

## WEIBULL PARAMETRELERİ VE YÜZDELİKLERİ İÇİN GÜVEN ARALIĞI TAHMİN ALGORİTMALARI

**Mehmet Akif DANACI, Burak BİRGÖREN ve Süleyman ERSÖZ**

Endüstri Mühendisliği Bölümü, Mühendislik Fakültesi, Kırıkkale Üniversitesi 71451, Kampus, Kırıkkale  
[madanaci@kku.edu.tr](mailto:madanaci@kku.edu.tr), [birgoren@kku.edu.tr](mailto:birgoren@kku.edu.tr), [sersoz@kku.edu.tr](mailto:sersoz@kku.edu.tr)

(Geliş/Received: 15.04.2008 ; Kabul/Accepted: 27.10.2008)

### ÖZET

Bu çalışmada, istatistiksel parça güvenilirliğinde Weibull dağılımının kullanımı için tahmin algoritmaları ele alınmıştır. Son yıllarda küçük örneklerde Weibull parametreleri ve alt yüzdelikleri için güven aralıkları ve güven alt sınırlarının tahmini giderek artan bir önem kazanmıştır. Pahalı veya uzun süren deneylerde küçük örnek hacimleri ile çalışmak ekonomik açıdan bir zorunluluktur, diğer taraftan örnek hacmi küçüldükçe tahminler daha güvenilir hale gelir. Bu yüzden, küçük örnek hacimleri için tahmin algoritmalarının genel bir çerçevede kıyaslamalı ele alınması ve hızlı çalışan programlara dönüştürülmesi bir ihtiyaç haline gelmiştir. Bu çalışmada, tamamlanmış veriler için Weibull uyumluluk testlerini yapan, Weibull parametrelerinin ve yüzdeliklerinin en çok olabilirlik ve ağırlıklı en küçük kareler yöntemleriyle nokta tahminlerini ve benzetime dayalı güven aralığı tahminlerini gerçekleştiren algoritmalar geliştirilmiştir. Algoritmalar bilgisayar ortamında standart C++ programlama dili ile yazılarak aynı ortak arayüz altında birleştirilmiştir. Literatürde yer alan benzer çalışmalar, düşük benzetim tekrar sayıları ile örnek hacminin, güven düzeyinin ve hata olasılığının sınırlı sayıdaki değerleri için yapılmıştır; tablolar halinde sunulan benzetim sonuçlarının formüllerde yerine konarak kullanımı gerekmektedir. Bu çalışmada geliştirilen algoritmalar ise, örnek hacminin, güven düzeyinin ve hata olasılığının kullanıcı tarafından belirlenecek değerleri için benzetim deneyleri çalıştırıp tahminleri makul sürelerde hesaplama imkanı sunmaktadır. Benzetim hatası, yüksek benzetim tekrar sayıları seçilerek düşük düzeylerde tutulabilmektedir. Geliştirilen algoritma arayüzünün kullanımı DC motorların hata zamanlarına ait tamamlanmış veriler üzerinde gösterilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Güvenilirlik analizi, weibull dağılımı, en çok olabilirlik, ağırlıklı en küçük kareler, güven aralığı, benzetim.

## ESTIMATION ALGORITHMS FOR WEIBULL PARAMETERS AND PERCENTILES

### ABSTRACT

This study concerns the use of Weibull distribution in statistical component reliability. Recently, estimation of confidence intervals and confidence lower bounds for Weibull parameters and percentiles in small samples has received increasing attention in the literature. In expensive or long experiments, it is crucial to keep the sample size to a minimum, however, the estimates become less reliable as the sample size decreases. Therefore, it has become a necessity to perform a comparative study of estimation algorithms for small sample sizes and code them in an efficient manner. In this study, uncensored reliability data have been considered; algorithms have been developed for goodness-of-fit tests, point and confidence interval estimation for parameters and percentiles by the maximum likelihood and weighted least squares methods based on simulation. The algorithms have been generated in the standard C++ language and integrated under a computer interface. Similar studies in the literature were performed only for a limited number of failure probabilities, confidence levels and sample sizes with low simulation run numbers; the user has to use coefficients and formulae obtained from the simulations to produce the estimates. In contrast, the algorithms developed in this study allow the user to perform simulations with any run number, failure probability, confidence level and sample size, and calculate the estimates in a

reasonable amount of time. The simulation error can be kept at low levels by specifying large simulation run numbers. Also, the application of the interface has been illustrated on failure times of DC motors.

**Keywords:** Reliability analysis, weibull distribution, maximum likelihood, weighted least squares, confidence interval, simulation.

## 1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Güvenilirlik analizleri, bir sistem, bir sisteme bağlı alt sistem veya bir sistemin içinde yer alan kritik bir parça veya ürün güvenilirliğinin ölçülmesi, hesaplanması ve değerlendirilmesi işlemidir. Güvenilirlik çalışmaları tek bir parça için yapılabildiği gibi, bazı parçaların seri ve bazı parçaların paralel bağlandığı bütün bir sistem için de yapılabilir. Bu çalışma parça güvenilirliğini ele almaktadır.

Güvenilirliğin tahmin edilmesi ve gerekli hesapların yapılabilmesi için her şeyden önce tanımlanması gerekmektedir. Birçok alanda kullanılıyor olması ve farklı alanlarda farklı ölçütlerle değerlendirmesi, güvenilirlik için genel bir tanımlama yapılmasını zorlaştırır. Bu yüzden literatürde farklı güvenilirlik tanımlarına rastlamak mümkündür. Ancak birçok kaynakta bu tanımlardan genel kabul görmüş olanı: “Herhangi bir parçanın, ürünün, sistemin veya alt sistemin belirli şartlar altında istenilen emniyet düzeyinde, belirlenen süre boyunca fonksiyonunu hatasız olarak yerine getirebilme olasılığıdır”[1] şeklindedir. Tanımda yer alan “olasılık” kelimesi birimin çalışma veya çalışmama durumunun kesinlik arz etmediği anlamına gelir. Bu nedenle olasılık hesabı içeren güvenilirlik analizleri, rassal değişkenler ve olasılık dağılımları kullanılarak yapılır. Parçaların hata (arıza) yapıcaya kadar geçen süreleri farklılık gösterir. Rassal olan bu süre, bir rassal değişken olarak tanımlanarak parçaya uygun bir olasılık dağılımıyla karakterize edilir. Güvenilirlik analizinde rassal değişken genellikle parça kullanıma başladıktan sonra ilk hataya kadar geçen süredir; buna kısaca *hata zamanı* adı verilir. Ancak değişik uygulamalarda farklı ölçütler de kullanılabilir: bir milin dönme sayısı, bir otomobil lastiğinin kilometre cinsinden kat ettiği mesafe, bir anahtar parçanın işlem sayısı, bir malzemenin kopma mukavemeti gibi...

Güvenilirlik analizi çalışmalarında küçük örnek hacimleriyle analiz yapılması istenir. Çünkü bu çalışmalarda, zaman ile parça ve işçilik önemli maliyet kalemleridir. Güvenilirlik analizi için uygulanan ömür testleri genellikle çok pahalı deneylerdir ve uzun zaman almaktadır. Bu nedenle yapılan analizlerde küçük örneklerden istatistiksel açıdan olabildiğince kesin sonuçlar elde etmek gerekmektedir.

Güvenilirlik çalışmalarında en yaygın kullanım alanına sahip olasılık dağılımı Weibull dağılımıdır [1]. Weibull dağılımı, kuvvet karakteristiği eğrisinin, aşınma, kullanışlı ömür ve yıpranma dönemleri olarak adlandırılan tüm dönemlerini karakterize edebilme yeteneğine sahiptir.

