T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

SPLİT KUATERNİYON MATRİSLERİN ÖZDEĞERLERİ VE ÖZVEKTÖRLERİ

TUĞBA ENSERİCİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Doç. Dr. Osman KEÇİLİOĞLU

KIRIKKALE-2022

Tuğba ENSERİCİ tarafından hazırlanan "SPLİT KUATERNİYON MATRİSLERİNİN ÖZDEĞERLERİ VE ÖZVEKTÖRLERİ" adlı tez çalışması, aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Osman KEÇİLİOĞLU İmza…………………….

Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Başkan : Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN İmza…………………….

Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye : Prof. Dr. Murat OLGUN İmza…………………….

Matematik Anabilim Dalı , Ankara Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Tez Savunma Tarihi: 29/09/2022

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. Recep ÇALIN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYANI

Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Tuğba ENSERİCİ

29/09/2022

ÖZET

SPLİT KUATERNİYON MATRİSLERİN ÖZDEĞERLERİ VE ÖZVEKTÖRLERİ

Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman. Doç. Dr. Osman KEÇİLİOĞLU
Eylül 2022, 54 sayfa

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır. İkinci bölümde split kuaterniyonlar tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde öncelikle split kuaterniyon matrisler tanıtılmış ve cebirsel özellikleri ele alınmıştır. Daha sonra split kuaterniyon matrislerin özdeğer ve öz vektör kavramları tanıtılmıştır. Ayrıca split kuaterniyon matrisin kompleks temsilcisi yardımıyla özdeğer ve öz vektörlerini elde etmek için yöntemler incelenmiştir. Son olarak bu kavramlarla ilgili örnekler verilmiştir. Dördüncü bölüm ise tartışma ve sonuç için ayrılmıştır.

Anahtar kelimeler: Split kuaterniyon, Split kuaterniyon matris, Kuaterniyon mekanik, Kompleks temsilci, Özdeğerler, Öz vektörler

ABSTRACT

EIGENVALUES AND EIGENVECTORS OF SPLIT QUATERNION MATRICES

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematic, Master’s Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Osman KEÇİLİOĞLU

September 2022, 54 pages

This thesis consist of four chapter. The first chapter is reserved for introduction. In the second chapter Split quaternions are introduced. In the third chapter, firstly, split quternion matrices are introduced and their algebraic properties are discussed. Then, eigenvalue and eigenvector notions of split quaternion matrices are introduced. In addition. methods to obtain eigenvalues and eigenvectors with the aid of the complex representation of the split quaternion matrix are examined. Finally, examples of these notions are given.

Key Words: Split quaternions, Split quaternion matrices, Split quaternionic mechanics, Complex representations, Eigenvallues, Eigenvectors

TEŞEKKÜRLER

Tez çalışmamın yürütülmesinde büyük emek veren, her zaman sabırla yol gösteren, bilgileriyle çalışmamın tüm aşamalarında yardımlarını esirgemeyen değerli hocam ve tez danışmanım Doç. Dr. Osman KEÇİLİOĞLU’ na ve her konuda destek olan değerli ailem ve eşime teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

IR	: Ree sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}^{mxn}$	: mxn tipinde kompleks matrisler kümesi
$\mathcal{H}$	: Kuaterniyonlar kümesi
$\mathcal{H}_s$	: Split kuaterniyonlar kümesi
$\mathcal{H}_s{}'$	: Split kuaterniyonların kompleks temsilci kümesi
$\mathcal{H}_s{}^{mxn}$	: mxn tipinde split kuaterniyon matris
$\mathcal{H}_s{}^{n}$	:nxn tipinde split kuaterniyon matris

1. GİRİŞ

Kuaterniyonlar, 1843 yılında, İrlandalı matematikçi Sir Willam Rowan Hamilton tarafından kompleks sayıların bir tür genelleştirmesi olan yeni bir sayı sistemi olarak tanıtılmıştır. Kuaterniyonlar kümesi

$$\mathcal{H} = \{\, q = q_0 + \ q_1 i + q_2 j + \ q_3 k \, : q_0, q_1, q_2, q_3 \in IR\}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Kuaterniyonlar karmaşık sayıları bir gerçek, üç sanal boyuta genişleten sayı sistemidir. Burada i, j, k kuaterniyonun baz ögeleri

$i^2 = \ j^2 = \ k^2 = \ -1$ ve $ij = \ -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j, ijk = -1$

eşitlikleri ile tanımlıdır. Bu eşitliklerden de anlaşılacağı üzere Kuaterniyonlarda çarpma işleminde değişme özelliği tanımlı değildir. Bu sebepten Kuaterniyonlar cisim değil bölüm halkasıdır.

Hamilton'un çalışmalarından sonra James Cockle 1849 yılında split kuaterniyon kümesini

$$\mathcal{H}_s = \{q = q_0 + \ q_1 i + qj + \ q_3 k \, : \ q_0, q_1, q_2, q_3 \in \ IR \ \}$$

şeklinde tanımlamış olup $i^2 = -1$, $j^2 = \ k^2 = \ 1$ ve $ijk \ = \ 1$ dir.

Bu küme Kuaterniyon kümesi gibi 4 boyutludur ve $\mathcal{H}_s{}'de$ değişmeli değildir. Kuaterniyonlar ve split kuaterniyonlar değişmeli olmayan Clifford cebiridir. Değişmeli olmadığı için, sağ ve sol özdeğerleri eşit olmayabilir. Split kuaterniyonlar, kuaterniyonlara göre daha karmaşık bir yapıya sahiptir. Split kuaterniyonlar, kuaterniyonlardan farklı olarak sıfır bölen, nilpotent eleman ve sıfırdan farklı idempotent eleman içerir. [1], [3], [4], [5] Kuaterniyonlar ve split kuaterniyonlar birçok alanda çok önemlidir Bilgisayar grafiklerinde, kontrol teorisinde, video oyunlarının programlamasında, uzay araçlarında, kuantum fiziğinde sinyal işlemede ve daha bir çok alanda kullanılmaktadır.

1.1. Kaynak özeti

Bu tezin ikinci bölümünde split kuaterniyonlarla ilgili temel kavramlar [1], [2], [3], [4], [5], [18] nolu kaynaklar kullanılarak hazırlanmıştır. Tezin üçüncü bölümünde spit kuaterniyon matrislerin tanımı ve cebirsel özellikleri ile split kuaterniyon matrislerin kompleks temsilcisinin özellikleri ve yapılabilen işlemler için [1], [3], [4], [5], [18] nolu kaynaklar kullanılmıştır. Split kuaterniyonların özdeğer ve öz vektörlerini elde etmek için kullanılan yöntemler de [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [18] nolu kaynaklardan, split kuaterniyon matrislerin özdeğer ve bu özdeğere karşılık gelen öz vektörler için cebirsel teknikler de [15], [16], [17], [18] nolu kaynaklardan faydalanılarak hazırlanmıştır.

1.2.Çalışmanın amacı

Bir split kuaterniyon matrisinin, kompleks temsilcisi yardımıyla sağ özdeğerlerini ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerini bulmak ve split kuaterniyon matrisinin sağ özdeğerlerini ve bu özdeğerlere karşılık gelen öz vektörler için cebirsel teknikler incelenerek yapılacak yeni çalışmalara yön vermek amaçlanmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Split Kuaterniyonlar

Bir split kuaterniyon sıralı dört reel sayının $1, i, j, k$ gibi dört birime eşlik etmesiyle tanımlanır. Burada birinci birim 1 reel sayıdır, diğer üç birim ise

$$i^2 = -1\,, j^2 = k^2 = 1$$

$$ij = -ji = k\,, jk = -kj = -\mathrm{i}, \mathrm{ki} = -ik = j \qquad (2.1.1)$$

özelliklerine sahiptir. Böylece bir split kuaterniyon

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \qquad (2.1.2)$$

biçiminde ifade edilir, burada $q_0\,, q_1\,, q_2\,, q_3$ reel sayılarına q split kuaterniyonlarının bileşenleri denir.

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$$

split kuaterniyonunun reel kısmı ve imajiner kısmı sırasıyla Req ve Imq ile gösterilir ve

$$Req = q_0$$

$$Imq = q_1 i + q_2 j + q_3 k \qquad (2.1.3)$$

biçiminde tanımlanır. Split kuaterniyonlar kümesi $\mathcal{H}_s$ ile gösterilir. [1]

Tanım 2.1.1 $\mathcal{H}_s$ cümlesi üzerinde toplama işlemi

$$\oplus : \mathcal{H}_s \, x \, \mathcal{H}_s \to \mathcal{H}_s$$

$$(p, q) \to p \oplus q = Re(p) + Re(q) + Im(p) + Im(q) \qquad (2.1.4)$$

biçiminde tanımlanır. [2]

Bu tanıma göre $(\mathcal{H}_s\,, \oplus)$ matematik yapısı bir Abel grubudur.

Tanım 2.1.2 $\mathcal{H}_s$ cümlesi üzerinde dış işlem

$$\circ : IR \, x \, \mathcal{H}_s \rightarrow \mathcal{H}_s$$

$$(\lambda, p) \rightarrow \lambda \circ p = \lambda Re(p) + \lambda Im(p) \qquad (2.1.5)$$

şeklinde tanımlanır. Bu şekilde tanımlanan dış işlem için

i. $\lambda \circ (p \oplus q) = \lambda \circ p \oplus \lambda \circ q$, $\forall \lambda \in IR$ ve $\forall p, q \in \mathcal{H}_s$

ii. $(\lambda_1 + \lambda_2) \circ q = \lambda_1 \circ q \oplus \lambda_2 \circ q$, $\forall \lambda \in IR$ ve $\forall q \, \mathcal{H}_s$

iii. $(\lambda_1 . \lambda_2) \circ q = \lambda_1 \circ (\lambda_2 \circ q)$

iv. $I \circ q = q$ (2.1.6)

özellikleri sağlanır. Böylece $(\mathcal{H}_s, \oplus, IR, +, \cdot, \circ)$ matematik yapısı bir reel vektör uzayıdır. Bundan sonra $\oplus$ ve $\circ$ yerine $+$, $\cdot$ kullanılacaktır. [2]

Tanım 2.1.3 $\mathcal{H}_s$ cümlesi üzerinde

$$\mathrm{x} : \mathcal{H}_s \, \mathrm{x} \, \mathcal{H}_s \rightarrow \mathcal{H}_s$$

$$(p, q) \rightarrow p \, \mathrm{x} \, q$$

çarpma işlemi aşağıdaki tablo ile tanımlanır.

x	*1*	*i*	*j*	*k*
1	*1*	*i*	*j*	*k*
i	*i*	*-1*	*k*	*-j*
j	*j*	*-k*	*1*	*-i*
k	*k*	*j*	*i*	*1*

2.1

Tablo 2.1.1 den $p, q \in \mathcal{H}_s$ için

$$p \text{ x } q = (p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k)\, x\, (q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k)$$

$$= p_0 q_0 - p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3$$

$$+(p_1 q_2 + p_2 q_1 + p_3 q_2 - p_2 q_3)\mathrm{i}$$

$$+(p_0 q_2 + p_2 q_0 + p_3 q_1 - p_1 q_3) j$$

$$+(p_0 q_3 + p_3 q_0 + p_1 q_2 - p_2 q_1) k \qquad (2.1.7)$$

olarak bulunur. Böylece $\mathcal{H}_s$ işlemi için aşağıdaki özellikler verilebilir.

i) $\mathcal{H}_s$ cümlesi x işlemine göre kapalıdır.

ii) " x " işlemi birleşmelidir.

iii) " x " işlemi toplama işlemi üzerine dağılımlıdır.

Fakat " x " işlemi değişmeli değildir. Bu özellikleriyle birlikte $(\mathcal{H}_s, \oplus, IR, +, \cdot, \circ)$ matematik yapısı bir cebirdir. [2]

Tanım 2.1.4 Bir $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in \mathcal{H}_s$ split kuaterniyonun eşleniği q^* veya $\bar{q}$ ile gösterilir ve

$$q^* = \bar{q} = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k \qquad (2.1.8)$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.1.5 Bir $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in \mathcal{H}_s$ split kuaterniyonun normu $\|q\|$ ile gösterilir ve

$$\|q\| = \sqrt{|q q^*|} = \sqrt{|{q_0}^2 + {q_1}^2 - {q_2}^2 - {q_3}^2|} \qquad (2.1.9)$$

biçiminde tanımlanır. Eğer $\|q\| = 1$ ise q bir birim split kuaterniyondur.

