



T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

**ORANSAL GECİKMELİ UYUMLU KESİRLİ MERTEBEDEN
GENELLEŞTİRİLMİŞ BURGERS DENKLEMLERİNİN
NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

**ABDULLAH KARTAL
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**DANIŞMAN
Prof. Dr. Ali OLGUN**

KIRIKKALE-2023

Abdullah KARTAL tarafından hazırlanan “ORANSAL GECİKMELİ UYUMLU KESİRLİ MERTEBEDEN GENELLEŞTİRİLMİŞ BURGERS DENKLEMLERİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. ALİ OLGUN

Matematik Ana Bilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi

İmza.....

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Başkan: Prof. Dr. Hatice Gül İNCE İLARSLAN

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

İmza.....

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Doç. Dr. Başar YILMAZ

Matematik Ana Bilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi

İmza.....

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye (Ortak Danışman): Dr. Öğr. Üyesi Halil ANAÇ

Matematik Ana Bilim Dalı, Gümüşhane Üniversitesi

İmza.....

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Dr. Öğr. Üyesi İlker GENÇTÜRK

Matematik Ana Bilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi

İmza.....

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Tez Savunma Tarihi: 22/08/2023

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Recep ÇALIN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Saygıdeğer Anne ve Babama, Kıymetli Eşim ve Can Evlatlarıma...



ETİK BEYANI

Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Abdullah KARTAL

22/08/2023

ÖZET

ORANSAL GECİKMELİ UYUMLU KESİRLİ MERTEBEDEN GENELLEŞTİRİLMİŞ BURGERS DENKLEMLERİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

KARTAL, Abdullah

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Ali OLGUN

Ağustos 2023, 49 sayfa

Bu tezde, iki yeni nümerik metot önerilmektedir. Bu yöntemlerden birincisi; q -homotopi analiz dönüşüm yönteminin uyumlu kesirli türev operatörü ile birleşmesinden oluşan uyumlu q -homotopi analiz dönüşüm yöntemidir. İkinci yöntem ise homotopi pertürbasyon metodunun uyumlu kesirli Shehu dönüşümü ile birleşmesinden oluşan uyumlu kesirli Shehu homotopi pertürbasyon yöntemidir. Uyumlu q -homotopi analizi dönüşüm yöntemi ve uyumlu kesirli Shehu homotopi pertürbasyon yöntemi, oransal gecikmeli uyumlu kesirli mertebeden genelleştirilmiş Burgers denklemlerini analiz etmek için kullanılmıştır. Bu problemin sayısal çözümlerinin grafikleri çizdirilmiştir. Önerilen yöntemler, sayısal simülasyonlara göre etkili ve tutarlıdır.

Anahtar Kelimeler: Uyumlu kesirli mertebeden genelleştirilmiş Burgers denklemi, uyumlu q -homotopi analiz dönüşüm yöntemi, uyumlu kesirli Shehu homotopi pertürbasyon yöntemi

ABSTRACT

NUMERICAL SOLUTIONS OF CONFORMABLE FRACTIONAL GENERALIZED BURGERS EQUATIONS WITH PROPORTIONAL DELAY

KARTAL, Abdullah

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, Master's Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Ali OLGUN

August 2023, 49 pages

In this thesis, two new numerical methods are proposed. The first of these methods; It is the conformable q-homotopy analysis transform method, which consists of the combination of the q-homotopy analysis transform method and the conformable fractional derivative operator, and the second is the conformable fractional Shehu homotopy perturbation method, which consists of the combination of the homotopy perturbation method with the conformable fractional Shehu transform. The conformable q-homotopy analysis transform method and the conformable fractional Shehu homotopy perturbation method were used to analyze the conformable fractional generalized Burgers equations with proportional delay. The graphs of the numerical solutions of this problem are drawn. The proposed methods are efficient and consistent compared to numerical simulations.

Key words: Conformable fractional generalized Burgers equation, conformable q-homotopy analysis transform method, conformable fractional Shehu homotopy perturbation method

TEŞEKKÜR

Hayatımın birçok alanında olduğu gibi eğitim ve öğretim hayatımda da beni sürekli teşvik ederek, maddi ve manevi desteklerini benden hiçbir zaman esirgemeyen çok kıymetli aileme, her şartta yanımda olan ve olmaya devam eden can dostlarım Halil ANAÇ ve Kenan BOZKURT'a, ayrıca Lisans ve Yüksek Lisans öğrenim hayatım boyunca matematik aşısı ile bizleri aşıl原因 ve yalın bakış açımızı değiştirerek bizlere her alanda analitik düşünme yeteneği kazandıran, engin bilgi, birikim ve tecrübeleri ile gerek akademik gerekse sosyokültürel olarak kıymetli desteklerini benden hiçbir zaman esirgemeyen, değerli görüş ve önerileri ile beni yönlendiren ve kendileri ile çalışmaktan onur duyduğum çok saygıdeğer hocalarım Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN ve tez danışman hocam Prof. Dr. Ali OLGUN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışmayı saygıdeğer anne-babam Hatice KARTAL ve Mehmet KARTAL'a ayrıca kıymetli eşim Filiz KARTAL ve ileride bir gün örnek almaları ve çok daha başarılı olmaları ümidiyle can evlatlarım Elif KARTAL, Hilal KARTAL, Mehmet Alp KARTAL ve Ela KARTAL'a ithaf ediyorum.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	x
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Kaynak Özetleri	3
1.2. Tezin Amacı	4
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	5
3. ORANSAL GECİKMELİ UYUMLU KESİRLİ MERTEBEDEN KISMÎ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ İÇİN KULLANILAN YÖNTEMLER	8
3.1. Uyumlu q-Homotopi Analiz Dönüşüm Yöntemi ile Çözüm.....	8
3.2. Uyumlu Kesirli Shehu Homotopi Pertürbasyon Yöntemi ile Çözüm.....	10
4. BAZI ORANSAL GECİKMELİ UYUMLU KESİRLİ MERTEBEDEN GENELLEŞTİRİLMİŞ BURGERS DENKLEMLERİ.....	13
4.1. Problem-I.....	13
4.1.1. Problem-I in Uq-HADY ile Çözümü	13
4.1.2. Problem-I in UKSHPY ile Çözümü	15
4.1.3. Grafikler ve Bazı Nümerik Değerler	17
4.2. Problem-II.....	21
4.2.1. Problem-II nin Uq-HADY ile Çözümü	21
4.2.2. Problem-II nin UKSHPY ile Çözümü	23
4.2.3. Grafikler ve Bazı Nümerik Değerler	24
4.3. Problem-III	28
4.3.1. Problem-III ün Uq-HADY ile Çözümü	28
4.3.2. Problem-III ün UKSHPY ile Çözümü.....	30
4.3.3. Grafikler ve Bazı Nümerik Değerler	31
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	34
KAYNAKLAR.....	36
ÖZGEÇMİŞ	38

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

4.1. $h = -1$, $n = 1$ ve farklı x ve t değerleri ile farklı α değerleri için (4.1) denkleminin Uq-HADY çözümünün sayısal değerleri	18
4.2. Farklı x ve t değerleri ile farklı α değerleri için (4.1) denkleminin UKSHPY çözümünün sayısal değerleri.....	19
4.3. $\alpha = 1$ için kesin çözümün Uq-HADY ve HPY ile karşılaştırılması	19
4.4. $\alpha = 1$ için kesin çözümün UKSHPY ve HPY ile karşılaştırılması.....	20
4.5. $\alpha = 1$ için Uq-HADY, UKSHPY ve HPY arasındaki mutlak hata payı.....	20
4.6. $h = -1$, $n = 1$ ve farklı x ve t değerleri ile farklı α değerleri için (4.7) denkleminin Uq-HADY çözümünün sayısal değerleri	26
4.7. Farklı x ve t değerleri ile farklı α değerleri için (4.7) denkleminin UKSHPY çözümünün sayısal değerleri.....	26
4.8. $\alpha = 1$ için kesin çözümün Uq-HADY ve HPY ile karşılaştırılması	27
4.9. $\alpha = 1$ için kesin çözümün UKSHPY ve HPY ile karşılaştırılması.....	27
4.10. $\alpha = 1$ için Uq-HADY, UKSHPY ve HPY arasındaki mutlak hata payı.....	28
4.11. $\alpha = 1$ olmak üzere (4.13) denklemi için Uq-HADY, UKSHPY ve KVİY arasındaki mutlak hatanın karşılaştırılması	33

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>ŞEKİL</u>	<u>Sayfa</u>
4.1. . (a) Uq-HADY çözümü (b) UKSHPY çözümü (c) Kesin çözüm (d) Mutlak hata payı $ w_{kesin} - w_{Uq-HADY} $ (e) $h = -1, n = 1, \alpha = 1$ için Mutlak hata payı $ u_{kesin} - u_{UKSHPY} $ grafiği	17
4.2. (a) α nın farklı değerleri için Uq-HADY çözümlerinin ve kesin çözümün karşılaştırılması (b) α nın farklı değerleri ve $h = -1, n = 1, x = 0.5$ için UKSHPY çözümlerinin ve kesin çözümün karşılaştırılması.	18
4.3. (a) Uq-HADY çözümü (b) UKSHPY çözümü (c) Kesin çözüm (d) Mutlak hata payı $ w_{kesin} - w_{Uq-HADY} $ (e) $h = -1, n = 1, \alpha = 1$ için Mutlak hata payı $ u_{kesin} - u_{UKSHPY} $ grafiği	24
4.4. (a) α nın farklı değerleri için Uq-HADY çözümlerinin ve kesin çözümün karşılaştırılması (b) α nın farklı değerleri ve $h = -1, n = 1, x = 0.5$ için UKSHPY çözümlerinin ve kesin çözümün karşılaştırılması.	25
4.5. (a) Uq-HADY çözümü (b) Kesin çözüm (c) $h = -1, n = 1, \alpha = 1$ için Mutlak hata payı $ w_{kesin} - w_{Uq-HADY} $ grafiği	31
4.6. (a) UKSHPY çözümü (b) Kesin çözüm (c) $\alpha = 1$ için Mutlak hata payı $ w_{kesin} - w_{UKSHPY} $ grafiği.....	32
4.7. (a) α nın farklı değerleri için Uq-HADY çözümlerinin ve kesin çözümün karşılaştırılması (b) α nın farklı değerleri ve $h = -1, n = 1, t = 0.5$ için UKSHPY çözümlerinin ve kesin çözümün karşılaştırılması.	32

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

D_t^α	Uyumlu zaman-kesirli türev operatörü
φ_k	Başlangıç değeri
ψ	Diferansiyel operatör
H_m	Homotopi polinomu
\mathcal{L}_α	Uyumlu Laplace dönüşümü
\mathcal{L}_α^{-1}	Ters uyumlu Laplace dönüşümü
$T_\alpha(f)$	α -inci mertebeden uyumlu kesirli türev
${}_c\mathcal{S}_\alpha[f(t)]$	α -inci mertebeden uyumlu kesirli Shehu dönüşümü
$({}_c\mathcal{S}_\alpha)^{-1}[f(t)]$	α -inci mertebeden ters uyumlu kesirli Shehu dönüşümü

Kısaltmalar

HAY	Homotopi Analiz Yöntemi
HPY	Homotopi Pertürbasyon Yöntemi
OGUZKMGBD	Oransal Gecikmeli Uyumlu Zaman-Kesirli Mertebeden Genelleştirilmiş Burgers Denklemi
OGUZKMKDD	Oransal Gecikmeli Uyumlu Zaman-Kesirli Mertebeden Kısmî Diferansiyel Denklem
Uq-HADY	Uyumlu q-Homotopi Analiz Dönüşüm Yöntemi
UKSHPY	Uyumlu kesirli Shehu homotopi pertürbasyon yöntemi
UKSD	Uyumlu Kesirli Shehu Dönüşümü
q-HADY	q -homotopi analiz dönüşüm yöntemi
KVIY	Kesirli Varyasyonel İterasyon Yöntemi

1. GİRİŞ

Belirli bir problemin özelliklerini açıklayan matematiksel modellerin oluşturulması, mühendislik bilimleri, fizik, kimya ve biyoloji gibi çeşitli alanlarda büyük önem taşımaktadır. Diferansiyel denklemler, bu modellerde ortaya çıkarılan sorunları ele almak için önemli bir araç olarak kullanılmaktadır.

Kesirli mertebeden diferansiyel denklemler yaygınlaşana kadar doğadaki olayların modellenmesinde tam sayılı mertebeden diferansiyel denklemler kullanılmaktaydı. Fakat tam sayılı mertebeden diferansiyel denklemler ihtiyacı tam olarak karşılamamaktaydı. Bununla birlikte doğadaki problemlerin karakteristiklerini modellemede kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin daha verimli ve etkin sonuçlar verdiği görülmektedir.

Gerçekten de kesirli analiz diferansiyel ve integral denklemlerin ve matematiksel fiziğin özel fonksiyonlarını içeren bazı problemlerin yanı sıra bunların bir ve daha fazla değişkendeki uzantılarını ve genellemelerini çözmek için potansiyel olarak yararlı birkaç araç sağlamaktadır.

Kesirli hesap kavramının, 1695 yılında Marquis de L'Hôpital (1661-1704) tarafından Gottfried Wilhelm Leibniz e (1646-1716) yöneltilen klasik hesaptaki n -inci

mertebeden türevin $n = \frac{1}{2}$ değeri için $\frac{d^n y}{dx^n}$ ifadesinin anlamlı olup olmadığı sorusundan kaynaklandığına inanılmaktadır.