Bir başka ifadeyle, Weibull dağılımı hata hızının artan, azalan ve sabit olduğu durumların hepsinde kullanılabilirliği için esnek bir güvenilirlik modeli sunar [1, 2].

Küçük örneklerde genellikle örnekteki her parçanın hata zamanını gözlemek mümkündür, bu durumda gözlenen hata zamanları tamamlanmış veri olarak nitelenir. Çok uzun sürecek deneylerde ise tüm hata zamanları ölçülmeden deney belli bir noktada durdurulur; bu durumda da durdurulmuş veriler elde edilir.

Bu çalışmada tamamlanmış veriler ele alınmış, Weibull dağılımıyla parça güvenilirliği analizi yapan, özellikle küçük örneklerde tahmin hatasını kesin olarak ortaya koyabilen kapsamlı bir program geliştirilmiştir. Bu amaçla Weibull uyumluluk testlerinin yapılması [3], Weibull parametrelerinin ve yüzdelliklerinin en çok olabilirlik ve ağırlıklı en küçük kareler yöntemleriyle tahmin edilmesi, parametre ve yüzdelliklere ait kesin güven aralıklarının benzetim yöntemiyle üretilmesi için standart C++ programlama dili [4] ile algoritmalar geliştirilerek bir ortak bilgisayar arayüzü altında birleştirilmiştir.

Weibull parametrelerinin, en çok olabilirlik yöntemiyle tahmini, sayısal kök bulma algoritmaları kullanılarak, ağırlıklı en küçük kareler yöntemiyle tahmini regresyon formülleri kullanılarak yapılmaktadır. Parametreler ve yüzdellikler için kesin güven aralıkları ve güven alt sınırlarının tahmini ise parametre tahmin algoritmalarını tekrarlı çalıştıran Monte-Carlo benzetim algoritmalarıyla sağlanmaktadır.

Bundan sonraki bölümde Weibull dağılımı hakkında bilgi verilerek konuyla ilgili akademik literatür taraması sunulmaktadır. Üçüncü bölümde Weibull parametre ve yüzdelliklerinin nokta ve aralık tahminleri ele alınmaktadır. Dördüncü bölümde geliştirilen algoritma ve bilgisayar arayüzü izah edilmekte, beşinci bölümde bilgisayar arayüzünün kullanımı, literatürden seçilen veriler üzerinde açıklanmaktadır. Son bölümde ise yapılan çalışmanın önemine değinilerek akademik ve mühendislik literatürüne katkıları tartışılmaktadır.

## 2. WEIBULL DAĞILIMI (WEIBULL DISTRIBUTION)

Weibull dağılımı ilk olarak W. Weibull tarafından malzeme özelliklerinin modellenmesi amacıyla önerilmiştir [5]; günümüzde biyoloji, mühendislik, kalite kontrol ve diğer birçok alanda deneysel verilere iyi uyum gösterdiği için yaygın şekilde kullanılmaktadır. Eğer bir parçanın hata zamanı  $T$ , aşağıdaki birikimli dağılım fonksiyonuna sahipse,  $T$  rassal değişkeninin iki

parametrelili Weibull dağıldığı söylenir [6, 7].

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-(t/\alpha)^\beta}, \quad t > 0 \quad (1)$$

Burada  $F(t)$ , bir birimin  $t$  zamanından önce hata yapma olasılığıdır;  $\alpha$  ve  $\beta$  sırasıyla dağılımın ölçek ve şekil parametreleri olup  $\alpha > 0$  ve  $\beta > 0$ 'dır [6, 7]. Bu parametrelerden  $\beta$  ile kuvvet karakteristiği eğrisinin farklı dönemleri karakterize edilebilir [2, 8]. Eğer  $\beta > 1$  ise artan hata hızı,  $\beta < 1$  ise azalan hata hızı söz konusudur [8].

Tamamlanmış veriler için Weibull analizinde, aynı tür parçaya ait farklı numunelerin ömür testine tabi tutulmasıyla hata zamanları gözlenir. Eğer bu gözlemler Weibull dağılımına uyumlu ise  $\alpha$  ve  $\beta$  parametreleri gözlemlerden tahmin edilir. Bu amaçla çeşitli yöntemler kullanılmaktadır. En çok kullanılan tahmin yöntemleri, en çok olabilirlik, ağırlıklı en küçük kareler ve moment yöntemleridir [7]. Ancak moment yöntemiyle kesin güven aralıkları üretilemediğinden bu çalışmada moment yöntemi dışındaki yöntemler ele alınmıştır.

Weibull parametrelerinin en çok olabilirlik tahminçileri üzerinde kapsamlı olarak çalışılmıştır. Literatürde, parametre tahmini ve parametreler için güven aralıkları oluşturulması ile ilgili teori ortaya konmuş [6], bu hesaplamalar için sayısal kök bulma algoritmalarının nasıl kullanılacağı ele alınmıştır [6, 9, 10, 11]. Parametrelerin ağırlıklı en küçük kareler yöntemleriyle tahmini için de formüller üretilmiş, güven aralıklarının nasıl oluşturulacağı gösterilmiştir [10, 12, 13]. En çok olabilirlik yöntemiyle parametre tahmini yapan ve benzetim kullanarak parametreler için kesin güven aralıkları oluşturan bir C++ programı geliştirilmiştir [9]. Hem en çok olabilirlik hem de en küçük kareler tahmin yöntemlerini kullanarak bu hesaplamaları gerçekleştiren FORTRAN programları da geliştirilmiştir [14, 15]. Ancak FORTRAN programları, güven aralıklarını benzetim yöntemi yerine asimptotik yöntemlerle oluşturduğundan küçük örnek hacimleri için doğru sonuçlar vermemektedir. Hesaplamalar için programlama dilleri dışında bir alternatif sunan Wasserman [16], Microsoft Excel® programı kullanarak en küçük kareler yöntemiyle bu hesaplamaların nasıl yapılacağını göstermiştir.

Weibull dağılımı son yıllarda mühendislik alanlarındaki güvenilirlik çalışmalarının odak konularından biridir. Malzemelerin mekanik özelliklerinin modellenmesinin artan önemi bu konudaki çalışmaların yoğunlaşmasına neden olmuştur [9,17]. Belli hata olasılıklarına karşılık gelen Weibull alt yüzdeleri için güven aralıkları ve güven alt sınırlarının belirlenmesi, mühendislik çalışmaları açısından oldukça önemlidir. Bu hesaplamalar, her aşaması Weibull parametre tahmini gerektiren karmaşık bir benzetim süreci içerir. Fernandez-Saez vd [10], Weibull alt yüzdelerinin en çok olabilirlik ve ağırlıklı en küçük kareler yöntemleriyle tahmin edilmesi ve güven alt sınırlarının oluşturulmasını için teorik esasları

ve benzetim sürecini geliştirmiştir. Ayrıca belli güven düzeyleri ve alt yüzdeler için alt sınırların oluşturulmasını sağlayan tablolar üretmiştir. Barbero vd [11] farklı bir yaklaşımla, iki farklı alt yüzde için %95 güven düzeyinde güven alt sınırlarının hesaplanabilmesi amacıyla benzetim sonuçlarına eğriler uydurarak ürettikleri formüllerin kullanılmasını önermektedir. Bu iki çalışmada önerilen yöntemlerde [10, 11],  $\alpha$  ve  $\beta$  parametre tahmin değerleri hesaplandıktan sonra bilgisayar benzetimine gerek duyulmaksızın alt yüzdeler için güven alt sınırları hesaplanabilir. Fakat hesaplamalar belli güven düzeyleri ve alt yüzdelerle sınırlıdır, ayrıca her iki yöntemde kullanılan benzetim çalışmaları düşük tekrar sayılarıyla yapılmıştır ve benzetim hatası içermektedir. Benzer bir çalışmada Birgören vd [9], en çok olabilirlik yöntemiyle kullanıcının belirleyeceği yüzde ve güven düzeyi değerleri için güven alt sınır değerlerini hesaplayan bir benzetim programı geliştirmiştir.

