right) + \epsilon_1^* f' k_1^* T^* \tag{5.17}$$

yazılır. (5.6) eşitliği kullanılarak, (5.17) denklemi yeniden yazılırsa

$$\epsilon_3^* f' k_2^* B^* = P(s)T + Q(s)B \tag{5.18}$$

elde edilir.. Buradan

$$P(s) = \frac{\lambda k_2 (hk_1 - k_2)}{(f')^2 k_1^* (1-h^2)} (k_1 - hk_2)$$

$$Q(s) = \frac{\lambda k_2 (hk_1 - k_2)\, h}{(f')^2 k_1^* (1-h^2)} (k_1 - hk_2)$$

olup, eşitlikler ise $hk_2 - k_1 \neq 0$ olduğunu gösterir.

Tersine kabul edelim ki, β eğrilikleri sıfırdan farklı k_1, k_2 olan ve (5.2) şartlarını sağlayan bir timelike eğri olsun. β^* eğrisini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$\beta^*(s) = \beta(s) + \lambda N(s) \tag{5.19}$$

(5.19) denkleminin s parametresine göre türevi alınır ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\frac{d\beta^*}{ds} = \lambda k_2 \left[hT + B\right] \tag{5.20}$$

bulunur. Böylece,

$$f' = \sqrt{\left|g\left(\frac{d\beta^*}{ds}, \frac{d\beta^*}{ds}\right)\right|} = m_1 \lambda k_2 \sqrt{1-h^2} \tag{5.21}$$

elde edilir. Buradan $m_1 = \mp 1$, öyle ki $m_1 \lambda k_2 > 0$ dir. (5.20) denklemi yeniden yazılırsa

$$\begin{aligned} T^* &= \frac{-m_1}{\sqrt{1-h^2}}\left[hT + B\right] \\ g(T^*, T^*) &= \epsilon_1^* = 1 \end{aligned} \tag{5.22}$$

ve (5.22) denkleminin s parametresine göre türevi alınarak, (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\frac{dT^*}{ds^*} = \frac{m_1(hk_1 - k_2)}{f'\sqrt{1-h^2}} N \tag{5.23}$$

bulunur. (5.23) eşitliğinden

$$\kappa_1^* = \left\|\frac{dT^*}{ds^*}\right\| = \frac{m_2(hk_1 - k_2)}{f'\sqrt{1-h^2}} \tag{5.24}$$

sağlanır. Buradan $m_2 = \pm 1$, öyle ki $m_2(hk_1 - k_2) > 0$ dır. Şimdi N^* ı şu şekilde yazabiliriz.

$$\begin{aligned} N^* &= m_1 m_2 N \\ g(N^*, N^*) &= \epsilon_2^* = 1 \end{aligned} \tag{5.25}$$

(5.25) denkleminin s parametresine göre türevi alınır ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\frac{dN^*}{ds^*} - k_1^* T^* = \frac{m_1 m_2 \left(k_1 - hk_2\right)}{f'\left(1-h^2\right)}\left[T + hB\right] \tag{5.26}$$

elde edilir. (5.26) eşitliğiden

$$\frac{dN^*}{ds^*} = \frac{m_1 m_2 \left(k_1 - hk_2\right)}{\left(f'\right)^2\left(1-h^2\right)}\left[T + hB\right] + \frac{k_1^* T^*}{f'}$$

yazılır.

$$k_2^* = g\left(\frac{dN^*}{ds^*}, \frac{dN^*}{ds^*}\right) = \frac{m_3\left(k_1 - hk_2\right)}{f'\sqrt{1-h^2}}$$

ve buradan $m_3 = \pm 1$, öyle ki $m_3 (k_1 - hk_2) > 0$ dır. Böylece, B^* ı ise şu şekilde yazabiliriz.

$$B^* = \frac{m_1 m_2 m_3}{(1-h^2)} [T + hB]$$
$$g(B^*, B^*) = \epsilon_3^* = -1$$

O zaman, β^* asli normali spacelike olan spacelike bir eğri ve β nın Bertrand eşlenik eğrisidir. Böylece β bir Bertrand eğridir. ■

5.2. Cartan Null Eşlenikli Timelike Bertrand Eğrileri

Teorem 5.2 *$\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ de eğrilikleri k_1, $k_2 \neq 0$ olan birim hızlı bir timelike eğri olsun. β nın Bertrand eğrisi olması için gerekli ve yeterli şart $\lambda \in \mathbb{R}$, $h = \pm 1$ olmak üzere, aşağıdaki şartların sağlanmasıdır.*

$$1 + \lambda k_1 = h \lambda k_2$$

ve

$$hk_1 - k_2 \neq 0$$

dır. Bu durumda β^* Bertrand eşlenik eğrisi bir Cartan null eğridir.