Leibniz, 30 Eylül 1695 tarihinde L'Hôpital'e "... *Bu, bir gün faydalı sonuçların çıkarılacağı bariz bir paradokstur...*" şeklinde cevap vermiştir (Kilbass vd.,2006).

Literatürde kesirli mertebeden türevler için sırasıyla 1730 da Euler, 1772 de Lagrange, 1812 de Laplace, 1819 da Lacroix, 1822 de Fourier, 1832 de Liouville, 1847 de Riemann, 1859 da Greer, 1865 de Holmgren, 1867 de Grünwald, 1868 de Letnikov, 1869 da Sonin, 1884 de Laurent, 1888 de Nekrassov, 1890 da Krug ve 1917 de Weyl çalışmalar yapmışlardır (Kilbas vd., 2006). Son yüzyılda kesirli hesap teorisi ve pratiğinde önemli gelişmeler olmuştur. Riesz 1949 yılında çok değişkenli fonksiyonlar

in kesirli integral teorisini geliştirmiştir. Erdelyi 1964 yılında kesirli hesabı matematiksel denklemlere uygulamıştır. Higgins 1967 de diferansiyel denklemleri çözmek için kesirli integral operatörlerini kullandı. Aynı dönemde Caputo kesirli türeve yeni bir boyut eklemiş ve daha avantajlı bir kesirli türev tanımlamıştır. Bu gelişmeler ışığında 1947 yılında Scott Blair, 1949 yılında Caffyn ve 1961 yılında Graham, elektrokimya için 1964 yılında Blavin, kimyasal fizik için 1969 yılında Oldham, 1970 yılında Spainer ve 1972 yılında Grenness, 1970 yılında Somorjai ve Bishop, genel transport problemleri için 1972 yılında Oldham ve Spainer önemli katkılarda bulunmuşlardır (Oldham ve Spanier, 1974).

Kesirli analiz, konusu itibarıyla bilim ve mühendisliğin görünüşte çeşitli ve yaygın birçok alanındaki kanıtlanmış uygulamaları nedeniyle, yaklaşık son elli yılda önemli ölçüde popülerlik ve önem kazanmıştır.

Kesirli türevin klasik türevden önemli bir farkı, kesirli türevin tek bir tanımının olmamasıdır. Kesirli analizde birden fazla türev tanımının bulunması, problemin türüne en uygun olanını kullanma fırsatı verir. Kesirli türev tanımlarından bazıları Liouville, Riemann, Weyl, Fourier, Laplace, Lagrange, Euler, Abel, Lacroix, Grünwald ve Letnikov dur. Bu tanımlardan en popüler olanları Riemann - Liouville, Grünwald - Letnikov ve Caputo kesirli türevleridir (Kilbas vd., 2006; Miller & Ross, 1993; Podlubny, 1999; Gambo vd., 2014). Literatürde yer alan bu tanımlar birbirleri arasında geçişleri sağlasa da fiziksel yorumları açısından farklılık göstermektedir.

Son zamanlarda, Khalil ve arkadaşları kesirli türev ve kesirli integral için yeni bir tanım sunmuşlardır. Bu yeni tanımın klasik analizde verilen klasik türevin özelliklerini sağladığını ve klasik türev tanımında olduğu gibi bir limit formundan yararlandığını gösterdiler. Çalışmalarında kesirli türevin bu yeni tanımı için çarpım kuralı, bölüm kuralı, zincir kuralı, kesirli Rolle teoremi ve kesirli ortalama değer teoremlerini sunmuşlardır (Khalil vd., 2014).

Bu yeni alana katkı sağlayan bir diğer çalışma da Abdeljawad tarafından yapılmıştır. Abdeljawad bu yeni teoriyi geliştirmiştir. Sol ve sağ uyumlu kesirli türev tanımlarını, $\alpha > 1$ için yüksek mertebeden kesirli integral tanımlarını, kesirli Gronwall eşitizliliğini, uyumlu kesirli türevler için zincir kuralı ve kısmî integrasyon formüllerini, kesirli kuvvet serisi açılımını ve Laplace dönüşümünü vermiştir (Abdeljawad, 2015).

Uyumlu kesirli diferansiyel denklemlerin çözümleri, doğrusal olmayan doğal sistemlerin özelliklerini tanımlamada çok önemlidir. Doğrusal olmayan süreçleri karakterize eden uyumlu kesirli diferansiyel denklemlere kesin çözümler elde etmek için bir dizi analitik ve sayısal metot uygulamaktadır.

Bu tezde,

$$\begin{cases} D_t^\alpha w(x, t) = \psi \left(x, w(\rho_0 x, \sigma_0 t), \frac{\partial w(\rho_1 x, \sigma_1 t)}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^m w(\rho_m x, \sigma_m t)}{\partial x^m} \right) \\ w^{(k)}(x, 0) = \varphi_k(x) \end{cases}, \quad (1.1)$$

oransal gecikmeli uyumlu zaman-kesirli mertebeden kısmî diferansiyel denklemler (OGUZKMKDD) incelenmektedir. Burada tüm $i, j \in \mathbb{N}$ ler için $\rho_i, \sigma_j \in (0, 1)$, φ_k başlangıç değeri, ψ diferansiyel operatör ve D_t^α uyumlu zaman-kesirli operatördür.

1.1. Kaynak Özetleri

Doğrusal olmayan gecikmeli kısmî diferansiyel denklemler için Chebyshev psödospektral yöntemi (Zubik-Kowal, 2000), homotopi analizi yöntemi (Alkan, 2022), spektral kollokasyon ve dalga şekli gevşetme yöntemleri (Jackiewicz ve Zubik-Kowal, 2006) ve iterasyonlu psödospektral yöntem (Mead ve Zubik-Kowal, 2005) gibi oransal gecikmeli zaman-kesirli mertebeden kısmî diferansiyel denklemleri çözüme yöntemleri hakkında literatürde çok az çalışma mevcuttur. Abazari ve Ganji (2011) indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu kullanılarak oransal gecikmeli kısmî diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmuşlardır. Abazari ve Kilicman (2014) diferansiyel dönüşüm metodu kullanarak oransal gecikmeli doğrusal olmayan integro-diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmişlerdir. Tanthanuch (2012) oransal gecikmeli homojen olmayan viskoz olmayan Burgers denklemini çözmek için grup analizi yöntemi kullanmıştır. Sakar ve diğerleri (2016), Biazar ve Ghanbari (2012) oransal gecikmeli uyumlu zaman-kesirli mertebeden kısmî diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini bulmak için homotopi pertürbasyon yöntemini (HPY) kullanmışlardır. Chen ve Wang (2010) varyasyonel iterasyon yöntemini kullanarak oransal gecikmeli nötr fonksiyonel diferansiyel denklemi çözmüşlerdir. Singh ve Kumar (2017), oransal gecikmeli uyumlu zaman-kesirli mertebeden kısmî diferansiyel denklemlerin başlangıç değerli otonom sisteminin

alternatif bir yaklaşıp çözümlünü elde etmek için alternatif varyasyonel iterasyon yöntemi kullanmıştır.

1.2. Tezin Amacı

İki yeni nümerik metot önermektedir. Bu yöntemlerden birincisi; q-homotopi analiz dönüşüm yönteminin ve uyumlu kesirli türev operatörü ile birleşmesinden oluşan uyumlu q-homotopi analiz dönüşüm yöntemidir (Uq-HADY), ikincisi ise, homotopi pertürbasyon metodunun, uyumlu kesirli Shehu dönüşümü ile birleşmesinden oluşan uyumlu kesirli Shehu homotopi pertürbasyon yöntemidir (UKSHPY). Oransal gecikmeli uyumlu zaman kesirli mertebeden genelleştirilmiş Burgers denklemleri (OGUZKMGBD) için önerilen iki hibrit metot olan uyumlu q-homotopi analiz dönüşüm yöntemi (Uq-HADY) ve uyumlu kesirli Shehu homotopi pertürbasyon yöntemi (UKSHPY) kullanılarak yeni sayısal çözümler elde edilmektedir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1. $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonunun α -ıncı mertebeden uyumlu kesirli türevi her $x > 0$ ve her $\alpha \in (0, 1]$ için

$$T_\alpha(f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon x^{1-\alpha}) - f(x)}{\varepsilon} \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır (Khalil vd., 2014; Abdeljawad, 2015; Ala vd., 2020; Gözütok vd., 2019).

Teorem 2.1. $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere f ve g fonksiyonları $x > 0$ noktasında α -diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Khalil vd., 2014; Abdeljawad, 2015; Gözütok and Gözütok, 2017).

i) $a, b \in \mathbb{R}$ için $T_\alpha(af + bg) = aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g)$ dir.

ii) $p \in \mathbb{R}$ için $T_\alpha(x^p) = px^{p-1}$ dir.

iii) Her $t \in \mathbb{R}$ ve $f(t) = \lambda$ şartını sağlayan sabit f fonksiyonu için $T_\alpha(\lambda) = 0$ dir.

iv) $T_\alpha(fg) = gT_\alpha(f) + fT_\alpha(g)$

v) $T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g^2}$

vi) Eğer f diferansiyellenebilir ise, t polinomunun türevi şu şekilde elde edilir:

$$T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} f(t).$$

Tanım 2.2. f fonksiyonu x noktasında n -kez türevlenebilir olsun. Bu durumda f nin α -ıncı mertebeden uyumlu kesirli türevi her $x > 0$ ve $\alpha \in (n, n+1]$ için

$$T_\alpha(f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f^{([\alpha]-1)}(x + \varepsilon x^{([\alpha]-\alpha)}) - f^{([\alpha]-1)}(x)}{\varepsilon}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $[\alpha]$ kendisinden büyük veya eşit olan en küçük tam sayıdır (Khalil vd., 2014).

Teorem 2.2. f fonksiyonu x noktasında n -kez türevlenebilir olsun. Bu durumda her $x > 0$ ve $\alpha \in (n, n+1]$ için

$$T_\alpha(f(x)) = x^{[\alpha]-\alpha} f^{[\alpha]}(x)$$

dir (Khalil vd., 2014).

Tanım 2.3. Mittag-Leffler fonksiyonu E_a ,

$$E_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{na}}{\Gamma(na+1)}$$

şeklindedir (Mittag-Leffler, 1903).

Tanım 2.4. $f_1 : A \rightarrow B$, $f_2 : A \rightarrow B$ sürekli dönüşümler, $I = [0,1]$ olsun. Her $x \in A$ için $H(x,0) = f_1(x)$ ve $H(x,1) = f_2(x)$ eşitliklerini sağlayan bir $H : A \times I \rightarrow B$ sürekli dönüşümü varsa f_1 ve f_2 homotopiktir denir. Bu durumda H dönüşümüne f_1 ve f_2 arasında bir homotopidir denir (Liao, 2009).

Tanım 2.5. f , $t \geq 0$ için tanımlı bir fonksiyon ve s bir reel parametre olmak üzere

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

genelleştirilmiş integrali yakınsak ise integralin değerine f fonksiyonunun Laplace dönüşümü denir ve $\mathcal{L}\{f\} = F$ ile gösterilir.

Tanım 2.6. $t_0 \in \mathbb{R}$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $f : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun α -mertebeden uyumlu Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}_\alpha^{t_0}\{f(t)\}(s) = F_\alpha^{t_0}(s) = \int_{t_0}^{\infty} e^{-s \frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha}} f(t) (t-t_0)^{\alpha-1} dt \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır (Abdeljawad, 2015).

Tanım 2.7. $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun α -mertebeden uyumlu Laplace dönüşümü $F_\alpha(s)$ olsun. $f(t)$ fonksiyonuna F_α nın ters uyumlu Laplace dönüşümü denir ve $\mathcal{L}_\alpha^{-1}\{F_\alpha(s)\} = f(t)$ ile gösterilir.

Tanım 2.8. $\alpha \in (0, 1]$ ve $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun α -ıncı mertebeden uyumlu kesirli Shehu dönüşümü (UKSD)

$${}_c S_\alpha [f(t)] = V_\alpha(s; u) = \int_0^\infty e^{\left(\frac{-st^\alpha}{u\alpha}\right)} f(t) t^{\alpha-1} dt \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlanır (Benattia ve Belghaba, 2021).

Tanım 2.9. $\alpha \in (0, 1]$ ve $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun α -mertebeden uyumlu kesirli Shehu dönüşümü $V_\alpha(s; u)$ olsun. $f(t)$ fonksiyonuna V_α nın ters uyumlu Shehu dönüşümü denir ve $({}_c S_\alpha)^{-1}\{V_\alpha(s; u)\} = f(t)$ ile gösterilir.

Tanım 2.10. $\alpha \in (0, 1]$ ve $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun uyumlu kesirli mertebeli türevi için uyumlu Shehu dönüşümü

$$V_\alpha [T_\alpha f(t)](v) = \frac{s}{u} V_\alpha(s; u) - f(0) \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır (Benattia ve Belghaba, 2021).

3. ORANSAL GECİKMELİ UYUMLU KESİRLİ MERTEBEDEN KISMÎ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ İÇİN KULLANILAN YÖNTEMLER

Bu bölümde elde edilen yeni nümerik metotlar tanıtılmaktadır.