Bunların yanı sıra güven alt sınırlarının hesaplanmasında en çok olabilirlik ve ağırlıklı en küçük kareler yöntemlerinin performansını kıyaslayan çalışmalar da yapılmış, en iyi performansı veren ağırlık değerleri üretilmiştir [12, 13].

### 3. WEIBULL PARAMETRELERİ VE YÜZDELERİ İÇİN NOKTA VE ARALIK TAHMİNİ (POINT AND INTERVAL ESTIMATION FOR WEIBULL PARAMETERS AND WEIBULL PERCENTILES)

#### 3.1. Weibull Parametrelerinin Tahmini için Kullanılan Yöntemler (Methods used For Estimation of Weibull Parameters)

Uyumluluk testleriyle hata zamanlarının Weibull dağıldığı gösterildikten sonra güvenilirlik analizi yapılacak parçadan rasgele  $n$  adet numune alınıp deneye tabi tutulur ve bağımsız hata zamanları ölçülür. Bu gözlemlerden oluşan örnek  $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  olsun. Bu örnekteki hata zamanlarını kullanarak parametre tahmini yapan iki yöntem aşağıda açıklanmaktadır.

##### 3.1.1. En çok olabilirlik yöntemiyle tahmin (Estimation with the maximum likelihood method)

Bu yöntem aşağıdaki eşitlikleri kullanarak bilinmeyen  $\alpha$  ve  $\beta$  parametreleri için bunların tahminçileri  $\hat{\alpha}$  ve  $\hat{\beta}$ 'yi hesaplar [6].

$$\sum_{i=1}^n \ln t_i - n \left( \frac{\sum_{i=1}^n \ln t_i (t_i)^{\hat{\beta}}}{\sum_{i=1}^n (t_i)^{\hat{\beta}}} \right) + \frac{n}{\hat{\beta}} = 0 \quad (2)$$

$$\hat{\alpha} = \left( \frac{\sum_{i=1}^n (t_i)^{\hat{\beta}}}{n} \right)^{1/\hat{\beta}} \quad (3)$$

Eşitlik 2 sayısal kök bulma yöntemlerinden biriyle çözülebilir. Daha sonra Eşitlik 3,  $\hat{\alpha}$ 'yı doğrudan verir. Eşitlik 2'nin çözümünde köke hızlı yakınsaması nedeniyle Newton-Raphson yöntemi tercih edilmektedir [18]. Newton-Raphson yinelemeleri için genel döngü denklemi;

$$\hat{\beta}_{k+1} = \hat{\beta}_k + \frac{A + (1/\hat{\beta}_k) - C_k/B_k}{1/\hat{\beta}_k^2 + (B_k H_k - C_k^2)/B_k^2} \quad (4)$$

şeklinde; burada  $A = \sum_{i=1}^n \ln t_i / n$ ,  $B = \sum_{i=1}^n t_i^{\hat{\beta}_k}$ ,

$$C_k = \sum_{i=1}^n t_i^{\hat{\beta}_k} \ln t_i, H_k = \sum_{i=1}^n t_i^{\hat{\beta}_k} (\ln t_i)^2 \text{ 'dir.}$$

Yinelemeler için başlangıç noktası olarak;

$$\beta_0 = \left[ 6 / (\pi^2 (n-1)) \left( \sum_{i=1}^n (\ln t_i)^2 - \left( \sum_{i=1}^n \ln t_i \right)^2 / n \right) \right]^{-1/2} \quad (5)$$

kullanılır [18].

### 3.1.2. Ağırlıklı en küçük kareler yöntemiyle tahmin (Estimation with the weighted least squares method)

Bağımsız hata zamanlarından oluşan  $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  örneği için  $t_{(1)} < t_{(2)} < \dots < t_{(n)}$  sıra istatistik değerleri olsun. Eşitlik 1'e çift logaritmik dönüşüm uygulanmasıyla

$$\ln \left\{ \ln \left( 1 / (1 - F(t)) \right) \right\} = \beta \ln t - \beta \ln a \quad (6)$$

elde edilir [10]. Eşitlik 6'da

$$Y = \ln \left\{ \ln \left( 1 / (1 - F(t)) \right) \right\}, a = \beta, \ln t = x, \beta \ln a = b$$

alınırsa, eşitliğin  $Y = aX + b$  biçiminde bir regresyon denklemi olduğu görülür. Denklemin çözülebilmesi için Y değerlerinin, dolayısıyla  $F(t)$  değerlerinin bilinmesi gerekir.  $F(t)$  için en yaygın tahminciler şunlardır [10]:

$$\hat{F}(t_{(i)}) = (i - 0.5) / n \quad (7a)$$

$$\hat{F}(t_{(i)}) = (i - 0.3) / (n + 0.4) \quad (7b)$$

$$\hat{F}(t_{(i)}) = i / (n + 1) \quad (7c)$$

Bu  $F(t)$  tahmincilerinden biri Eşitlik 6'da kullanıldığında basit en küçük kareler yöntemiyle  $\hat{\alpha}$  ve  $\hat{\beta}$  şöyle hesaplanır:

$$z_{(i)} = \ln t_{(i)} \text{ ve } y_{(i)} = \ln \left\{ \ln \left( 1 / (1 - \hat{F}(t_{(i)})) \right) \right\}$$

olmak üzere;

$$\hat{\beta} = \frac{\left( \sum z_{(i)} y_{(i)} \right) - \left( \sum z_{(i)} \right) \left( \sum y_{(i)} \right)}{\left( \sum z_{(i)}^2 \right) - \left( \sum z_{(i)} \right)^2} \quad (8)$$

ve  $a = \left( \sum y_{(i)} - \hat{\beta} \sum z_{(i)} \right)$  olmak üzere

$$\hat{\alpha} = e^{-a/\hat{\beta}} \quad (9)$$

şeklinde. Dolayısıyla tahmin edilen basit regresyon denklemi şöyledir:

$$\ln \left\{ \ln \left( 1 / (1 - \hat{F}(t_{(i)})) \right) \right\} = \hat{\beta} \ln t_{(i)} - \beta \ln \hat{\alpha} + \varepsilon_i \quad (10)$$

Bazı araştırmacılar, doğrusal regresyonun oluşturulmasında ağırlık faktörlerinin kullanılmasının uygunluğuna değinmişlerdir [10]. Çünkü en küçük kareler yöntemi, artıkların ( $\varepsilon_i$ ) aynı varyansa sahip olduğu varsayımına dayanır, ancak Eşitlik 10 için bu varsayım geçersizdir. Ağırlıklı en küçük kareler yöntemi uygun ağırlık faktörlerinin seçimiyle varyansları eşitleyerek bu problemi ortadan kaldırır ve daha iyi tahmin değerleri üretir. Bazı araştırmacılar tarafından geliştirilmiş ağırlık faktörleri  $W(t)$  şöyledir:

Bergman tarafından önerilen ağırlık faktörleri [19];

$$W(t_{(i)}) = \left[ (1 - \hat{F}(t_{(i)})) \ln(1 - \hat{F}(t_{(i)})) \right]^2 \quad (11a)$$

Faucher vd tarafından önerilen ağırlık faktörleri [20];

$$W(t_{(i)}) = 3.3 \hat{F}(t_{(i)}) - 27.5 \left[ 1 - (1 - \hat{F}(t_{(i)}))^{0.025} \right] \quad (11b)$$

Hung tarafından geliştirilen ağırlık faktörleri [21];

$$W(t_{(i)}) = \frac{\left[ (1 - \hat{F}(t_{(i)})) \ln(1 - \hat{F}(t_{(i)})) \right]^2}{\sum \left[ (1 - \hat{F}(t_{(i)})) \ln(1 - \hat{F}(t_{(i)})) \right]^2} \quad (11c)$$

Ağırlıklı en küçük kareler yöntemi ile Weibull parametrelerinin tahmincileri şu şekilde elde edilir.

$$z_{(i)} = \ln t_{(i)}, y_{(i)} = \ln \left\{ \ln \left( 1 / (1 - \hat{F}(t_{(i)})) \right) \right\}$$

olmak üzere

$$\hat{\beta} = \frac{(\sum W(t_{(i)}))(\sum W(t_{(i)})z_{(i)}y_{(i)}) - (\sum W(t_{(i)})z_{(i)})(\sum W(t_{(i)})y_{(i)})}{(\sum W(t_{(i)}))(\sum W(t_{(i)})z_{(i)}^2) - (\sum W(t_{(i)})z_{(i)})^2} \quad (12)$$

ve

$$a = \left( \sum W(t_{(i)})y_{(i)} - \hat{\beta} \sum W(t_{(i)})z_{(i)} \right) / \sum W(t_{(i)})$$

olmak üzere

$$\hat{\alpha} = e^{-a/\hat{\beta}} \quad (13)$$

şeklinde dir.

Weibull parametre tahminleri, seçilen  $F(t_{(i)})$  ve  $W(t_{(i)})$  tanımlarına göre çeşitlilik gösterir.  $W(t_{(i)}) = 1$  olması durumunda, basit en küçük kareler denklemlerine yani Eşitlik 8 ve Eşitlik 9'a dönüşür.

### 3.2. Weibull Yüzdelerinin Tahmini (Estimation of Weibull Percentiles)

Bir parçanın hata zamanının  $p$  gibi küçük bir olasılıkla altında kalacağı  $t_p$  alt yüzdelerinin hesaplanması mühendislik çalışmaları açısından çok önemlidir [11-13, 17].

$$P(t \leq t_p) = p \quad (14)$$

eşitliği  $t_p$  ve  $p$  arasındaki ilişkiyi ifade eder. Eşitlik 1'deki dağılım fonksiyonuna göre;

$$F(t_p) = P(t \leq t_p) = p \quad (15)$$

olur. Bu eşitlik çözüldüğünde;

$$t_p = \alpha \left[ \ln(1/(1-p)) \right]^{1/\beta} \quad (16)$$

elde edilir. Weibull parametreleri  $\alpha$  ve  $\beta$  yerine, bunların tahminçileri  $\hat{\alpha}$  ve  $\hat{\beta}$  kullanılarak,  $\hat{t}_p$  tahminçisi şu şekilde üretilir:

$$\hat{t}_p = \hat{\alpha} \left[ \ln(1/(1-p)) \right]^{1/\hat{\beta}} \quad (17)$$

Eşitlik 17'de en çok olabilirlik, en küçük kareler ya da ağırlıklı en küçük kareler yöntemlerinden elde edilen  $\hat{\alpha}$  ve  $\hat{\beta}$  değerleri kullanılabilir.

### 3.3. Weibull Parametreleri ve Yüzdeleri için Aralık Tahminleri (Interval Estimations for Weibull Parameters and Weibull Percentiles)

Parametre tahminçileri  $\hat{\alpha}$  ve  $\hat{\beta}$ , en çok olabilirlik ya da ağırlıklı en küçük kareler yöntemlerinden biriyle elde edildiğinde  $\hat{\beta}/\beta$  ve  $\hat{\beta} \ln(\hat{\alpha}/\alpha)$  değişkenleri  $\alpha$  ve  $\beta$  parametrelerinden bağımsız dağılır [6, 10]. Weibull parametreleri ve yüzdeleri için kesin güven aralıkları bu özellik sayesinde Monte-Carlo benzetimi kullanılarak elde edilir. Merkezi limit teoremi ve benzeri yaklaşımlarla güven aralığı üreten başka yöntemler de vardır, fakat bunlar güven aralıklarını yaklaşık olarak ürettikleri ve küçük örnek hacimlerinde büyük hatalara yol açabildiklerinden bu çalışmada ele alınmamıştır [22].

#### 3.3.1. Şekil parametresi için aralık tahmini (Interval estimation for the shape parameter)

Bu özellik nedeniyle,  $\beta=1$  alındığında  $\hat{\beta}/\beta$  ile  $\hat{\beta}$  değişkenlerinin aynı dağılıma sahip olduğu görülür. Dolayısıyla,

$$P(t_{1-\gamma/2} < \hat{\beta}/\beta < t_{\gamma/2}) = 1 - \gamma \quad (18)$$

eşitliğinde  $\hat{\beta}/\beta$  yerine  $\hat{\beta}$  kullanılarak bu değişkenin benzetimiyle  $t_{1-\gamma/2}$  ve  $t_{\gamma/2}$  değerleri hesaplanır. Ardından Eşitlik 18'in yeniden düzenlenmesiyle  $\beta$  için  $(1-\gamma)$  güven düzeyinde güven aralığı,

$$\left[ \hat{\beta}/t_{\gamma/2}, \hat{\beta}/t_{1-\gamma/2} \right] \quad (19)$$

şeklinde elde edilir [6].

#### 3.3.2. Ölçek parametresi için aralık tahmini (Interval estimation for the scale parameter)

Yine aynı özellik nedeniyle  $\alpha=1$  alındığında  $\hat{\beta} \ln(\hat{\alpha}/\alpha)$  ile  $\hat{\beta} \ln(\hat{\alpha})$  değişkenlerinin aynı dağılıma sahip olduğu görülür. Dolayısıyla,

$$P[s_{1-\gamma/2} < \hat{\beta} \ln(\hat{\alpha}/\alpha) < s_{\gamma/2}] = 1 - \gamma \quad (20)$$

eşitliğinde  $\hat{\beta} \ln(\hat{\alpha}/\alpha)$  yerine  $\hat{\beta} \ln(\hat{\alpha})$  kullanılarak bu değişkenin benzetimiyle  $s_{1-\gamma/2}$  ve  $s_{\gamma/2}$  değerleri hesaplanır. Ardından Eşitlik 20'nin yeniden düzenlenmesiyle  $\alpha$  için  $(1-\gamma)$  güven düzeyinde güven aralığı şu şekilde oluşturulur [6]:

$$\left[ \hat{\alpha} e^{-(s_{\gamma/2}/\hat{\beta})}, \hat{\alpha} e^{-(s_{1-\gamma/2}/\hat{\beta})} \right] \quad (21)$$