İspat. Kabul edelim ki, β s parametresine bağlı timelike bir eğri ve β^*, s^* parametresine bağlı Cartan null Betrand eşlenik eğrisi olsun. Bu durumda, $\forall$ $s^* \in I^*$ ve $\forall$ $s \in I$ için β^* aşağıdaki formda yazılabilir.

$$\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s)) = \beta(s) + \lambda(s) N(s) \tag{5.27}$$

(5.27) denkleminin s parametresine göre türevi alınır ve (2.2) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$T^* f' = (1 - \lambda \epsilon_1 k_1) T + \lambda' N + \lambda \epsilon_3 k_2 B \tag{5.28}$$

elde edilir. (5.28) denklemi N ile çarpılırsa

$$\lambda' = 0 \tag{5.29}$$

bulunur. Dolayısıyla λ sıfırdan farklı bir sabittir. Buna göre, (5.29) denklemi (5.28) da yerine yazılırsa

$$T^* f' = (1 - \lambda \epsilon_1 k_1) T + \lambda \epsilon_3 k_2 B \tag{5.30}$$

elde edilir. (5.30) denklemi kendisiyle çarpılırsa

$$(\lambda\epsilon_3 k_2)^2 = (1 - \lambda\epsilon_1 k_1)^2 \tag{5.31}$$

bulnur. Buradan $1 + hk_1 = \lambda k_2$, $h = \pm 1$ dir. (5.31) denklemi kullanılarak, (5.30) tekrar yazılırsa

$$T^* f' = \lambda\epsilon_3 k_2 \left(hT + B\right), \;\; h = \pm 1 \tag{5.32}$$

bulunur. $v = \dfrac{\lambda k_2}{f'}$ eşitliğini yerine koyarak ve (5.32) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınarak, (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$N^* f' = v\left(hk_1 - k_2\right) N \tag{5.33}$$

bulunur. Bu ise $hk_1 - k_2 \neq 0$ olduğunu gösterir.

Tersine, β eğrilikleri k_1, $k_2 \neq 0$ sabit eğrili yay uzunluğu s ile parametrik hale getirilmiş timelike bir eğri ve $\lambda \in \mathbb{R}$, $h = \pm 1$, $1 + hk_1 = \lambda k_2$ ve $hk_1 - k_2 \neq 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman β^* ı aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$\beta^*(s^*) = \beta(s) + \lambda(s) N(s) \tag{5.34}$$

(5.34) denkleminin s parametresine göre türevi alınır ve (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\frac{d\beta^*}{ds} = \lambda k_2 \left[hT + B\right] \tag{5.35}$$

bulunur. (5.35) denkleminin s parametresine göre türevini alınarak, (2.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\frac{d^2\beta^*}{ds^2} = \lambda k_2 \left(hk_1 - k_2\right) N \tag{5.36}$$

ve

$$f' = \left| g\left(\frac{d\beta^*}{ds}, \frac{d\beta^*}{ds}\right)\right|^{\frac{1}{4}} = \sqrt{m_1 \lambda k_2 \left(hk_1 - k_2\right)} \tag{5.37}$$

buradan $m_1 = \mp 1$, öyle ki $m_1 \lambda k_2 \left(hk_1 - k_2\right) > 0$ dır. (5.35) ve (5.36) denklemleri yeniden yazılırsa

$$\begin{gathered} T^* = \frac{\lambda k_2}{\sqrt{m_1 \lambda k_2 \left(hk_1 - k_2\right)}} \left[hT + B\right] \\ g(T^*, T^*) = \epsilon_1^* = 0 \end{gathered} \tag{5.38}$$

ve

$$\begin{gathered} N^* = m_1 N \\ g(N^*, N^*) = \epsilon_2^* = 1 \quad , \quad k_1^* = 1 \end{gathered} \tag{5.39}$$

elde edilir. Biliyoruz ki, $k_2^* = -\frac{1}{2} g\left(\frac{dN^*}{ds}, \frac{dN^*}{ds}\right)$ dır. Böylece,

$$k_2^* = \frac{k_1^2 - k_2^2}{2m_1\lambda k_2\left(hk_1 - k_2\right)} \tag{5.40}$$

elde edilir. Sonuç olarak, B^* ı ise şu şekilde yazabiliriz.