3.1. Uyumlu q-Homotopi Analizi Dönüşüm Yöntemi İle Çözüm

Uyumlu q-homotopi analiz dönüşüm yöntemi (Uq-HADY) nin temel fikrini açıklamak için M bir doğrusal, N ise doğrusal olmayan bir operatör, $f(x,t)$ bir kaynak terim, $\rho_i, \sigma_i \in (0,1)$ ve ${}_t T_\alpha$, α -ıncı mertebeden uyumlu kesirli türev olmak üzere her $t > 0$ ve $n-1 < \alpha \leq n$ için

$${}_t T_\alpha w(x,t) + Mw(\rho_i x, \sigma_i t) + Nw(\rho_i x, \sigma_i t) = f(x,t) \quad (3.1)$$

oransal gecikmeli uyumlu zaman-kesir mertebeli doğrusal olmayan kısmî diferansiyel denkleme Laplace dönüşümü uygulanır ve başlangıç koşulları kullanılırsa

$$s \mathcal{L}_\alpha [w(x,t)] - w(x,0) + \mathcal{L}_\alpha [Mw(\rho_i x, \sigma_i t)] + \mathcal{L}_\alpha [Nw(\rho_i x, \sigma_i t)] = \mathcal{L}_\alpha [f(x,t)] \quad (3.2)$$

elde edilir. Son eşitlik düzenlendiğinde

$$\mathcal{L}_\alpha [w(x,t)] - \frac{1}{s} w(x,0) + \frac{1}{s} \mathcal{L}_\alpha [Mw(\rho_i x, \sigma_i t)] + \frac{1}{s} \mathcal{L}_\alpha [Nw(\rho_i x, \sigma_i t)] - \frac{1}{s} \mathcal{L}_\alpha [f(x,t)] = 0$$

elde edilir. Homotopi analiz yöntemi (HAY) yardımıyla reel değerli $\varphi(x,t;q)$

fonksiyonu için doğrusal olmayan operatörü şu şekilde tanımlanabilir. $q \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$

olmak üzere

$$N[\varphi(x,t;q)] = \mathcal{L}_\alpha[\varphi(x,t;q)] - \frac{1}{s}\varphi(x,t;q)(0^+) + \frac{1}{s}(\mathcal{L}_\alpha[M\varphi(\rho_i x, \sigma_i t; q)] + \mathcal{L}_\alpha[N\varphi(\rho_i x, \sigma_i t; q)] - \mathcal{L}_\alpha[f(x,t;q)])$$

dir.

$h \neq 0$ yardımcı parametre ve \mathcal{L}_α uyumlu Laplace dönüşümü olmak üzere

$$(1-nq)\mathcal{L}_\alpha[\varphi(x,t;q) - w_0(x,t)] = hqH(x,t)N[\varphi(\rho_i x, \sigma_i t; q)] \quad (3.3)$$

şeklinde bir homotopi oluşturulsun. Bu durumda (3.3) eşitliğinin çözümleri

$$\varphi(x,t;0) = w_0(x,t),$$

$$\varphi\left(x,t;\frac{1}{n}\right) = w(x,t)$$

şeklinde. Böylece q , 0 dan $\frac{1}{n}$ ye arttıkça $\varphi(x,t;q)$ nun çözümü $w_0(x,t)$ den $w(x,t)$ ye yakınsar. q noktası civarında Taylor teoreminin kullanılmasıyla $\varphi(x,t;q)$ genişletilerek w cinsinden

$$\varphi(x,t;q) = w_0(x,t) + \sum_{m=1}^{\infty} w_m(x,t)q^m \quad (3.4)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $w_m(x,t) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \varphi(x,t;q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0}$ dir. (3.4) eşitliği $q = \frac{1}{n}$ de

uygun olan $w_0(x,t)$, n ve h için yakınsaktır. Bu durumda

$$w(x,t) = w_0(x,t) + \sum_{m=1}^{\infty} w_m(x,t) \left(\frac{1}{n}\right)^m$$

elde edilir. (3.3) ile verilen sıfırıncı basamaktan deformasyon denklemini q ya göre m -kez türevlenir ve $m!$ ile bölünürse $q = 0$ için

$$\mathcal{L}_\alpha[w_m(x,t) - k_m w_{m-1}(x,t)] = hH(x,t)\mathcal{R}_m(\vec{w}_{m-1}) \quad (3.5)$$

elde edilir. Burada \vec{w}_m vektörü

$$\vec{w}_m = \{w_0(x,t), w_1(x,t), \dots, w_m(x,t)\}$$

şeklinde tanımlıdır. (3.5) denkleminin ters uyumlu Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$w_m(x,t) = k_m w_{m-1}(x,t) + h \mathcal{L}_\alpha^{-1} \left[H(x,t) \mathcal{R}_m(\bar{w}_{m-1}) \right] \quad (3.6)$$

elde edilir. Bu son denklemde

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_m(\bar{w}_{m-1}) = \mathcal{L}_\alpha \left[w_{m-1}(x,t) \right] - \left(1 - \frac{k_m}{n} \right) \frac{1}{s} w_0(x,t) + \frac{1}{s} \mathcal{L}_\alpha \left[M w_{m-1}(\rho_i x, \sigma_i t) \right. \\ \left. + H_{m-1}(x,t) - f(x,t) \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

şeklindedir. (3.7) de H_m bir homotopi polinomudur ve

$$H_m = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \varphi(x,t;q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0}$$

ile gösterilir. Burada

$$\varphi(x,t;q) = \varphi_0 + q\varphi_1 + q^2\varphi_2 + \dots$$

şeklindedir. (3.6) ve (3.7) den

$$\begin{aligned} w_m(x,t) = (k_m + h) w_{m-1}(x,t) - \left(1 - \frac{k_m}{n} \right) \frac{1}{s} w_0(x,t) \\ + h \mathcal{L}_\alpha^{-1} \left[\left(\frac{1}{s} \mathcal{L}_\alpha \left[M w_{m-1}(\rho_i x, \sigma_i t) + H_{m-1}(x,t) - f(x,t) \right] \right) \right] \end{aligned}$$

elde edilir. q -homotopi analiz dönüşüm yöntemi (q-HADY) kullanıldığında, (3.1) denkleminin seri çözümü

$$w(x,t) = w_0(x,t) + \sum_{m=1}^{\infty} w_m(x,t) \left(\frac{1}{q} \right)^m$$

şeklinde verilir.

3.2. Uyumlu Kesirli Shehu Homotopi Pertürbasyon Yöntemi

M bir doğrusal, N ise doğrusal olmayan bir operatör, $f(x,t)$ bir kaynak terim, $\rho_i, \sigma_i \in (0,1)$, ${}_t T_\alpha$, α -ıncı mertebeden uyumlu kesirli türev ve $w(x,0) = a(x)$ başlangıç koşulu olmak üzere uyumlu kesirli Shehu homotopi pertürbasyon yöntemi (UKSHPY) içindeki ana fikri açıklamak için

$$T_\alpha w(x,t) + Mw(\rho_i x, \sigma_i t) + Nw(\rho_i x, \sigma_i t) = f(x,t), \quad t > 0, \quad n-1 < \alpha \leq n \quad (3.8)$$

uyumlu zaman-kesirli mertebeden doğrusal olmayan oransal gecikmeli kısmî diferansiyel denkleminin uyumlu kesirli Shehu dönüşümü uygulanır ve başlangıç koşulları kullanılırsa

$$\frac{s}{u} {}_c S_\alpha [w(x,t)] - \sum_{m=0}^{k-1} w(x,0) + {}_c S_\alpha [Mw(\rho_i x, \sigma_i t) + Nw(\rho_i x, \sigma_i t) - f(x,t)] = 0 \quad (3.9)$$

elde edilir. (3.9) da gerekli işlemler yapılırsa

$${}_c S_\alpha [w(x,t)] - \frac{u}{s} a(x) + \frac{u}{s} {}_c S_\alpha [Mw(\rho_i x, \sigma_i t) + Nw(\rho_i x, \sigma_i t) - f(x,t)] = 0$$

elde edilir. Bu son eşitlik tekrar düzenlendiğinde

$${}_c S_\alpha [w(x,t)] = \frac{u}{s} a(x) - \frac{u}{s} {}_c S_\alpha [Mw(\rho_i x, \sigma_i t) + Nw(\rho_i x, \sigma_i t) - f(x,t)] \quad (3.10)$$

bulunur. (3.10) nun her iki yanına ters uyumlu kesirli Shehu dönüşümü uygulanırsa

$$w(x,t) = A(x,t) - ({}_c S_\alpha)^{-1} \left\{ \frac{u}{s} {}_c S_\alpha [Mw(\rho_i x, \sigma_i t) + Nw(\rho_i x, \sigma_i t)] \right\} \quad (3.11)$$

elde edilir. Burada $A(x,t)$ homojen olmayan terimdir ve başlangıç koşullarından ortaya çıkar. Homotopi pertürbasyon yönteminin uygulanmasıyla

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n w_n(x,t) \quad (3.12)$$

elde edilir. Şimdi doğrusal olmayan terim

$$Nw(\rho_i x, \sigma_i t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(w) \quad (3.13)$$

şeklinde gösterilsin. Burada $H_n(w)$

$$H_n(w_0, w_1, \dots, w_n) = \frac{1}{n!} \frac{\partial}{\partial p^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i w_i \right) \right]_{p=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

formunda tanımlıdır. (3.12) ve (3.13) denklemlerinin (3.11) de yerine yazılmasıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n w_n(x,t) = A(x,t) \quad (3.14)$$

$$-p \left\{ \left({}_c S_{\alpha} \right)^{-1} \left[\frac{u}{s} {}_c S_{\alpha} \left\{ M \sum_{n=0}^{\infty} p^n w_n(\rho_i x, \sigma_i t) + \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(w) \right\} \right] \right\}$$

elde edilir. (3.14) denklemi uyumlu kesirli Shehu dönüşümü ve homotopi pertürbasyon yönteminin birleşimidir. p nin kuvvetiyle aynı indise sahip olan katsayıların karşılaştırılmasıyla aşağıdaki iterasyonlar elde edilir.

$$p^0 : w_0(x,t) = A(x,t),$$

$$p^1 : w_1(x,t) = - \left({}_c S_{\alpha} \right)^{-1} \left\{ \frac{u}{s} {}_c S_{\alpha} \left[M w_0(\rho_i x, \sigma_i t) + H_0(w) \right] \right\},$$

$$p^2 : w_2(x,t) = - \left({}_c S_{\alpha} \right)^{-1} \left\{ \frac{u}{s} {}_c S_{\alpha} \left[M w_1(\rho_i x, \sigma_i t) + H_1(w) \right] \right\},$$

$$p^3 : w_3(x,t) = - \left({}_c S_{\alpha} \right)^{-1} \left\{ \frac{u}{s} {}_c S_{\alpha} \left[M w_2(\rho_i x, \sigma_i t) + H_2(w) \right] \right\},$$

$$\vdots$$

Böylece (3.8) denkleminin seri çözümü

$$w(x,t) = \lim_{p \rightarrow 1} \sum_{m=0}^{\infty} p^m w_m(x,t) = w_0(x,t) + w_1(x,t) + w_2(x,t) + \dots$$

formunda elde edilir.

4. BAZI ORANSAL GECİKMELİ UYUMLU KESİRLİ MERTEBEDEN GENELLEŞTİRİLMİŞ BURGERS DENKLEMLERİ

Bu bölümde oransal gecikmeli uyumlu zaman-kesirli mertebeden genelleştirilmiş bazı Burgers denklemlerinin belirli başlangıç koşulları altında; uyumlu q-homotopi analiz dönüşüm yöntemi (Uq-HADY) ve uyumlu kesirli Shehu homotopi pertürbasyon yöntemi (UKSHPY) ile çözümleri elde edilecektir.

4.1. Problem-I

Her $x, t \in [0,1]$ ve $0 < \alpha \leq 1$ için

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha w(x,t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial w\left(x, \frac{t}{2}\right)}{\partial x} w\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2} w(x,t) \\ w(x,0) = x \end{cases} \quad (4.1)$$

oransal gecikmeli uyumlu zaman-kesirli mertebeden genelleştirilmiş Burgers denklemini ve başlangıç koşulunu içeren problemi göz önüne alalım (Sakar vd., 2016).