### 3.3.3. Yüzdeler için aralık tahmini (Interval estimation for the percentiles)

Eşitlik 16 ve 17 birleştirilerek

$$\hat{\beta} \ln(\hat{t}_p/t_p) = \hat{\beta} \ln(\hat{\alpha}/\alpha) + (1 - \hat{\beta}/\beta) \ln(\ln(1/1-p)) \quad (22)$$

elde edilir [10]. Eşitlik 22'nin sağ tarafında  $\hat{\beta}/\beta$  ve  $\hat{\beta} \ln(\hat{\alpha}/\alpha)$ ,  $\alpha$  ve  $\beta$  parametrelerinden bağımsız dağıldığı için  $\hat{\beta} \ln(\hat{t}_p/t_p)$  değişkeni de aynı özelliğe sahiptir. Dolayısıyla

$$P\left[c_{1-\gamma/2} \leq \hat{\beta} \ln(\hat{t}_p/t_p) \leq c_{\gamma/2}\right] = 1 - \alpha \quad (23)$$

eşitliğinde  $\hat{\beta} \ln(\hat{t}_p/t_p)$  değişkeninin benzetimiyle  $c_{1-\gamma/2}$  ve  $c_{\gamma/2}$  değerleri hesaplanır. Benzetimde değişken değerleri, Eşitlik 22'de  $\alpha=1$  ve  $\beta=1$  alınarak üretilir [10]. Ardından Eşitlik 23'ün yeniden düzenlenmesiyle Weibull alt yüzdeliği  $t_p$  için  $(1-\gamma)$  güven düzeyinde güven aralığı,

$$\left[ \hat{t}_p e^{-(c_{\gamma/2}/\hat{\beta})}, \hat{t}_p e^{-(c_{1-\gamma/2}/\hat{\beta})} \right] \quad (24)$$

Şeklinde elde edilir [8, 10]. Mühendisler genellikle  $t_p$  için sadece bir güven alt sınırı oluşturulmasıyla ilgilenerler. Bu durumda tek yanlı bir güven aralığı oluşturulur:

$$\left[ \hat{t}_p e^{-(c_{\gamma}/\hat{\beta})}, \infty \right] \quad (25)$$

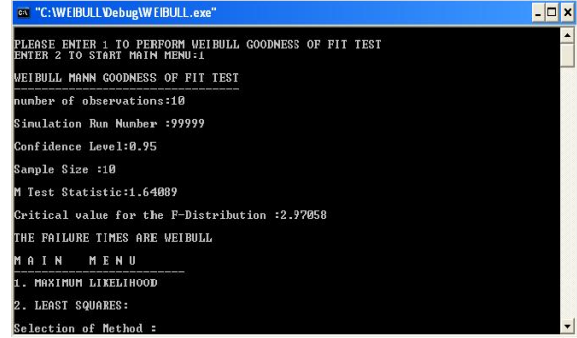
Eşitlik 25'te  $\hat{t}_p e^{-(c_{\gamma}/\hat{\beta})}$ ,  $(1-\gamma)$  güven düzeyinde güven alt sınırıdır.

## 4. BİLGİSAYAR ARAYÜZÜ VE ALGORİTMALAR (COMPUTER INTERFACE AND ALGORITHMS)

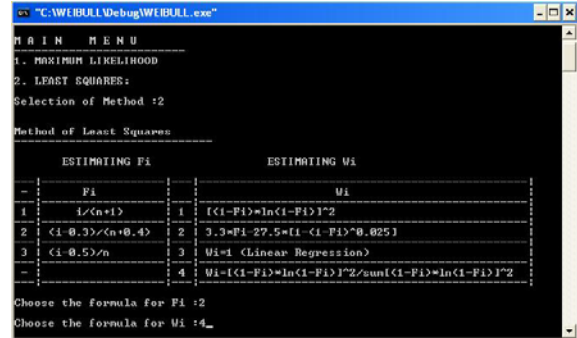
Weibull dağılımıyla parça güvenilirliği analizi yapmak için öncelikle hata zamanlarının Weibull dağılımının doğrulanması gerekir. Bu amaçla sıkça kullanılan iki uyumluluk test yöntemi vardır. Bunlardan biri grafik test yöntemidir [16]; çalışmanın uygulama bölümünde bu yöntemin nasıl kullanılacağı izah edilmektedir. Diğer yöntem, Mann vd [3] tarafından geliştirilen ve hipotez testlerine dayanan istatistiksel bir yöntemdir. Bu çalışmada Mann test yöntemi programlanarak algoritma arayüzüne eklenmiştir. Ancak bilinen eski bir yöntem olduğu ve orijinal haliyle programlandığı için ayrıntılarına burada yer verilmemiştir.

Bilgisayar arayüzü öncelikle kullanıcıya Mann yöntemiyle [3] verilerin Weibull uyumluluğunu test etme olanağı sunar; Şekil 1'de bir örnek uygulama ekranı yer almaktadır. Ardından parametre ve yüzdeler tahmini ve güven aralıklarının oluşturulması için yöntem belir-

lenir. Kullanıcı, en çok olabilirlik ve en küçük kareler yöntemlerinden birini seçebilmektedir (Şekil 1). Eğer en küçük kareleri seçerse; Şekil 2'de görüldüğü gibi Eşitlik 7a-7c'de verilen  $F_i$  tahmincilerinden ve Eşitlik 11a-11c'de verilen  $W_i$  faktörlerinden birini (ya da basit en küçük kareler için  $W(t)=1$  değerini) belirlemektedir.



Şekil 1. Bilgisayar arayüzü - uyumluluk testi (Computer interface – goodness of fit test)



Şekil 2. Bilgisayar arayüzü - yöntem seçimi (Computer interface – selection of method)

Parametre tahmin algoritmaları, 4.1. ve 4.2. bölümlerde verilen yöntem ve eşitlikleri kullanarak gözlenen hata zamanları için  $\hat{\alpha}$  ve  $\hat{\beta}$  değerlerini hesaplar. Güven aralıklarını hesaplayan algoritmalar ise Eşitlik 19, 21, 24 ve 25'te verilen güven aralıklarını Monte-Carlo benzetimiyle üretir.

Benzetim sürecinin her adımında  $[0,1]$  aralığında düzgün dağılmış  $n$  adet rassal sayı üretilir. Eğer  $u$  böyle bir rassal sayı ise  $t_{i11} = \ln(1/u)$ ,  $\alpha=1$  ve  $\beta=1$  parametrelili Weibull dağılmış bir rassal sayıdır [18]. Bu bağıntı düzgün rassal sayılara uygulanarak, Weibull dağılmış  $n$  adet rassal sayı elde edilir. Bunlara seçilen tahmin yönteminin uygulanmasıyla sırasıyla  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta} \ln(\hat{\alpha})$  ve kullanıcının belirleyeceği bir  $p$  değeri Eşitlik 22'de kullanılarak  $\hat{\beta} \ln(\hat{t}_p/t_p)$  değerleri hesaplanır.

Benzetim adımlarının  $R$  kez tekrarlanmasıyla  $R$  adet  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\beta} \ln(\hat{\alpha})$  ve  $\hat{\beta} \ln(\hat{t}_p/t_p)$  değişken değeri elde edilir. Ardından her değişken için değerler küçükten büyüğe sıralanır. Değişkenlerin  $[(R+1)(1-\gamma)]$ 'inci değerleri sırası-

yla  $t_p$ ,  $s_p$  ve  $c_{p/2}$ 'nin;  $[(R+1)p]$ 'inci değerleri  $t_{1-p}$ ,  $s_{1-p}$  ve  $c_{1-p}$ 'nin tahminçileridir. Bu değerlerin Eşitlik 19, 21, 24 ve 25'te kullanılmasıyla parametre ve alt yüzdeler için güven aralıkları elde edilir. Benzetim tekrar sayısı  $R = 100000$  gibi yüksek değerler seçilerek benzetim tahmin hataları ihmal edilebilecek düzeylere inmektedir [9, 17].