$$B^* = k_2^* T^* - \frac{dN^*}{ds^*} = \frac{-\lambda k_2 h\left(hk_1 - k_2\right)^2}{2\left(m_1\lambda k_2\left(hk_1 - k_2\right)\right)^{\frac{3}{2}}}\left[T - hB\right]$$
$$g(B^*, B^*) = \epsilon_3^* = 0$$

Bu ise ispatı tamamlar. O zaman β^* Cartan null bir eğri ve β nın Bertrand eşlenik eğrisidir. Böylece β bir Bertrand eğrisidir. ■

Örnek 5.1 $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ *de timelike bir eğri düşünelim.*

$$\beta(s) = (\sqrt{2}\sinh s, \sqrt{2}\cosh s, s)$$

Buradan β eğrisinin Frenet denklemleri ve eğrilikleri,

$$\begin{aligned} T(s) &= (\sqrt{2}\cosh s, \sqrt{2}\sinh s, 1) \\ N(s) &= (\sinh s, \cosh s, 0) \\ B(s) &= (\cosh s, \sinh s, \sqrt{2}) \end{aligned}$$
$$k_1(s) = \sqrt{2} \quad ve \quad k_2(s) = -1$$

elde edilir. Eğer Teorem (5.1) in (i) de $h = \sqrt{2}$ ve $\lambda = -1/2\sqrt{2}$ alınırsa β^* eğrisini aşağıdaki gibi elde ederiz.

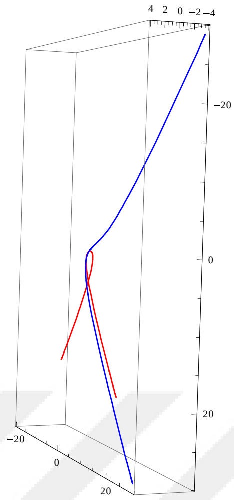
$$\beta^* = \beta(s) - \frac{1}{2\sqrt{2}} N(s) = \left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\sinh s, \frac{3}{2\sqrt{2}}\cosh s, s\right)$$

Buradan uygun hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned} T^* &= (3\cosh s, 3\sinh s, 2\sqrt{2}) \\ N^* &= (\sinh s, \cosh s, 0) \\ B^* &= (2\sqrt{2}\cosh s, 2\sqrt{2}\sinh s, 3) \end{aligned}$$
$$k_1^*(s) = 6 \quad , \quad k_2^*(s) = -8$$

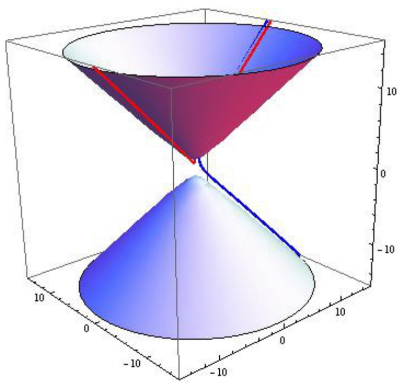
elde edilir. Eğrinin timelike bir Bertrand eşlenik eğrisi olduğu kolayca görülebilir.

Yukarıda verilen asli normali timelike olan bir eğri (kırmızı renkte) ve onun timelike olan Bertrand eşleniği (mavi renkte) eğrilerin grafikleri aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil-15.

Bu eğrilerin hiperbolik küre ile birlikte grafikleri de aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil-16.

Örnek 5.2 *Örnek* (5.1) *deki* $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ *timelike bir eğrisi için eğer Teorem* (5.1) *in* (*ii*) *de* $h = \sqrt{2}/2$ *ve* $\lambda = -\sqrt{2}/3$ *seçilirse* β^* *eğrisini aşağıdaki gibi elde ederiz.*

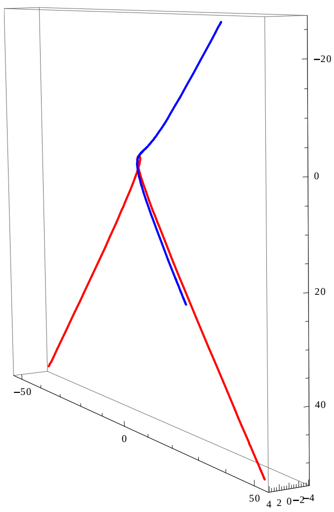
$$\beta^*(s) = \beta(s) - \frac{\sqrt{2}}{3}N(s) = (\frac{2\sqrt{2}}{3}\sinh s, \frac{2\sqrt{2}}{3}\cosh s, s)$$