4.1.1. Problem-I in Uq-HADY ile Çözümü

(4.1) denkleminde başlangıç koşulu altında uyumlu Laplace dönüşümünün uygulanmasıyla

$$\mathcal{L}_\alpha [w(x,t)] = \frac{1}{s} w(x,0) + \frac{1}{s} \mathcal{L}_\alpha \left[\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial w\left(x, \frac{t}{2}\right)}{\partial x} w\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2} w(x,t) \right] \quad (4.2)$$

elde edilir. (4.2) denklemini kullanarak doğrusal olmayan

$$N[\varphi(x,t;q)] = \mathcal{L}_\alpha[\varphi(x,t;q)] - \frac{1}{s}x - \frac{1}{s}\mathcal{L}_\alpha\left[\frac{\partial^2\varphi(x,t;q)}{\partial x^2} + \frac{\partial\varphi\left(x,\frac{t}{2};q\right)}{\partial x}\varphi\left(\frac{x}{2},\frac{t}{2};q\right) + \frac{1}{2}\varphi(x,t;q)\right]$$

denklemini tanımlayalım. Önerilen algoritmayı uygulayarak, m inci basamaktan deformasyon denklemleri

$$\mathcal{L}_\alpha[w_m(x,t) - k_m w_{m-1}(x,t)] = h\mathcal{R}_m[\vec{w}_{m-1}] \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$\mathcal{R}_m[\vec{w}_{m-1}] = \mathcal{L}_\alpha[\vec{w}_{m-1}(x,t)] - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right)\frac{1}{s}x - \frac{1}{s}\mathcal{L}_\alpha\left[\frac{\partial^2 w_{m-1}(x,t)}{\partial x^2} + \sum_{r=0}^{m-1} \frac{\partial w_r\left(x,\frac{t}{2}\right)}{\partial x} w_{m-1-r}\left(\frac{x}{2},\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2}w_{m-1}(x,t)\right]$$

dir. (4.3) eşitliğine ters uyumlu Laplace dönüşümü uygulanmasıyla

$$w_m(x,t) = k_m w_{m-1}(x,t) + h\mathcal{L}_\alpha^{-1}\{\mathcal{R}_m[\vec{w}_{m-1}]\} \quad (4.4)$$

şeklinde elde edilir. Başlangıç koşulunun kullanılmasıyla ise

$$w_0(x,t) = x$$

olarak elde edilir. $w_1(x,t)$ değerini bulmak için (4.4) denkleminde $m=1$ alınırsa bu durumda

$$w_1(x,t) = -hx\frac{t^\alpha}{\alpha}$$

olur. (4.4) denkleminde $m=2$ alınırsa $w_2(x,t)$ değeri

$$w_2(x,t) = -(n+h)\left(hx\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) + xh^2\left(\frac{2^{\alpha-1}+1}{2^\alpha}\right)\frac{t^{2\alpha}}{2\alpha^2}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde (4.4) denkleminde $m=3$ alınırsa $w_3(x,t)$ değeri

$$w_3(x,t) = -\frac{xh}{24\alpha^3} \left[-18 \left(-\alpha 2^{-\alpha} + \frac{2\alpha}{3} + \frac{1}{6} \right) (n+h)ht^{2\alpha} + (2^{1-\alpha} + 64^{-\alpha} + 48^{-\alpha} + 1)h^2t^{3\alpha} + 24t^\alpha \alpha^2 (n+h)^2 \right]$$

olarak bulunur. Bu şekilde devam edilirse diğer terimler de bulunabilir. Böylece verilen denklemin Uq-HADY çözümü

$$w(x,t) = w_0(x,t) + \sum_{m=1}^{\infty} w_m(x,t) \left(\frac{1}{n} \right)^m \quad (4.5)$$

şeklinde elde edilir. Eğer (4.5) eşitliğinde $\alpha = 1$, $n = 1$ ve $h = 1$ alınırsa bu durumda elde edilen

$$\sum_{m=1}^C w_m(x,t) \left(\frac{1}{n} \right)^m$$

sonuçları $C \rightarrow \infty$ iken verilen denklemin kesin çözümü olan

$$w(x,t) = xe^t$$

ifadesine yakınsar.

4.1.2. Problem-I in UKSHPY ile Çözümü

(4.1) denkleminin uyumlu Shehu dönüşümünün uygulanmasıyla ve başlangıç koşulu kullanılarak

$${}_c S_\alpha [w(x,t)] = x \frac{u}{s} + \frac{u}{s} {}_c S_\alpha \left[\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial w\left(x, \frac{t}{2}\right)}{\partial x} w\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2} w(x,t) \right] \quad (4.6)$$

elde edilir. (4.6) eşitliğine ters uyumlu Shehu dönüşümü uygulanırsa

$$w(x,t) = x + ({}_c S_\alpha)^{-1} \left\{ \frac{u}{s} {}_c S_\alpha \left[\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial w\left(x, \frac{t}{2}\right)}{\partial x} w\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2} w(x,t) \right] \right\}$$

elde edilir. Homotopi pertürbasyon yönteminin uygulanmasıyla

$$\sum_{m=0}^{\infty} p^m w_m(x,t) = x + p \left[({}_c S_\alpha)^{-1} \left\{ \frac{u}{s} {}_c S_\alpha \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} p^m w_m(x,t) \right) + \sum_{m=0}^{\infty} p^m H_m(w) \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{1}{2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} p^m w_m(x,t) \right) \right] \right\} \right]$$

ifadesi yazılabilir. Böylece $H_m(w)$ nin ilk birkaç bileşeni aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$H_0(w) = \frac{\partial w_0 \left(x, \frac{t}{2} \right)}{\partial x} w_0 \left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2} \right),$$

$$H_1(w) = \frac{\partial w_0 \left(x, \frac{t}{2} \right)}{\partial x} w_1 \left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2} \right) + \frac{\partial w_1 \left(x, \frac{t}{2} \right)}{\partial x} w_0 \left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2} \right),$$

$$H_2(w) = \frac{\partial w_0 \left(x, \frac{t}{2} \right)}{\partial x} w_2 \left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2} \right) + \frac{\partial w_1 \left(x, \frac{t}{2} \right)}{\partial x} w_1 \left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2} \right) + \frac{\partial w_2 \left(x, \frac{t}{2} \right)}{\partial x} w_0 \left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2} \right),$$

⋮

Buradan da p nin kuvvetiyle aynı indise sahip olan katsayıların karşılaştırılmasıyla

$$p^0 : w_0(x,t) = x, \quad H_0(w) = \frac{x}{2},$$

$$p^1 : w_1(x,t) = x \frac{t^\alpha}{\alpha}, \quad H_1(w) = \frac{x t^\alpha}{2\alpha 2^{2\alpha}},$$

$$p^2 : w_2(x,t) = \frac{x(2+2^\alpha)t^{2\alpha}}{2^{\alpha+2}\alpha^2}, \quad H_2(w) = \frac{x(2+32^\alpha)t^{2\alpha}}{2^{3\alpha+2}\alpha^2},$$

$$p^3 : w_3(x,t) = \frac{x(2^2 + 3 \cdot 2^{\alpha+1} + 2^{2\alpha+1} + 2^{3\alpha})t^{3\alpha}}{3 \cdot 2^{3\alpha+3}\alpha^3}$$

⋮

olarak elde edilir. Sonuç olarak, UKSHPY için denklem (4.1) in çözümü

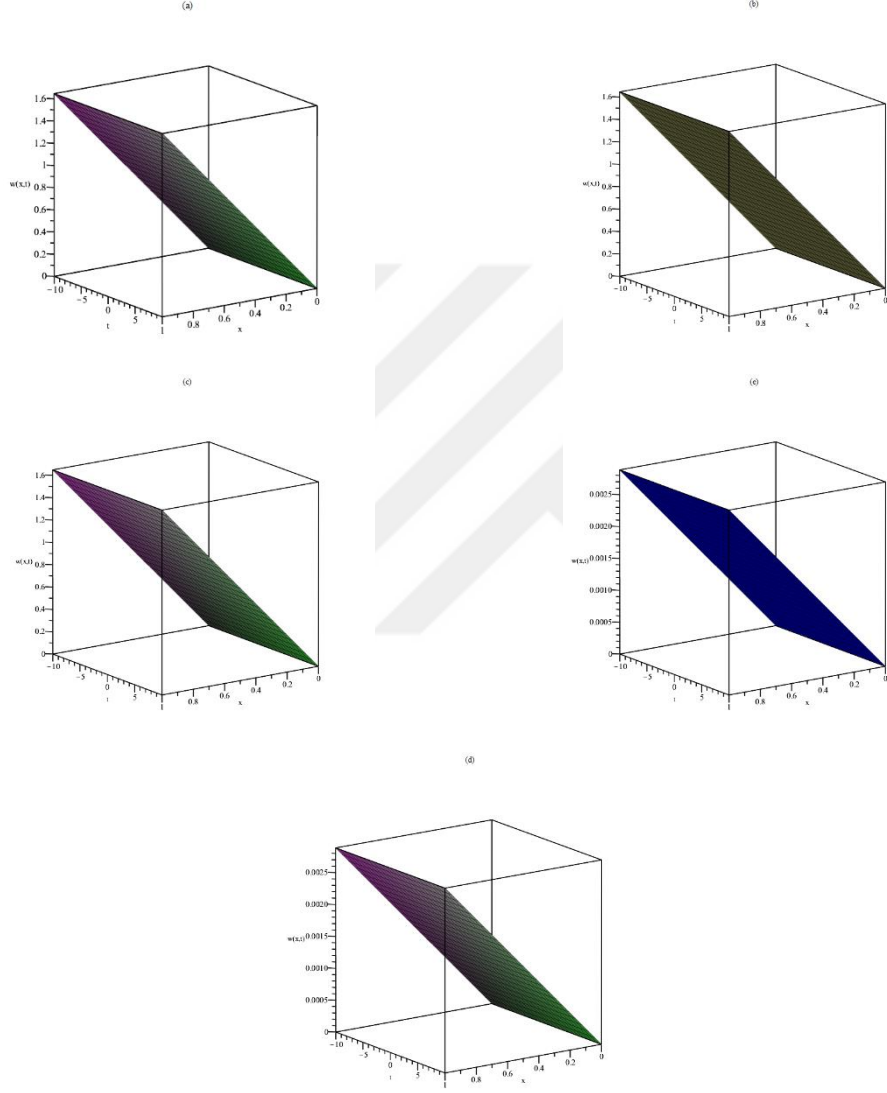
$$w(x,t) = x \left(1 + \frac{t^\alpha}{\alpha} + \frac{(2+2^\alpha)t^{2\alpha}}{2^{\alpha+2}\alpha^2} + \frac{(2^2 + 3 \cdot 2^{\alpha+1} + 2^{2\alpha+1} + 2^{3\alpha})t^{3\alpha}}{3 \cdot 2^{3\alpha+3}\alpha^3} \right)$$

şeklinde bulunur.

4.1.3. Grafikler ve Bazı Nümerik Değerler

(4.1) ile verilen oransal gecikmeli uyumlu zaman-kesirli mertebeden genelleştirilmiş Burgers denkleminin ilişkin olarak;

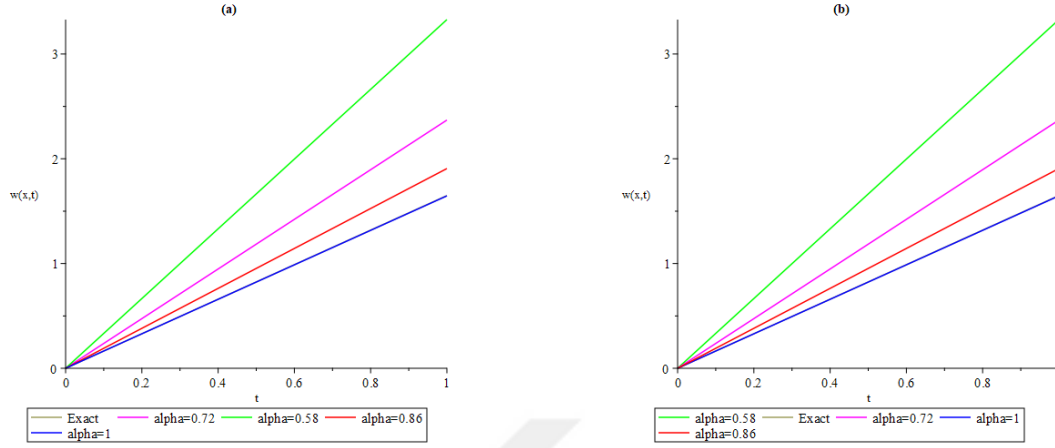
Şekil 4.1. de, $\alpha = 1$ için Uq-HADY çözümü, UKSHPY çözümü, kesin çözüm, Uq-HADY için mutlak hata ve UKSHPY için mutlak hata grafikleri gösterilmiştir.



Şekil 4.1. (a) Uq-HADY çözümü (b) UKSHPY çözümü (c) Kesin çözüm (d) Mutlak hata payı $|w_{kesin} - w_{Uq-HADY}|$ (e) $h = -1$, $n = 1$, $\alpha = 1$ için Mutlak hata payı $|u_{kesin} - u_{UKSHPY}|$.

Şekil 4.1. de, Uq-HADY, UKSHPY çözümlerinin kesin çözüme çok iyi yakınsadığı görülmüştür.

Şekil 4.2. de $h = -1$, $n = 1$, $x = 0.5$ olmak üzere α nın farklı değerleri için denklem (4.1) e ait Uq-HADY çözümlerinin ve kesin çözümünün karşılaştırılması ile UKSHPY çözümlerinin ve kesin çözümünün karşılaştırılması gösterilmiştir.



Şekil 4.2. (a) α nın farklı değerleri için Uq-HADY çözümlerinin ve kesin çözümün karşılaştırılması (b) α nın farklı değerleri ve $h = -1$, $n = 1$, $x = 0.5$ için UKSHPY çözümlerinin ve kesin çözümün karşılaştırılması.

Şekil 4.2. de, Uq-HADY ve UKSHPY çözümlerinin $\alpha = 1$ e yaklaştıkça kesin çözüme yakınsadığı görülmüştür. Ayrıca bu çözümlerin $\alpha = 1$ için kesin çözümle çakıştığı görülmüştür.

Çizelge 4.1. de, $\alpha = 0.58$, $\alpha = 0.72$, $\alpha = 0.86$ ve $\alpha = 1$ değerlerine karşılık Uq-HADY çözümleriyle elde edilen $w(x,t)$ sıcaklığına ait bazı sayısal değerler verilmiştir.

Çizelge 4.1. $h = -1$, $n = 1$ ve farklı x ve t değerleri ile farklı α değerleri için (4.1) denkleminin Uq-HADY çözümünün sayısal değerleri

x	t	$\alpha = 0.58$	$\alpha = 0.72$	$\alpha = 0.86$	$\alpha = 1$
0.25	0.25	0.5596460926	0.4216721924	0.3567107699	0.3209635416
	0.50	0.8321510022	0.5924122881	0.4766549579	0.4114583334
	0.75	1.1272272560	0.7884373466	0.6210788866	0.5253906249
	1.00	1.4474996720	1.0126616460	0.7935251184	0.6666666666
0.50	0.25	1.1192921850	0.8433443848	0.7134215400	0.6419270833
	0.50	1.6643020030	1.1848245760	0.9533099160	0.8229166666
	0.75	2.2544545150	1.5768746930	1.2421577730	1.0507812500
	1.00	2.8949993420	2.0253232910	1.5870502380	1.3333333340
0.75	0.25	1.6789382770	1.2650165760	1.0701323090	0.9628906249
	0.50	2.4964530070	1.7772368640	1.4299648740	1.2343750000
	0.75	3.3816817710	2.3653120400	1.8632366590	1.5761718760
	1.00	4.3424990130	3.0379849390	2.3805753540	2.0000000000

Çizelge 4.1. de, Uq-HADY çözümünün x değeri sabitken t değeri arttıkça farklı α değerleri için sayısal değerlerinin değişimi incelenmiştir.