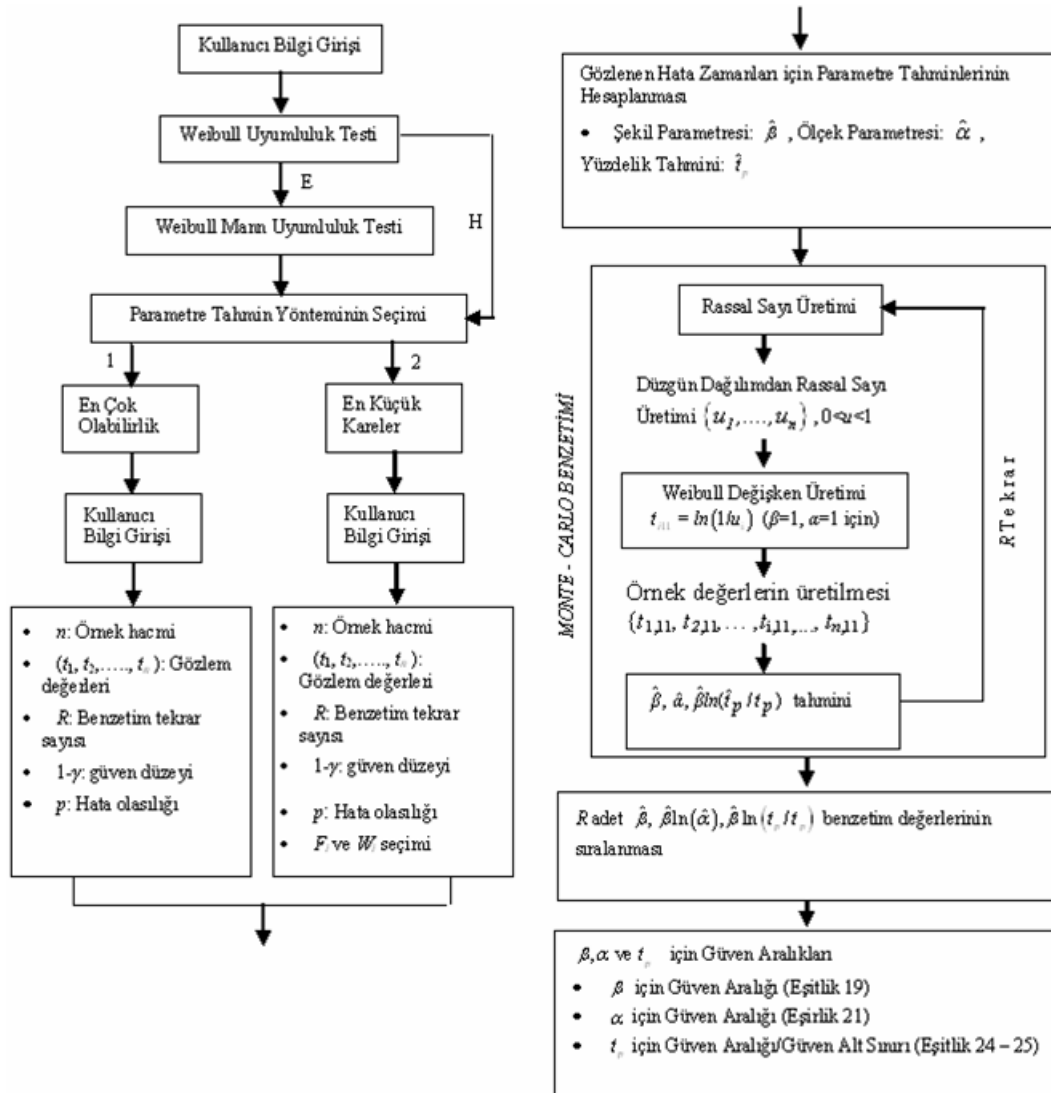
Şekil 3'te bilgisayar arayüzü ve algoritmaların işleyişi gösterilmektedir.

### 5. UYGULAMA (APPLICATION)

Bu bölümde, bilgisayar arayüzünün Weibull analizinde nasıl kullanılacağı literatürden seçilen bir ömür testi üzerinde açıklanmaktadır. Ömür testinde

10 adet DC motorun 3V gerilim altında hata zamanları gözlenmiştir [2]. Her motor hata ortaya çıkana kadar çalıştırılıp hata zamanları kaydedilmiştir; bu değerler Tablo 1'de verilmektedir.

Şekil 1'de verilen Mann uyumluluk testi bu gözlemlere aittir; test istatistik değeri  $M=1.64089$ , kritik değer  $F=2.97058$ 'den küçük olduğu için gözlemlerin Weibull dağıldığı kabul edilmiştir. Mann test yöntemine alternatif olan grafik test yöntemi, bilgisayar arayüzünde bulunmamakla birlikte Ms Excel® ya da benzeri bir program yardımıyla kolaylıkla uygulanabilir [16]. Bu yöntemde hata zamanlarının doğal logaritmik değerleri  $x$  eksenini; birikimli Weibull olasılıkları  $y$  eksenini oluşturur. Dolayısıyla Tablo 1'deki  $t_i$  değerlerinden  $(x, y)$  nokta çiftleri



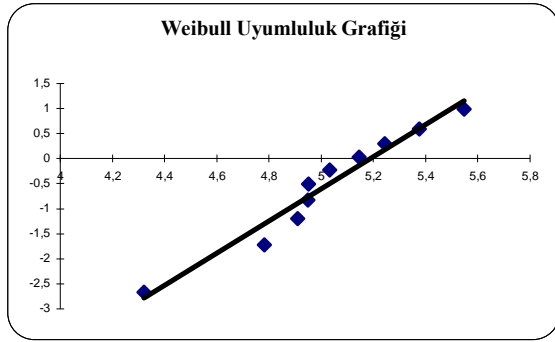
Şekil 3. Bilgisayar arayüzü ve algoritma akış şeması (Computer interface and algorithm flow diagram)

Tablo 1. DC Motorların hata zamanları (Failure times of DC motors)

| Test No                      | 1      | 2      | 3     | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      | 10     |
|------------------------------|--------|--------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Hata zamanı ( $t_i$ ) [Saat] | 153.49 | 119.32 | 75.34 | 141.53 | 215.92 | 135.55 | 189.43 | 171.64 | 140.98 | 256.71 |

$$(x, y) = \left( \ln(t_i), \ln \left\{ \ln \left( 1 / (1 - \hat{F}(t_i)) \right) \right\} \right) \quad (26)$$

biçiminde üretilir ve bir  $x$ - $y$  grafiği üzerinde işaretlenir. Eşitlik 10'da verilen doğrusal regresyon denklemine göre eğer hata zamanları Weibull dağılmışsa, grafikte işaretlenen noktaların yaklaşık bir doğrusal hat takip etmeleri gerekir. Tablo 1'deki hata zamanları için  $(x, y)$  nokta çiftleri hesaplanarak Şekil 4'de işaretlenmiştir. Noktalar doğrusal bir hat etrafında toplandığından hata zamanlarının Weibull dağıldığı kabul edilmiştir; bu sonuç Mann yöntemininkiyle aynıdır. Şekil 4'teki hat, kolaylık açısından elle çizilmiştir, bu doğruyu üretmek için basit doğrusal regresyon da kullanılabilir.