Ayrıca $q \in H_s$ ve $\|q\| \neq 0$ olmak üzere

$$\frac{q}{\|q\|} \tag{2.1.10}$$

bir birim split kuaterniyondur.

Tanım 2.1.6 $q \in H_s$ ve $\|q\| \neq 0$ olmak üzere q split kuaterniyonunun tersi q^{-1} ile gösterilir ve

$$q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|^2} \tag{2.1.11}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.1.1 $p, q\ ve\ r$ birer split kuaterniyon olmak üzere

i. $q^*q = qq^*$

ii. $jc = \bar{c}j\ ve\ jcj^* = \bar{c}$ burada c herhangi bir kompleks sayıdır.

iii. $q^2 = |Req|^2 - \|Imq\|^2 + 2ReqImq$

iv. $(pq)^* = q^*p^*$

v. $(pq)r = p(qr)$

vi. Genelde $pq \neq qp$ dir.

vii. $q^* = q$ olması için gerek ve yeter şart q nun bir reel sayı olmasıdır.

viii. Her q split kuaterniyon ve a_1 , a_2 kompleks sayılar olmak üzere

$$q = a_1 + a_2 j \tag{2.1.12}$$

şeklinde tek türlü yazılabilir.[1]

İspat: $i), (ii), (iv), (v), (vi), ve\ (vii)$ maddeler kolaylıkla ispatlanır. Şimdi biz $(iii) ve (viii)$ maddelerini ispatlayalım.

(iii) q split kuaterniyon olmak üzere, $q = Re(q) + Im(q)$ yazılabilir.

Buradan

$$q^2 = ((Re(q) + Im(q))^2$$

$$= (Re(q) + Im(q))(Re(q) + Im(q))$$

$$= ((Re(q))^2 + Im(q)Re(q) + Re(q)Im(q) + Im(q)\big(-Im(q)\big)$$

ifadesi düzenlenirse

$$= |Req|^2 + 2ReqImq - Im(q)\big(Im(q)\big)^*$$

$$q^2 = |Req|^2 - \|Imq\|^2 + 2ReqImq \qquad (2.1.13)$$

böylece ispat tamamlanmış olur.

$(viii)$ q split kuaterniyon olmak üzere

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$$

$$= q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 (ij)$$

$$= q_0 + q_1 i + q_2 j + (q_3 i)j$$

$$= q_0 + q_1 i + (q_2 + q_3 i)j$$

buradan $a_1 = q_0 + q_1 i$ ve $a_2 = q_2 + q_3 i$ şeklinde yazılabilir. $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$q = a_1 + a_2\, j$ şeklinde tek türlü yazılabilir. Bu da ispatı tamamlamış olur.

$2x2$ tipindeki kompleks matrislerin

$$\mathcal{H}_s{}' = \left\{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ \overline{a_2} & \overline{a_1} \end{bmatrix}; a_1, a_2 \in \mathbb{C}\right\}$$

alt kümesi matrislerin toplam ve çarpım işlemleri ile birlikte bir halka yapısına sahiptir. Bunun bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.1.2 Her bir split kuaterniyon $2x2$ tipinde kompleks matris ile temsil edilir.

İspat: Her $q \in \mathcal{H}_s$ için $q = a_1 + a_2 j$ olacak şekilde $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ vardır.

Buna göre

$$f: \mathcal{H}_s \to \mathcal{H}_s'$$

$$q = a_1 + a_2 j \to f(q) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ \overline{a_2} & \overline{a_1} \end{bmatrix}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Her $p, q \in \mathcal{H}_s$ için

$$f(p+q) = f(p) + f(q)$$

$$f(p.q) = f(p).f(q)$$

dir. Ayrıca f, birebir ve örten bir fonksiyondur. Böylece f, bir halka izomorfizmdir. Bunun bir sonucu olarak her bir split kuaterniyon ile $\mathcal{H}_s'$ kümesindeki bir kompleks matrisin gösterimleri dışında bir farkı yoktur. Bu ise her bir split kuaterniyonun $\mathcal{H}_s$ kümesindeki bir kompleks matris ile ifade edilebileceğini gösterir.

Tanım 2.1.7 Herhangi bir split kuaterniyon q için, $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in \mathcal{H}_s$ ve $a = (q_1 + q_2 i)$, $b = (q_2 + q_3 i)$ olmak üzere q nun kompleks temsilcisi q^c ile gösterilir ve

$$q^c = \begin{bmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Yukarıdaki tanımın bir sonucu olarak p ve q iki split kuaterniyon olmak üzere

$$(p+q)^c = p^c + q^c$$

$$(pq)^c = p^c q^c$$

dir. Bir q split kuaterniyonunun q^c kompleks temsilcisinin karakteristik polinomu

$$f_{q^c}(x) = x^2 - (a + \bar{a})x + a\bar{a} - b\bar{b}$$

olup karakteristik polinomun kökleri

$$\lambda_1 = q_0 + \sqrt{q_2^2 + q_3^2 - q_1^2}$$

$$\lambda_2 = q_0 - \sqrt{q_2^2 + q_3^2 - q_1^2}$$

dir. Yani q^c kompleks temsilcisinin özdeğerleri λ_1 ve λ_2 dir. [1]

Tanım 2.1.8 $p, q \in \mathcal{H}_s$ olmak üzere $x^{-1}\, p\, x = q$ olacak biçimde x regüler split kuaterniyon mevcut ise p split kuaterniyonu q split kuaterniyonuna benzerdir denir ve $p \sim q$ biçiminde gösterilir.

Uyarı: p ve q split kuaterniyonlarının benzer olması için gerek ve yeter şart

$$u^{-1}\, p\, u = q$$

eşitliğini sağlayan bir u birim split kuaterniyonuna sahip olmasıdır.

Yukarıda tanımlanan benzerlik bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. $\sim$ bağıntısına göre bir $x \in \mathcal{H}_s$ split kuaterniyonunun denklik sınıfı $[x]$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.3 $p = p_0 + p_1\, i\;\; p_2\, j + p_3\, k$ ve $q = q_0 + q_1\, i\;\; q_2\, j + q_3\, k$ iki split kuaterniyon olmak üzere p ve q split kuaterniyonların benzer olması için gerek ve yeter şart

$$p_0 = q_0 \text{ ve } p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = q_1^2 - q_2^2 - q_3^2$$

olmasıdır. Buna göre

$$p \sim q \Leftrightarrow Re\,(p\,) = Re\,(q)\;\; ve\;\; |Im(p)| = |Im(q)|$$

dir. [11]

Teorem 2.1.4 $q = q_0 + q_1\, i + q_2\, j + q_3\, k$ bir split kuaterniyon olsun. Bu durumda

1. $q_1^2 > q_2^2 + q_3^2$ ise $q \in \left[q_0 + \sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}\, i\right]$ dir.

2. $q_1^2 < q_2^2 + q_3^2$ ise $q \in \left[q_0 + \sqrt{q_2^2 + q_3^2 - q_1^2}\, j\right]$ dir.

3. $q_1^2 = q_2^2 + q_3^2$ ve $q_1 = 0$ ise $q \in [q_0]$ dir.

4. $q_1^2 = q_2^2 + q_3^2$ ve $q_1 \neq 0$ ise $q \in [q_0 + i + j]$ dir. [18]

İspat:

Durum 1: $q_1^2 > q_2^2 + q_3^2$ ise q^c nin kompleks özdeğerleri Tanım 2.1.7 den

$$\lambda = q_0 + \sqrt{q_2^2 + q_3^2 - q_1^2}\, i$$

$$\bar{\lambda} = q_0 - \sqrt{q_2^2 + q_3^2 - q_1^2}\, i$$

dir.

T_1 regüler kompleks matris alalım. $T_1 = x_1^c$ olsun. Bu eşitliği sağlayan$x_1{}^c$ split kuaterniyon matrisinin kompleks temsilcisidir.

$$qx_1 = x_1\lambda$$

$$q^c x_1{}^c = x_1{}^c \lambda^c$$

$$q^c\, T_1 = T_1 \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{bmatrix} \tag{2.1.14}$$

buradan

$$T_1 = \begin{bmatrix} \lambda - \bar{a} + b & \lambda - \bar{a} + b \\ \lambda - a + \bar{b} & \lambda - a + \bar{b} \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$x_1 = (\lambda - \bar{a} + b) + \left(\bar{\lambda} - \bar{a} + b\right)j$$

$$x_1 = q_2 + (q_3 + \sqrt{q_2^2 + q_3^2 - q_1^2})i + q_2 j \left(q_1 + q_3 + \sqrt{q_2^2 + q_3^2 - q_1^2}\right)k$$

$q_1^2 > q_2^2 + q_3^2$ ise q split kuaterniyonu $q_0 + \sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}\, i$ kompleks sayısına benzerdir ve

$$x = q_2 + \left(q_3 + \sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}\right) i + q_2 j + \left(q_1 + q_3 \sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}\right) k$$

olmak üzere

$$x^{-1} q x = q_0 + \sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}\, i \qquad (2.1.15)$$

dir.

Durum 2: $q_1^2 < q_2^2 + q_3^2$ ise iki farklı reel özdeğer vardır.

$$\lambda_1 = q_0 + \sqrt{q_2^2 + q_3^2 - q_1^2}$$

$$\lambda_2 = q_0 - \sqrt{q_2^2 + q_3^2 - q_1^2}$$

dir.

T_2 bir regüler kompleks matris alalım. Öyle ki x_2^c, x_2 split kuaterniyon matrisin kompleks temsilcisi olmak üzere $T_2 = x_2^c$ olsun. Bu durumda

$$q^c T_2 = T_2 \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} & \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \\ \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} & \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \end{bmatrix} \qquad (2.1.16)$$

$$q x_2 = x_2 \left(\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \right) + \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \right) j \right)$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 + b & \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - a \\ \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - a & \lambda_1 - \lambda_2 + b \end{bmatrix}$$

olur. Bu durumda

$$x_2 = \lambda_1 - \lambda_2 + b + \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - a\right) j$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$x_2 = 2\sqrt{q_2^2 + q_3^2 - q_1^2} + (q_0 + q_2)j + (q_3 - q_1)k$$

dir.

Durum 3: $q_1^2 = q_2^2 + q_3^2$ ise bu durumda bir tek $\lambda = q_0$ özdeğeri vardır. Bu durumda q_1 in durumuna göre iki farklı durum vardır. $q_1 = 0 \;\; veya \;\; q_1 \neq 0$ dir.

$q_1 = 0$ ise $q_2 = q_3 = 0$ dir. Buradan $q = q_0$ olduğu açıktır. $q_1 \neq 0$ ise T_3 bir regüler kompleks matrisi ele alındığında x_3^c, x_3 split kuaterniyon matrisinin kompleks temsilcisi olmak üzere $qx_3 = x_3\lambda$ denkleminde $x_3 = 1$ olsun. Bu durumda regüler karmaşık matris T_3 vardır. Öyle ki $T_3 = x_3^c$ ve

$$q^c T_3 = T_3 \begin{bmatrix} \lambda + i & 1 \\ 1 & \lambda - i \end{bmatrix} \Leftrightarrow qx_3 = x_3\,(\lambda + i + j) \qquad (2.1.17)$$

dir.

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1 + b & \bar{\lambda} - \bar{a} - i \\ \lambda - a + i & 1 + \bar{b} \end{bmatrix}$$

ve

$$x_3 = 1 + b + (\bar{\lambda} - \bar{a} - i)j = 1 + q_2 j + (q_1 + q_3 - 1)k$$

dir.

Yukarıdaki ifadelerden aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$q = q_0 + q_1\, i + q_2\, j + q_3\, k$$

bir split kuaterniyon olmak üzere

I. $q_1^2 > q_2^2 + q_3^2$ ise q split kuaterniyonu $q_0 + \sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}\,i$ kompleks sayısına benzerdir ve

$$x = q_2 + \left(q_3 + \sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}\right)i + q_2 j + \left(q_1 + q_3\sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}\right)k$$

olmak üzere

$$x^{-1}qx = q_0 + \sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}\, i \qquad (2.1.18)$$

dir.