Çizelge 4.2. Farklı x ve t değerleri ile farklı α değerleri için (4.1) denkleminin UKSHPY çözümünün sayısal değerleri

x	t	$\alpha = 0.58$	$\alpha = 0.72$	$\alpha = 0.86$	$\alpha = 1$
0.25	0.25	0.5596460925	0.4216721923	0.3567107699	0.3209635417
	0.50	0.8321510022	0.5924122881	0.4766549580	0.4114583333
	0.75	1.1272272570	0.7884373465	0.6210788866	0.5253906250
	1.00	1.4474996710	1.0126616460	0.7935251183	0.6666666667
0.50	0.25	1.1192921850	0.8433443848	0.7134215399	0.6419270833
	0.50	1.6643020040	1.1848245760	0.9533099160	0.8229166667
	0.75	2.2544545150	1.5768746930	1.242157773	1.0507812500
	1.00	2.8949993430	2.0253232920	1.587050236	1.3333333330
0.75	0.25	1.6789382780	1.2650165770	1.070132310	0.9628906250
	0.50	2.4964530060	1.7772368640	1.429964874	1.2343750000
	0.75	3.3816817720	2.3653120400	1.863236659	1.5761718750
	1.00	4.3424990130	3.0379849390	2.3805753550	2.0000000000

Çizelge 4.2. de, UKSHPY çözümünün x değeri sabitken t değeri arttıkça farklı α değerleri için sayısal değerlerinin değişimi incelenmiştir.

Çizelge 4.3. te, $\alpha = 1$ için Uq-HADY çözümü, (Sakar vd, 2016) daki kesin çözüm ve HPY ile çözümü karşılaştırılmıştır.

Çizelge 4.3. $\alpha = 1$ için kesin çözümün Uq-HADY ve HPY (Sakar vd., 2016) ile karşılaştırılması

x	t	Kesin Çözüm	Uq-HADY	HPY (Sakar vd., 2016)
0.25	0.25	0.3210063542	0.3209635416	0.3209635415
0.25	0.50	0.4121803178	0.4114583334	0.4114583335
0.25	0.75	0.5292500042	0.5253906249	0.5253906250
0.25	1.00	0.6795704570	0.6666666666	0.6666666665
0.50	0.25	0.6420127085	0.6419270833	0.6419270830
0.50	0.50	0.8243606355	0.8229166666	0.8229166670
0.50	0.75	1.0585000080	1.0507812500	1.0507812500
0.50	1.00	1.3591409140	1.3333333340	1.3333333330
0.75	0.25	0.9630190628	0.9628906249	0.9628906245
0.75	0.50	1.2365409530	1.2343750000	1.2343750000
0.75	0.75	1.5877500130	1.5761718760	1.5761718750
0.75	1.00	2.0387113710	2.0000000000	2.0000000000

Çizelge 4.4. te, $\alpha = 1$ için UKSHPY çözümünü kesin çözümle ve (Sakar vd, 2016) daki HPY çözümüyle karşılaştırılması verilmiştir ve bu çözümlerin birbirine yakın olduğu görülmüştür.

Çizelge 4.4. $\alpha = 1$ için kesin çözümün UKSHPY ve HPY (Sakar vd., 2016) ile karşılaştırılması

x	t	Kesin çözüm	UKSHPY	HPY (Sakar vd., 2016)
0.25	0.25	0.3210063542	0.3209635417	0.3209635415
0.25	0.50	0.4121803178	0.4114583333	0.4114583335
0.25	0.75	0.5292500042	0.5253906250	0.5253906250
0.25	1.00	0.6795704570	0.6666666667	0.6666666665
0.50	0.25	0.6420127085	0.6419270833	0.6419270830
0.50	0.50	0.8243606355	0.8229166667	0.8229166670
0.50	0.75	1.0585000080	1.0507812500	1.0507812500
0.50	1.00	1.3591409140	1.3333333330	1.3333333330
0.75	0.25	0.9630190628	0.9628906250	0.9628906245
0.75	0.50	1.2365409530	1.2343750000	1.2343750000
0.75	0.75	1.5877500130	1.5761718750	1.5761718750
0.75	1.00	2.0387113710	2.0000000000	2.0000000000

Çizelge 4.5. te, Uq-HADY, UKSHPY ve HPY ile kesin çözüm arasındaki fark mutlak hata olarak hesaplanmıştır. Uq-HADY, UKSHPY ve HPY için mutlak hata, Çizelge 4.5. te gösterildiği gibi hemen hemen aynı olduğu görülmüştür.

Çizelge 4.5. $\alpha = 1$ için Uq-HADY, UKSHPY ve HPY (Sakar vd., 2016) arasındaki mutlak hata payı

x		t			
		0.025	0.050	0.075	0.1
0.25	<i>Uq-HADY</i>	4.10×10^{-9}	6.570×10^{-8}	3.3460×10^{-7}	1.0629×10^{-6}
	<i>UKSHPY</i>	4.20×10^{-9}	6.570×10^{-8}	3.3470×10^{-7}	1.0628×10^{-6}
	<i>HPY</i>	4.20×10^{-9}	6.550×10^{-8}	3.3480×10^{-7}	1.0630×10^{-6}
0.50	<i>Uq-HADY</i>	8.40×10^{-9}	1.313×10^{-7}	6.6930×10^{-7}	2.1256×10^{-6}
	<i>UKSHPY</i>	8.40×10^{-9}	1.313×10^{-7}	6.6930×10^{-7}	2.1257×10^{-6}
	<i>HPY</i>	8.50×10^{-9}	1.310×10^{-7}	6.6950×10^{-7}	2.1260×10^{-6}
0.75	<i>Uq-HADY</i>	1.27×10^{-8}	1.970×10^{-7}	1.0038×10^{-6}	3.1885×10^{-6}
	<i>UKSHPY</i>	1.27×10^{-8}	1.970×10^{-7}	1.0038×10^{-6}	3.1885×10^{-6}
	<i>HPY</i>	1.28×10^{-8}	1.965×10^{-7}	1.0042×10^{-6}	3.1890×10^{-6}

4.2. Problem-II

Her $x, t \in [0, 1]$ ve $0 < \alpha \leq 1$ için

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha w(x, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 w(x, \frac{t}{2})}{\partial x^2} w(x, \frac{t}{2}) - w(x, t) \\ w(x, 0) = x^2 \end{cases} \quad (4.7)$$

oransal gecikmeli uyumlu zaman-kesirli mertebeden kısmî diferansiyel denklemini ve başlangıç şartını içeren problemi göz önüne alalım. (Sakar vd., 2016)

4.2.1. Problem-II nin Uq-HADY ile Çözümü

(4.7) denklemine başlangıç koşulu kullanılarak uyumlu Laplace dönüşümünün uygulanmasıyla

$$\mathcal{L}_\alpha [w(x, t)] = \frac{1}{s} w(x, 0) + \frac{1}{s} \mathcal{L}_\alpha \left[\frac{\partial^2 w(x, \frac{t}{2})}{\partial x^2} w(x, \frac{t}{2}) - w(x, t) \right] \quad (4.8)$$

elde edilir. (4.8) denklemini kullanarak doğrusal olmayan

$$N[\varphi(x, t; q)] = \mathcal{L}_\alpha [\varphi(x, t; q)] - \frac{1}{s} x^2 - \frac{1}{s} \mathcal{L}_\alpha \left[\frac{\partial^2 w_r(x, \frac{t}{2}; q)}{\partial x^2} \varphi(x, \frac{t}{2}; q) - \varphi(x, t; q) \right]$$

denklemini tanımlayalım. Önerilen algoritmayı uygulayarak, m inci basamaktan deformasyon denklemleri

$$\mathcal{L}_\alpha [w_m(x, t) - k_m w_{m-1}(x, t)] = h \mathcal{R}_m [\bar{w}_{m-1}] \quad (4.9)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_m [\bar{w}_{m-1}] = & \mathcal{L}_\alpha [\bar{w}_{m-1}(x, t)] - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) \frac{1}{s} x^2 \\ & - \frac{1}{s} \mathcal{L}_\alpha \left[\sum_{r=0}^{m-1} \frac{\partial^2 w_r(x, \frac{t}{2})}{\partial x^2} w_{m-1-r}\left(x, \frac{t}{2}\right) + w_{m-1}(x, t) \right] \end{aligned}$$

dir. (4.9) eşitliğine ters uyumlu Laplace dönüşümü uygulanmasıyla

$$w_m(x,t) = k_m w_{m-1}(x,t) + h \mathcal{L}_\alpha^{-1} \{ \mathcal{R}_m [\bar{w}_{m-1}] \} \quad (4.10)$$

elde edilir. Başlangıç koşulunun kullanılmasıyla

$$w_0(x,t) = x^2$$

elde edilir. $w_1(x,t)$ değerini bulmak için (4.10) denkleminde $m=1$ alınırsa bu durumda

$$w_1(x,t) = -hx^2 \frac{t^\alpha}{\alpha}$$

elde edilir. (4.10) denkleminde $m=2$ alınırsa $w_2(x,t)$ değeri

$$w_2(x,t) = -(n+h) \left(hx^2 \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) + x^2 h^2 \left(\frac{4-2^\alpha}{2^\alpha} \right) \frac{t^{2\alpha}}{2\alpha^2}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde (4.10) denkleminde $m=3$ alınırsa $w_3(x,t)$ değeri

$$w_3(x,t) = -\frac{8x^2h}{3\alpha^3} \left[\frac{3 \left(2^{-\alpha} - \frac{1}{8} \right) (n+h) h \alpha t^{2\alpha}}{2} + 8^{-\alpha} t^{3\alpha} h^2 + \frac{3t^\alpha \alpha^2 (n+h)^2}{8} \right]$$

olarak bulunur. Bu şekilde devam edilirse diğer terimler de bulunabilir. Böylece verilen denklemin Uq-HADY çözümü

$$w(x,t) = w_0(x,t) + \sum_{m=1}^{\infty} w_m(x,t) \left(\frac{1}{n} \right)^m \quad (4.11)$$

olarak elde edilir. Eğer (4.10) eşitliğinde $\alpha=1$, $n=1$ ve $h=-1$ alınırsa bu durumda elde edilen

$$\sum_{m=1}^C w_m(x,t) \left(\frac{1}{n} \right)^m$$

sonuçları $C \rightarrow \infty$ iken verilen denklemin kesin çözümü

$$w(x,t) = x^2 e^t$$

ifadesine yakınsar.

4.2.2. Problem-II nin UKSHPY ile Çözümü

(4.7) denkleminde başlangıç koşulu kullanılarak uyumlu Shehu dönüşümünün uygulanmasıyla

$${}_c S_\alpha [w(x,t)] = \frac{u}{s} x^2 + \frac{u}{s} {}_c S_\alpha \left[\frac{\partial^2 w \left(x, \frac{t}{2} \right)}{\partial x^2} w \left(x, \frac{t}{2} \right) - w(x,t) \right] \quad (4.12)$$

elde edilir. (4.12) eşitliğine ters uyumlu Shehu dönüşümü uygulanırsa

$$w(x,t) = x^2 + ({}_c S_\alpha)^{-1} \left\{ \frac{u}{s} {}_c S_\alpha \left[\frac{\partial^2 w \left(x, \frac{t}{2} \right)}{\partial x^2} w \left(x, \frac{t}{2} \right) - w(x,t) \right] \right\}$$

elde edilir. Homotopi pertürbasyon yönteminin uygulanmasıyla

$$\sum_{m=0}^{\infty} p^m w_m(x,t) = x^2 + p \left[({}_c S_\alpha)^{-1} \left\{ \frac{u}{s} {}_c S_\alpha \left[\sum_{m=0}^{\infty} p^m H_m(w) - \left(\sum_{m=0}^{\infty} p^m w_m(x,t) \right) \right] \right\} \right]$$

elde edilir. Böylece $H_m(w)$ nin ilk birkaç bileşeni aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} H_0(w) &= \frac{\partial^2 w_0 \left(x, \frac{t}{2} \right)}{\partial x^2} w_0 \left(x, \frac{t}{2} \right), \\ H_1(w) &= \frac{\partial^2 w_0 \left(x, \frac{t}{2} \right)}{\partial x^2} w_1 \left(x, \frac{t}{2} \right) + \frac{\partial^2 w_1 \left(x, \frac{t}{2} \right)}{\partial x^2} w_0 \left(x, \frac{t}{2} \right), \\ H_2(w) &= \frac{\partial^2 w_0 \left(x, \frac{t}{2} \right)}{\partial x^2} w_2 \left(x, \frac{t}{2} \right) + \frac{\partial^2 w_1 \left(x, \frac{t}{2} \right)}{\partial x^2} w_1 \left(x, \frac{t}{2} \right) + \frac{\partial^2 w_2 \left(x, \frac{t}{2} \right)}{\partial x^2} w_0 \left(x, \frac{t}{2} \right), \\ &\vdots \end{aligned}$$

p nin kuvvetiyle aynı indise sahip olan katsayıların karşılaştırılmasıyla

$$\begin{aligned} p^0 : w_0(x,t) = x^2, \quad H_0(w) = 2x^2, \\ p^1 : w_1(x,t) = x^2 \frac{t^\alpha}{\alpha}, \quad H_1(w) = \frac{4x^2 t^\alpha}{\alpha 2^\alpha}, \end{aligned}$$

$$p^2 : w_2(x,t) = \frac{x^2(4-2^\alpha)t^{2\alpha}}{2^{\alpha+1}\alpha^2}, \quad H_2(w) = \frac{16x^2t^{2\alpha}}{2^{3\alpha+1}\alpha^2},$$

$$p^3 : w_3(x,t) = \frac{x^2(2^4 - 4 \cdot 2^{2\alpha} + 2^{3\alpha})t^{3\alpha}}{3 \cdot 2^{3\alpha+1}\alpha^3}$$