Şekil 4. Weibull uyumluluk grafiği (Weibull goodness-of-fit graph)

Gözlemlerin Weibull uyumluluğu doğrulandıktan sonra bilgisayar arayüzünde en çok olabilirlik yöntemi seçilerek parametreler ve  $p=0.01$  ve  $p=0.10$  için yüzdeler tahmin edilmiş;  $R=100\,000$  seçilerek %95 ve %99 düzeylerinde parametreler için güven aralıkları ile yüzdeler için güven alt sınırları hesaplanmıştır. Sonuçlar Tablo 2'de özetlenmiştir.

Tablo 2 incelendiğinde parametreler için tahmin değerlerinin  $\hat{\alpha}=177.64$  ve  $\hat{\beta}=3.55643$  olduğu görülür; %95 düzeyinde  $\alpha$  için güven aralığı [142.044, 223.547] ve  $\beta$  için güven aralığı [1.7466, 5.17076] biçimindedir. Weibull alt yüzdelik tahmin değerleri ise  $\hat{t}_{0.1}=94.3485$  saat ve  $\hat{t}_{0.01}=48.7294$  saattir. Yorumlamak amacıyla  $\hat{t}_{0.1}$ 'i ele alalım. Eğer  $t_{0.1}=\hat{t}_{0.1}$

olsaydı,  $\hat{t}_{0.1}=94.3485$  saatten daha kısa sürelerde bir DC motorun hata yapma olasılığı 0.1 olacaktı. Diğer taraftan gerçek  $t_{0.1}$  değeri bu tahmin değerinden farklı olabilir. Bu fark  $n=10$  gibi küçük örnek hacimlerinde daha da büyük olma eğilimindedir. Güven alt sınırları bu probleme çözüm sağlar. Tablo 2'de %95 güven düzeyinde  $t_{0.1}$  için güven alt sınırının 51.922 saat olarak hesaplandığı görülmektedir. Dolayısıyla 0.95 olasılıkla  $t_{0.1}$ , 51.922 saatten büyüktür. Kritik parça uygulamalarında güven düzeyi %99'a çıkarılabilir. Bu durumda güven alt sınırının 36.0516 değerini düştüğü Tablo 2'de görülecektir.

Benzer hesaplamalar ağırlıklı en küçük kareler yöntemiyle de yapılmış, sonuçlar Tablo 3'te özetlenmiştir.

Bu örnek hesaplamada  $\hat{F}(t_{(i)})$  için Eşitlik 7c ile  $W(t_{(i)})$  için Eşitlik 11b seçilmiştir.

Tablo 2 ve 3'teki sonuçlar arasındaki farklılık akla hangi yöntemin daha iyi tahminçiler ve daha iyi güven aralıkları ürettiği sorusunu getirecektir. Bu konuda farklı performans kriterleri kullanılarak yapılan çalışmalar, en çok olabilirlik ve  $\hat{F}(t_{(i)})$  için Eşitlik

7c ile  $W(t_{(i)})$  için Eşitlik 11b seçilmesi kaydıyla ağırlıklı en küçük kareler yöntemlerinin en iyi performansı verdiğini göstermiştir [12, 13]. Dikkat edilecek olursa Tablo 2 ve 3'te bu iki yöntemin uygulaması yapılmıştır.

Tablo 2 ve 3'te bilgisayar işlem zamanını en çok alan kısımlar güven aralıklarının ve alt sınırlarının hesaplanmasıdır; benzetim tekrar sayısı ve örnek hacmiyle orantılı şekilde işlem süresi hızla artabilmektedir. Bu uygulamada kullanılan her bir tablodaki hesaplamalar PIV 3.00 Ghz işlemciye sahip bir bilgisayarda 5 saniyeden kısa sürelerde gerçekleşmiştir. Yapılan diğer uygulamalarda  $n=20$  ve  $R=500\,000$  alındığında bile hesaplamaların 1 dakikanın altında gerçekleştiği gözlenmiştir.

## 6. SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

Weibull dağılımının son yıllarda mühendislik alanlarındaki güvenilirlik çalışmalarının odak konularından birisi

Tablo 2. En çok olabilirlik yöntemiyle sonuçlar (Results from the maximum likelihood method)

| Tahmin Yöntemi             | $1-\gamma$ | $\hat{\beta}$ | $\hat{\alpha}$ | $\beta$ için G.A | $\alpha$ için G.A | $p$  | $\hat{t}_p$ | $t_p$ için Güven Alt Sınırı |
|----------------------------|------------|---------------|----------------|------------------|-------------------|------|-------------|-----------------------------|
| AĞIRLIKLI EN KÜÇÜK KARELER | 0.95       | 3.55643       | 177.64         | 1.7466           | 141.832           | 0.10 | 94.3485     | 51.922                      |
|                            |            |               |                | -                | 223.911           |      |             |                             |
|                            |            | 3.55643       | 177.64         | 1.75166          | 142.044           | 0.01 | 48.7294     | 16.022                      |
|                            |            |               |                | 5.15937          | 223.547           |      |             |                             |
|                            | 0.99       | 3.55643       | 177.64         | 1.38487          | 127.809           | 0.10 | 94.3485     | 36.0516                     |
|                            |            |               |                | -                | 248.888           |      |             |                             |
|                            |            | 3.55643       | 177.64         | 1.39314          | 127.419           | 0.01 | 48.7294     | 7.99687                     |
|                            |            |               |                | -                | 249.508           |      |             |                             |



**Tablo 3.** Ağırlıklı en küçük kareler yöntemiyle sonuçlar (Results from the weighted least squares method)

| Tahmin Yöntemi             | $1-\gamma$ | $\hat{\beta}$ | $\hat{\alpha}$ | $\beta$ için G.A        | $\alpha$ için G.A       | $p$  | $\hat{t}_p$ | $t_p$ için Güven Alt Sınırı |  |
|----------------------------|------------|---------------|----------------|-------------------------|-------------------------|------|-------------|-----------------------------|--|
| AĞIRLIKLI EN KÜÇÜK KARELER | 0.95       | 3.11708       | 177.033        | 1.89036<br>-            | 143.131<br>-            | 0.10 | 86.037      | 56.474                      |  |
|                            |            | 3.11708       | 177.033        | 5.76607<br>1.88885<br>- | 218.685<br>143.17<br>-  | 0.01 | 40.4695     | 18.831                      |  |
|                            | 0.99       | 3.11708       | 177.033        | 5.76993<br>1.48793<br>- | 218.546<br>129.869<br>- | 0.10 | 86.0037     | 40.0906                     |  |
|                            |            | 3.11708       | 177.033        | 6.76858<br>1.5053<br>-  | 241.188<br>130.176<br>- | 0.01 | 40.4695     | 10.1366                     |  |
|                            |            |               |                | 6.69466                 | 240.628                 |      |             |                             |  |

olması ve malzemelerin mekanik özelliklerinin modellenmesinin artan önemi bu konudaki çalışmalarda güvenilirlik analizini etkin ve kapsamlı şekilde gerçekleştiren bir bilgisayar programını gerekli kılmaktadır. Parametre ve yüzdeler için güven aralıkları ve güven alt sınırlarının belirlenmesi, mühendislik çalışmaları açısından oldukça önemlidir. Bu hesaplamalar, her aşaması Weibull parametre tahmini gerektiren karmaşık bir benzetim süreci içerir. Bu programın oluşturulması için bilimsel literatürde önerilen yöntemler değerlendirilerek bunların içinden en iyi uyumluluk testi, parametre tahmin yöntemleri ve güven aralığı yöntemleri seçilmiş, bunların algoritmaları standart C++ dilinde programlanmış ve ortak bir bilgisayar arayüzü altında bir araya getirilmiştir. Böylelikle parametre ve yüzdeler için benzetime dayalı kesin güven aralığı tahmin algoritmaları literatürde ilk kez aynı programlama diliyle bir ortak arayüz altında programlanarak kullanıma sunulmuştur.