II. $q_1^2 < q_2^2 + q_3^2$ ise q split kuaterniyonu $q_0 + \sqrt{q_2^2 + q_3^2 - q_1^2}\, j$ kompleks sayısına benzerdir ve

$$x = 2\sqrt{q_2^2 + q_3^2 - q_1^2} + (q_0 + q_2)j + (q_3 - q_1)k$$

$$x^{-1}qx = q_0 + \sqrt{q_2^2 + q_3^2 - q_1^2}\, j \qquad (2.1.19)$$

dir.

III. $q_1^2 = q_2^2 + q_3^2$ ise

q split kuaterniyonu için iki durum ortaya çıkar.

$q_1 = 0$ veya $q_1 \neq 0$ dır.

1. $q_1 = 0$ $iken\, q = q_0$ olur.

$$x^{-1}qx = q_0 \qquad (2.1.20)$$

eşitliğinin sonucu olarak da $x = 1$ dir.

2. $q_1 \neq 0$ iken q split kuaterniyonu $q_0 + q_1 i + q_2 j$ split kuaterniyonuna benzerdir ve

$$x = 1 + q_2 j + (q_1 + q_3 - 1)k$$

$$x^{-1}qx = q_0 + i + j \qquad (2.1.21)$$

dir.

Sonuç 2.1.1 Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak split kuaterniyonlar kümesi dört farklı denklik sınıflarına ayrılır.

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$$

bir split kuaterniyon olmak üzere

1. $q_1^2 > q_2^2 + q_3^2$ ise $q \in [\, q_0 + \sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}\, i]$

2. $q_1^2 < q_2^2 + q_3^2$ ise $q \in \left[q_0 + \sqrt{q_2^2 + q_3^2 - q_1^2}\, j\right]$

3. $q_1^2 = q_2^2 + q_3^2$ ise iki durum vardır.

$q_1 = 0$ ve $q_1 \neq 0$ olabilir.

Eğer $q_1 = 0$ ise $q \in [\, q_0]$ ve $q_1 \neq 0$ ise $q \in [q_0 + i + j]$ dir.

$$q_0 , q_0 + \sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}\, i , q_0 + \sqrt{q_2^2 + q_3^2 - q_1^2}\, j , q_0 + i + j$$

Split kuaterniyonlarına sırasıyla

$$[q_0] , [\, q_0 + \sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}\, i] , [q_0 + \sqrt{q_2^2 + q_3^2 - q_1^2}\, j] , [q_0 + i + j]$$

denklik sınıflarının asli elemanları denir.

Uyarı: Bir λ split kuaterniyonu için $[\lambda]$ nın asli elemanı tek değildir.

Örneğin:

$$q_0 - \sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}\, i \in [q_0 + \sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}\, i],$$

$$q_0 - \sqrt{q_2^2 + q_3^2 - q_1^2}\, j \in [q_0 + \sqrt{q_2^2 + q_3^2 - q_1^2}\, j]$$

$$q_0 - i - j , q_0 - i + j, q_0 + i - j \in [q_0 + i + j]$$

dir.

3. SPLİT KUATERNİYON MATRİSLERİNİN ÖZDEĞERLERİ VE ÖZ VEKTÖRLERİ

3.1 SPLİT KUATERNİYON MATRİSLER

Tanım 3.1 Bileşenleri split kuaterniyonlar olan mxn tipinden bütün matrislerin kümesi $\mathcal{H}_s{}^{mxn}$ olarak gösterilsin. Eğer $m = n$ ise $\mathcal{H}_s{}^{nxn}$ kümesi $\mathcal{H}_s{}^{n}$ olarak gösterilir. Spit kuaterniyon matrisleri kümesi üzerinde bilinen adi matris toplamı ve matris çarpımı işlemleri tanımlıdır. [1]

Split kuaterniyonlar çarpma işlemine göre değişmeli olmadığından bir matrisin skaler ile çarpma işlemleri sağ ve sol skaler çarpma işlemi olarak $A = (a_{st}) \in \mathcal{H}_s{}^{mxn}$ ve $q \in \mathcal{H}_s$ olmak üzere sırasıyla $qA = (qa_{st})$ ve $Aq = (a_{st}q)$ eşitlikleri tanımlıdır. Ayrıca

$B \in \mathcal{H}_s{}^{nxo}$ $p \in \mathcal{H}_s$ olmak üzere

$$q(AB) = (qA)B$$

$$(Aq)B = A(qB)$$

$$(pq)A = p(qA)$$

dir.

Tanım 3.2 $A = (a_{st}) \in \mathcal{H}_s{}^{mxn}$ split kuaterniyon matrisinin eşleniği $\overline{A}$ ile gösterilir ve $\bar{A} = (\overline{a_{st}}) = (a^*_{st})$ eşitliği ile tanımlanır. [1]

Tanım 3.3 $A = (a_{st}) \in \mathcal{H}_s{}^{mxn}$ split kuaterniyon matrisinin transpozu A^t ile gösterilir ve $A^t = (a_{ts}) \in \mathcal{H}_s{}^{nxm}$ şeklinde tanımlanır. [1]

Tanım 3.4 $A = (a_{st}) \in \mathcal{H}_s{}^{mxn}$ split kuaterniyon matrisinin eşlenik transpozu A^* ile gösterilir ve $A^* = (\bar{A})^T \in \mathcal{H}_s{}^{nxm}$ şeklinde tanımlanır. [1]

Tanım 3.5 Bir $A \in \mathcal{H}_s{}^{n}$ matrisi için

1. Eğer $AA^* = A^*A$ ise A'ya **Normal matris,**

2. Eğer $A^* = A$ ise A'ya **Hermityen matris,**

3. $AA^* = A^*A = I_n$ ise A'ya **Üniter matris** denir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} i & j \\ 0 & k \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} i & k \\ 0 & j \end{bmatrix} \in \mathcal{H}_s{}^2$ olsun. O halde

i. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ ve $\bar{A} = \begin{bmatrix} -i & -j \\ 0 & -k \end{bmatrix}$ dir.

ii. $(\bar{A})^{-1} = \begin{bmatrix} i & -1 \\ 0 & -k \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} i & j \\ 0 & -k \end{bmatrix} = \left(\overline{A^{-1}}\right)$ dir.

iii. $(A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ -1 & k \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 1 & k \end{bmatrix} = (A^{-1})^T$ dir.

iv. $\overline{AB} = \begin{bmatrix} -1 & j+1 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & -j+1 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \bar{A}\,\bar{B}$ dir.

v. $(AB)^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -j+1 & i \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ j+1 & -i \end{bmatrix} = B^T A^T$ dir.

Bu örneklerden aşağıdaki sonuçlar çıkarılabilir.

Sonuç 3.1 $A \in \mathcal{H}_s{}^{mxn}$ ve $B \in \mathcal{H}_s{}^{nxo}$ olsun. Buradan

i. Genelde $(\bar{A})^{-1} \neq (\overline{A^{-1}})$ dir.

ii. Genelde $(A^T)^{-1} \neq (A^{-1})^T$ dir.

iii. Genelde $\overline{AB} \neq \bar{A}\bar{B}$ dir.

iv. Genelde $(AB)^T \neq B^T A^T$ dir.

Teorem 3.1 $A \in \mathcal{H}_s{}^{mxn}$ ve $B \in \mathcal{H}_s{}^{nxo}$ olsun. Bu durumda

i. $(\bar{A})^T = \left(\overline{A^T}\right)$

ii. $(AB)^* = B^* A^*$

iii. Eğer A ve B nin tersi varsa $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ dir.

iv. Eğer A nın tersi varsa $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ dir.

İspat: $(i), (iii)$ ve (iv) maddeler kolaylıkla ispatlanır. Şimdi biz (ii) maddeyi ispatlayalım. (ii) $A_1, A_2\, B_1, B_2$ kompleks matris olmak üzere A ve B split kuaterniyon matrisleri $A = A_1 + A_2 j$ ve $B = B_1 + B_2 j$ şeklinde yazılabilir. Buradan

$$(AB)^* = [(A_1B_1 + A_2\overline{B_2}) + (A_1B_2 + A_2\overline{B_1})j]^*$$

$$= [(\overline{A_1B_1} + \overline{A_2}B_2) - (A_1B_2 + A_2\overline{B_1})j]^T$$

$$= (\overline{A_1B_1} + \overline{A_2}B_2)^T - (A_1B_2 + A_2\overline{B_1})^T j$$

$$= (\overline{B_1})^T(\overline{A_1})^T + (B_2)^T(\overline{A_2})^T - (B_2)^T(A_1)^T j - (\overline{B_1})^T(A_2)^T j$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$B^* = (\overline{B_1})^T - (B_2)^T j \ ve\ A^* = (\overline{A_1})^T - (A_2)^T j$$

olduğundan

$$B^*A^* = ((\overline{B_1})^T - (B_2)^T j)((\overline{A_1})^T - (A_2)^T j)$$

$$= (\overline{B_1})^T(\overline{A_1})^T + (B_2)^T(\overline{A_2})^T - (B_2)^T(A_1)^T j(\overline{B_1})^T(A_2)^T j$$

elde edilir. Böylece

$$(AB)^* = B^*A^* \qquad (3.1.1)$$

dir.

Teorem 3.2 $A, B \in H_S'$ olmak üzere, eğer $AB = I\ ise\ BA = I$ dir.

İspat: Bu önermenin kompleks matrisler için doğru olduğunu biliyoruz.
$A, B \in \mathcal{H}_s{}^n$ için

$$A = A_1 + A_2\, j \; ve \; B = B_1 + B_2\, j$$

olacak şekilde $A_1, A_2\; B_1 \; ve \; B_2 \;\; nxn$ tipinde kompleks matrisleri vardır. $AB = I$ olsun. Buradan

$$AB = (A_1B_1 + A_2\,\bar{B}_2) + (A_1B_2 + A_2\,\bar{B}_1)j = I$$

olup bu eşitlik

$$(A_1, A_2)\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ \bar{B}_2 & \bar{B}_1 \end{bmatrix} = (I, 0)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan da

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \bar{A}_2 & \bar{A}_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ \bar{B}_2 & \bar{B}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilir.

$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \overline{A_2} & \overline{A_1} \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ \overline{B_2} & \overline{B_1} \end{bmatrix}$ $2n \; x \; 2n$ tipinde kompleks matrisler olduğundan

$$\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ \bar{B}_2 & \bar{B}_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \bar{A}_2 & \bar{A}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır.

$$B_1A_1 + B_2\,\bar{A}_2 = I, B_1A_2 + B_2\,\bar{A}_1 = 0$$

olup, Teorem 3.2 den

$$(B_1A_1 + B_2\,\bar{A}_2) + (B_1A_2 + B_2\,\bar{A}_1)j = I$$

bulunur. Buradan

$$B_1A_1 + B_2\,\bar{A}_2 + B_1A_2 j + B_2\,\bar{A}_1\, j = I$$

ifadesi düzenlenirse

$$B_1A_1 + B_2\, jA_2 j + B_1A_2 j + B_2\, jA_1 j = I$$

eşitliği elde edilir. Böylece

$$(B_1 + B_2 j)(A_1 + A_2 j) = I$$

eşitliği bulunur. Bu ise $BA = I$ olduğunu ifade eder.

3.2 SPLİT KUATERNİYON MATRİSLERİN KOMPLEKS TEMSİLCİSİ

Tanım 3.2.1 $A = A_1 + A_2 j \in \mathcal{H}_s{}^n$ ve $A_1, A_2 \in \mathbb{C}^{nxn}$ olsun.

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \bar{A}_2 & \bar{A}_1 \end{bmatrix} \tag{3.2.1}$$

matrisine A split kuaterniyon matrisinin kompleks adjoint matrisi veya kompleks temsilcisi denir ve A^c ile gösterilir. [15]

Teorem 3.2.1 $A, B \in \mathcal{H}_s{}^n$ olmak üzere

i. $(I_n)^c = I_{2n}$

ii. $(A + B)^c = A^c + B^c$

iii. $(A.B)^c = A^c.B^c$

iv. Genellikle $(A^*)^c \neq (A^c)^*$ dir.

İspat: (i) nin ispatını görmek kolaydır. Şimdi diğerlerini ispatlayalım.