⋮

elde edilir. Sonuç olarak, UKSHPY için denklem (4.7) nin çözümü

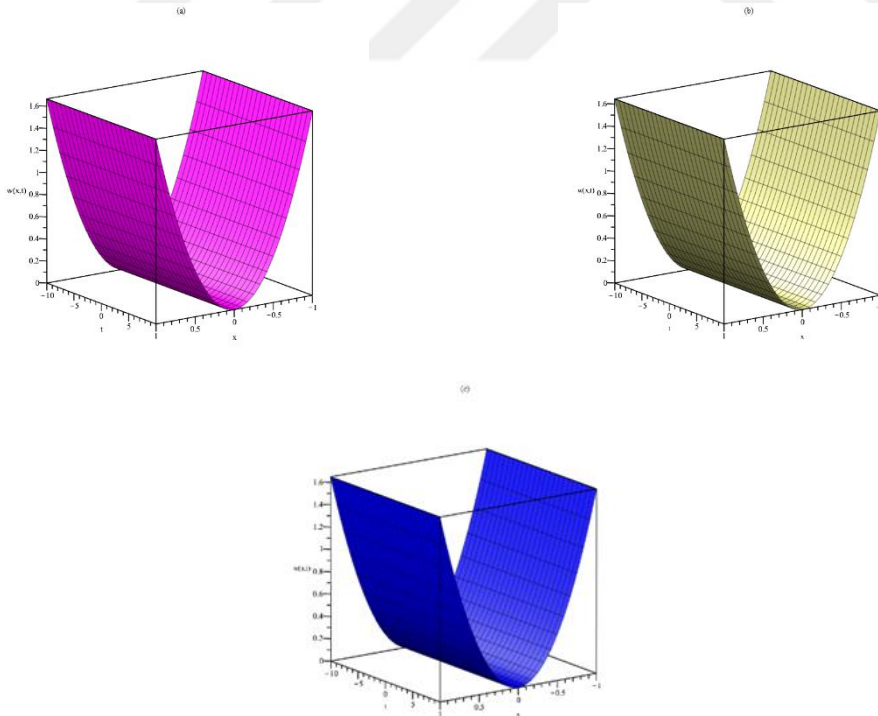
$$w(x,t) = x^2 \left(1 + \frac{t^\alpha}{\alpha} + \frac{(4-2^\alpha)t^{2\alpha}}{2^{\alpha+1}\alpha^2} + \frac{(2^4 - 4 \cdot 2^{2\alpha} + 2^{3\alpha})t^{3\alpha}}{3 \cdot 2^{3\alpha+1}\alpha^3} \right)$$

şeklinde bulunur.

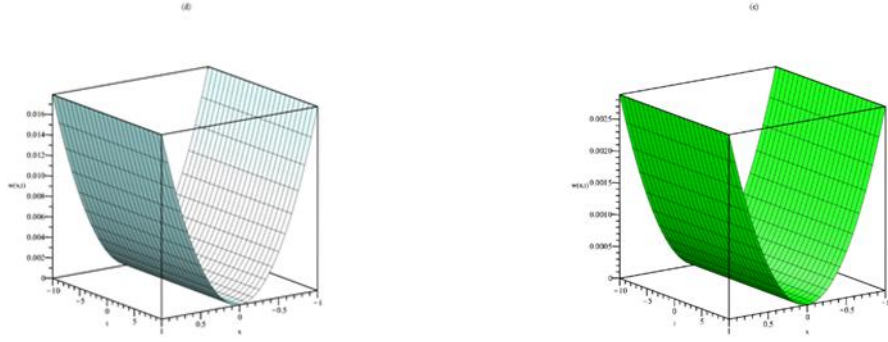
4.2.3. Grafikler ve Bazı Nümerik Değerler

(4.7) ile verilen oransal gecikmeli uyumlu zaman-kesirli mertebeden kısmî diferansiyel denkleminin ilişkin olarak (Sakar vd., 2016);

Şekil 4.3. te, $\alpha = 1$ olduğunda (4.7) ile verilen denklemin kesin çözümünün, Uq-HADY çözümünün, UKSHPY çözümünün, Uq-HADY için mutlak hatanın ve UKSHPY için mutlak hatanın grafikleri gösterilmiştir.

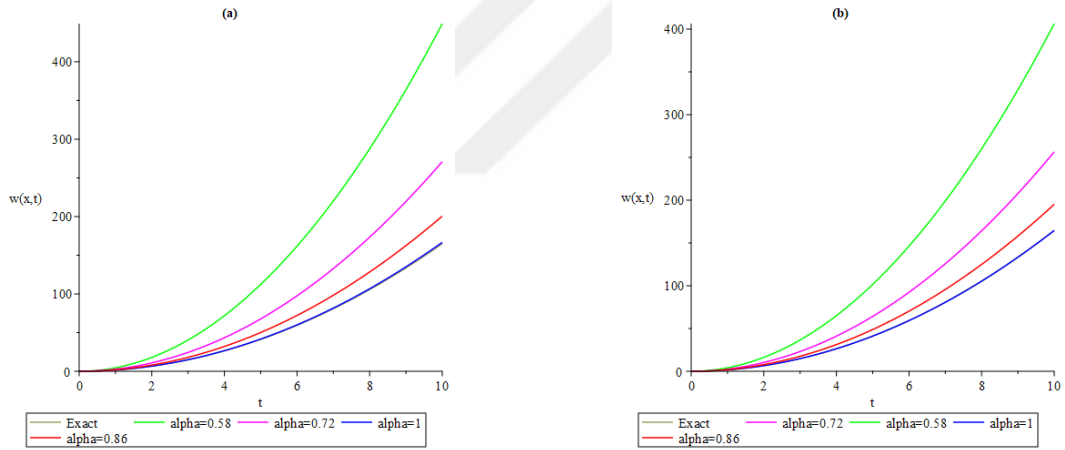


Şekil 4.3. (a) Uq-HADY çözümü (b) UKSHPY çözümü (c) Kesin çözüm (d) Mutlak hata payı $|w_{ke\sin} - w_{Uq-HADY}|$ (e) $h = -1, n = 1, \alpha = 1$ için Mutlak hata payı $|u_{ke\sin} - u_{UKSHPY}|$.



Şekil 4.3. (a) Uq-HADY çözümü (b) UKSHPY çözümü (c) Kesin çözüm (d) Mutlak hata payı $|w_{kesin} - w_{Uq-HADY}|$ (e) $h = -1, n = 1, \alpha = 1$ için Mutlak hata payı $|u_{kesin} - u_{UKSHPY}|$.(devamı)

Şekil 4.4. te, çeşitli α değerleri için (4.7) ile verilen denklemin Uq-HADY ve UKSHPY çözümünün davranışı gösterilmiştir.



Şekil 4.4 (a) α nın farklı değerleri için Uq-HADY çözümlerinin ve kesin çözümün karşılaştırılması (b) α nın farklı değerleri ve $h = -1, n = 1, x = 0.5$ için UKSHPY çözümlerinin ve kesin çözümün karşılaştırılması.

Çizelge 4.6., (4.7) ile verilen denklem için farklı $\alpha = 0.58, \alpha = 0.72, \alpha = 0.86$ ve $\alpha = 1$ değerleri için Uq-HADY ile elde edilen $w(x,t)$ sıcaklığına ait sayısal veriler gösterilmiştir.

Çizelge 4.6. $h = -1$, $n = 1$ ve farklı x ve t değerleri ile farklı α değerleri için (4.7) denkleminin Uq-HADY çözümünün sayısal değerleri

x	t	$\alpha = 0.58$	$\alpha = 0.72$	$\alpha = 0.86$	$\alpha = 1$
0.25	0.25	0.1648194122	0.1111928264	0.09047262722	0.0804036458
	0.50	0.2808111960	0.1692915562	0.1253087786	0.1041666666
	0.75	0.4202222715	0.2436397434	0.1711188328	0.1357421874
	1.00	0.5816624291	0.3353252558	0.2298608781	0.1770833334
0.50	0.25	0.6592776490	0.4447713057	0.3618905088	0.3216145834
	0.50	1.1232447840	0.6771662248	0.5012351148	0.4166666666
	0.75	1.6808890850	0.9745589741	0.6844753311	0.5429687500
	1.00	2.3266497160	1.3413010230	0.9194435124	0.7083333334
0.75	0.25	1.4833747100	1.0007354380	0.8142536449	0.7236328126
	0.50	2.5273007640	1.5236240050	1.127779008	0.9375000000
	0.75	3.7820004430	2.1927576920	1.540069495	1.2216796870
	1.00	5.2349618610	3.0179273020	2.068747902	1.5937500000

Çizelge 4.7., Farklı $\alpha = 0.58$, $\alpha = 0.72$, $\alpha = 0.86$ ve $\alpha = 1$ değerleri için UKSHPY çözümü ile elde edilen $w(x,t)$ sıcaklığına ait sayısal veriler gösterilmiştir.

Çizelge 4.7. Farklı x ve t değerleri ile farklı α değerleri için (4.7) denkleminin UKSHPY çözümünün sayısal değerleri

x	t	$\alpha = 0.58$	$\alpha = 0.72$	$\alpha = 0.86$	$\alpha = 1$
0.25	0.25	0.1568008432	0.1091969740	0.08992121464	0.0802408854
	0.50	0.2540263556	0.1603717952	0.1220116639	0.1028645833
	0.75	0.3659862465	0.2222251252	0.1617335037	0.1313476562
	1.00	0.4921916428	0.2954615189	0.2101461204	0.1666666667
0.50	0.25	0.6272033731	0.4367878960	0.3596848585	0.3209635417
	0.50	1.0161054230	0.6414871809	0.4880466560	0.4114583333
	0.75	1.4639449850	0.8889005011	0.6469340150	0.5253906250
	1.00	1.9687665710	1.1818460750	0.8405844816	0.6666666667
0.75	0.25	1.4112075890	0.9827727661	0.8092909317	0.7221679688
	0.50	2.2862372010	1.4433461570	1.0981049760	0.9257812500
	0.75	3.2938762180	2.0000261280	1.4556015340	1.1821289060
	1.00	4.4297247850	2.6591536700	1.8913150830	1.5000000000

Çizelge 4.8. de, $\alpha = 1$ için Uq-HADY çözümü, kesin çözüm ve (Sakar vd., 2016) daki HPY çözümü karşılaştırılmıştır.

Çizelge 4.8. $\alpha = 1$ için kesin çözümün Uq-HADY ve HPY (Sakar vd., 2016) ile karşılaştırılması

x	t	Kesin çözüm	Uq – HADY	HPY (Sakar vd., 2016)
0.25	0.25	0.0802515885	0.0804036458	0.0824381510
	0.50	0.1030450794	0.1041666666	0.1126302084
	0.75	0.1323125011	0.1357421874	0.1555175781
	1.00	0.1698926142	0.1770833334	0.2135416666
0.50	0.25	0.3210063542	0.3216145834	0.3297526040
	0.50	0.4121803178	0.4166666666	0.4505208335
	0.75	0.5292500042	0.5429687500	0.6220703125
	1.00	0.6795704570	0.7083333334	0.8541666665
0.75	0.25	0.7222642971	0.7236328126	0.7419433590
	0.50	0.9274057149	0.9375000000	1.0136718750
	0.75	1.1908125100	1.2216796870	1.3996582030
	1.00	1.5290335280	1.5937500000	1.9218750000

Çizelge 4.9. $\alpha = 1$ için UKSHPY çözümünü hem kesin çözümle hem de (Sakar vd, 2016) daki HPY çözümüyle karşılaştırılmıştır.

Çizelge 4.9. $\alpha = 1$ için kesin çözümün UKSHPY ve HPY (Sakar vd., 2016) ile karşılaştırılması

x	t	Kesin çözüm	UKSHPY	HPY (Sakar vd., 2016)
0.25	0.25	0.0802515885	0.0802408854	0.0824381510
	0.50	0.1030450794	0.1028645833	0.1126302084
	0.75	0.1323125011	0.1313476562	0.1555175781
	1.00	0.1698926142	0.1666666667	0.2135416666
0.50	0.25	0.3210063542	0.3209635417	0.3297526040
	0.50	0.4121803178	0.4114583333	0.4505208335
	0.75	0.5292500042	0.5253906250	0.6220703125
	1.00	0.6795704570	0.6666666667	0.8541666665
0.75	0.25	0.7222642971	0.7221679688	0.7419433590
	0.50	0.9274057149	0.9257812500	1.0136718750
	0.75	1.1908125100	1.1821289060	1.3996582030
	1.00	1.5290335280	1.5000000000	1.9218750000

Çizelge 4.10., Uq-HADY, UKSHPY ve HPY arasındaki mutlak hata payını göstermektedir. Çizelge 4.10. da önerilen yöntemlerin HPY den çok daha küçük hatalar ürettiği gözlemlenmiştir.