Bilgisayar arayüzü gözlem değerlerini bir dosyadan okuyarak Weibull uyumluluk testi gerçekleştirmekte; ölçek ve şekil parametreleri ile kullanıcının belirleyeceği bir Weibull yüzdeliğini farklı yöntemlerden biriyle tahmin olanağı sunmakta; yine kullanıcının belirleyeceği güven düzeylerinde parametreler için güven aralıkları ve alt yüzdelik için güven aralıkları/alt sınırları oluşturmaktadır. Güven aralıkları, yaklaşık yöntemlerle değil benzetime dayalı kesin yöntemlerle oluşturulmaktadır. Özellikle küçük örnek hacimleri için kesin güven aralıkları oluşturulması son derece önemlidir, çünkü yaklaşık yöntemler örnek hacmi küçüldükçe giderek büyüyen tahmin hatalarına yol açmaktadır. Kesin yöntemlerin kullanımında ise benzetimden kaynaklanacak tahmin hataları oluşabilmektedir, bu hataların azaltılabilmesi için benzetim tekrar sayısının belirlenmesi kullanıcıya bırakılmıştır. Tekrar sayısı artırdıkça benzetim hatası azalacaktır.

Benzetim tekrar sayısı  $R=500\ 000$  gibi çok yüksek bir değer alındığında ve parça güvenilirliği analizlerinde orta büyüklükte bir örnek hacmi sayılacak  $n=20$  kullanıldığında bile güven aralığı/alt sınırı hesaplamaları PIV 3.00 Ghz hızlı bir işlemcide 1 dakikanın altında yapılabilmektedir. Bu, birçok mühendislik uygulaması için makul bir süredir. Sürekli artan bilgisayar işlemci hızları sayesinde bu sürenin zamanla daha da

azalması beklenmelidir. Dolayısıyla, yaklaşık ve kısıtlı sonuçlar üreten eski yöntemlere kıyasla benzetim kullanarak güven aralıkları ve alt sınırları üretmek daha pratik, esnek ve güvenilir bir yöntem haline gelmiştir.

Sonuç olarak geliştirilen algoritmalar, mühendisler başta olmak üzere Weibull dağılımıyla güvenilirlik analizi yapmak isteyen tüm kullanıcılar için kullanışlı ve kapsamlı analiz olanağı sağlamaktadır.

#### SEMBOLLER (NOMENCLATURE)

|                |   |
|----------------|---|
| $T$            | Hata Zamanı Rassal Değişkeni                  |
| $t$            | Hata Zamanı Gözlem Değeri                     |
| $F(t)$         | Birikimli Dağılım Fonksiyonu                  |
| $f(t)$         | Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu                  |
| $\alpha$       | Weibull Dağılımı Ölçek Parametresi            |
| $\beta$        | Weibull Dağılımı Şekil Parametresi            |
| $p$            | Hata Olasılığı                                |
| $\hat{F}$      | Birikimli Dağılım Fonksiyonu Tahmincisi       |
| $\hat{\alpha}$ | Weibull Dağılımı Ölçek Parametresi Tahmincisi |
| $\hat{\beta}$  | Weibull Dağılımı Şekil Parametresi Tahmincisi |
| $1-\gamma$     | Güven Düzeyi                                  |
| $W$            | Ağırlık Faktörü                               |
| $\varepsilon$  | Artık   |

#### KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Ebeling, C. E., **An Introduction to Reliability and Maintainability Engineering**, McGraw-Hill International Editions, Singapore, 1997.
2. Kolarik, W. J., **Creating Quality: Concepts, Systems Strategies and Tools**, McGraw-Hill, New York, 1995.
3. Mann, N. R., Schafer, R. E., Singpurwalla, N. D., **Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data**, John Wiley & Sons, New York, 1974.
4. Schildt, H., **Teach Yourself C++**, McGraw-Hill, 3rd ed., New York, 1997.
5. Weibull, W. "Investigations into Strength Properties of Brittle Materials", **Ingeniörs Vetenskaps Akademiens Handlingar**, Royal

- Swedish Institute for Engineering Research**, Stockholm, 27, 1938.
6. Thoman, D. R., Bain, L. J., Antle, C. E., "Inferences on the Parameters of the Weibull Distribution", **Technometrics**, 11(3), 445-460, 1969.
  7. Hallinan, Jr. A. J., "A Review of the Weibull Distribution", **Journal of Quality Technology**, 25(2), 85-93, 1993.
  8. Bain, L. J., **Statistical Analysis of Reliability and Life-Testing Models**, Marcel-Dekker, New York, 1978.
  9. Birgören, B., Dirikolu, M. H., "A Computer Simulation for Estimating Lower-Bound Fracture Strength of Composites Using Weibull Distribution", **Composites Part B: Engineering**, 35, 263-266, 2004.
  10. Fernandez-Saez, J., Chao, J., Duran, J., Amo, J., "Estimating Lower-Bound Fracture Parameters for Brittle Materials", **Journal of Materials Science Letters**, 12, 1493-1496, 1993.
  11. Barbero, E., Fernandez-Saez, J., Navarro, C., "Statistical Analysis of the Mechanical Properties of Composite Materials", **Composites Part B: Engineering**, 31, 375-381, 2000.
  12. Barbero, E., Fernandez-Saez, J., Navarro, C., "On the Estimation of Percentiles of the Weibull Distribution", **Journal of Materials Science Letters**, 18, 1441-1443, 1999.
  13. Birgören, B., "Estimating Confidence Lower-Bounds for Weibull Percentiles", **Journal of Materials Science Letters**, 22, 1121-1124, 2003.
  14. Ghosh, A., "A FORTRAN Program for Fitting Weibull Distribution and Generating Samples", **Computers & Geosciences**, 25, 729-738, 1999.
  15. Keats, J. B., Lawrence, F. P., "Weibull Maximum Likelihood Parameter Estimates with Censored Data", **Journal of Quality Technology**, 29(1), 105-110, 1997.
  16. Wasserman G. S., "Easy ML Estimation of Normal and Weibull Metrics", **Quality Engineering**, 12(4), 81-569, 2000.
  17. Birgören, B., "Effect of Sample Size and Distribution Parameters in Estimation of Confidence Lower Bounds for Weibull Percentiles", **Ceramics and Composite Materials: New Research**, Ed. B. M. Caruta, Nova Science Publishers, 2006.
  18. Law, A. M., Kelton, W. D., **Simulation Modeling and Analysis**, McGraw-Hill, New York, 2000.
  19. Bergman, B., "Estimation of Weibull Parameters Using a Weight Function", **Journal of Materials Science Letters**, 5, 611-614, 1986.
  20. Faucher, B., Tyson, W.R., "On the Determination of Weibull Parameter", **Journal of Materials Science Letters**, 7, 1199-1203, 1988.
  21. Hung, W.L., "Weighted Least-Squares Estimation of the Shape Parameter of the Weibull Distribution", **Quality and Reliability Engineering International**, 17, 467-469, 2001.
  22. Lawless, J. F., "**Statistical Models and Methods for Lifetime Data**", 2<sup>nd</sup> ed., John Wiley & Sons, New Jersey, 2003.