$A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathbb{C}^{nxn}$ olmak üzere, $A = A_1 + A_2 j$, $B = B_1 + B_2 j \in H_s^{nxn}$ olsun.

ii. $(A + B) = (A_1 + B_1) + (A_2 + B_2)j$

olduğundan

$$(A+B)^c = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 & A_2 + B_2 \\ \overline{A_2 + B_2} & \overline{A_1 + B_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \bar{A}_2 & \bar{A}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ \bar{B}_2 & \bar{B}_1 \end{bmatrix}$$

$$= A^c + B^c \tag{3.2.3}$$

olarak elde edilir.

iii. $(AB) = (A_1 + A_2 j)(B_1 + B_2 j)$

$$= (A_1B_1 + A_1B_2 j + A_2 j B_1 + A_2 j B_2)$$

$$= (A_1B_1 + A_1B_2 j + A_2\bar{B}_1 j + A_2\bar{B}_2)$$

$$= (A_1B_1 + A_2\bar{B}_2) + (A_1B_2 + A_2\bar{B}_1)\mathrm{j}$$

olduğundan

$$(AB)^c = \begin{bmatrix} A_1B_1 + A_2\bar{B}_2 & A_1B_2 + A_2\bar{B}_1 \\ \overline{A_1B_2 + A_2\bar{B}_1} & \overline{A_1B_1 + A_2\bar{B}_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_1B_1 + A_2\bar{B}_2 & A_1B_2 + A_2\bar{B}_1 \\ \overline{A_1B_2} + \bar{A}_2B_1 & \overline{A_1B_1} + \bar{A}_2B_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \bar{A}_2 & \bar{A}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ \bar{B}_2 & \bar{B}_1 \end{bmatrix}$$

$$= A^cB^c \tag{3.2.4}$$

dir.

iv. maddenin ispatı bir örnekle verilebilir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i+j+k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

bir split kuaterniyon matris olsun. A split kuateriyon matrisini

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i+j+k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & j+ij \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1+i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} j$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan A matrisinin kompleks adjoint matrisi

$$A^c = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olur. Buradan

$$(A^c)^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 1 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & i & 1 \end{bmatrix}$$

dir.

Ayrıca $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -i-j-k & 1 \end{bmatrix}$ ve A^* ın kompleks adjoint matrisi ise

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -i & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -j-ij & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -i & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1-i & 0 \end{bmatrix} j$$

şeklinde yazılabilir.

$$(A^*)^c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 1 & -1-i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1+i & 0 & i & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Buradan $(A^*)^c \neq (A^c)^*$ olduğunu görülür. (3.2.5)

Teorem 3.2.2 Bir $A \in H_s^{mxn}$ split kuaterniyon matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart A^c kompleks matrisinin regüler olmasıdır. Ayrıca A bir regüler matris ise

$$(A^c)^{-1} = (A^{-1})^c \text{ dir.}$$

İspat: $A \in H_s^n$ bir split kuaterniyon matris olsun. A nın tersi var ise

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafının kompleks temsilcisi alınırsa

$$(AA^{-1})^c = (A^{-1}A)^c = I_{2n}$$

şeklinde yazılır. Teorem 3.2.1 den

$$A^c(A^{-1})^c = (A^{-1})^c A^c = I_{2n}$$

elde edilir. Bu ifadeden

$$(A^{-1})^c = (A^c)^{-1} \tag{3.2.6}$$

olduğu görülür. O halde A regüler ise A^cde regülerdir. Şimdi de A^c regüler ise A nın regüler olduğunu gösterelim.

$$A = A_1 + A_2 j$$

olsun.

$$A^c = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \bar{A}_2 & \bar{A}_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2nx2n} \tag{3.2.7}$$

regüler olsun. Öyleyse

$(A^c)^{-1} = B$ olacak şekilde bir $B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2nx2n}$ vardır. Bu durumda

$$BA^c = I_{2n}$$

dir. İfadeler yerlerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \bar{A}_2 & \bar{A}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Matrislerin çarpımından

$$\begin{bmatrix} B_1A_1 + B_2\bar{A}_2 & B_1A_2 + B_2\bar{A}_1 \\ B_3A_1 + B_4\bar{A}_2 & B_3A_2 + B_4\bar{A}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$$

ve matris eşitliğinden

$$B_1A_1 + B_2\bar{A}_2 = I_n \text{ ve } B_1A_2 + B_2\bar{A}_1 = 0$$

ifadeleri elde edilir. Buradan

$$(B_1A_1 + B_2\bar{A}_2) + (B_1A_2 + B_2\bar{A}_1)j = I_n + 0j$$

$$B_1A_1 + B_1A_2j + B_2\bar{A}_2 + B_2\bar{A}_1j = I_n$$

yazılabilir.

$$B_1A_1 + B_1A_2j + B_2jA_2j + B_2jA_1 = I_n$$

ifadesi Teorem 2.1.1 den

$$(B_1 + B_2j)(A_1 + A_2j) = I_n$$

şeklinde yazılır. Buradan $(B_1 + B_2j)$ yerine $B, (A_1 + A_2j)$ yerine A yazıldığında

$$BA = I_n$$

eşitliği elde edilir. Bu da

$$B = A^{-1} \qquad (3.2.8)$$

olduğunu gösterir.

Teorem 3.2.3 I_t, txt tipinde birim matris ve $Q_t = \begin{bmatrix} 0 & I_t \\ I_t & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2tx2t}$ olmak üzere

$$Q_m A^c Q_n = \overline{A^c}$$

dir.

İspat: I_t, txt tipinde birim matris ve $Q_t = \begin{bmatrix} 0 & I_t \\ I_t & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2tx2t}$ olsun.

Buna göre

$$Q_m = \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } Q_n = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$$

dir.

$$A^c = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \bar{A}_2 & \bar{A}_1 \end{bmatrix}$$

Eşitliğinin olduğunu biliyoruz. Buradan

$$Q_m A^c Q_n$$

ifadesini

$$Q_m A^C Q_n = \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \bar{A}_2 & \bar{A}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Matrislerde çarpma işleminden

$$Q_m A^c Q_n = \begin{bmatrix} I_m \bar{A}_2 & I_m \bar{A}_1 \\ I_m A_1 & I_m A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{A}_2 & \bar{A}_1 \\ A_1 & A_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{A}_1 I_n & \bar{A}_2 I_n \\ A_2 I_n & A_1 I_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & \bar{A}_2 \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix}$$

yazılır. Bu matris $\bar{A}^c$ifadesine eşit olduğundan

$$Q_m A^c Q_n = \bar{A}^c \tag{3.2.9}$$

eşitliği sağlanmış olur ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.4 $A \in \mathcal{H}_s{}^n$ ve $\lambda \in \mathcal{H}_s$ olmak üzere $A\alpha = \alpha\lambda$ olması için gerek ve yeter şart $A^c\alpha^c = \alpha^c\lambda^c$ olmasıdır.

İspat: $A_1, A_2 \in \mathbb{C}^{nxn}$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}^{nx1}$ ve $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $A = A_1 + A_2 j$, $\alpha = \beta_1 + \bar{\beta}_2 j$ ve $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 j$ eşitliklerini ele alalım. Split kuaterniyon matrislerde kompleks temsilci tanımından

$$A^c = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \bar{A}_2 & \bar{A}_1 \end{bmatrix}, \alpha^c = \begin{bmatrix} \beta_1 & \bar{\beta}_2 \\ \beta_2 & \bar{\beta}_1 \end{bmatrix}, \lambda^c = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \bar{\lambda}_2 & \bar{\lambda}_1 \end{bmatrix}$$

dir. Öncelikle

$$A\alpha = \alpha\lambda \Rightarrow A^c\alpha^c = \alpha^c\lambda^c$$

olduğunu gösterelim. $A\alpha = \alpha\lambda$ olsun. Buna göre

$$(A_1 + A_2 \mathrm{j})(\beta_1 + \bar{\beta}_2 j) = (\beta_1 + \bar{\beta}_2 j)(\lambda_1 + \lambda_2 \mathrm{j})$$

olup (2.8) den

$$A_1\beta_1 + A_1\bar{\beta}_2 j + A_2 \mathrm{j}\beta_1 + A_2 \mathrm{j}\bar{\beta}_2 j = \beta_1\lambda_1 + \beta_1\lambda_2 j + \bar{\beta}_2 j\lambda_1 + \bar{\beta}_2 j\lambda_2 j$$

ifadesi elde edilir. Buradan

$$A_1\beta_1 + A_1\bar{\beta}_2 j + A_2\bar{\beta}_1 \mathrm{j} + A_2 \mathrm{j}\bar{\beta}_2 j = \beta_1\lambda_1 + \beta_1\lambda_2 j + \bar{\beta}_2 j\lambda_1 + \bar{\beta}_2 j\lambda_2 j$$

yazılır ve Teorem 2.1.1 gereğince

$$A_1\beta_1 + A_1\bar{\beta}_2 j + A_2\bar{\beta}_1 j + A_2\beta_2 = \beta_1\lambda_1 + \beta_1\lambda_2 j + \bar{\beta}_2\bar{\lambda}_1 j + \bar{\beta}_2\bar{\lambda}_2$$

elde edilir. Son ifade düzenlenirse

$$(A_1\beta_1 + A_2\beta_2) + (A_1\bar{\beta}_2 + A_2\bar{\beta}_1)j = \left(\beta_1\lambda_1 + \bar{\beta}_2\bar{\lambda}_2\right) + (\beta_1\lambda_2\bar{\beta}_2\bar{\lambda}_1)j$$

olarak bulunur. Tanım 2.1.7 den

$$\begin{bmatrix} A_1\beta_1 + A_2\beta_2 & A_1\bar{\beta}_2 + A_2\bar{\beta}_1 \\ \bar{A}_1\beta_2 + \bar{A}_2\beta_1 & \bar{A}_1\bar{\beta}_1 + \bar{A}_2\bar{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1\lambda_1 + \bar{\beta}_2\bar{\lambda}_1 & \beta_1\lambda_2 + \bar{\beta}_2\bar{\lambda}_1 \\ \bar{\beta}_1\bar{\lambda}_2 + \beta_2\lambda_1 & \bar{\beta}_1\bar{\lambda}_1 + \beta_2\lambda_2 \end{bmatrix}$$

ifadesi elde edilir. Matrislerde çarpma işleminden

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \bar{A}_2 & \bar{A}_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 & \bar{\beta}_2 \\ \beta_2 & \bar{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \bar{\beta}_2 \\ \beta_2 & \bar{\beta}_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \bar{\lambda}_2 & \bar{\lambda}_1 \end{bmatrix}$$

dir. Böylece

$$A^c \alpha^c = \alpha^c \lambda^c$$

olduğu görülür. Sonuç olarak

$$A\alpha = \alpha\lambda \Rightarrow A^c \alpha^c = \alpha^c \lambda^c$$

dir. Şimdi de

$$A^c \alpha^c = \alpha^c \lambda^c \Rightarrow A\alpha = \alpha\lambda$$

olduğunu gösterelim. $A^c \alpha^c = \alpha^c \lambda^c$ olsun. Buna göre

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \bar{A}_2 & \bar{A}_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 & \bar{\beta}_2 \\ \beta_2 & \bar{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \bar{\beta}_2 \\ \beta_2 & \bar{\beta}_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \bar{\lambda}_2 & \bar{\lambda}_1 \end{bmatrix}$$

olup, işlemler yapıldığında

$$\begin{bmatrix} A_1\beta_1 + A_2\beta_2 & A_1\beta_2 + A_2\bar{\beta}_1 \\ \bar{A}_2\beta_1 + \bar{A}_1\bar{\beta}_2 & \bar{A}_2\bar{\beta}_2 + \bar{A}_1\bar{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1\lambda_1 + \bar{\beta}_2\bar{\lambda}_2 & \beta_1\lambda_2 + \bar{\beta}_2\bar{\lambda}_1 \\ \bar{\beta}_1\bar{\lambda}_2 + \beta_2\lambda_1 & \bar{\beta}_1\bar{\lambda}_1 + \beta_2\lambda_2 \end{bmatrix}$$

ifadesi elde edilir. Buradan

$$(A_1\beta_1 + A_2\beta_2) + (A_1\beta_2 + A_2\bar{\beta}_1)j = \left(\beta_1\lambda_1 + \bar{\beta}_2\bar{\lambda}_2\right) + (\beta_1\lambda_2\bar{\beta}_2\bar{\lambda}_1)j$$

eşitliği bulunur. Bu son ifade düzenlendiğinde

$$A_1\beta_1 + A_1\bar{\beta}_2 j + A_2 j\beta_1 + A_2 j\bar{\beta}_2 j = \beta_1\lambda_1 + \beta_1\lambda_2 j + \bar{\beta}_2 j\lambda_1 + \bar{\beta}_2 j\lambda_2 j$$

yazılır. Bu ise

$$(A_1 + A_2 j)(\beta_1 + \bar{\beta}_2 j) = (\beta_1 + \bar{\beta}_2 j)(\lambda_1 + \lambda_2 j)$$

dir. Böylece

$$A^c \alpha^c = \alpha^c \lambda^c \Rightarrow A\alpha = \alpha\lambda$$

olduğu görülür ve ispat tamamlanmış olur.