Buradan uygun hesaplamalar yapılırsa

$$
\begin{aligned}
T^* &= (2\sqrt{2}\cosh s, 2\sqrt{2}\sinh s, 3) \\
N^* &= (\sinh s, \cosh s, 0) \\
B^* &= (3\cosh s, 3\sinh s, 2\sqrt{2}) \\
k_1^*(s) &= 6\sqrt{2} \quad , \quad k_2^*(s) = -9
\end{aligned}
$$

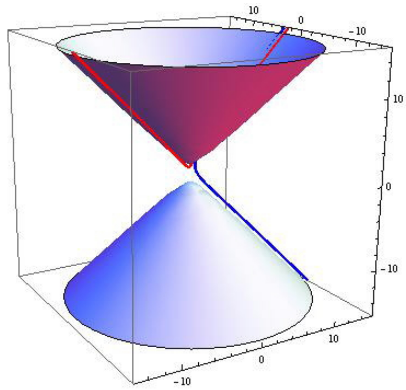
elde edilir. Eğrinin spacelike bir Bertrand eşlenik eğrisi olduğu kolayca görülebilir.

Yukarıda verilen asli normali timelike bir eğri (kırmızı renkte) ve onun spacelike Bertrand eşleniği (mavi renkte) eğrilerin grafikleri aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil-17.

Bu eğrilerin hiperbolik küre ile birlikte grafikleri de aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil-18.

Örnek 5.3 *Örnek* (5.1) *deki* $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ *timelike bir eğrisi için, eğer* $Teorem$ (5.2) *in* (ii) *de* $h = 1-\sqrt{2}$ *seçilirse* β^* *eğrisini aşağıdaki gibi elde ederiz..*

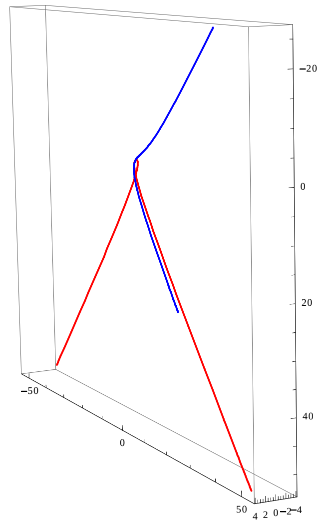
$$\beta^*(s) = \beta(s) + \left(1 - \sqrt{2}\right) N(s) = (\sinh s, \cosh s, s)$$

Buradan uygun hesaplamalar yapılırsa β^* ın Frenet denklemleri ve eğrilikleri,

$$\begin{aligned} T^* &= (\cosh s, \sinh s, 1) \\ N^* &= (\sinh s, \cosh s, 0) \\ B^* &= (-\frac{\cosh s}{2}, -\frac{\sinh s}{2}, \frac{1}{2}) \\ k_1^* = 1 \quad &, \quad k_2^* = 1/2 \end{aligned}$$

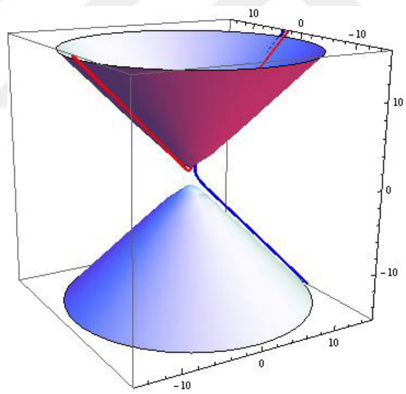
elde edilir. Eğrinin bir Cartan null Bertrand eşlenik eğrisi olduğu kolayca görülebilir.

Yukarıda verilen asli normali timelike bir eğri (kırmızı renkte) ve onun Cartan null Bertrand eşleniği (mavi renkte) eğrilerin grafikleri aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil-19.

Bu eğrilerin hiperbolik küre ile birlikte grafikleri de aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil-20.

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında 3-boyutlu Minkowski uzayında bir Bertrand eğrisinin farklı causal karakterlerine sahip eşlenik eğrilerinin var olabileceği düşüncesiyle ilk olarak bir Cartan null Bertrand eğrisinin Cartan null, timelike ve asli normali spacelike olan bir spacelike eşlenik eğrileri elde edilmiş ve bununla ilgili örnekler verilmiştir.

Bu düşünce yardımıyla ve Bertrand eğrilerinin çok çalışılan bir eğri olması gerçeğini de gözönüne alarak Minkowski uzay-zaman, Galile ve pseudo Galile uzayları gibi farklı iç çarpımlarının tanımlandığı uzaylarda da çalışılabilecek bir konudur.