Çizelge 4.10. $\alpha = 1$ için Uq-HADY, UKSHPY ve HPY (Sakar vd., 2016) arasındaki mutlak hata payı

x		t			
		0.025	0.050	0.075	0.1
Uq-HADY	0.25	$1.61x10^{-7}$	$1.28x10^{-6}$	$4.31x10^{-6}$	$1.01x10^{-5}$
UKSHPY		$1.05x10^{-9}$	$1.64x10^{-8}$	$8.36x10^{-8}$	$2.65x10^{-7}$
HPY		$1.97x10^{-5}$	$8.00x10^{-5}$	$1.82x10^{-4}$	$3.27x10^{-4}$
Uq-HADY	0.50	$6.46x10^{-7}$	$5.14x10^{-6}$	$1.72x10^{-5}$	$4.06x10^{-5}$
UKSHPY		$4.20x10^{-9}$	$6.57x10^{-8}$	$3.34x10^{-7}$	$1.06x10^{-6}$
HPY		$7.90x10^{-5}$	$3.20x10^{-4}$	$7.29x10^{-4}$	$1.31x10^{-3}$
Uq-HADY	0.75	$1.27x10^{-8}$	$1.15x10^{-5}$	$3.87x10^{-5}$	$9.13x10^{-4}$
UKSHPY		$1.27x10^{-8}$	$1.47x10^{-7}$	$7.52x10^{-7}$	$2.39x10^{-6}$
HPY		$1.28x10^{-8}$	$7.20x10^{-4}$	$1.64x10^{-3}$	$2.95x10^{-3}$

4.3. Problem-III

Her $x, t \in [0, 1]$ ve $0 < \alpha \leq 1$ için

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha w(x, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 w\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right)}{\partial x^2} \frac{\partial w\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right)}{\partial x} - \frac{1}{8} \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - w(x, t) \\ w(x, 0) = x^2 \end{cases} \quad (4.13)$$

başlangıç koşulunu içeren oransal gecikmeli uyumlu zaman-kesirli mertebeden Burgers denklemini göz önüne alalım. (Singh & Kumar, 2017)

4.3.1. Problem-III ün Uq-HADY ile Çözümü

(4.13) denkleminin uyumlu Laplace dönüşümünün uygulanmasıyla ve başlangıç koşulu kullanılarak

$$\mathcal{L}_\alpha [w(x, t)] = \frac{1}{s} w(x, 0) + \frac{1}{s} \mathcal{L}_\alpha \left[\frac{\partial^2 w\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right)}{\partial x^2} \frac{\partial w\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right)}{\partial x} - \frac{1}{8} \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - w(x, t) \right] \quad (4.14)$$

elde edilir. (4.14) denklemini kullanarak doğrusal olmayan

$$N[\varphi(x,t;q)] = \mathcal{L}_\alpha[\varphi(x,t;q)] - \frac{1}{s}x^2 - \frac{1}{s}\mathcal{L}_\alpha \left[\frac{\partial^2 w\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}; q\right)}{\partial x^2} \frac{\partial w\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}; q\right)}{\partial x} - \frac{1}{8} \frac{\partial w(x,t;q)}{\partial x} - w(x,t;q) \right]$$

denklemini tanımlayalım. Önerilen algoritmayı uygulayarak, m inci basamaktan deformasyon denklemleri

$$\mathcal{L}_\alpha[w_m(x,t) - k_m w_{m-1}(x,t)] = h\mathcal{R}_m[\bar{w}_{m-1}] \quad (4.15)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$\mathcal{R}_m[\bar{w}_{m-1}] = \mathcal{L}_\alpha[\bar{w}_{m-1}(x,t)] - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) \frac{1}{s}x^2 - \frac{1}{s}\mathcal{L}_\alpha \left[\sum_{r=0}^{m-1} \frac{\partial^2 w_r\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right)}{\partial x^2} \frac{\partial w_r\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right)}{\partial x} - \frac{1}{8} \frac{\partial w_{m-1}(x,t)}{\partial x} - w_{m-1}(x,t) \right]$$

dir. (4.15) eşitliğine ters uyumlu Laplace dönüşümü uygulanmasıyla

$$w_m(x,t) = k_m w_{m-1}(x,t) + h\mathcal{L}_\alpha^{-1}\{\mathcal{R}_m[\bar{w}_{m-1}]\} \quad (4.16)$$

elde edilir. Başlangıç koşulunun kullanılmasıyla

$$w_0(x,t) = x^2$$

elde edilir. $w_1(x,t)$ değerini bulmak için (4.16) denkleminde $m=1$ alınırsa bu durumda

$$w_1(x,t) = hx^2 \frac{t^\alpha}{\alpha}$$

elde edilir. (4.16) denkleminde $m=2$ alınırsa $w_2(x,t)$ değeri

$$w_2(x,t) = (n+h) \left(hx^2 \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) - h^2 \left(\frac{x}{2.2^\alpha} - \frac{x}{4} - x^2 \right) \frac{t^{2\alpha}}{2\alpha^2}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde diğer terimler elde edilebilir. Böylece denklemin Uq-HADY çözümü

$$w(x,t) = w_0(x,t) + \sum_{m=1}^{\infty} w_m(x,t) \left(\frac{1}{n}\right)^m \quad (4.17)$$

olarak elde edilir. Eğer (4.17) eşitliğinde $\alpha = 1$, $n = 1$ ve $h = -1$ alınırsa bu durumda

elde edilen $\sum_{m=1}^C w_m(x,t) \left(\frac{1}{n}\right)^m$ sonuçları $C \rightarrow \infty$ iken denklemin kesin çözümü

$$w(x,t) = x^2 e^{-t}$$

ifadesine yakınsar.

4.3.2. Problem-III ün UKSHPY ile Çözümü

(4.13) denkleminin uyumlu Shehu dönüşümünün uygulanmasıyla ve başlangıç koşulu kullanılarak

$${}_c S_\alpha [w(x,t)] = \frac{u}{s} x^2 + \frac{u}{s} {}_c S_\alpha \left[\frac{\partial^2 w\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right)}{\partial x^2} \frac{\partial w\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right)}{\partial x} - \frac{1}{8} \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} - w(x,t) \right] \quad (4.18)$$

elde edilir. (4.18) eşitliğine ters uyumlu Shehu dönüşümü uygulanırsa

$$w(x,t) = x^2 + ({}_c S_\alpha)^{-1} \left\{ \frac{u}{s} {}_c S_\alpha \left[\frac{\partial^2 w\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right)}{\partial x^2} \frac{\partial w\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right)}{\partial x} - \frac{1}{8} \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} - w(x,t) \right] \right\}$$

elde edilir. Homotopi pertürbasyon yönteminin uygulanmasıyla

$$\sum_{m=0}^{\infty} p^m w_m(x,t) = x^2 + p \left[({}_c S_\alpha)^{-1} \left\{ \frac{u}{s} {}_c S_\alpha \left[\sum_{m=0}^{\infty} p^m H_m(w) - \frac{1}{8} \sum_{m=0}^{\infty} p^m \frac{\partial w_m(x,t)}{\partial x} - \sum_{m=0}^{\infty} p^m w_m(x,t) \right] \right\} \right]$$

elde edilir. Böylece $H_m(w)$ nin ilk birkaç bileşeni aşağıdaki gibidir:

$$H_0(w) = \frac{\partial^2 w_0\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right)}{\partial x^2} \frac{\partial w_0\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right)}{\partial x},$$

$$H_1(w) = \frac{\partial^2 w_0\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right)}{\partial x^2} \frac{\partial w_1\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right)}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_1\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right)}{\partial x^2} \frac{\partial w_0\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right)}{\partial x},$$

$$H_2(w) = \frac{\partial^2 w_0\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right)}{\partial x^2} \frac{\partial w_2\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right)}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_1\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right)}{\partial x^2} \frac{\partial w_1\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right)}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_2\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right)}{\partial x^2} \frac{\partial w_0\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right)}{\partial x},$$

$$\vdots$$

p nin kuvvetiyle aynı indise sahip olan katsayıların karşılaştırılmasıyla

$$p^0 : w_0(x, t) = x^2, \quad H_0(w) = \frac{x}{4},$$

$$p^1 : w_1(x, t) = -x^2 \frac{t^\alpha}{\alpha}, \quad H_1(w) = \frac{-xt^\alpha}{2\alpha 2^\alpha},$$

$$p^2 : w_2(x, t) = -h^2 \left(\frac{x}{2 \cdot 2^\alpha} - \frac{x}{4} - x^2 \right) \frac{t^{2\alpha}}{2\alpha^2}, \quad H_2(w) = -\frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{4 \cdot 2^\alpha} - \frac{1}{8} - \frac{x}{2} \right) \frac{t^{2\alpha}}{2^{2\alpha+1} \alpha^2}$$

$$+ \frac{xt^{2\alpha}}{2^{2\alpha+2} \alpha^2} + \frac{h^2}{2} \frac{xt^{2\alpha}}{2^{2\alpha+3} \alpha^2}$$

elde edilir. Sonuç olarak, UKSHPY için denklem (4.13) ün çözümü

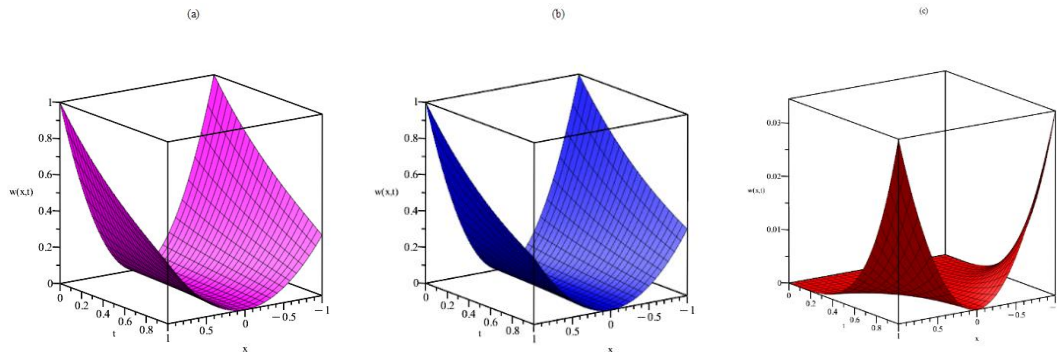
$$w(x, t) = x^2 - x^2 \frac{t^\alpha}{\alpha} - h^2 \left(\frac{x}{2 \cdot 2^\alpha} - \frac{x}{4} - x^2 \right) \frac{t^{2\alpha}}{2\alpha^2}$$

şeklinde verilir.

4.3.3. Grafikler ve Bazı Nümerik Değerler

(4.13) ile verilen oransal gecikmeli uyumlu zaman-kesirli mertebeden genelleştirilmiş Burgers denkleminin ilişkili olarak;

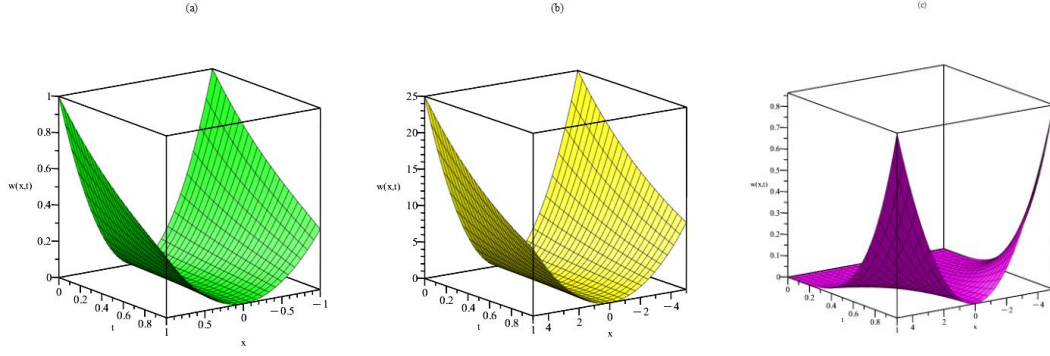
Şekil 4.5. te Uq-HADY, kesin çözüm ve mutlak hata payı grafiklerini gösterilmektedir.



Şekil 4.5. (a) Uq-HADY çözümü (b) Kesin çözüm (c) $h = -1, n = 1, \alpha = 1$ için

$$\text{Mutlak hata payı } |w_{kesin} - w_{Uq-HADY}|.$$

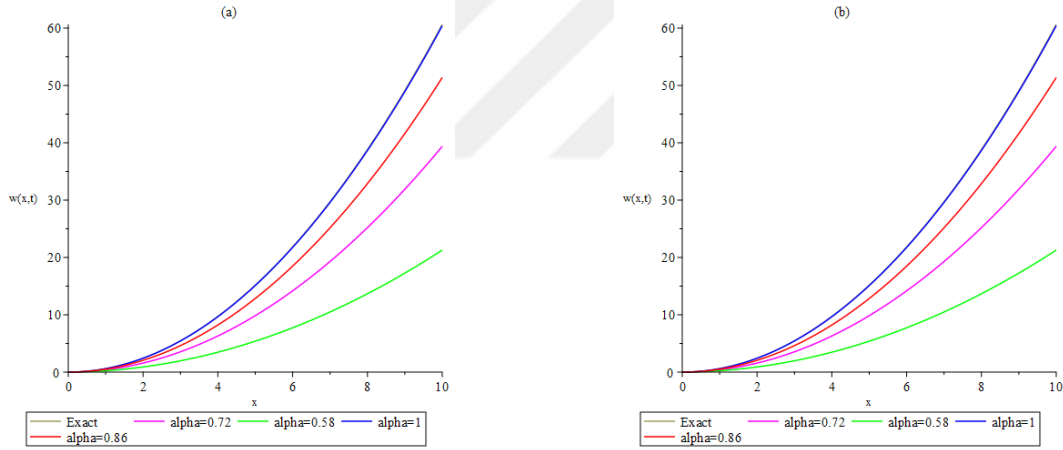
Şekil 4.6. da UKSHPY, kesin çözüm ve mutlak hata payı grafikleri gösterilmektedir.