3.3 ÖZDEĞERLER VE ÖZ VEKTÖRLER

Tanım 3.3.1 $A \in \mathcal{H}_s{}^n$ ve $\lambda \in \mathcal{H}_s$ olmak üzere $Ax = \lambda x$ $(Ax = x\lambda)$ eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı bir $x \in \mathcal{H}_s{}^{nx1}$ varsa λ, kuaterniyonuna, A nın sol (sağ) özdeğeri, x vektörüne de A nın sol(sağ) öz vektörü denir. Ayrıca

$$\sigma_l(A) = \{\lambda \in Q \mid Ax = \lambda x,\ x \neq 0\} \text{ ve } \sigma_r(A) = \{\lambda \in Q \mid Ax = x\lambda, x \neq 0\}$$

kümelerine de sırasıyla A nın sol ve sağ spektrumu denir.

Örnek:

Split kuaterniyon matris $A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$ nın sol özdeğeri 1 ve -1, sağ özdeğeri $\{\pm 1, \pm j, \pm k\}$ dir.

Örnek:

Split kuaterniyon matris $A = \begin{bmatrix} 0 & j \\ -j & 0 \end{bmatrix}$ nın sol özdeğeri $\{\pm k\}$ dir. Sağ özdeğeri $\{\pm i\}$ dir.

$A \in H_s{}^n$ matrisi verilsin. $A_0, A_1, A_2, A_3 \in R^{mxn}$ olmak üzere A matrisi

$$A = A_0 + A_1 i + A_2 j + A_3 k$$

biçiminde yazılır.

Tanım 3.3.2 $A \in \mathcal{H}_s{}^{mxn}$ ve $A_t \in R^{mxn}$ olsun.

$$A = A_0 + A_1 i + A_2 j + A_3 k$$

split kuaterniyon matrisinin eşleniği $\bar{A}$ ile gösterilir ve

$$\bar{A} = A_0 - A_1 i - A_2 j - A_3 k$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca A split kuaterniyon matrisinin $s \neq t$ ve $s, t = 1,2,3$ olmak üzere $A^{(st)}$ eşlenikleri

$$A^{(12)} = A^{(21)} = A_0 - A_1 i - A_2 j + A_3 k$$

$$A^{(13)} = A^{(31)} = A_0 - A_1 i + A_2 j - A_3 k$$

$$A^{(23)} = A^{(32)} = A_0 + A_1 i - A_2 j - A_3 k$$

$$A^{(123)} = A^{(321)} = A_0 - A_1 i - A_2 j - A_3 k$$

biçiminde tanımlanır.

Bu tanımın bir sonucu olarak

$$A^{(12)} = A^{(21)} = kAk$$

$$A^{(13)} = A^{(31)} = jAj$$

$$A^{(23)} = A^{(32)} = -iAi$$

$$A^{(123)} = A^{(321)} = \bar{A}$$

dir.

Teorem 3.3.1 $A, B \in \mathcal{H}_s{}^{mxn}, C \in \mathcal{H}_s{}^{nxp}$ ve $s \neq t$ iken $s, t = 1,2,3$ olsun. Bu durumda

1. $(A + B)^{(st)} = A^{(st)} + B^{(st)}$
2. $(AC)^{(st)} = A^{(st)} C^{(st)}$
3. $(A + B)^{(123)} = A^{(123)} + B^{(123)}$
4. $(AC)^{(123)} \neq A^{(123)} C^{(123)}$

dir.

Teorem 3.3.2 $A \in \mathcal{H}_s{}^n$ olsun. Buna göre

1. λ, A^c kompleks temsilcisinin bir kompleks özdeğeri ise $\bar{\lambda}$ de A^c kompleks temsilcisinin bir kompleks özdeğeridir. A^c nin kompleks özdeğerleri eşlenik çiftlerden oluşur. A^c nin reel özdeğerleri çift sayıdadır.

2. A split kuaterniyon matrisi en az bir kompleks özdeğere sahiptir. Eğer λ, A^c nin bir kompleks özdeğeri ve

$$\alpha = \beta_1 + \bar{\beta}_2 j,\ \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2nx1} \text{ ve } \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}^{nx1}$$

olmak üzere

$$A^c \beta = \beta\lambda$$

ise λ, A nın bir sağ özdeğeri ve α, λ sağ özdeğerine karşılık gelen öz vektördür.

İspat: $A \in \mathcal{H}_s{}^n$ ve A nın split kuaterniyon matris temsilcisi A^c olmak üzere sıfırdan farklı $\lambda \in \mathbb{C}$, A split kuaterniyon matrisinin özdeğeri ve α, λ ya karşılık gelen özvektör olsun.

β sıfırdan farklı vektör olmak üzere, $\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2nx1}$ $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}^{nx1}$ olsun.

$$A^c\beta = \beta\lambda \Rightarrow \overline{A^c\beta} = \overline{\beta\lambda} \Rightarrow \bar{A}^c\bar{\beta} = \bar{\beta}\bar{\lambda}$$

$$\Rightarrow (Q_n A^c Q_n)\,\bar{\beta} = \bar{\beta}\bar{\lambda}$$

$$\Rightarrow Q_n A^c\,(Q_n\,\bar{\beta}) = \bar{\beta}\bar{\lambda}$$

$$\Rightarrow Q_n{}^{-1} Q_n A^c (Q_n\bar{\beta}) = Q_n{}^{-1}\bar{\beta}\bar{\lambda}$$

$$\Rightarrow A^c(Q_n\bar{\beta}) = (Q_n{}^{-1}\bar{\beta})\bar{\lambda}$$

$Q_n{}^{-1} = Q_n$ olduğundan

$$A^c\,(Q_n\,\bar{\beta}) = (Q_n\,\bar{\beta})\bar{\lambda}$$

dir.

Buradan λ, A^c nin kompleks özdeğeri iken $\bar{\lambda}$ ninde A^c nin özdeğeri olduğunu gösterir.

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 j, \alpha = \beta_1 + \bar{\beta}_2 j \text{ ve } \alpha^c = (\beta, Q_n \beta)$$

olduğundan

$$A^c \beta = \beta\lambda \Leftrightarrow A^c(\beta, Q_n \bar{\beta}) = (\beta, Q_n \bar{\beta})\lambda^c \Leftrightarrow A\alpha = \alpha\lambda \tag{3.3.1}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlamış olur.

Teorem 3.3.3 $A \in \mathcal{H}_s{}^n$ ve $\lambda \in \mathcal{H}_s$ olsun. Bu durumda

1. λ split kuaterniyonunun, A nın bir sağ özdeğeri olması için gerek ve yeter şart $\lambda^{(st)}$ninde, A nın bir sağ özdeğeri olmasıdır. Ayrıca A nın reel olmayan split kuaterniyon özdeğerleri $(st) -$ eşlenik çiftleridir.

2. Bir α split kuaterniyon vektörünün A nın λ sağ özdeğerine karşılık gelen özvektörü olması için gerek ve yeter şart A nın $\lambda^{(12)}, (\lambda^{(13)}, -\lambda^{(23)})$ sağ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörlerinin $k\alpha(j\alpha, i\alpha)$ olmasıdır.

İspat: $A \in \mathcal{H}_s{}^n$ ve $\lambda \in \mathcal{H}_s$ olmak üzere; λ, A nın sağ özdeğeri ve α, λ sağ özdeğerine karşılık gelen özvektör olsun. Tanım 5.7 den $A^{(12)} = kAk$ eşitliği yazılabilir. Eşitliğin her iki tarafı soldan k ile çarpılırsa

$$kA^{(12)} = kAkk$$

$k^2 = 1$ olduğundan

$$kA^{(12)} = kA \Rightarrow kA^{(12)}k = kAk$$

dir.

$$A\alpha = \alpha\lambda \Leftrightarrow A(k\alpha^{(12)}k) = (k\alpha^{(12)}k)(k\lambda^{(12)}k)$$

$$A(k\alpha^{(12)})k = (k\alpha^{(12)})kk(\lambda^{(12)}k)$$

eşitliğin her iki tarafı sağdan k ile çarpılırsa

$$A\left(k\alpha^{(12)}k\right)k = (k\alpha^{(12)})(\lambda^{(12)}k)k$$

$$A\left(k\alpha^{(12)}\right)kk = (k\alpha^{(12)})\lambda^{(12)}kk$$

$$A\left(k\alpha^{(12)}\right) = (k\alpha^{(12)})\lambda^{(12)} \tag{3.3.2}$$

eşitliği elde edilir.

$\alpha \neq 0$ olmak üzere α, A split kuaterniyon matrisinin λ, özdeğerine karşılık gelen özvektörü olduğundan $\left(k\alpha^{(12)}\right) \neq 0$ ifadesi de $\lambda^{(12)}$ özdeğerine karşılık gelen özvektör olduğunu ifade eder. Aynı şekilde

$$A\alpha \ = \ \alpha\lambda \Leftrightarrow A(j\alpha^{(13)}j) = (j\alpha^{(13)}j)(j\lambda^{(13)}j)$$

$$A\left(j\alpha^{(13)}j\right) = (j\alpha^{(13)})jj(\lambda^{(13)}j)$$

eşitliğin her iki tarafını j ile çarpılırsa

$$A\left(j\alpha^{(13)}j\right) = j(j\alpha^{(13)})(\lambda^{(13)}j)j$$

$$A\left(j\alpha^{(13)}\right)jj = (j\alpha^{(13)})\lambda^{(13)}jj$$

$j^2 = 1$ olduğundan

$$A\left(j\alpha^{(13)}\right) = (j\alpha^{(13)})\lambda^{(13)} \tag{3.3.3}$$

$\alpha \neq 0$ olmak üzere α, A split kuaterniyon matrisinin λ, özdeğerine karşılık gelen özvektörü olduğundan $(j\alpha^{(13)}) \neq 0$ olup bu ise $\lambda^{(13)}$ özdeğerine karşılık gelen özvektör olduğunu ifade eder.

$$A\alpha = \alpha\lambda \Leftrightarrow A(i\alpha^{(23)}) = (i\alpha^{(23)}i)(i\lambda^{(23)}i)$$

$$A(i\alpha^{(23)}i) = \ (i\alpha^{(23)})ii(\lambda^{(23)}i)$$

Eşitliğin her iki tarafını i ile çarpılırsa

$$A(i\alpha^{(23)}i)i = (i\alpha^{(23)})(\lambda^{(23)}i)i$$

$$A(i\alpha^{(23)})ii = (i\alpha^{(23)})\lambda^{(23)}ii$$

$i^2 = -1$ olduğundan

$$A\left(i\alpha^{(23)}\right) = (i\alpha^{(23)})(-\lambda)^{(23)} \tag{3.3.4}$$

ifadesi elde edilir.

$\alpha \neq 0$ olmak üzere α, A split kuaterniyon matrisinin λ, özdeğerine karşılık gelen özvektörü olduğundan $(i\alpha^{(23)}) \neq 0$ bu ise $\lambda^{(23)}$ özdeğerine karşılık gelen özvektör olduğunu ifade eder. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 3.3.1 $A \in \mathbb{C}^{mxm}, B \in \mathbb{C}^{nxn},\ C \in \mathbb{C}^{nxm}$ olsun. Bu durumda $AX - XB = C$ matris denkleminin sıfırdan farklı $X \in \mathbb{C}^{mxn}$ tek çözümünün olabilmesi için gerek ve yeter şart $f_{A^c}(x)\, , f_{\lambda^c}(x)$ ifadelerinin aralarında asal olmasıdır. [16]

$$\left(f_{A^c}(x)\, , f_{\lambda^c}(x)\right) = 1 \tag{3.3.5}$$

diğer bir ifadeyle $f_{A^c}(\lambda^C)$ regüler matristir. Yani

$$det\left(f_{A^c}(\lambda^c)\right) \neq 0 \tag{3.3.6}$$

dir.