Tez çalışmamızın, bu alanda çalışılacak diğer çalışmalara yardımcı olacağı düşüncesine sahibiz.

KAYNAKLAR

[1] F. Gökcek, H. Atın Erdem, On Cartan Null Bertrand curves in Minkowski 3−Space, Facta Universitatis (NIS) Ser. Math. Inform. Vol. 36, NO 5 (2021), 1079-1088.

[2] H. Balgetir, M. Bektaş and M. Ergüt, Bertrand curves for non-null curves in 3-dimensional Lorentzian space, Hadronic J. 27 (2004), no. 2, 229-236.

[3] H. Balgetir, M. Bektaş and J. Inoguchi, Null Bertrand curves in Minkowski 3-space and their characterizations, Note Mat. 23 (2004/05), no. 1, 7-13.

[4] J. M. Bertrand, Mémoire sur la théorie des courbes á double courbure, Comptes Rendus, 36, (1850).

[5] W. B. Bonnor, Null curves in a Minkowski space-time, Tensor 20 (1969), 229-242.

[6] W. B. Bonnor, Curves with null normals in Minkowski space-time. A random walk in relativity and cosmology, Wiley Easten Limited (1985), 33-47.

[7] N. Ekmekci and K. İlarslan, On Bertrand curves and their characterization, Differ. Geom. Dyn. Syst. 3 (2001), no. 2, 17-24.

[8] D. H. Jin, Null Bertrand curves in a Lorentz manifold, J. Korea Soc. Math. Educ. Ser. B Pure Appl. Math. 15 (2008), no. 3, 209-215.

[9] S. Özkaldı Karakuş, K. İlarslan and Y. Yaylı, A new approach for characterization of curve couples in Euclidean 3-space, Honam Mathematical J. 36(2014), no.1, 113-129.

[10] W. Kuhnel, Differential geometry: curves-surfaces-manifolds, Braunschweig, Wiesbaden, (1999).

[11] H. Liu and F. Wang, Mannheim partner curves in 3-space, Journal of Geometry, 88 (2008), 120-126.

[12] H. Matsuda and S. Yorozu, Notes on Bertrand curves, Yokohama Math. J. 50 (2003), no. 1-2, 41-58.

[13] L. R. Pears, Bertrand curves in Riemannian space, J. London Math. Soc. Volumes 1-10, Number 2, 180-183 , July 1935.

[14] A. Uçum, K. İlarslan and S. Özkaldı Karakuş, On curve couples with joint lightlike Frenet planes in Minkowski 3-space, Acta Univ. Apulensis Math. Inform. 41 (2015), 111-129.

[15] A. Uçum, K. İlarslan and M. Sakaki, On $(1,3)$-Cartan Null Bertrand curves in Semi-Euclidean 4-Space with index 2, J. Geom., 107 (2016), 579-591.

[16] A. Uçum, O. Keçilioğlu and K. İlarslan, Generalized Pseudo Null Bertrand curves in Semi-Euclidean 4-Space with index 2, Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser, 65 (2016), 459-472.

[17] A. Uçum, O. Keçilioğlu and K. İlarslan, Generalized Bertrand curves with spacelike $(1,3)$-normal plane in Minkowski space-time, Turk J Math., 40 (2016), 487-505.

[18] A. Uçum and K. İlarslan, On timelike Bertrand Curves in Minkowski $3-$space, Honam Mathematical J. 38(3) (2016), 467-477.

[19] B. Saint Venant, Mémoire sur les lignes courbes non planes, Journal de l'Ecole Polytechnique, vol. 18, pp.1-76, 1845.

[20] K. İlarslan, N. Kılıç Aslan, On Spacelike Bertrand curves in Minkowski $3-$Space, 1991 Mathematics Subject Classification. Primary 53C50,53C40.

[21] Y.Irmak yükek lisans tezi Dört boyutlu Öklid uzayında Bertrand eğrileri ve Geometrik uygulamaları Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Fakültesi Matematik Anabilim Dalı, (2018).

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Fatma GÖKCEK

Doğum Tarihi : 1995

Yabancı Dil : İNGİLİZCE

Eğitim Durumu : (Kurum ve Yıl)

Lisans : Samsun Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, Eylül 2017

Lise : Sincan Lisesi, Haziran 2012

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl/Yıllar :

Yayınları : F.Gokcek, H.Altın Erdem On Cartan null Bertrand curves in Minkowski 3-space, Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics.Vol. 36, No 5 (2021).