Şekil 4.6. (a) UKSHPY çözümü (b) Kesin çözüm (c) $\alpha = 1$ için Mutlak hata payı

$$|W_{kesin} - W_{UKSHPY}|$$

Şekil 4.7. de Uq-HADY, UKSHPY nin grafiklerinin karşılaştırılması ve farklı α değerleri için kesin çözümleri gösterilmektedir.



Şekil 4.7. (a) α nın farklı değerleri için Uq-HADY çözümlerinin ve kesin çözümün karşılaştırılması (b) α nın farklı değerleri ve $h = -1$, $n = 1$, $t = 0.5$ için UKSHPY çözümlerinin ve kesin çözümün karşılaştırılması.

Çizelge 4.11. de (4.13) ile verilen oransal gecikmeli uyumlu zaman-kesirli mertebeden genelleştirilmiş Burgers denkleminin $\alpha = 1$ için Uq-HADY, UKSHPY ve KVIY arasındaki mutlak hata payının karşılaştırılması gösterilmiştir.

Çizelge 4.11. $\alpha = 1$ olmak üzere (4.13) denklemi için Uq-HADY, UKSHPY ve KVİY (Singh & Kumar, 2017) arasındaki mutlak hatanın karşılaştırılması

x		t			
		0.025	0.050	0.075	0.1
Uq-HADY	0.25	1.0×10^{-9}	1.6×10^{-8}	8.1×10^{-8}	2.5×10^{-7}
	UKSHPY	1.0×10^{-9}	1.6×10^{-8}	8.1×10^{-8}	2.5×10^{-7}
	KVİY	5.8×10^{-5}	2.3×10^{-4}	5.3×10^{-4}	9.4×10^{-4}
Uq-HADY	0.50	4.0×10^{-9}	6.4×10^{-6}	3.2×10^{-7}	1.0×10^{-6}
	UKSHPY	4.0×10^{-9}	6.4×10^{-6}	3.2×10^{-7}	1.0×10^{-6}
	KVİY	2.3×10^{-4}	9.4×10^{-4}	2.1×10^{-3}	3.7×10^{-3}
Uq-HADY	0.75	9.1×10^{-9}	1.4×10^{-7}	7.3×10^{-7}	2.2×10^{-6}
	UKSHPY	9.1×10^{-9}	1.4×10^{-7}	7.3×10^{-7}	2.2×10^{-6}
	KVİY	5.2×10^{-4}	2.1×10^{-3}	4.7×10^{-3}	8.5×10^{-3}

Çizelge 4.11. den önerilen yöntemlerin KVİY ile aynı, hatta daha iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde, oransal gecikmeli uyumlu zaman-kesirli mertebeden genelleştirilmiş Burgers denklemlerinin uyumlu q-homotopi analiz dönüşüm yöntemi (Uq-HADY) ve uyumlu kesirli Shehu homotopi pertürbasyon yöntemi (UKSHPY) ile çözümleri verilmiştir. Ayrıca bu denklemlerin farklı α değerleri için çözüm grafikleri MAPLE programı aracılığıyla elde edilmiştir.

Şekil 4.1. de, $\alpha = 1$ için Uq-HADY çözümü, UKSHPY çözümü, kesin çözüm, Uq-HADY için mutlak hata ve UKSHPY için mutlak hata grafikleri gösterilmiştir.

Şekil 4.2. de $h = -1$, $n = 1$, $x = 0.5$ olmak üzere α nın farklı değerleri için denklem (4.1) e ait Uq-HADY çözümlerinin ve kesin çözümünün karşılaştırılması ile UKSHPY çözümlerinin ve kesin çözümünün karşılaştırılması gösterilmiştir.

Çizelge 4.1. de, $\alpha = 0.58$, $\alpha = 0.72$, $\alpha = 0.86$ ve $\alpha = 1$ değerlerine karşılık Uq-HADY çözümüyle elde edilen $w(x, t)$ sıcaklığına ait bazı sayısal değerler verilmiştir.

Çizelge 4.2. de, $\alpha = 0.58$, $\alpha = 0.72$, $\alpha = 0.86$ ve $\alpha = 1$ değerlerine karşılık UKSHPY tarafından elde edilen $w(x, t)$ sıcaklığına ait bazı sayısal değerler verilmiştir.

Çizelge 4.3. te, $\alpha = 1$ için Uq-HADY çözümü, (Sakar vd, 2016) daki kesin çözüm ve HPY ile çözümü karşılaştırılmıştır.

Çizelge 4.4. te, $\alpha = 1$ için UKSHPY çözümünü kesin çözümle ve (Sakar vd, 2016) daki HPY çözümüyle karşılaştırılması verilmiştir.

Çizelge 4.5. te, Uq-HADY, UKSHPY ve HPY ile kesin çözüm arasındaki fark mutlak hata olarak hesaplanmıştır. Uq-HADY, UKSHPY ve HPY için mutlak hata, Çizelge 4.5. te gösterildiği gibi hemen hemen aynıdır.

Şekil 4.3. te, $\alpha = 1$ olduğunda (4.7) ile verilen denklemin kesin çözümünün, Uq-HADY çözümünün, UKSHPY çözümünün, Uq-HADY için mutlak hatanın ve UKSHPY için mutlak hatanın grafikleri gösterilmiştir.

Şekil 4.4. te, çeşitli α değerleri için (4.7) ile verilen denklemin Uq-HADY ve UKSHPY çözümünün davranışı gösterilmiştir.

Çizelge 4.6., (4.7) ile verilen denklem için farklı $\alpha = 0.58$, $\alpha = 0.72$, $\alpha = 0.86$ ve $\alpha = 1$ değerleri için Uq-HADY ile elde edilen $w(x,t)$ sıcaklığına ait sayısal verileri gösterir.

Çizelge 4.7., Farklı $\alpha = 0.58$, $\alpha = 0.72$, $\alpha = 0.86$ ve $\alpha = 1$ değerleri için UKSHPY çözümü ile elde edilen $w(x,t)$ sıcaklığına ait sayısal verileri gösterir.

Çizelge 4.8. de, $\alpha = 1$ için Uq-HADY çözümü, kesin çözüm ve (Sakar vd., 2016) daki HPY çözümü karşılaştırılır.

Çizelge 4.9. $\alpha = 1$ için UKSHPY çözümünü hem kesin çözümle hem de (Sakar vd, 2016) daki HPY çözümüyle karşılaştırır.

Çizelge 4.10., Uq-HADY, UKSHPY ve HPY arasındaki mutlak hata payını göstermektedir. Çizelge 4.10. da önerilen yöntemlerin HPY den çok daha küçük hatalar ürettiği gözlemlenmiştir.

Şekil 4.5. te Uq-HADY, kesin çözüm ve mutlak hata payı grafiklerini gösterilmektedir.

Şekil 4.6. da UKSHPY, kesin çözüm ve mutlak hata payı grafikleri gösterilmektedir.

Şekil 4.7. de Uq-HADY, UKSHPY nin grafiklerinin karşılaştırılması ve farklı α değerleri için kesin çözümleri gösterilmektedir.

Çizelge 4.11. de (4.13) ile verilen oransal gecikmeli uyumlu zaman-kesirli mertebeden genelleştirilmiş Burgers denkleminin $\alpha = 1$ için Uq-HADY, UKSHPY ve KVİY arasındaki mutlak hata payının karşılaştırılması gösterilmiştir. Çizelge 4.11. de önerilen yöntemlerin KVİY ile aynı ve hatta daha iyi sonuçları verdiği gözlemlendi.

Problem I-II-III için çizdirilen iki ve üç boyutlu grafiklerden Uq-HADY, UKSHPY çözümlerinin kesin çözümlere çok iyi yakınsadığı görülmüştür. Bu problemler için oluşturulan çizelgelerde sayısal sonuçların x değeri sabit olduğunda t değerinin artışına göre değişimlerini gösterilmiştir. Çizelge 4.4., 4.5., 4.8., 4.9. ve 4.11. de önerilen metotlar ile kesin çözüm arasındaki mutlak hatanın çok küçük olduğu görülmüştür. Doğrusal olmayan uyumlu zaman-kesirli mertebeden kısmî diferansiyel denklemlerin oransal gecikme ile çözümü için yeni önerilen yöntemlerin hem yararlı hem de verimli olduğu söylenebilir.

KAYNAKLAR

- Abazari, R., & Ganji, M. (2011). Extended two-dimensional DTM and its application on nonlinear PDEs with proportional delay. *International Journal of Computer Mathematics*, 88(8), 1749-1762.
- Abazari, R., & Kılıcman, A. (2014). Application of differential transform method on nonlinear integro-differential equations with proportional delay. *Neural Computing and Applications*, 24, 391-397.
- Abdeljawad, T. (2015). On conformable fractional calculus. *Journal of computational and Applied Mathematics*, 279, 57-66.
- Ala, V., Demirbilek, U., & Mamedov, K. R. (2020). An application of improved Bernoulli sub-equation function method to the nonlinear conformable time-fractional SRLW equation. *AIMS Mathematics*, 5(4), 3751-3761.
- Alkan, A. (2022). Improving homotopy analysis method with an optimal parameter for time-fractional Burgers equation. *Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi Mühendislik ve Doğa Bilimleri Dergisi*, 4(2), 117-134.
- Benattia, M. E., & Belghaba, K. (2021). Shehu conformable fractional transform, theories and applications. *Cankaya University Journal of Science and Engineering*, 18(1), 24-32.
- Biazar, J., & Ghanbari, B. (2012). The homotopy perturbation method for solving neutral functional-differential equations with proportional delays. *Journal of King Saud University-Science*, 24(1), 33-37.
- Chen, X., & Wang, L. (2010). The variational iteration method for solving a neutral functional-differential equation with proportional delays. *Computers & Mathematics with Applications*, 59(8), 2696-2702.
- Gambo, Y. Y., Jarad, F., Baleanu, D., & Abdeljawad, T. (2014). On Caputo modification of the Hadamard fractional derivatives. *Advances in difference equations*, 2014(1), 1-12.
- Gözütok, N. Y., & Gözütok, U. (2017). Multivariable conformable fractional calculus. arXiv preprint arXiv:1701.00616.
- Gözütok, U., Çoban, H., & SAĞIROĞLU, Y. (2019). Frenet frame with respect to conformable derivative. *Filomat*, 33(6), 1541-1550.
- Jackiewicz, Z., & Zubik-Kowal, B. (2006). Spectral collocation and waveform relaxation methods for nonlinear delay partial differential equations. *Applied Numerical Mathematics*, 56(3-4), 433-443.
- Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., & Sababheh, M. (2014). A new definition of fractional derivative. *Journal of computational and applied mathematics*, 264, 65-70.

- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., and Trujillo, J. J., (2006). *Theory and applications of fractional differential equations*. Amsterdam: Elsevier B.V.
- Liao, S. (2009). Notes on the homotopy analysis method: some definitions and theorems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14(4), 983-997.
- Mead, J., & Zubik-Kowal, B. (2005). An iterated pseudospectral method for delay partial differential equations. *Applied numerical mathematics*, 55(2), 227-250.
- Miller, K. S., & Ross, B. (1993). *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. Wiley.
- Mittag-Leffler, G. M. (1903). Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences*, 137, 554-558.
- Oldham, K., & Spanier, J. (1974). *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*. Elsevier.
- Podlubny, I. (1999) Fractional Differential Equations, vol. 198 of Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, San Diego.
- Sakar, M. G., Uludag, F., & Erdogan, F. (2016). Numerical solution of time-fractional nonlinear PDEs with proportional delays by homotopy perturbation method. *Applied Mathematical Modelling*, 40(13-14), 6639-6649.
- Singh, B. K., & Kumar, P. (2017). Fractional variational iteration method for solving fractional partial differential equations with proportional delay. *International journal of differential equations*, 2017.
- Tanthanuch, J. (2012). Symmetry analysis of the nonhomogeneous inviscid Burgers equation with delay. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17(12), 4978-4987.
- Zubik-Kowal, B. (2000). Chebyshev pseudospectral method and waveform relaxation for differential and differential-functional parabolic equations. *Applied numerical mathematics*, 34(2-3), 309-328.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Abdullah KARTAL

Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl) :

Lisans : Kırıkkale Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2009

Yüksek Lisans : Kırıkkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı, 2023

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl/Yıllar : EGM 2011-2023

Yayımları (Diğer) :

KARTAL, A., Halil, A. N. A. Ç., & OLGUN, A. (2023). Numerical Solution of Conformable Time Fractional Generalized Burgers Equation with Proportional Delay by New Methods. Karadeniz Fen Bilimleri Dergisi, 13(2), 310-335.2. (Tezden Çıkan Yayın)

KARTAL, A., ANAÇ, H., & OLGUN, A. (2023). The New Numerical Solutions of Conformable Time Fractional Generalized Burgers Equation with Proportional Delay. Gümüşhane Fen Bilimleri Dergisi (Kabul edildi).

Araştırma Alanları : Kesirli kısmî diferansiyel denklemler, Stokastik Kısmî Diferansiyel Denklemler, Kısmî Diferansiyel Denklemler