Teorem 3.3.4 $A \in \mathcal{H}_s{}^n$ ve $\lambda \in \mathcal{H}_s$ olsun. Burada λ nın, A nın bir sağ özdeğeri olması için gerek ve yeter şart $A^c\mathrm{X} = \mathrm{X}\lambda^c$ matris denkleminin α split kuaterniyon vektör olmak üzere $\mathrm{X} = \alpha^c$ tipinde bir çözüme sahip olmasıdır.

İspat: λ, A nın bir sağ özdeğeri olsun. Bu durumda

$$A\alpha = \alpha\lambda$$

eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı bir α özvektörü vardır.

$$A\alpha = \alpha\lambda \Rightarrow (A\alpha)^c = (\alpha\lambda)^c$$

$$\Rightarrow A^c\alpha^c = \alpha^c\lambda^c$$

eşitliği elde edilir.

Bu ise α^c nin $A^c\mathrm{X} = \mathrm{X}\lambda^c$ kompleks matris denkleminin bir çözümü olduğunu gösterir. Tersine $A^c\mathrm{X} = \mathrm{X}\lambda^c$ denkleminin bir kökü α^c olsun. Böyleyse

$$A^c\alpha^c = \alpha^c\lambda^c$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$A\alpha = \alpha\lambda$$

yazılabilir. Bu ise λ nın A nın bir sağ özdeğeri olduğunu ifade eder.

Teorem 3.3.5 $A \in \mathcal{H}^n, X \in \mathbb{C}^{2\mathrm{n}\mathrm{x}2}$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ ve olmak üzere

$$A^cX = X\lambda^c \Leftrightarrow A^c(Q_n\overline{X}\,Q_1) = (Q_n\overline{X}\,Q_1)\lambda^c \tag{3.3.7}$$

dir.

İspat: $A \in \mathcal{H}^n$ olsun. Bu durumda $\mathrm{A} = A_1 + A_2 j$ olmak üzere, $A_1, A_2 \in \mathbb{C}^{\mathrm{n}\mathrm{x}\mathrm{n}}$ vardır.

Ayrıca $X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\mathrm{n}\mathrm{x}2}$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere $A^cX = X\lambda^c$ denklemini göz önüne alalım.

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \bar{A}_2 & \bar{A}_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. Matris çarpımından

$$\begin{bmatrix} A_1X_{11} + A_2X_{21} & A_1X_{12} + A_2X_{22} \\ \bar{A}_2X_{11} + \bar{A}_1X_{21} & \bar{A}_2X_{12} + \bar{A}_1X_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11}\lambda & X_{12}\bar{\lambda} \\ X_{21}\lambda & X_{22}\bar{\lambda} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan

$$A_1X_{11} + A_2X_{21} = X_{11}\lambda$$

$$A_1X_{12} + A_2X_{22} = X_{12}\bar{\lambda}$$

$$\bar{A}_2X_{11} + \bar{A}_1X_{21} = X_{21}\lambda$$

$$\bar{A}_2X_{12} + \bar{A}_1X_{22} = X_{22}\bar{\lambda}$$

eşitlikleri elde edilir. Eşitliklerin her iki tarafının eşleniği alınırsa

$$\bar{A}_1\bar{X}_{11} + \bar{A}_2\bar{X}_{21} = \bar{X}_{11}\bar{\lambda}$$

$$\bar{A}_1\bar{X}_{12} + \bar{A}_2\bar{X}_{22} = \bar{X}_{12}\,\lambda$$

$$\bar{A}_2\bar{X}_{11} + \ A_1\bar{X}_{21} = \bar{X}_{21}\bar{\lambda}$$

$$A_2\bar{X}_{12} + \ A_1\bar{X}_{22} = \bar{X}_{22}\lambda \tag{3.3.8}$$

denklemleri elde edilir.

$$Q_n\bar{X}Q_1 = \begin{bmatrix} \bar{X}_{22} & \bar{X}_{21} \\ \bar{X}_{12} & \bar{X}_{11} \end{bmatrix}$$

olduğu göz önüne alındığında (3.3.8) eşitliklerinden

$$A^c(Q_n\bar{X}\,Q_1) = \ (Q_n\bar{X}\,Q_1)\lambda^c$$

ifadesi elde edilir. Bu ise

$$A^cX = X\lambda^c \tag{3.3.9}$$

ve

$$A^c(Q_n\bar{X}\,Q_1) = (Q_n\bar{X}\,Q_1)\lambda^c \tag{3.3.10}$$

(3.3.9) ve (3.3.10) denklemlerinin denk olduğunu gösterir.

Teorem 3.3.6 $A \in \mathcal{H}^n$ ve $\lambda \in \ \mathcal{H}_s$ olsun.

1. Split kuaterniyon λ, A split kuaterniyon matrisinin bir sağ özdeğeri olabilmesi için gerek ve yeter şart $(f_{A^c}(x)\,, f_{\lambda^c}(x)) \neq 1$ yani $f_{A^c}(\lambda^c)$ nin singüler kompleks matris olmasıdır.
2. Split kuaterniyon λ, A split kuaterniyon matrisinin bir sağ özdeğeri olabilmesi için gerek ve yeter şart $A^cY = Y\lambda^c$ matris denkleminin sıfırdan farklı bir $X \in \mathbb{C}^{2n\,x\,2}$ çözümünün olmasıdır. Bu durumda

$$A^cX = X\,\lambda^c$$

denkleminin sıfırdan farklı bir çözümü ise

$$\alpha = \frac{1}{4}\left(I_n jI_n\right)(X + Q_n\overline{X}\,Q_1)\begin{bmatrix}1\\ j\end{bmatrix} \quad (3.3.11)$$

olmak üzere $\alpha \in \mathcal{H}_s{}^{nx1}$ sıfırdan farklı olup

$$A\alpha = \alpha\lambda$$

denklemini sağlar. Yani α, A matrisinin λ sağ özdeğerine karşılık gelen bir özvektörüdür. [15]

İspat:

1. Teorem 3.3.3 gereğince λ nın, A nın bir sağ özdeğeri olması için gerek ve yeter şart

$$A^cX = X\,\lambda^c$$

kompleks denkleminin $\alpha \neq 0$ olmak üzere $X = \alpha^c$ çözümünün var olmasıdır. Bu ise

$$A^cX - X\,\lambda^c = 0 \quad (3.3.12)$$

denkleminin birden çok çözümünün varlığını ifade eder. Böylece (3.3.6) gereğince (3.3.12) denkleminin birden fazla çözümünün olabilmesi için gerek ve yeter şart $f_{A^c}(\lambda^c)$ kompleks matrisi singülerdir.

2. $X \in \mathbb{C}^{2nx2}$ olmak üzere

$$A^c X = X\,\lambda^c \qquad (3.3.13)$$

denkleminin bir kökü olsun. Teorem 3.3.3 den

$$A^c(Q_n \overline{X}\, Q_1) = (Q_n \overline{X}\, Q_1)\lambda^c \qquad (3.3.14)$$

yazılabilir. (3.3.13) ve (3.3.14) ifadeleri taraf tarafa toplanır ve $^1/_2$ katı alınırsa

$$\mathrm{Y} = \frac{1}{2}(X + Q_n \overline{X}\, Q_1)$$

elde edilir. Böylece Y, (3.3.13) denkleminin bir başka köküdür. Eğer

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2nx2}$$

ise

$$Y_{11} = \frac{1}{2}\,(X_{11} + \bar{X}_{22}), Y_{12} = \frac{1}{2}(X_{12} + \bar{X}_{21})$$

olmak üzere

$$Y = \frac{1}{2}(X + Q_n \overline{X}\, Q_1) = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ \bar{Y}_{12} & \bar{Y}_{11} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.[17] $\alpha = Y_{11} + Y_{12} j$ denirse

$$\alpha^c = Y$$

olduğu açıktır. Ayrıca

$$A\alpha = \alpha\lambda$$

denklemi ile

$$A^c \alpha^c = \alpha^c \lambda^c$$

denklemleri denk olduğundan $A\alpha = \alpha\lambda$ denkleminin sıfırdan farklı bir çözümü vardır. Yani α, A nın bir sağ özdeğeridir. Bu teoremin bir sonucu olarak

$$\alpha = \frac{1}{2}(I_n jI_n)\, Y \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} = \frac{1}{4}(I_n jI_n)\,(X + Q_n \overline{X}\, Q_1) \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} \qquad (3.3.15)$$

yazılabilir.

3.4 ÖZDEĞERLER VE ÖZ VEKTÖRLER İÇİN CEBİRSEL TEKNİKLER

Teorem 3.4.1 $A \in \mathcal{H}_s{}^n$ olsun. λ, A nın bir sağ özdeğeri ve α, λ ya karşılık gelen bir öz vektör olsun. Bu durumda p regüler bir split kuaterniyon olmak üzere, $p^{-1}\lambda p$, A nın bir başka sağ özdeğeri ve αp de bu özdeğere karşılık gelen bir öz vektördür.

İspat: λ, A nın sağ özdeğeri olsun. $A\alpha = \alpha\lambda$ olacak şekilde $\alpha \neq 0$ mevcut olsun.

Bu durumda p regüler kuaterniyon (p^{-1}) mevcut olsun.

$$A\alpha = \alpha\lambda$$

eşitliğinde her iki taraf sağdan p ile çarpılırsa

$$A\alpha p = \alpha\lambda p$$

ifadesi elde edilir.

$$pp^{-1} = p^{-1}p = 1$$

olduğundan

$$A(\alpha p) = \alpha(pp^{-1})\lambda p$$

şeklinde yazılabilir.

$$A(\alpha p) = \alpha p(p^{-1}\lambda p)$$

$$A(\alpha p) = (\alpha p)(p^{-1}\lambda p) \qquad (3.4.1)$$

ifadesi elde edilir. Burada $(p^{-1}\lambda p)$ A nın bir başka sağ özdeğeridir. (αp) de $(p^{-1}\lambda p)$

özdeğerine karşılık gelen özvektördür.

Teorem 3.4.2 $A \in \mathcal{H}_s{}^n$ olsun. Bu durumda

1. λ, A^c nin bir kompleks özdeğeri ve bu özdeğere karşılık gelen öz vektörü $\beta \in \mathbb{C}^{2n\,x\,1}$ olmak üzere λ, A nın sağ özdeğeridir ve bu özdeğere karşılık gelen öz vektör

$$\alpha = \frac{1}{4}\left(I_n jI_n\right)\left((\beta, Q_n\bar{\beta}) + Q_n(\bar{\beta}, Q_n\beta)Q_1\right)\begin{bmatrix}1\\j\end{bmatrix} \qquad (3.4.2)$$

dir.

2. λ ve μ, A^c matrisinin farklı iki reel özdeğeri ve bu özdeğerlere karşılık gelen öz vektörler sırasıyla β, γ ise $\frac{\lambda+\mu}{2} + \frac{\lambda-\mu}{2}j$ split kuaterniyonu A matrisinin bir sağ özdeğeri ve bu sağ özdeğere karşılık gelen bir sağ özvektör

$$\alpha = \frac{1}{4}\left(I_n jI_n\right)(\beta+\gamma, \beta-\gamma) + Q_n\,(\bar{\beta}+\bar{\gamma}, \bar{\beta}-\bar{\gamma})\,Q_1)\begin{bmatrix}1\\j\end{bmatrix} \qquad (3.4.3)$$

dir.

3. A^c matrisinin bir tek λ reel özdeğeri var ve bu özdeğere karşılık gelen öz uzayın boyutu 1 olsun. β, λ ya karşılık gelen bir özvektör ve γ da β ile lineer bağımsız bir vektör olmak üzere $\lambda + i + j$, A matrisinin bir sağ özdeğeridir ve bu özdeğere karşılık gelen bir öz vektör

$$\alpha = \frac{1}{4}\left(I_n jI_n\right)\left((\beta+\gamma i, \gamma) + Q_n\,(\bar{\beta}-\bar{\gamma}i, \bar{\gamma})\,Q_1\right)\begin{bmatrix}1\\j\end{bmatrix} \qquad (3.4.4)$$

dir.

4. A^c matrisinin bir tek λ reel özdeğeri var ve bu özdeğere karşılık gelen öz uzayın boyutu 1 den büyük olsun. Bu durumda λ ya karşılık gelen lineer bağımsız iki öz vektör γ ve β olmak üzere λ, A matrisinin bir sağ özdeğeridir ve bu özdeğere karşılık gelen bir öz vektör

$$\alpha = \frac{1}{4}\left(I_n jI_n\right)((\beta, \gamma) + Q_n(\bar{\beta}, \bar{\gamma})Q_1\begin{bmatrix}1\\j\end{bmatrix} \qquad (3.4.5)$$

dir.

İspat: $A \in \mathcal{H}_s{}^n$ olsun. $A^c \in \mathbb{C}^{2n\,x\,2}$ kompleks matrisinin λ özdeğerine karşılık gelen özuzay

$$V_\lambda=\{\, \beta \in \mathbb{C}^{2n\,x\,1} | A^c\beta = \beta\lambda \,\} \text{ olup } boy\, V_\lambda \geq 1$$

dir. Teorem 3.3.4 den A^c kompleks matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \ldots \ldots \ldots . \lambda_t, \bar{\lambda}_t, \mu_1, \mu_2, \ldots \ldots \ldots, \mu_{2s} \tag{3.4.6}$$

olsun. Burada λ_u kompleks özdeğeri μ_v reel özdeğeri göstermektedir ve $\lambda_u \neq \lambda_v, \mu_1 \neq \mu_m$ dir. A^c kompleks temsilcisinin $\lambda = \lambda_u$ kompleks özdeğerini

$$A^c\beta = \beta\lambda \tag{3.4.7}$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir $\beta \in \mathbb{C}^{2n\,x\,1}$ vektörü vardır. (3.3.1) eşitliğinden (3.4.7) denklemi ile

$$A^c\big(\beta, Q_n\bar{\beta}\big) = (\beta, Q_n\bar{\beta})\lambda^c \tag{3.4.8}$$

denklemi denktir. (3.4.8) eşitliğinde $\beta \neq 0$ olduğundan $(\beta, Q_n\bar{\beta}) \in \mathbb{C}^{2n\,x\,2}$ ifadesi

$$A^cY = Y\lambda^c \tag{3.4.9}$$

denkleminin sıfırdan farklı bir çözümüdür. Teorem 3.4.2 den

$$\alpha = \frac{1}{4}\big(I_n jI_n\big)\Big(\big(\beta, Q_n\bar{\beta}\big) + Q_n(\bar{\beta}, Q_n\beta)Q_1\Big)\begin{bmatrix}1\\ j\end{bmatrix} \tag{3.4.10}$$

sıfırdan farklı bir vektör olup, $A\alpha = \alpha\lambda$ eşitliğini sağlar. Bu ise λ kompleks sayısının aynı zamanda A split kuaterniyon matrisinin sağ özdeğeri olduğunu ifade eder.

$\lambda = \mu_u$ A^c kompleks matrisinin bir reel özdeğeri olsun. Eğer A^c matrisinin $\lambda = \mu_u$ özdeğerinden farklı bir $\mu = \mu_v$ reel özdeğeri varsa

$$A^c\beta = \beta\lambda \tag{3.4.11}$$

$$A^c\gamma = \gamma\mu \tag{3.4.12}$$

eşitliklerini sağlayacak şekilde sıfırdan farklı β ve γ özvektörleri vardır. (3.4.11) ve (3.4.12) denklemleri

$$A^c(\beta,\gamma) = (\beta,\gamma)\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix} \tag{3.4.13}$$

biçiminde yazılır. Ayrıca (3.4.12) ve (3.4.13) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$A^c(\beta+\gamma) = \beta\lambda + \gamma\mu \tag{3.4.14}$$

$$A^c(\beta+\gamma) = (\beta+\gamma)\frac{\lambda+\mu}{2} + (\beta-\gamma)\ \frac{\lambda-\mu}{2} \tag{3.4.15}$$

elde edilir. Son ifade düzenlenirse

$$A^c(\beta+\gamma,\beta-\gamma) = (\beta+\gamma,\beta-\gamma)\begin{bmatrix}\frac{\lambda+\mu}{2} & \frac{\lambda-\mu}{2}\\ \frac{\lambda-\mu}{2} & \frac{\lambda+\mu}{2}\end{bmatrix} \tag{3.4.16}$$

ifadesi bulunur.

$$Y = (\beta+\gamma,\beta-\gamma)$$

denirse

$$A^cY = Y\left(\frac{\lambda+\mu}{2} + \frac{\lambda-\mu}{2}j\right)^c \tag{3.4.17}$$

elde edilir. Bu ise Teorem 3.3.2 gereğince

$$\left(\frac{\lambda+\mu}{2} + \frac{\lambda-\mu}{2}j\right)$$

A split kuaterniyon matrisinin bir sağ özdeğeridir.

A matrisinin bir tek λ sağ özdeğeri varsa bu durumda aşağıdaki iki durum söz konusudur.

Durum1: $boyV_\lambda = 1$ ise reel özdeğeri λ olan bir Jordon bloğu $J(\lambda)$ da sütun tam sıra matrisine Y diyelim.

$A^C Y = YJ(\lambda)$ o zaman iki lineer bağımsız vektör β , γ vardır.

$$A^c\ (\beta, \gamma) = (\beta, \gamma) \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Şeklinde tanımlanır.

$$A^c\ (\beta, \gamma) = (\beta, \gamma) \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^c \mathrm{Y} = \mathrm{Y} \begin{bmatrix} \lambda + i & 1 \\ 1 & \lambda - i \end{bmatrix} \tag{3.4.18}$$

$$\Leftrightarrow\ A^c \mathrm{Y} = \mathrm{Y}\,(\lambda + i + j)^c \tag{3.4.19}$$

Buradan

$$\mathrm{Y} = (\beta, \gamma) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{bmatrix} = (\beta + \gamma \mathrm{i}, \gamma) \tag{3.4.20}$$

dir.

$$\alpha = \frac{1}{4} \left(I_n j I_n\right) \left((\beta + \gamma \mathrm{i}, \gamma) + Q_n \left(\bar{\beta} - \bar{\gamma} i, \bar{\gamma}\right) Q_1 \right) \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} \tag{3.4.21}$$

$\alpha \in \mathcal{H}_s^{\ nx1}$ için $A\alpha = \alpha\lambda$ sağlar. Açıkça α, A nın özvektörü reel sağ özdeğeri

$$\lambda = \mu_1$$

ile bağlantılıdır.

Durum 2: A nın λ, sağ özdeğerine karşılık gelen öz uzay V_λ nın boyutu 1 den büyük ise λ ya karşılık gelen lineer bağımsız β, γ sağ özvektörleri vardır ve

$$A^c \beta = \beta\lambda \tag{3.4.22}$$

$$A^c \gamma = \gamma\lambda \tag{3.4.23}$$

dir. Bu durumda (3.4.22) ve (3.4.23) denklemleri

$$A^c\ (\beta, \gamma) = (\beta, \gamma) \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

biçiminde ifade edilir. $Y = (\beta, \gamma)$ denirse Y,

$$A^c X = X \lambda^c$$

denkleminin sıfırdan farklı bir çözümüdür. Teorem 3.3.15 den λ, A matrisinin bir sağ özdeğeridir ve bu özdeğere karşılık gelen özvektör

$$\alpha = \frac{1}{4}\left(I_n jI_n\right)(\beta, \gamma) + Q_n(\bar{\beta}, \bar{\gamma})Q_1)\begin{bmatrix}1\\ j\end{bmatrix} \tag{3.4.24}$$

dir.

Sonuç 3.4.1 $A \in \mathcal{H}_s{}^n$, A nın dört farklı sağ özdeğerlerinin $[\lambda]$ denklik sınıfları için λ temsilci elemanları

$\lambda = q_0 + q_1 i, q_1 \neq 0$ ve $\lambda = q_0 + q_2 i, q_2 \neq 0$, $\lambda = q_0$ ve $\lambda = q_0 + i + j$

biçimindedir.

1. $\lambda = q_0 + q_1 i$, A nın kompleks asli sağ özdeğeri ise $\lambda^{(12)} = \lambda^{(13)} = \bar{\lambda} = q_0 - q_1 i$ split kuaterniyonları da, A nın birer sağ özdeğerleridir ve $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R$ olmak üzere

$$\lambda^{(12)} = \lambda^{(13)} = \bar{\lambda} \in [\lambda]$$

olup, λ nın denklik sınıfı

$$[\lambda] = \{q_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k \mid = \pm\sqrt{\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2}, \lambda_1^2 > \lambda_2^2 + \lambda_3^2\} \tag{3.4.25}$$

dir.

2. $\lambda = q_0 + q_2 i$, A nın bir asli sağ özdeğerleri ise $\lambda^{(12)} = \lambda^{(23)} = q_0 - q_2 j$ de A nın sağ özdeğerleridir ve $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R$ için $\lambda^{(12)} = \lambda^{(23)} \in [\lambda]$ olup λ nın denklik sınıfı

$$[\lambda] = \{q_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k \mid = \pm\sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2}, \lambda_1^2 < \lambda_2^2 + \lambda_3^2\} \tag{3.4.26}$$

dir.

3. $\lambda = q_0 + i + j$, A nın bir asli sağ özdeğerleri ise

$$\lambda^{(12)} = q_0 - i - j,\ \lambda^{(13)} = q_0 - i + j, \lambda^{(23)} = q_0 + i - j$$

split kuaterniyonları ile $\lambda^{(12)}, \lambda^{(13)}, \lambda^{(23)} \in [\, q_0 + i + j]$ olup λ nın denklik sınıfı

$$[\lambda] = \{q_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k \,|\lambda_1^2 = \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \ \ , \lambda_1 \neq 0\} \qquad (3.4.27)$$

dir.

4. $\lambda = q_0$, A nın bir reel özdeğeri ise $[\lambda] = \lambda$ dir.

3.5 YÖNTEM VE ÖRNEKLER

Bu bölümde split kuaterniyon matrislerin sağ özdeğerleri ve özvektörleri için split kuaterniyon matrisin kompleks temsilcisi aracılığıyla yöntem ve örnekler verilecektir. Split kuaterniyon matrisinin split kuaterniyon sağ özdeğerleri ve özvektörlerini belirlemek için aşağıdaki yöntem verilebilir.

1. A^c, A nın kompleks temsilcisi olmak üzere A^C nin bütün özdeğerleri bulunur. A^c nin bütün özdeğerleri aşağıdaki gibi olsun.

$$\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \dots \dots \dots . \lambda_t, \bar{\lambda}_t, \mu_1, \mu_2 , \dots \dots \dots , \mu_{2s}$$

Burada λ_u kompleks, μ_v reel özdeğerler ve $\lambda_u \neq \lambda_v, \mu_1 \neq \mu_m$ dir.

2. A nın asli özdeğerleri bulunur.

(1) λ, A^c nin bir kompleks özdeğeri ise λ, A matrisinin bir asli özdeğeridir.

(2) λ, A^c nin iki farklı reel özdeğeri ise λ, μ varsa $\frac{\lambda+\mu}{2} + \frac{\lambda-\mu}{2} j$ A matrisinin bir asli özdeğeridir.

(3) A^c nin bir tek λ reel özdeğeri var ve bu özdeğere karşılık gelen öz uzayın boyutu 1 ise $\lambda + i + j$, A matrisinin asli özdeğeridir.

(4) A^c nin bir tek λ reel özdeğeri var ve bu özdeğere karşılık gelen öz uzayın boyutu 1 den büyük ise λ, A matrisinin asli özdeğeridir.

3. A nın her bir özdeğerine karşılık gelen öz vektörleri bulunur. λ, A nın bir asli özdeğeri ise

$$A^c X = X \lambda^c$$

denkleminin bir Y, çözümü elde edilir ve α, özdeğerine karşılık gelen özvektör

$$\alpha = \frac{1}{4}\left(I_n jI_n\right)(Y + Q_n \overline{Y} Q_1)$$

olarak elde edilir.

4. A nın özdeğerleri ve öz vektörleri bulunur.

λ, A split kuaterniyon matrisinin bir asli özdeğeri olup p sıfırdan farklı bir split kuaterniyon olmak üzere $p^{-1}\lambda p$ A nın bir sağ özdeğeri ve α, A nın λ ya karşılık gelen bir sağ özvektörü ise αp de $p^{-1}\lambda p$ özdeğerine karşılık gelen özvektördür.

Split kuaterniyon matrisin A nın temel özdeğeri için, split kuaterniyon

$$p^{-1}\lambda p$$

aynı zamanda sıfırdan farklı herhangi bir split kuaterniyon için split kuaterniyon A nın bir özdeğeridir.

Kuaterniyon p ye αp karşılık gelen bir özvektördür.

Ayrıca split kuaterniyon özdeğerinin dört farklı olası denklik sınıfı vardır.

Örnek 1: $A = \begin{bmatrix} 2-j & 1-i-j-k \\ -i+j & 1+j+k \end{bmatrix}$

A split kuaterniyon matrisi verilsin.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ -i & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1-i \\ 1 & 1+i \end{bmatrix} j$$

şeklinde yazılabilir.

Buradan A split kuaterniyon matris temsilcisi A^c aşağıdaki gibidir.

$$A^c = \begin{bmatrix} 2 & 1-i & -1 & -1-i \\ -i & 1 & 1 & 1+i \\ -1 & -1+i & 2 & 1+i \\ 1 & 1-i & i & 1 \end{bmatrix}$$

A^c nin karakteristik polinomu

$$f_{A^c}(x) = (x^2 - 4\mathrm{x} + 5)(\mathrm{x} - 1)^2$$

ve A^c nin özdeğerleri $\mu = 1$, $\lambda = 2 + i$ ve $\bar{\lambda} = 2 - i$ dir.

Ayrıca A^c nin $\mu = 1$ reel özdeğerine karşılık gelen öz uzay V_1 olmak üzere

$$V_1 = Sp\{(1, -1, -1, 1)\}$$

olup $boy\, V_1 = 1$ dir.

$2 + i$ ve $2 - i$ A^c nin kompleks özdeğerleri, birbirlerinin eşlenikleri olduklarından bu özdeğerlerden elde edilen A nın asli özdeğeri $2 + i$ dir.

Ayrıca A^c nin bir tek reel özdeğeri var ve $boy\, V_1 = 1$ olduğundan $1 + i + j$, A nın diğer asli özdeğeridir. Böylece Teorem 3.4.2 den, A nın sağ özdeğerleri için iki farklı tipten denklik sınıfı vardır.

$\lambda = 2 + i$ asli özdeğeri için, Sonuç 3.4.1 den A nın λ ya denk tüm split kuaterniyon özdeğerlerinin kümesi, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R$ olmak üzere

$$[\lambda] = \{q_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k \mid \lambda_1^2 > \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 = 1\}$$

dir. Ayrıca A^c nin $\lambda = 2 + i$ özdeğerine karşılık gelen özvektör

$$\beta = (-1,1,1,0)^T$$

dir. (3.4.10) dan, A nın $\lambda = 2 + i$ sağ özdeğerlerine karşılık gelen sağ özvektörler,

$$\alpha = \frac{1}{4}\left(I_2 jI_2\right)\left(\left(\beta, Q_2\bar{\beta}\right) + Q_2\left(\bar{\beta}, Q_2\beta\right)Q_1\right)\begin{bmatrix}1\\ j\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1+j\\ 1\end{bmatrix}$$

dir. Üstelik p regüler bir split kuaterniyon olmak üzere

$$p\lambda p^{-1}$$

A nın bir sağ özdeğeri ve

$$\alpha p$$

de $p\lambda p^{-1}$ özdeğerine karşılık gelen bir özvektördür.

A^c nin $\mu = 1$ asli özdeğerleri için $boy\ V_1 = 1$ olduğu biliniyor. Sonuç 6.1 den A nın $\mu = 1$ den elde edilen sağ özdeğerlerinin kümesi, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R$ olmak üzere

$$[\lambda] = \{ 1 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k \mid \lambda_1^2 = \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \lambda_1 \neq 0\}$$

dir. A^c nin $\lambda = 1$ özdeğerine karşılık gelen öz vektörü

$$\beta = (-1,1,1,0)^T$$

olmak üzere $\gamma = (\mathrm{i}, -\mathrm{i}, 0, 0)^T$ olarak seçilirse, β, γ vektörleri lineer bağımsız olup

$$A^c\,(\beta, \gamma) = (\beta, \gamma)\begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

dir. (3.3.7) ifadelerinde, A nın $\mu = 1$ asli özdeğerine karşılık gelen öz vektörleri

$$\alpha = \frac{1}{4}\left(I_2 jI_2\right)\left((\beta + \gamma\mathrm{i}, \gamma) + Q_2(\bar{\beta} - \bar{\gamma}i, \bar{\gamma})Q_1\right)\begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 + {}^1\!/_2\, j \\ 1 - {}^1\!/_2\, j \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Örnek 2. $A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$

A split kuaterniyon matrisi verilsin. Buradan A split kuaterniyon matris temsilcisi A^c aşağıdaki gibidir.

$$A^c = \begin{bmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}$$

A^c nin karakteristik polinomu

$$f_{A^c}(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

ve A^c nin $\mu_1 = 1$ ve $\mu_2 = -1$ olmak üzere farklı iki reel özdeğeri vardır.

$\mu = 1$ özdeğerine karşılık gelen öz uzay V_1 olmak üzere

$$V_1 = Sp\{(i, 1,0,0), (0,0, -i, 1)\}$$

olup $boy\, V_1 = 2$ dir.

$\mu = -1$ özdeğerine karşılık gelen öz uzay V_{-1} olmak üzere

$$V_{-1} = Sp\{(-i, 1,0,0), (0,0, i, 1)\}$$

olup $boy\, V_{-1} = 2$ dir.

A^c nin iki farklı reel özdeğeri olduğundan Teorem 3.4.2 den asli özdeğerinden biri *j* dir.

Teorem 3.4.2 den, *A* nın sağ özdeğerleri için iki farklı tipten denklik sınıfı vardır.

$\lambda = j$ asli özdeğeri için, Sonuç 3.4.1 den *A* nın λ ya denk tüm split kuaterniyon özdeğerlerinin kümesi, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R$ olmak üzere

$$[\lambda] = \{q_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k \,|\lambda_1^2 = \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \ \ , \lambda_1 \neq 0\}$$

dir.

Şimdi *A* nın $\lambda = j$ özdeğerine karşılık gelen bir sağ özvektör belirleyelim. (3.4.3) ifadesinde

$$\beta = (\mathrm{i}, 1,0,0)$$

$$\gamma = (-\mathrm{i}, 1,0,0)$$

alınırsa,

$$\alpha = \frac{1}{4}\left(I_2, jI_2\right)((\beta + \gamma, \beta - \gamma) + Q_2\,(\bar{\beta} + \bar{\gamma}, \bar{\beta} - \bar{\gamma})\,Q_1)\begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Gerçekten

$$\mathrm{A}\alpha = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ j \end{bmatrix}$$

$$= \alpha \mathrm{j}$$

dir.

Üstelik p regüler bir split kuaterniyon olmak üzere

$$p\lambda p^{-1}$$

A nın bir sağ özdeğeri ve

$$\alpha p$$

de $p\lambda p^{-1}$ özdeğerine karşılık gelen bir öz vektördür.

A^c nin $\mu = 1$ asli özdeğerleri için $boy\ V_1 = 2$ olduğu biliniyor. Sonuç 3.4.1 den A nın $\mu = 1$ den elde edilen sağ özdeğerlerinin kümesi, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R$ olmak üzere

$$[\lambda] = \{q_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k \mid \lambda_1^2 = \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \lambda_1 \neq 0\}$$

Örnek 3. $A = \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ i & 0 \end{bmatrix}$

A split kuaterniyon matrisi verilsin. Buradan A nın matris temsilcisi A^c aşağıdaki gibidir.

$$A^c = \begin{bmatrix} 1+i & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-i & 0 \end{bmatrix}$$

A^c nin karakteristik polinomu

$$f_{A^c}(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2$$

ve A^c nin $\mu = 0$ ve $\lambda_1 = 1+i$ $\lambda_2 = 1-i$ olmak üzere bir tek reel özdeğeri vardır ve bu reel özdeğere karşılık gelen öz uzay

$$V_0 = Sp\{(0,1,0,0), (0,0,0,1)\}$$

olup $boy\ V = 2$ dir.

A^c nin bir tek reel özdeğeri olduğundan Teorem 3.4.2 den asli özdeğeri *0* dır. Şimdi A nın $\lambda = 0$ özdeğerine karşılık gelen bir sağ özvektör belirleyelim. (3.4.5) ifadesinde

$$\beta = (0,1,0,0)$$

$$\gamma = (0,0,0,1)$$

alınırsa,

$$\alpha = \frac{1}{4}(I_2\, jI_2)((\beta, \gamma) + Q_2(\overline{\beta}, \overline{\gamma})Q_1)\begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Buradan

$$A\alpha = \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha j$$

dir.

Sonuç 3.4.1 den, A nın sağ özdeğerleri için bir tane denklik sınıfı vardır. $\lambda = 0$ asli özdeğeri için, Sonuç 3.4.1 den A nın λ ya denk tüm split kuaterniyon özdeğerlerinin kümesi $[\lambda] = \{0\}$ dir.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada split kuaterniyon matrislerin kompleks temsilcisi yardımıyla özdeğerleri ve bu özdeğerlere karşılık gelen öz vektörleri bulunmuştur. Bulunan bu özdeğer ve öz vektörler için cebirsel teknikler verilmiş ve örnekler incelenmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Alagöz, Y. Oral, K.H ve Yüce, S. (2012). *Miskolc Math. Notes* 13 223.

[2] Keçilioğlu, O. (2003). Split kuaterniyonlar ve 3- boyutlu lorentz uzayında geometrik uygulamaları. Yüksek lisans tezi, *Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Kırıkkale

[3] Kula, L. ve Yaylı,Y. (2007) *J. Korean Math.* Soc. 44 1313.

[4] Ozdemir, M. Ve Ergin, A.A (2006). *J. Geom. Phys.* 56 322.

[5] Ozdemir, M. (2009). The roots of a split quaternion, *Appl. Math. Lett., vol. 22, no. 2, pp. 258–263.*

[6] Brody, D.C ve Graefe, E.M. (2011). *J. Phys.* A 44 072001.

[7] Jiang, T. (2004). *J. Math. Phys.* 45 3334.

[8] Jiang, T. ve Chen, L. (2008). *Comput. Phys. Comm.* 178 795.

[9] Leo S.D., Scolarici G. ve Solombrino, L. (2002). *J. Math. Phys.* 43 5815.

[10] Baker, A. (1999) *Linear Algebra Appl.* 286 303.

[11] Pogoruy, A.A. ve Rodriguez-Dagnino, R.M. (2010). *Adv. Appl. Clifford Algebr.* 20 79.

[12] Farid, F.O., Wang, Q.W. ve Zhang, F. (2011). *Linear Multilinear Algebra* 59 451.

[13] Huang, L. (2001). *Linear Algebra Appl.* 323 105.

[14] Zhang, F. (1997). *Quaternions and matrices of quaternions Linear Algebra Appl., vol. 251, pp. 21–57,*

[15] Erdoğdu, M. ve Özdemir, M. (2013). *Appl. Clifford Algebr.,* 23 615.

[16] Lancaster,P. ve Tismenersky, M. (1985). The Theory of Matrices with Applications, *seconed., Academic Press, New York.*

[17] Zhang, Z., Jiang, Z. ve Jiang, T. (2015). *Appl. Math. Comput*. 269 618.

[18] Jiang, T. Zhang, Z. and Jiang, Z. (2018). *Algebraic Techniques for Eigenvalues and Eigenvectors of a Split Quaternion Matrix in Split Quaternionic Mechanics. Computer Physics Communications*, 229, 1-7.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Tuğba ENSERİCİ

Doğum Tarihi :

Lisans : 1999-2003 Kırıkkale Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Yüksek Lisans : 2003-2004 Başkent Üniversitesi Orta Öğretim Matematik Öğretmenliği (Tezsiz)

Yüksek Lisans : 2019- Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı